ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXXIII / 2003, s. 74–92*

Roman MURAWSKI

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Wydział Matematyki i Informatyki, Poznań

GŁÓWNE KONCEPCJE I KIERUNKI FILOZOFII MATEMATYKI XX WIEKU*

CZĘŚĆ I

1. POWSTANIE KIERUNKÓW KLASYCZNYCH

Filozofia matematyki weszła w XX wiek w atmosferze kryzysu. Był on związany przede wszystkim ze statusem i rolą obiektów abstrakcyjnych. W teorii mnogości stworzonej przez G. Cantora w ostatniej ćwierci XIX wieku wykryto antynomie. Pewne z nich znał już Cantor — na przykład antynomię zbioru wszystkich zbiorów czy antynomię zbioru wszystkich liczb porządkowych. Potrafił je jednak wyeliminować wprowadzając rozróżnienie pomiędzy klasami a zbiorami. Nowe trudności pojawiły się, gdy B. Russell wykrył w systemie logiki G. Fregego, do którego ten ostatni chciał zredukować arytmetykę liczb naturalnych, antynomię klas niezwrotnych (zwaną dziś antynomią Russella). Obok tego pojawiły się jeszcze tzw. antynomie semantyczne (G.D. Berry, K. Grelling).

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1] Artykuł powstał w oparciu o Wstęp do przygotowanej przeze mnie książki *Współczesna filozofia matematyki*, która ukazała się w Wydawnictwie Naukowym PWN, Warszawa, 2002.

W tej sytuacji powstała potrzeba znalezienia solidnego i pewnego fundamentu dla matematyki. Próby znalezienia takiego fundamentu i przezwyciężenia kryzysu doprowadziły m.in. do ukształtowania się nowych kierunków filozofii matematyki, a mianowicie logicyzmu, intuicjonizmu i formalizmu. Próbując zaradzić trudnościom ujawnionym przez kryzys odwoływano się oczywiście do pewnych wcześniejszych tendencji i osiągnięć matematyki, zwłaszcza matematyki XIX wieku. Szczególnie istotne były tu: samo powstanie teorii mnogości, arytmetyzacja analizy matematycznej (A. Cauchy, K. Weierstrass, R. Dedekind), aksjomatyzacja arytmetyki liczb naturalnych (G. Peano), powstanie geometrii nieeuklidesowych (N.I. Łobaczewski, J. Bolayi, C.F. Gauss) i pełna aksjomatyzacja systemów geometrii (M. Pasch, D. Hilbert), wreszcie powstanie i szybki rozwój logiki matematycznej (G. Boole, A. de Morgan, G. Frege, B. Russell).[2] Nowe kierunki filozofii matematyki szukały odpowiedzi na pytanie o solidne, pewne i bezpieczne podstawy matematyki przede wszystkim w logice matematycznej i teorii mnogości.

1.1. LOGICYZM

Logicyzm,[3] który został zapoczątkowany przez G. Fregego, a rozwinięty przez B. Russella i A.N. Whiteheada, wyrósł z żywej w XIX wieku tendencji tzw. arytmetyzacji analizy matematycznej, której celem było pokazanie, że cała teoria liczb rzeczywistych leżąca u podstaw analizy da się wyprowadzić z arytmetyki liczb naturalnych. Realizacja tego zadania postawiła nowy problem, a mianowicie oparcie arytmetyki liczb naturalnych (a w konsekwencji całej właściwie matematyki) na jakiejś prostszej, bardziej elementarnej teorii. Zadania tego podjął się właśnie G. Frege poprzez redukcję arytmetyki do lo-

[2]Osiągnięcia te doprowadziły też na progu XX wieku do radykalnej zmiany kształtu matematyki, a więc do powstania nowego paradygmatu matematyki, zwanego paradygmatem logiczno-teoriomnogościowym (por. Batóg, 1996).

[3]Dokładne informacje na temat logicyzmu i pozostałych kierunków klasycznych, ich rozwoju i znaczenia znaleźć można na przykład w książce R. Murawskiego *Filozofia matematyki. Zarys dziejów* – — zob. Murawski (1995).

giki, a następnie, po wykryciu sprzeczności systemu logiki Fregego, A.N. Whitehead i B. Russell, którzy pokazali, jak można całą matematykę zredukować do tzw. teorii typów. W ten sposób powstał logicyzm, którego główną tezę można sformułować jako stwierdzenie, że matematyka jest redukowalna do logiki, czyli że matematyka jest jedynie częścią logiki. W konsekwencji twierdzenia matematyki mają jednoznacznie wyznaczoną treść i jest to treść logiczna. Są one — podobnie jak zdania logiki — zdaniami analitycznymi. Pewne trudności techniczne związane z taką redukcją (w szczególności konieczność korzystania z pewnych aksjomatów nie mających charakteru czysto logicznego, jak na przykład aksjomat nieskończoności czy aksjomat redukowalności), na które natrafili Whitehead i Russell, spowodowały, że dziś logicyzm funkcjonuje jako teza o sprowadzalności matematyki do logiki i teorii mnogości.

