ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXXIV / 2004, s. 22–45*

Roman MURAWSKI

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Wydział Matematyki i Informatyki, Poznań

GŁÓWNE KONCEPCJE I KIERUNKI FILOZOFII MATEMATYKI XX WIEKU[1]

CZĘŚĆ II

Od początku lat sześćdziesiątych zauważyć się daje wyraźny renesans zainteresowań filozofią matematyki. Nadal dominują logicyzm, intuicjonizm i formalizm, ale pojawiają się również zupełnie nowe koncepcje — oparte na innych założeniach i stawiające sobie inne cele.

1. ROZWÓJ KIERUNKÓW KLASYCZNYCH

Intuicjonizm i formalizm pozostały w zasadzie wierne poglądom i ideom swych twórców, aczkolwiek rozwój logiki matematycznej i podstaw matematyki oraz uzyskane tam wyniki nie pozostały obojętne dla kształtu tych kierunków. Wyżej wspominaliśmy[2] o tym, że pod wpływem wyników Gödla o niezupełności powstał tzw. uogól-

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1] Artykuł powstał w oparciu o Wstęp do przygotowanej przeze mnie książki *Współczesna filozofia matematyki,* która ukazała się w Wydawnictwie Naukowym PWN (2002).

[2] W pierwszej części artykułu, która ukazała się w poprzednim numerze *Zagadnień Filozoficznych w Nauce* (34, 2003, 74-92).

niony i zrelatywizowany program Hilberta. Ten drugi uzyskał w ostatnim czasie bardzo silny impuls ze strony tzw. matematyki odwrotnej. Jest to kierunek badań w podstawach matematyki (zainicjowany przez H. Friedmana), którego zasadniczym celem jest badanie, jakie dokładnie środki (precyzyjniej: jakie fragmenty arytmetyki drugiego rzędu) są potrzebne i wystarczą do udowodnienia konkretnych twierdzeń matematycznych. Uzyskane w tym zakresie wyniki w połączeniu z wynikami mówiącymi o zachowawczości odpowiednich fragmentów arytmetyki drugiego rzędu w stosunku do matematyki pierwotnie rekurencyjnej (która wydaje się być adekwatnym ujęciem nieprecyzyjnego pojęcia finitystyczności odgrywającego kluczową rolę u Hilberta) względem pewnych klas formuł prowadzą do wniosku, że program Hilberta może być częściowo zrealizowany — częściowo, tzn. w odniesieniu do pewnego fragmentu matematyki klasycznej.

Pod wpływem intuicjonizmu rozwijały się różne kierunki konstruktywistyczne (powstały one nie tylko po roku 1960, pewne idee funkcjonowały oczywiście wcześniej). Korzystały one także bardzo mocno z osiągnięć logiki matematycznej i podstaw matematyki, w szczególności z teorii funkcji rekurencyjnych. Dodatkowego impulsu dostarczał tu też rozwój informatyki (teoretycznej). Wspólną cechą kierunków konstruktywistycznych jest żądanie ograniczenia się do rozpatrywania wyłącznie obiektów konstruowalnych i operacji konstruktywnych. Różnią się one sposobem rozumienia pojęcia konstruowalności. Konstruktywizm zatem to pewna postawa normatywna postulująca nie tyle szukanie odpowiednich podstaw i uzasadnienia dla istniejącej matematyki, ile raczej interpretująca ją zgodnie z przyjętymi zasadami i odrzucająca (w większym czy mniejszym stopniu) metody i wyniki, które nie odpowiadają tym zasadom.

Wspomnieć tu musimy o finityzmie, który głosi, że przedmiotem matematyki są tylko konkretne (skończenie dane) struktury, że operacje na takich strukturach muszą mieć charakter kombinatoryczny (a więc w szczególności muszą być efektywne) oraz że pojęcia abstrakcyjne nie są uprawnione w matematyce. Twórcą finityzmu był L. Kronecker, istotny zaś wkład do rozwoju matematyki finitystycznej wnieśli T. Skolem, H.B. Curry i R.L. Goodstein. Dodajmy że matematyka finitystyczna jest całkowicie konstruktywna i stanowi część matematyki intuicjonistycznej. Innym kierunkiem konstruktywistycznym jest ultraintuicjonizm, zwany też ultrafinityzmem lub aktualizmem. Proponuje on zbudowanie matematyki opartej na *aktualnych* możliwościach poznawczych człowieka. W szczególności więc odrzuca się tu jako niedopuszczalne i pozbawione znaczenia bardzo wielkie liczby naturalne, gdyż sprawiają one trudności podobne do tych, z jakimi mamy do czynienia w przypadku nieskończoności, i ogranicza się tylko do tego, co nie wykracza poza bezpośrednią konkretną oczywistość. Koncepcja ta nie jest jednorodna. Najbardziej znana jej wersja pochodzi od A.S. Jesenina-Volpina. Doktryna ultraintuicjonizmu nie wyszła właściwie poza stadium początkowe, osiągnięte zostały jednak pewne interesujące wyniki ściśle techniczne, które rzucają światło na nie zawsze w pełni jasne koncepcje aktualistyczne.