1.2. INTUICJONIZM

Drugi główny kierunek w filozofii matematyki powstały na przełomie wieków to intuicjonizm stworzony przez L.E.J. Brouwera. U jego podstaw legły pewne koncepcje, które pojawiły się w pracach L. Kroneckera, H. Poincarégo oraz grupy matematyków francuskich, zwanej paryską szkołą intuicjonizmu (w skład tej grupy wchodzili m.in. R. Baire, E. Borel, H. Lebesgue i N.N. Łuzin). Zasadnicze poglądy Brouwera i intuicjonizmu można scharakteryzować w sposób następujący. Otóż intuicjonizm przeciwstawia się platonizmowi i głosi ontologiczną tezę konceptualizmu, zgodnie z którą matematyka jest funkcją intelektu ludzkiego i wolną życiową aktywnością rozumu. Obiekty badane przez matematykę to pojęcia istniejące w umyśle. U podstaw matematyki leży fundamentalna intuicja liczby naturalnej związana z intuicją apriorycznego czasu (widać tu wyraźne związki z filozofią Kanta). W konsekwencji zatem w matematyce istnieje tylko to, co konstruowalne przez umysł, należy więc odrzucić metodę aksjomatyczną jako metodę budowania i ugruntowywania matematyki, gdyż postuluje ona tylko istnienie obiektów o danych własnościach, a należy je przecież skonstruować. Intuicjoniści odrzucają też istnienie nieskończoności aktualnej i zbiorów nieprzeliczalnych, zbiór nieskończony można bowiem według nich rozumieć jedynie jako prawo czy regułę tworzenia wciąż nowych jego elementów, a taki zbiór jest zawsze przeliczalny (i jest nieskończonością potencjalną tylko). Konsekwencją przyjęcia konceptualizmu jest także odrzucenie tzw. dowodów niekonstruktywnych dla stwierdzeń egzystencjalnych (w szczególności dowodów nie wprost) jako nie podających konstrukcji postulowanych obiektów. Intuicjoniści twierdzą też, że logika jest czymś wtórnym w stosunku do matematyki, że to logika opiera się na matematyce a nie na odwrót (jak chcą logicyści). Głoszą oni też, iż wszelkie konstrukcje matematyczne są niezależne od jakiegokolwiek języka. Język służy jedynie do komunikowania innym swych konstrukcji matematycznych. Intuicjoniści podjęli też próby rekonstrukcji istniejącej matematyki na bazie głoszonych tez filozoficznych. Doprowadziły one do powstania matematyki intuicjonistycznej, która jest dużo uboższa i bardziej skomplikowana niż matematyka klasyczna.

1.3. FORMALIZM

Trzecim klasycznym kierunkiem współczesnej filozofii matematyki jest formalizm stworzony przez D. Hilberta. Hilbert przeciwstawił się próbom ratowania matematyki poprzez rezygnację z pewnych jej działów i metod prowadzących do trudności (w szczególności tych operujących nieskończonością aktualną). Podjął natomiast próbę usprawiedliwienia i ugruntowania nieskończoności aktualnej, która odgrywa w matematyce tak istotną rolę (Hilbert pisał w (1926): „Z raju, który stworzył nam Cantor, nikt nie powinien móc nas wypędzić”). Chciał dokonać tego za pomocą metod finitystycznych, a więc odwołujących się do konkretnych obiektów stanowiących punkt wyjścia matematyki. Są nimi liczby naturalne rozumiane jako liczebniki (układy znaków). Są one dane bezpośrednio i jasno. Nieskończoność aktualna zaś jest jedynie ideą rozumu w sensie Kanta, a więc pojęciem, dla którego nie da się znaleźć rzeczowej podstawy, gdyż przekracza ono wszelkie doświadczenie. Hilbert zaproponował (program ten nazywa się dziś programem Hilberta), by ugruntować matematykę operującą pojęciem nieskończoności aktualnej (czyli, stosując terminologię Hilberta, matematykę infinitystyczną) poprzez jej formalizację, czyli przedstawienie jej jako systemu sformalizowanego (czy jako zespołu systemów sformalizowanych), a następnie badanie systemów sformalizowanych jako systemów znaków-napisów (a więc, ‚konkretnych i widzialnych przedmiotów”), którymi rządzą określone reguły odwołujące się jedynie do kształtu (formy) napisów a nie do ich treści czy znaczenia. Badania takie można prowadzić metodami finitystycznymi, czyli bezpiecznymi. W szczególności należało pokazać, że matematyka infinitystyczna jest niesprzeczna, tzn., że nie można zbudować dwóch dowodów (czyli dwóch ciągów formuł, a zatem dwóch ciągów symboli) kończących się formułami wzajemnie sprzecznymi. Hilbert stworzył nawet specjalną teorię matematyczną, która miała zajmować się takimi badaniami — nazywa się ją teorią dowodu. Należy tu jeszcze dodać, że Hilbert traktował formalizację tylko jako zabieg metodyczny, jako narzędzie służące realizacji programu ugruntowania matematyki klasycznej. Hilbert nigdy nie twierdził, że matematyka jest systemem sformalizowanym — dla niego była to tylko rekonstrukcja istniejącej matematyki dokonywana w pewnym określonym celu.