Mówiąc o kierunkach konstruktywistycznych, wspomnieć musimy także o predykatywizmie i o matematyce rekurencyjnej. Predykatywizm wyrósł z pewnych koncepcji H. Poincarégo i B. Russella dopatrujących się źródła i przyczyny paradoksów w matematyce, przede wszystkim w stosowaniu definicji niepredykatywnych. Odwołuje się on też do idei H. Weyla wyłożonych głównie w (1918). Jego celem była rekonstrukcja analizy matematycznej z użyciem bardzo ograniczonych środków. Idee Weyla były rozwijane przez P. Lorenzena oraz, z drugiej strony, przez M. Kôndo, A. Grzegorczyka, G. Kreisla, S. Fefermana i K. Schüttego. Prace tych ostatnich koncentrowały się przede wszystkim na kwestiach metamatematycznych systemów matematyki predykatywnej. Matematyka rekurencyjna związana jest z teorią relacji i funkcji rekurencyjnych. Mamy tu właściwie dwa nurty. Pierwszy koncentruje się na badaniu rekurencyjnych odpowiedników pojęć klasycznych, a drugi, tzw. konstruktywna matematyka rekurencyjna, opierając się na teorii algorytmów Markowa, buduje nową matematykę. Dodajmy, że nurt ten (reprezentowany przede wszystkim przez Markowa i jego szkołę) przyjmuje stanowisko nominalistyczne i orientację językową, uważając za podstawowe obiekty konstruowane po prostu wyrażenia (słowa) budowane ze znaków jakiegoś języka.

Ważne dla rozwoju konstruktywizmu były także prace E. Bishopa. Proponuje on oprzeć matematykę na neutralnej bazie, bez specjalnych założeń ontologicznych. Podstawową zasadą jego propozycji jest żądanie, by wszystkie stwierdzenia matematyczne miały sens numeryczny. Oznacza to w szczególności, że powinniśmy być zawsze w stanie wskazać *explicite* konkretny obiekt, którego istnienie postulujemy w twierdzeniu — istnienia obiektu można bowiem dowieść tylko poprzez podanie procedury jego znalezienia. W ramach realizacji programu Bishopa uzyskano wiele interesujących wyników. Okazało się też, że matematykę Bishopa można rozszerzać zarówno w kierunku intuicjonizmu Brouwera, jak i w kierunku konstruktywnej matematyki rekurencyjnej w stylu Markowa. Jest ona też porównywalna z matematyką klasyczną.

Zauważmy na koniec tego krótkiego przeglądu kierunków konstruktywistycznych, że wyrastając z pewnych założeń natury filozoficznej, koncentrują się one na rekonstrukcji matematyki zgodnie z tymi założeniami. Prowadzą więc do badań technicznych i przybierają w konsekwencji charakter pewnych teorii matematycznych (czy teorii z zakresu podstaw matematyki).

Logicyzm występuje dziś w postaci tzw. logicyzmu pluralistycznego. Reprezentują go przede wszystkim H. Mehlberg i H. Putnam. Według tej koncepcji zasadniczą rzeczą w matematyce jest konstruowanie dowodów twierdzeń w systemach aksjomatycznych. Opierając się na twierdzeniu o dedukcji można przyjąć, że poszczególne teorie matematyczne są po prostu skarbnicami praw logicznych. Nieistotny zatem staje się dobór takich czy innych aksjomatów, nie można mówić o teoriach lepszych czy gorszych (cokolwiek miałoby to znaczyć) — istotne są związki logiczne między aksjomatami i twierdzeniami. W konsekwencji na przykład (z punktu widzenia czystej matematyki) geometria euklidesowa jest równie cenna, jak dowolna z geometrii nieeuklidesowych.

Pogląd logicyzmu pluralistycznego głosił już B. Russell w roku 1900, potem jednak zmienił swe stanowisko. Łatwo też zauważyć pokrewieństwo tej koncepcji z poglądami Arystotelesa. Otóż Arystoteles głosił, że pewność i konieczność przysługują w matematyce nie poszczególnym twierdzeniom, a związkom logicznym między zdaniami, wyrażonym za pomocą odpowiednich okresów warunkowych.

2. FILOZOFIA TEORII MNOGOŚCI

Wyniki badań w zakresie logiki matematycznej i podstaw matematyki podkreśliły kluczową rolę, jaką w matematyce odgrywa teoria mnogości. Stała się ona podstawową dziedziną całej matematyki. Z jednej bowiem strony każda dyscyplina matematyczna jest wyposażona w pewien zasób środków teoriomnogościowych, z drugiej zaś za pomocą pojęć teorii mnogości można zdefiniować wszystkie pojęcia matematyczne, a z jej aksjomatów wyprowadzić wszystkie twierdzenia matematyczne. To implikuje, że rozstrzygnięcia kwestii ontologicznych i epistemologicznych związanych z teorią mnogości stają się istotne i nabierają zasadniczego znaczenia w odniesieniu do całej matematyki. Kluczowego znaczenia nabiera problem statusu ontologicznego i epistemologicznego obiektów teorii mnogości. Eliminacja paradoksów związanych z pojęciem zbioru wymagała przede wszystkim precyzacji i wyjaśnienia pojęcia zbioru. Jednym ze sposobów dokonania tego jest aksjomatyzacja teorii mnogości. Powstało kilka takich systemów aksjomatycznych opartych na różnych zasadach[3].

Zauważmy przede wszystkim, że systemy te można podzielić na dwie grupy w zależności od tego, jakie pojęcie zbioru leży u ich podstaw. Wyróżnić możemy mianowicie logiczne i matematyczne pojęcie zbioru. Logiczne pojęcie zbioru można scharakteryzować następująco: zbiór jest ekstensją pewnej własności wyrażonej w odpowiednim języku i to wyznacza go jednoznacznie, tzn. niepotrzebne są żadne odwołania do tworów pozajęzykowych w celu ustalenia istnienia takiego

[3]Bardziej szczegółowe informacje na ten temat znaleźć można na przykład w monografii Fraenkel *et al* (1973) czy w Dodatku I do książki Murawskiego (1995).

zbioru czy umożliwienia dostępu do niego. Z drugiej strony matematyczne pojęcie zbioru (zwane też iteracyjnym) charakteryzuje się przyjęciem, że zbiór jest generowany poprzez iterowanie pewnych operacji matematycznych (podobnie jak liczby naturalne są generowane z liczby zero przez iterację operacji następnika). Gdy zbiór taki jest już wygenerowany, to możemy oczywiście mówić o rozmaitych jego własnościach, więcej, możemy charakteryzować go jako zbiór spełniający taką czy inną własność wyrażoną w odpowiednim języku. Przy tym języki, w których formułujemy te własności mogą być rozmaite, zależnie od potrzeb, ale zbiór pozostaje stały — jest on tylko rozmaicie opisywany. Problem eliminacji paradoksów rozwiązuje się teraz poprzez wyspecyfikowanie albo języka i klasy formuł, które mogą być użyte do określania własności zbiorów, których istnienie przyjmujemy (w przypadku pojęcia logicznego), albo poprzez nałożenie pewnych warunków i ograniczeń na dopuszczalne operacje generujące nowe zbiory (w przypadku matematycznego pojęcia zbioru).

Przykładem systemu teorii zbiorów, u podstaw którego leży logiczne pojęcie zbioru, jest system *New Foundations* NF Quine'a, który wyrósł z prostej teorii typów Whiteheada i Russella.

Najbardziej popularnym (można powiedzieć: standardowym) systemem opisującym matematyczne pojęcie zbioru jest system Zermela-Fraenkla ZF oparty na układzie aksjomatów zaproponowanym w roku 1908 przez E. Zermela i uzupełnionym potem przez A. Fraenkla i Th. Skolema. Nieco odmienne ujęcie zaproponował J. von Neumann. W tym ujęciu występują zarówno zbiory, jak i klasy. Występują one też w systemie teorii mnogości Morse'a. Jeszcze inne ujęcie zaproponował w roku 1956 W. Ackermann. W jego systemie pojęcie zbioru jest pochodne i podporządkowane pojęciu klasy.

W latach sześćdziesiątych grupa matematyków czeskich z P. Vopenką na czele stworzyła tzw. teorię semizbiorów. Rozważa się w niej klasy, zbiory i tzw. semizbiory, przy czym semizbiór jest to podklasa zbioru nie będąca zbiorem. Wszystkie opisane wyżej systemy teorii mnogości odwoływały się i były oparte na idei zbioru wprowadzonej przez G. Cantora. Były więc zgodne z jego filozofią teorii mnogości[4]. W latach siedemdziesiątych P. Vopenka i matematycy skupieni wokół niego stworzyli inną teorię mnogości, nazywaną alternatywną teorią mnogości.