2. OKRES OD 1931 DO KOŃCA LAT PIĘĆDZIESIĄTYCH

W 1931 roku opublikowana została praca młodego naówczas matematyka i logika wiedeńskiego Kurta Gödla (por. Gödel, 1931). Miała ona okazać się rewolucyjna i przełomowa w zakresie podstaw i filozofii matematyki. Udowodnione w niej twierdzenia o niezupełności wskazywały na pewną ograniczoność poznawczą metody aksjomatycznej. W szczególności pokazywały one, że nie można w sposób zupełny zaksjomatyzować nawet arytmetyki liczb naturalnych ani żadnej teorii bogatszej (a było to na przykład wymagane w programie Hilberta) oraz że nie istnieją absolutne dowody niesprzeczności teorii matematycznych.[4] Biorąc pod uwagę to, że jednym z zasadniczych celów powstałych na przełomie wieków kierunków filozofii matematyki omówionych powyżej była właśnie niesprzeczność matematyki i uwolnienie jej od antynomii, widzimy, że wyniki Gödla stanowiły dla nich pewnego rodzaju, ‚cios". Istotnie, po roku 1931 zaobserwować się daje pewien zastój w filozofii matematyki trwający do końca lat pięćdziesiątych. Powstają co prawda w tym okresie nowe koncepcje, ale nie są one już tak znaczące jak logicyzm, intuicjonizm czy formalizm. Powiedzieć należy tu przede wszystkim o pracach Willarda Van Ormana Quine'a, Ludwiga Wittgensteina i Kurta Gödla.

2.1. FILOZOFIA MATEMATYKI QUINE'A

W.V.O. Quine zajmował się filozofią nauki, był autorem wielu prac z zakresu semiotyki oraz twórcą oryginalnego ujęcia logiki i teorii mnogości opartego na założeniach logicystycznych. W zakresie filozofii matematyki Quine głosił, że kryteria akceptacji czy odrzucania teorii matematycznych są analogiczne, jak dla teorii fizycznych. Zdając sobie oczywiście sprawę z tego, że w matematyce nie ma eksperymentów, podkreślał, iż matematykę należy rozważać nie w oderwaniu od innych nauk, ale jako element ogółu teorii wyjaśniających rzeczywistość (por. Quine 1951a, 1951b, 1953). Takie holistyczne spojrzenie na naukę prowadziło Quine'a do sformułowania tzw. argumentu z niezbędności (*indispensability argument*) będącego we współczesnych dyskusjach na temat ontologii matematyki jednym z najważniejszych argumentów na rzecz realizmu. Głosi on, że jeśli jesteśmy realistami w stosunku do teorii fizycznych posługujących się matematyką jako narzędziem, to konsekwentnie powinniśmy przyjąć też stanowisko realistyczne w odniesieniu do obiektów matematycznych, o których mowa w teorii. Skoro matematyka jest niezbędna na przykład w teoriach fizycznych, więc istnieją jej obiekty takie, jak zbiory, liczby, funkcje itd. – podobnie jak istnieją na przykład elektrony (jako

[4]Na temat twierdzeń Gödla i ich konsekwencji zob. na przykład Murawski (1990, 1999).

jedne z obiektów fizyki niezbędnych do jej uprawiania). Quine przyjmuje bowiem tylko jeden sposób istnienia. Nie mamy więc u niego do czynienia z istnieniem fizycznym, matematycznym, intencjonalnym, konceptualnym itp., tylko po prostu z istnieniem. Odrzuca też możliwość podziału teorii naukowych na część analityczną (czysto konwencjonalną) i syntetyczną (dotyczącą rzeczywistości). Zauważmy, że oparcie się na argumencie z niezbędności pozwala na naturalne wyjaśnienie faktu stosowalności matematyki do opisu i wyjaśniania świata rzeczywistego. Matematyka jako narzędzie wchodzi bowiem po prostu w skład konstruowanych teorii o świecie.