Zauważmy przede wszystkim, że celem Cantora było zbadanie wszystkich *możliwych* zbiorów. Warunkiem koniecznym i dostatecznym jest tu tylko niesprzeczność. Aby zbiór możliwy był realizowalny musimy być w stanie „przenieść” za pomocą jednego skończonego aktu wszystkie jego elementy do sfery obiektów istniejących. Bolzano, który był prekursorem teorii zbiorów, stawiał sobie jako cel badanie tylko zbiorów *istniejących*. Przy tym warunkiem koniecznym istnienia zbioru jest to, by istniały wszystkie jego elementy z osobna. Teoria mnogości zaproponowana przez Vopenkę opiera się właśnie na filozofii Bolzana. W teorii tej można zrekonstruować wiele działów matematyki klasycznej, przy czym pozwala ona na ujęcie wielu problemów, których nie można adekwatnie wyrazić w innych systemach teorii mnogości (opartych na ideach Cantora) — na przykład rachunek różniczkowy i całkowy w ujęciu z nieskończenie małymi, zjawiska ruchu, paradoks łysego czy ogólnie związki między kontinuum a tym, co dyskretne. Wiele łączy ją też z ideami ultraintuicjonistów.

Wielość systemów teorii mnogości (opartych nie tylko na różnych założeniach filozoficznych, ale także na rozmaitych układach aksjomatów), a także wyniki na temat niesprzeczności i niezależności (a więc w konsekwencji nierozstrzygalności) pewnych ważnych dla matematyki hipotez (na przykład hipotezy kontinuum czy aksjomatu wyboru) stawiają na nowo problem zasad i kryteriów doboru i akceptacji aksjomatów. Problem ten dotyczy zresztą nie tylko teorii mnogości, ale każdej teorii matematycznej, choć w przypadku teorii mnogości nabiera on fundamentalnego znaczenia.

Główne konkurencyjne koncepcje filozoficzne w odniesieniu do teorii mnogości to realizm (platonizm) i formalizm. Przyjęcie stanowiska realistycznego zwalnia z konieczności uzasadniania przyjmo-

[4]Na temat G. Cantora filozofii teorii mnogości zob. na przykład Murawski (1984). Por. też Cantor (1932).

wanych aksjomatów czy dowodzenia ich niesprzeczności — są one bowiem opisem tego czy innego fragmentu rzeczywistości matematycznej. Pojawienie się pewnych problemów, które są nierozstrzygalne w oparciu o przyjmowane aksjomaty (jak na przykład hipoteza kontinuum) lub też prowadzą do pewnych wyników nie w pełni zgodnych z intuicjami (na przykład paradoksalny rozkład kuli) zaczyna jednak stwarzać poważne trudności. Jednym z wyjść jest „ucieczka" ku formalizmowi i stwierdzenie, że aksjomaty niekoniecznie są opisem rzeczywistości matematycznej. Wtedy uzasadnienia wymaga jednak dobór aksjomatów i wyjaśnienie, dlaczego takie a nie inne aksjomaty przyjmujemy jako podstawę matematyki. Stanowisko realistyczne reprezentowane było na przykład przez Gödla (pisaliśmy o tym wyżej w części I artykułu). W latach osiemdziesiątych rozwinięta została przez P. Maddy pewna wersja idei Gödla (por. Maddy, 1990). Gödel twierdził, że możemy poznać zbiory abstrakcyjne za pomocą intuicji, Maddy natomiast głosi tezę, iż możemy widzieć zbiory konkretnych obiektów, których elementy znajdują się przed naszymi oczami. Postrzegamy zbiory konkretnych przedmiotów fizycznych poprzez postrzeganie ich elementów. Zbiory są umiejscowione w czasoprzestrzeni rzeczywistego świata. W ten sposób możemy poznać „proste" zbiory, tzn. zbiory dziedzicznie skończone. Zbiory bardziej skomplikowane traktuje ona tak, jak traktuje się obiekty teoretyczne w fizyce — możemy poznać je i ich własności poprzez pewne rozważania metateoretyczne. Łatwo zauważyć, że w koncepcji tej Gödlowska intuicja matematyczna została zastąpiona przez zwykłe postrzeganie zmysłowe. Zaletą podejścia Maddy jest to, że łączy ono zalety platonizmu Gödla, pozwalającego wyjaśnić oczywistość pewnych faktów matematycznych, z jednej strony, z realizmem Quine'a biorącym pod uwagę rolę, jaką matematyka odgrywa w naukach przyrodniczych, z drugiej strony (por. część I artykułu).