Dodajmy, że stanowisko podobne do stanowiska Quine'a reprezentuje również Hilary Putnam (por. Putnam, 1975). Stąd też argument z niezbędności nazywa się często w literaturze argumentem Quine'a-Putnama. Zauważmy też, że Quine odrzucając podejście antyrealistyczne i antyempirystyczne w filozofii matematyki utorował w jakimś sensie drogę podejściu empirystycznemu. Przykładem takiego podejścia może być quasi-empiryzm Putnama (będzie o nim mowa poniżej w części II artykułu).

2.2. FILOZOFIA MATEMATYKI WITTGENSTEINA

Przystępując do omawiania poglądów Wittgensteina z zakresu filozofii matematyki powiedzmy od razu, że trudno o ich jednoznaczną prezentację i ocenę. Źródłem tych trudności jest przede wszystkim sposób pisania Wittgensteina: wieloznaczny, nieprecyzyjny, aforystyczny i lakoniczny (jak na przykład w *Traktacie*) , czy też, zwłaszcza w dziełach późniejszych, polegający na nieustannym podważaniu własnych twierdzeń i sformułowań. Stąd rozmaitość interpretacji jego poglądów. I tak filozofię matematyki Wittgensteina uważa się na przykład za wyraz skrajnego konwencjonalizmu (M. Dummett), za postać behawioryzmu (P. Bernays) czy za skrajny finityzm (G. Kreisel).

Wittgenstein nie pozostawił żadnego wykończonego traktatu na temat matematyki. Poglądy swe zawarł w licznych uwagach czynionych w różnych okresach życia — uwagach nieraz w istotny sposób z sobą niezgodnych. Znajdujemy je przede wszystkim w zakończeniu opublikowanego pośmiertnie dzieła *Philosopical Investigations* (1953) oraz w wydanych także po śmierci z jego spuścizny rękopiśmiennej *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956). Wittgenstein zaczął od rozważania języka jako zbioru zdań odwzorowujących stany rzeczy, z których zbudowany jest świat, rozumiany jako model semantyczny (por. *Tractatus*) . Ten świat (ogół faktów) ma granice wyznaczone przez granice języka. Wittgenstein wyraźnie odgraniczał tu zdania opisowe, denotujące stany rzeczy, od wyrażeń formalnych logiki i matematyki. Te ostatnie uważał za formy dowodu wyznaczone przez reguły logicznej składni języka. Twierdził, że w logice czynność i jej wynik są równoznaczne, a w matematyce widział jedynie, ‚metodę logiczną". Ową operacjonistyczną interpretację zdań logiki i matematyki zastosował w swej późniejszej filozofii do wszelkich wyrażeń językowych, traktując fenomen posługiwania się językiem jako swoistą formę bycia człowieka w świecie. Takie rozumienie języka wyraźnie odbija kluczowy dla semiotyki Wittgensteina termin, ‚gra językowa". W (1953) pisał:, ‚Istnieje *niezliczona* ich [rodzajów zdań] ilość: niezliczona ilość sposobów użycia tego wszystkiego, co zwiemy 'znakiem', 'słowem', 'zdaniem'. I mnogość ta nie jest czymś stałym, raz na zawsze danym; powstają bowiem, można rzec, nowe typy języka, nowe gry językowe, a inne stają się przestarzałe i idą w zapomnienie. (*Pewien* przybliżony *obraz* tego dać mogą przemiany matematyki.)" (I. 23, s. 20). Właśnie pytanie o sens i funkcję zdań matematyki czystej niepokoiło Wittgensteina przez długie lata. Interesował go tu sens, ‚gier językowych" w matematyce oraz status epistemologiczny poznania matematycznego. Przy czym w poszukiwaniach swoich kładł główny nacisk na analizę procesu poznania w matematyce (łatwo tu dostrzec pewną zbieżność z Brouwerem). Wittgenstein występował zdecydowanie przeciwko logicyzmowi, w szczególności przeciw podejmowanym przez Russella próbom zredukowania arytmetyki (i całej matematyki) do logiki. Uważał, że gubi się w ten sposób twórczy charakter dowodu matematycznego i wielość technik jego przeprowadzania. Dowód matematyczny nie jest redukowalny do aksjomatów i reguł wnioskowania rachunku logicznego, gdyż sam jest regułą konstrukcji nowego pojęcia (por. Wittgenstein, 1956, III. 41, s. 141). Logicyzm przypisuje logice funkcję podstawową w matematyce, podczas gdy w rzeczywistości pełni ona rolę tylko pomocniczą. Mówi więc tu Wittgenstein o, ‚zgubnym wtargnięciu logiki na teren matematyki”. Podkreśla jednocześnie swoistość i niezależność poznania matematycznego w stosunku do logiki. Uważa też, że twierdzenia matematyki mają charakter sądów apriorycznych, są syntetyczne i konstruktywistyczne. Dostrzegamy więc tu wyraźną zbieżność z koncepcjami Kanta i Brouwera. Podobnie jak Kant, podkreśla też Wittgenstein cechę konieczności przysługującą poznaniu matematycznemu. W (1956) pisze: „Matematyczna konieczność jest tylko innym wyrażeniem tego, że matematyka tworzy pojęcia” (VII. 67, s. 194). Matematyk więc tworzy w szczególności liczby i ich ciągi a nie odkrywa ich. W przeciwieństwie do Kanta jednak sądzi Wittgenstein, że niesprzeczność nie jest *a priori* niezbędnym warunkiem sensowności konstrukcji pojęciowej. Podważa też, podobnie jak Brouwer, zasadność stosowania zasady wyłączonego środka do twierdzeń dotyczących nieuporządkowanych zbiorów nieskończonych. Wittgenstein kładzie duży nacisk na spontaniczność twórczości matematyka i wielość operacji stwarzających formy naszych, ‚gier językowych”.