Reprezentantem stanowiska formalistycznego w teorii mnogości jest P.J. Cohen (por. jego artykuł (1971)). Twierdzi on, że ponieważ matematyka nie toleruje zdań nierozstrzygalnych, więc w trakcie pracy nad tymi czy innymi problemami przyjmujemy nowe założenia czy dopuszczamy nowe aksjomaty. Nie czynimy tego jednak zupełnie dowolnie. Są one „ekstrapolacjami z języka matematyki bardziej finitystycznej" (Cohen, 1971). Z takimi procesami ekstrapolacji mamy zresztą do czynienia w całej historii matematyki.

Pozostaje oczywiście problem uzasadnienia przyjmowanych aksjomatów czy problem kryteriów doboru nowych aksjomatów. Jest to zresztą problem dotyczący całej matematyki. Wyróżnić można rozmaite sposoby i metody stosowane przez matematyków przy uzasadnianiu i obronie aksjomatów. Podzielić je możemy na argumenty wewnętrzne, zewnętrzne i na zasady heurystyczne (por. Maddy 1988). Argumenty wewnętrzne oparte są na samym pojęciu, którego dotyczy dany aksjomat (w przypadku teorii mnogości — pojęciu zbioru) i odwołują się do pierwotnej intuicji. Sprowadzają się one najczęściej do stwierdzenia, że ta czy inna własność wyrażona w danym aksjomacie uderza nas jako oczywista. Argumenty zewnętrzne mogą przybierać rozmaitą postać. Na rzecz przyjęcia rozważanego aksjomatu przemawiać może to, że jest on potwierdzony przez konkretne przypadki szczególne, że implikuje nie znane przedtem wyniki niższego poziomu, że dostarcza nowych dowodów starych twierdzeń, że pozwala na unifikację nowych wyników ze starymi tak, że stare wyniki stają się szczególnymi przypadkami nowych, że pozwala na rozszerzenie wzorców znanych dla teorii słabszych, dostarcza nowych silnych narzędzi pozwalających na rozwiązywanie starych problemów, że w końcu pozwala dowieść pewnych hipotez czy ustalić pewne zależności między teoriami. Zasady heurystyczne mają charakter aprioryczny. Są wśród nich maksymy metodologiczne, zasady o charakterze podobnym do argumentów zewnętrznych lub wewnętrznych czy w końcu zasady oparte na bezpośrednim doświadczeniu.

3. KRYTYKA KONCEPCJI W DUCHU PODSTAW MATEMATYKI

Zauważmy, że wszystkie opisane wyżej kierunki i tendencje w zakresie filozofii matematyki nawiązują w jakiś sposób do koncepcji klasycznych. Stanowią one w istocie rozwinięcie tych ostatnich. Tak jak kierunki klasyczne, szukają one pewnej i solidnej bazy i fundamentu dla matematyki jako nauki. Chcą pokazać, że matematyka jako nauka jest niesprzeczna i pewna, a jej wyniki niepodważalne. Próbują to zrobić poprzez pewną rekonstrukcję rzeczywiście uprawianej matematyki. W tych rekonstrukcjach odwołują się oczywiście do rozmaitych narzędzi i metod logiki matematycznej i podstaw matematyki. Są więc one koncepcjami w duchu podstaw matematyki. Ich cechą charakterystyczną jest pewien redukcjonizm. Mają one charakter wyraźnie monistyczny, tzn. próbując wykazać, że matematyka jest nauką pewną i bezpieczną redukują matematykę do jakiegoś jednego tylko aspektu. W efekcie dają jednowymiarowe, statyczne obrazy matematyki, nie udzielając odpowiedzi na pytanie, jak matematyka w rzeczywistości powstaje, jakimi drogami matematyk dochodzi do twierdzeń i odkryć, jak matematyk naprawdę pracuje. Pomijają rzeczywisty rozwój matematyki zarówno w aspekcie jednostkowego dochodzenia do wyników, jak i ogólny rozwój matematyki jako nauki. Traktują ją jako naukę, w której rozwój odbywa się poprzez monotoniczne gromadzenie prawdziwych i niepodważalnych stwierdzeń. Kierunki klasyczne (w postaci pierwotnej czy też rozwiniętej) dostarczają więc tylko pewnych rekonstrukcji rzeczywistej matematyki. Wynika to zapewne z ich genezy. Powstawały one bowiem w atmosferze kryzysu w podstawach matematyki i ich zasadniczym celem było znalezienie solidnego i pewnego fundamentu dla tej nauki. U podstaw tych poszukiwań tkwiło założenie, że matematyka musi być, i w istocie jest, wiedzą pewną i niepodważalną. Ignorowały przy tym wiele kwestii pojawiających się w matematyce, na przykład dowody nieformalne, możliwość błędów, wyjaśnianie vs. dowodzenie czy też problem, który pojawił się w ostatnich latach, a mianowicie stosowanie komputerów w dowodzeniu twierdzeń.