2.3. FILOZOFIA MATEMATYKI GÖDLA

Poglądy filozoficzne K. Gödla na matematykę pozostawały w ścisłym związku z jego wynikami formalnymi w logice matematycznej i podstawach matematyki. Niemniej jednak miała miejsce i odwrotna zależność, tzn. jego poglądy filozoficzne stanowiły inspirację dla badań formalnych. W jednym z listów do Hao Wanga napisał Gödel: „Moja obiektywistyczna koncepcja matematyki i metamatematyki [...], miała fundamentalne znaczenie dla moich prac z zakresu logiki” (por. Wang Hao, 1974, s. 9).

Główne prace Gödla, które pozwalają ustalić jego poglądy filozoficzne to przede wszystkim dwa artykuły:, ‚Russell’s mathematical logic” (1944) oraz, ‚What is Cantor’s continuum problem?” (1947, wersja poprawiona i rozszerzona — 1964). Pomocne w zrozumieniu jego poglądów mogą też być trzy jego prace opublikowane dopiero pośmiertnie, tzn.:, ‚Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications” (1951),, ‚Is mathematics a syntax of language?” (1953) oraz, ‚The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy” (1970).

Stanowisko filozoficzne Gödla można określić jako realizm, dokładniej platonizm. Gödel twierdził, że przedmioty matematyki istnieją realnie poza czasem i przestrzenią, niezależnie od poznającego podmiotu (aczkolwiek niegdzie nie wyjaśnił, czym one są i jak istnieją). Teza taka jest według niego niezbędna, by otrzymać zadowalający system matematyki, tak samo, jak przyjęcie realnego istnienia obiektów fizycznych jest potrzebne do wyjaśnienia wrażeń zmysłowych. Gödel mocno podkreślał też analogię między logiką i matematyką a naukami przyrodniczymi (odwołując się tu do Russella).

Gödel twierdził, że, ‚logika i matematyka (tak jak fizyka) są oparte na aksjomatach o rzeczywistej treści (with a real content)” (1944, s. 139). Według niego twierdzenia matematyczne są prawdziwe na mocy, ‚znaczenia używanych w nich pojęć” (choć samo to znaczenie może być niedefiniowalne, tzn. nieredukowalne do czegoś bardziej fundamentalnego), odrzuca natomiast tezę o prawdziwości twierdzeń matematyki na podstawie konwencji czy na mocy reguł językowych. Matematyka ma treść, na którą składają się fakty matematyczne (por. Gödel, 1953, s. 358).

Obiekty matematyczne są według Gödla czymś różnym od swej reprezentacji w teoriach matematycznych, są w stosunku do nich transcendentne — zauważmy tu związek z filozofią Kanta (*Ding an sich*) . Wynika to z ich obiektywnego istnienia. Aksjomaty opisują jedynie część własności obiektów matematycznych. W odróżnieniu jednak od Kanta, Gödel twierdził, że podmiot poznający nie dodaje nic do poznawanych obiektów. Gödel przedstawiał i wyjaśniał swe poglądy filozoficzne na matematykę przede wszystkim w związku z problemami teorii mnogości, a w szczególności w związku z problemem kontinuum. Jako realista był przekonany, że hipoteza kontinuum ma ściśle określoną wartość logiczną, tzn. jest prawdziwa lub fałszywa (choć nie potrafimy tego obecnie rozstrzygnąć). Gödel postulował więc istnienie pewnego absolutnego uniwersum zbiorów, które staramy się opisać za pomocą aksjomatów teorii mnogości. To, że nie potrafimy na podstawie przyjmowanych aksjomatów ani udowodnić, ani obalić hipotezy kontinuum świadczy tylko o tym, że aksjomaty te, ‚nie zawierają pełnego opisu tej rzeczywistości" (1947). Stąd konieczność przyjęcia (czy właściwie konieczność ciągłego przyjmowania) nowych aksjomatów w matematyce, w szczególności nowych aksjomatów teorii mnogości (czyli pewnych nowych zdań stwierdzających własności uniwersum wszystkich zbiorów) potrzebnych po to, by rozstrzygnąć hipotezę kontinuum. Gödel postulował tu badanie nowych silnych aksjomatów nieskończoności postulujących istnienie dużych liczb kardynalnych. Twierdził też, że mogą z nich wynikać nie tylko pewne wnioski dotyczące hipotezy kontinuum, ale również nowe interesujące konsekwencje arytmetyczne (choć matematyka nie nauczyła się jeszcze korzystać z silnych aksjomatów teorii mnogości dla rozwiązywania problemów teorii liczb — por. Gödel, 1951, s. 307). Poszukując rozwiązania problemu kontinuum, Gödel postulował też rozważanie aksjomatów opartych na zupełnie innych ideach niż dotychczas przyjmowane. Aksjomaty takie nie muszą być bezpośrednio oczywiste. Jeśli chodzi o kwestie epistemologiczne, to Gödel twierdził, że podstawowym źródłem wiedzy matematycznej jest intuicja. Choć obiekty teorii mnogości są tak odległe od doświadczenia zmysłowego, to jednak w jakiś sposób postrzegamy je. Pisał: „Nie widzę żadnych racji, dla których mielibyśmy mieć mniejsze zaufanie do tego rodzaju percepcji, tzn. do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która skłania nas do budowania teorii fizycznych i do oczekiwania, że przyszłe dane zmysłowe będą z nimi zgodne oraz do wiary w to, że pytania, które są teraz nierozstrzygalne, zostaną być może rozstrzygnięte w przyszłości" (1947).

Intuicja matematyczna wystarcza do wyjaśnienia i ugruntowania prostych pojęć i aksjomatów. Nie musi być ona pojmowana jako dająca nam wiedzę matematyczną bezpośrednią i natychmiastową. Dane intuicji mogą być rozwijane poprzez głębsze badanie obiektów, które może doprowadzić do przyjęcia nowych stwierdzeń jako aksjomatów. Na skutek tego wiedza matematyczna nie jest tylko wynikiem biernej kontemplacji danych intuicyjnych, ale jest rezultatem aktywności umysłu, która ma charakter dynamiczny i kumulatywny.

Nasza intuicja matematyczna rozwija się dzięki analizie pojęć i uprawianiu matematyki. Właśnie analiza pojęć jest fundamentem naszej działalności matematycznej. Szczególnie istotna jest tu analiza pojęcia zbioru. Głębsze jego zrozumienie może nam umożliwić fenomenologia. Gödel mniej więcej od 1959 roku interesował się Husserlem i jego fenomenologią. Miało to prawdopodobnie wpływ na jego teorię intuicji matematycznej. Dodajmy też, że Gödel nigdzie nie wyjaśnił dokładnie, jak rozumie intuicję matematyczną. Dlatego jej interpretacja nastręcza pewne trudności (por. Parsons, 1998).