Jako reakcja na tę jednostronność koncepcji klasycznych z jednej strony, a pod wpływem wyraźnego renesansu zainteresowań historią i filozofią matematyki, z drugiej strony, dały się zauważyć w latach sześćdziesiątych pewne tendencje podważające podejście w duchu podstaw matematyki. Stawiają one sobie za cel badanie rzeczywistej matematyki, a nie tylko dostarczenie pewnej jej rekonstrukcji. Interesuje je nie tylko kontekst uzasadnienia, ale chcą brać pod uwagę także kontekst odkrycia. A zatem akcentują wyraźnie aktualną praktykę badawczą. Zauważmy, że praktyka badawcza w matematyce ma dwie istotne cechy, które trzeba uwzględnić w badaniach filozoficznych nad matematyką. Przede wszystkim ma ona swoją historię, tzn. nie jest absolutna, zawsze taka sama, ale zmienna i zależna od epoki i kultury, w ramach której matematyka jest uprawiana i rozwijana. Stąd wynika konieczność uwzględnienia aspektu historycznego. Druga ważna cecha to to, że praktyka badawcza w matematyce nie jest wyizolowana, przeciwnie, ma wiele cech wspólnych z praktyką badawczą innych nauk, zwłaszcza nauk przyrodniczych. Zatem nie można wyjaśnić kwestii filozoficznych związanych z matematyką bez wzięcia pod uwagę na przykład roli, jaką matematyka pełni w innych naukach. Nie jest też uzasadnione zdecydowane odgraniczanie matematyki i nauk przyrodniczych i nadawanie obiektom matematyki zasadniczo innego statusu ontologicznego i epistemologicznego niż, powiedzmy, obiektom fizyki.

Ta zmiana akcentów i perspektywy może być też powiązana z dwoma zasadniczymi sposobami podejścia do filozofii matematyki. Otóż filozofię matematyki można z jednej strony uprawiać z akcentowaniem aspektu normatywnego i z przyznaniem priorytetu epistemologii nad rzeczywiście uprawianą matematyką (takie podejście dominowało w kierunkach klasycznych i w tendencjach, które z nich wyrosły) lub też przyjmując istniejącą i uprawianą przez matematyków naukę jako daną i stawiając sobie za cel badanie tej rzeczywistej matematyki (dominuje więc tu aspekt opisowy). We współczesnej filozofii matematyki zdaje się przeważać to drugie podejście. Koncepcje powstałe w jego ramach nazywa się na ogół kierunkami quasi-empirystycznymi.