Intuicja daje nam wiedzę o prostych pojęciach i aksjomatach. Założenia bardziej teoretyczne i złożone mogą być usprawiedliwione niejako z zewnątrz, tzn. poprzez swoje konsekwencje, czyli poprzez to, że pozwalają rozwiązywać problemy dotąd nie rozwiązane, że pozwalają na wyciąganie różnych interesujących wniosków, czy że umożliwiają uproszczenie dowodów. Zatem decydująca jest tu niejako ich owocność. Przy czym Gödel ma tu na myśli konsekwencje zarówno w samej matematyce, jak i w fizyce. Jest to drugie, obok intuicji, kryterium prawdziwości zdań matematycznych.

3. WPŁYW FILOZOFII NA PODSTAWY MATEMATYKI

Wyżej pisaliśmy o znaczeniu i wpływie osiągnięć logiki matematycznej na powstanie i rozwój koncepcji w filozofii matematyki, w szczególności klasycznych koncepcji współczesnej filozofii matematyki, tzn. logicyzmu, intuicjonizmu i formalizmu. Zauważyć się jednak daje także zależność przeciwna — różne koncepcje w zakresie filozofii matematyki wpływały (i dalej wpływają) inspirująco na rozwój istotnych i głębokich badań nad samą logiką i podstawami matematyki. Tak było w szczególności po roku 1931, kiedy to filozofia matematyki nie rozwijała się wprawdzie jako taka, ale inspirowała badania w logice i podstawach matematyki.

Pod patronatem logicyzmu i platonizmu powstała i rozwinęła się semantyka teoriomnogościowa stworzona przez Alfreda Tarskiego. Dała ona początek ważnemu działowi podstaw matematyki, a mianowicie teorii modeli. Teoria ta stanowi dziś jedno z podstawowych narzędzi badania języków elementarnych i infinitystycznych oraz badania teorii i struktur matematycznych. Wyrosła ona z rozważań Tarskiego nad pojęciem prawdy i oparta jest na jego definicji pojęcia spełniania (por. Tarski, 1933).

Bardzo intensywnie rozwijała się też zapoczątkowana przez Hilberta — w związku z doktryną formalizmu — teoria dowodu, czyli metamatematyka finitystyczna. Wyniki Gödla o niezupełności, o których mówiliśmy wyżej, pokazały, że programu Hilberta nie da się zrealizować w jego pierwotnej postaci. Nie obaliły one jednak samej filozofii Hilberta. W tej sytuacji badania poszły w dwóch kierunkach: z jednej strony badano jakie środki, niekoniecznie już tylko finitystyczne, są potrzebne i wystarczą do wykazania niesprzeczności różnych teorii matematycznych, a z drugiej dla jakich fragmentów matematyki klasycznej możliwa jest redukcja finitystyczna (skoro, jak pokazał Gödel, nie jest ona możliwa dla całej matematyki klasycznej). Pierwsze z tych podejść zwie się dziś uogólnionym, drugie zaś zrelatywizowanym programem Hilberta.

Wydaje się, że pierwszym, który skłonny był dopuścić nie tylko metody finitystyczne, ale ogólnie metody konstruktywistyczne (abstrahujemy tu od niejasności i niejednoznaczności tego pojęcia) był P. Bernays, a pierwszym znaczącym wynikiem w tym kierunku był dowód G. Gentzena (z roku 1936) niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych za pomocą indukcji pozaskończonej do liczby ϵ 0. Badania te rozwinęły się w rozbudowany dzisiaj dział logiki matematycznej i podstaw matematyki, zwany teorią dowodu.

Drugie podejście, tzn. zrelatywizowany program Hilberta, uzyskało w ostatnich latach silny impuls ze strony tzw. matematyki odwrotnej — mówimy o tym dokładniej w części II niniejszego artykułu (por. też Murawski, 1993).

Pod wpływem doktryny intuicjonistycznej rozwijały się różne systemy matematyki konstruktywistycznej i rozmaite nurty konstruktywizmu. Prowadzono też (i nadal się prowadzi) intensywne badania nad matematyką i logiką intuicjonistyczną. Dodajmy, że w ostatnich latach badania te zyskały silny impuls — okazało się mianowicie, że logika intuicjonistyczna jest bardzo użytecznym narzędziem w informatyce teoretycznej.

LITERATURA CYTOWANA

Batóg, T.

[1996], *Dwa paradygmaty matematyki. Studium z dziejów ifilozofii matematyki*, Wyd. Nauk. UAM, Poznań (wyd. II: 2000).

Gödel, K.

[1931], Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme. I, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, 173-198. Przedruk wraz z tłumaczeniem angielskim: „On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems' w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. I, ed. by Feferman, S. *et al.*, Oxford University Press, New York and Clarendon Press, Oxford,1986, 144-195.