4. KONCEPCJE QUASI-EMPIRYSTYCZNE

Jedną z pierwszych istotnych prób w tym kierunku była koncepcja Imre Lakatosa. Powstała ona pod wpływem filozofii K. Poppera, a wyłożona została przede wszystkim w pracy Lakatosa (1963-64). Głosi on tam tezę, że matematyka, tak jak i nauki przyrodnicze, jest omylna, a nie pewna i niepodważalna. Rozwija się ona poprzez krytykę i korektę starych teorii, które nigdy nie są wolne od niejasności czy możliwości popełnienia błędu czy przeoczenia. Próbując rozwiązać jakiś problem, szuka się jednocześnie dowodu i kontrprzykładu. Nowe dowody wyjaśniają stare kontrprzykłady, nowe kontrprzykłady podważają stare dowody. Mówiąc o dowodach ma tu Lakatos na myśli niesformalizowane dowody rzeczywiście uprawianej matematyki. W dowodach takich mamy do czynienia z wyjaśnianiem, usprawiedliwianiem i uzasadnianiem oraz ze szczegółowymi analizami, które mają uczynić badaną hipotezę bardziej prawdopodobną i przekonującą. Lakatos nie analizuje wyidealizowanej matematyki sformalizowanej (tzn. przedstawionej w postaci systemu sformalizowanego), ale matematykę rzeczywiście uprawianą przez matematyków, a więc matematykę w procesie rozwoju i odkrywania. Jego główne dzieło *Proofs and Refutations* (1963-64) jest w istocie krytyką dogmatycznych kierunków filozofii matematyki, w szczególności logicyzmu i formalizmu. Zarzuca im przede wszystkim to, że nie stosują się one do rzeczywistej matematyki. Twierdzi też, że matematyka jest nauką w sensie Popperowskim i że rozwija się ona poprzez sukcesywną krytykę i ulepszanie teorii oraz poprzez budowanie nowych konkurencyjnych teorii. Celem Lakatosa było zniwelowanie przepaści, jaka dzieli matematykę, uważaną za naukę nieomylną i za zbiór niepodważanych tez *a priori*, i nauki przyrodnicze, których tezy są *a posteriori*, omylne i mogą być podważone przez wyniki nowych eksperymentów. Nie twierdzi on oczywiście, że matematyka jest nauką empiryczną, ale tylko, iż jest ona quasi-empiryczna. Inną próbą przezwyciężenia ograniczeń kierunków klasycznych jest koncepcja ujęcia matematyki jako systemu kulturowego zaproponowana przez Raymonda L. Wildera. Wyłożył on swoje koncepcje w pracach (1968, 1981) (zob. też Murawski, 1986). Jego główna teza głosi, że matematyka jest systemem kulturowym. Matematykę można traktować jako subkulturę, wiedza matematyczna należy do tradycji kulturowej danego społeczeństwa, a aktywność badawcza w matematyce ma charakter społeczny. Takie podejście do matematyki pozwala na badanie jej rozwoju i stosowanie w tych badaniach pewnych ogólnych praw rządzących zmianami w ramach danej kultury. Pozwala też na śledzenie wzajemnych relacji i wpływów różnych elementów kultury, w szczególności ich wpływu na rozwój matematyki. Umożliwia wreszcie wykrywanie mechanizmów rozwoju i ewolucji matematyki jako nauki. Dlatego też koncepcję Wildera nazywa się czasem epistemologią ewolucyjną. Proponował on badanie matematyki jako nauki nie tylko z punktu widzenia logiki, ale także przy użyciu metod i z perspektywy antropologii, socjologii i historii. Wilder podkreśla, że matematykę należy umieścić w Popperowskim „trzecim świecie". Matematyka nie bada obiektów istniejących poza przestrzenią i czasem i niezależnych od poznającego podmiotu. Nie można jej właściwie zrozumieć, jeśli nie uwzględni się kultury, w ramach której jest ona rozwijana. W tym więc sensie matematyka ma wiele wspólnego z ideologią, religią czy sztuką. Różni się od nich tym, że jest nauką, w której obowiązuje zasada uzasadniania twierdzeń za pomocą logicznego rozumowania, a nie opiera się na powszechnej zgodzie, na autorytecie czy innych podstawach.

Wilder formułuje też szereg praw, które jego zdaniem rządzą ewolucją matematyki. Wskazuje przy tym na znaczenie zarówno sił wewnętrznych (funkcjonujących w samej matematyce jako subkulturze), jak i sił zewnętrznych (wynikających z tego, że matematyka jest zawsze fragmentem większej całości kulturowej) — omówienie tych praw wraz z licznymi przykładami ich zastosowań znaleźć można w jego książce (1981).

Tezę o aprioryczności, absolutnej pewności i niepodważalności wiedzy matematycznej poddaje krytyce także H. Putnam (por. Putnam, 1975). Twierdzi on, że w matematyce stosowane były od dawna (i nadal są oczywiście stosowane) metody quasi-empiryczne, przy czym przez te ostatnie rozumie metody analogiczne do metod stosowanych w naukach przyrodniczych z tą różnicą, że stwierdzenia jednostkowe, które wykorzystywane są do „sprawdzania" teorii, otrzymywane są w przypadku matematyki za pomocą dowodów lub rachunków, a nie za pomocą obserwacji czy eksperymentu. Metody takie odgrywają w matematyce rolę heurystyczną w kontekście odkrycia (korzysta się z nich na przykład wtedy, gdy na podstawie przypadków szczególnych formułuje się ogólne zależności i twierdzenia), wykorzystywane mogą być jako argumenty za przyjęciem tych czy innych aksjomatów, czy wreszcie służyć mogą do częściowego uzasadniania hipotez, dla których nie posiadamy ścisłych dowodów. Kryterium prawdziwości w matematyce stanowi zdaniem Putnama, podobnie jak w fizyce, sukces i użyteczność idei matematycznych w szeroko rozumianej praktyce, zwłaszcza oczywiście praktyce badawczej, w szczególności w fizyce i innych naukach przyrodniczych.

5. PROBLEMY ZWIĄZANE Z ZASTOTOWANIEM KOMPUTERÓW

Problem dopuszczalności metod quasi-empirycznych, czy wręcz empirycznych w matematyce nabrał w ostatnich czasach nowego wymiaru poprzez coraz częstsze i szersze stosowanie komputerów. Zjawisko to stawia przed filozofią matematyki nowe wyzwania i nowe problemy.