Gödel, K.

[1944], Russell's mathematical logic, w: Schilpp, P.A. (Ed.) *The Philosophy of Bertrand Russell*, Northwestern University, Evanston, 123-153. Przedrukowane w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. II, ed. by Feferman, S. *et al.* , Oxford University Press, New York and Oxford, 1990, 119-141. Przekład polski: „Logika matematyczna Russella" w: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2002.

Gödel, K.

[1947], What is Cantor's continuum problem?, *The American Mathematical Monthly* 54, 515-525. Wersja rozszerzona w: P. Benacerraf, H. Putnam (Eds.), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964, 258-273. Przedrukowane także w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. II, ed. by Feferman, S. *et al.*, Oxford University Press, New York and Oxford, 1990, 176-187 (wersja z roku 1947) oraz 254—270 (wersja z roku 1964). Przekład polski: „Co to jest Cantora problem kontinuum?" w: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2002.

Gödel, K.

[1951], Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications; po raz pierwszy opublikowane w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. III, ed. by Feferman, S. *et al.*, Oxford University Press, New York and Oxford 1995, 304-323.

Gödel, K.

[1953], Is mathematics a syntax of language?; po raz pierwszy opublikowane w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. III, ed. by Feferman, S. *et al.*, Oxford University Press, New York and Oxford 1995, 334-356 (wesja III) oraz 356-362 (wersja V).

Gödel, K.

[1970], The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy; po raz pierwszy opublikowane (tekst niemiecki wraz z tłumaczeniem angielskim) w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. III, ed. by Feferman, S. *et al.*, Oxford University Press, New York and Oxford 1995, 374-387.

Hilbert, D.

[1926], Über das Unendliche, *Mathematische Annalen* 95, 161-190. Przekład polski: „O nieskończoności" w: R. Murawski (red.), *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wyd. Nauk. UAM, Poznań 1986 (wyd. II: 1994).

Murawski, R.

[1990], *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Wyd. Nauk. UAM, Poznań (wyd. II: 1991, wyd. III: 2000).

Murawski, R.

[1993], Rozwój programu Hilberta, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, Seria II: Wiadomości Matematyczne 30, 51-72.

Murawski, R.

[1995], *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa (wyd. II: 2001).

Murawski R.

[1999], *Recursive Functions and Metamathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.

Parsons, Ch.

[1998], Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought, *Bulletin of Symbolic Logic* 1, 44-74.

Putnam H.

[1975], What is mathematical truth?, w: Putnam, H., *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers*, vol. I, Cambridge University Press, Cambridge-London-New York-Melbourne, 60-78. Przekład polski: „Czym jest prawda matematyczna?" w: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2002.

Quine, W.V.O.

[1951]a, Two dogmas of empiricism, *Philosophical Review* 60/1, 20-43. Także w: Quine W.V.O., *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1953, 20-46. Przekład polski: „Dwa dogmaty empiryzmu" w: W.V.O. Quine, *Z punktu widzenia logiki. Eseje logiczno-filozoficzne*, PWN, Warszawa 1969, 35-70.

Quine, W.V.O.

[1951]b, On Carnap's views on ontology, *Philosophical Studies* 2. Przekład polski: „O poglądach Carnapa na ontologię" w: Stanosz B. (red.), *Emiryzm współczesny*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 163-172.

Quine, W.V.O.

[1953], On what there is, w: Quine W.V.O., *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1-19. Przekład polski: „O tym, co istnieje" w: W.V.O. Quine, *Z punktu widzenia logiki. Eseje logiczno-filozoficzne*, PWN, Warszawa 1969, 9-34.

Tarski, A.

[1933], *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Nakładem Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Warszawa.

Wang Hao

[1974], *From Mathematics to Philosophy*, Routledge and Kegan Paul, London.

Wittgenstein, L.

[1922], *Tractatus logico-philosopicus*, New York-London. Przekład polski: *Tractatus logico-philosophicus*, PWN, Warszawa 1970, wydanie II: Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 1997.

Wittgenstein, L.

[1953], *Philosopical Investigations*, Basil Blackwell, Oxford. Przekład polski: *Dociekania filozoficzne*, PWN, Warszawa 1972.

Wittgenstein, L.

[1956], *Remarks on the Foundations of Matematics*, Basil Blackwell, Oxford. Przekład polski: *Uwagi o podstawach matematyki*, Wydawnictwo KR, Warszawa 2000.