Komputery są wykorzystywane w matematyce na co najmniej sześć różnych sposobów: (1) do obliczeń numerycznych, (2) do rozwiązywania (na ogół przybliżonego) równań i układów równań algebraicznych, różniczkowych, do obliczania całek itp., (3) do automatycznego dowodzenia twierdzeń, (4) do sprawdzania poprawności dowodów matematycznych, (5) przy dowodzeniu twierdzeń (mówi się w tym wypadku o dowodach wspomaganych komputerowo) oraz (6) do eksperymentowania z obiektami matematycznymi. Szczególne zainteresowanie (i kontrowersje) wzbudzają zastosowania typu (5). Jedną z głównych kwestii wymagających rozwiązania jest sprawa statusu twierdzeń uzyskanych z wykorzystaniem komputera, a w konsekwencji — w przypadku uznania takich twierdzeń za pełnoprawne twierdzenia matematyki — także problem charakteru wiedzy matematycznej.

Problem ten dyskutuje się na ogół w kontekście twierdzenia o czterech barwach. Otóż to udowodnione w roku 1976 twierdzenie jest pierwszym w matematyce twierdzeniem, którego dowód w sposób istotny bazuje na zastosowaniu komputera. Nie można sprawdzić jego poprawności bez pomocy komputera. Co więcej, niektóre z decydujących pomysłów wykorzystanych w tym dowodzie zostały udoskonalone za pomocą doświadczeń komputerowych, za pomocą „dialogu" z komputerem. Nie znamy też (przynajmniej dotychczas) żadnego dowodu innego typu dla tego twierdzenia. To wszystko prowadzi do sformułowania tezy, że twierdzenie o czterech barwach jest pierwszym twierdzeniem matematyki nowego typu, tzn. twierdzeniem nie mającym dowodu tradycyjnego, a jedynie dowód wykorzystujący w sposób istotny eksperyment (tzn. obliczenia komputerowe). To z kolei każe zakwestionować klasyfikację wiedzy matematycznej jako wiedzy apriorycznej i prowadzi do konieczności dokonania wyboru pomiędzy dwoma możliwościami: albo rozszerzyć zakres dozwolonych w matematyce metod dowodzenia dopuszczając użycie komputerów (a więc pewnego rodzaju eksperymentu), albo uznać, że twierdzenie o czterech barwach nie zostało jak dotąd udowodnione i nie należy do zakresu wiedzy matematycznej.

Pierwsza z tych możliwości pociąga za sobą uznanie, że wiedza matematyczna jest w istocie wiedzą quasi-empiryczną a nie aprioryczną. Zauważmy przy tym, że dopuszczenie eksperymentu komputerowego w procesie dowodzenia twierdzeń rozszerza w jakiś sposób zasób środków poza-apriorycznych czy quasi-empirycznych, o których mówiliśmy powyżej. Mamy tu bowiem do czynienia z posługiwaniem się pewnym przyrządem technicznym i wykorzystywaniem podawanych przez niego wyników (nie wystarczy bowiem sam program — *software*, ale konieczna jest przecież także jego realizacja na konkretnym sprzęcie, a więc ważny jest też *hardware*). Dochodzimy tu zatem do pewnego wzmocnienia tezy o quasi-empirycznym charakterze matematyki.

Opisaną tezę w kwestii statusu twierdzeń, w dowodach których stosuje się komputer i w kwestii charakteru wiedzy matematycznej głoszą w szczególności Ph.J. Davis, R. Hersh, Ph. Kitcher i E.R. Swart. Podejmowane są jednak również próby obrony apriorycznego charakteru wiedzy matematycznej mimo dopuszczenia w niej komputerowego wspomagania dowodów. Argumentuje się tutaj w szczególności, że dowody wspomagane komputerowo można przekształcić w dowody tradycyjne poprzez dodanie nowych aksjomatów (Levin), że komputer w istocie jest matematykiem i zna wynik, który udowodnił dedukcyjnie (Krakowski), czy że procedury podobne do stosowania programów komputerowych wykorzystywane były w matematyce od dawna, a zatem zastosowanie, z którym mamy do czynienia w dowodzie twierdzenia o czterech barwach, nie jest niczym istotnie nowym (Detlefsen i Luker).

Informatyka wpływa na filozofię matematyki nie tylko poprzez fakt stosowania komputerów do uzyskiwania nowych wyników w matematyce. Także informatyka teoretyczna, w szczególności kwestie związane z teorią obliczeń, stawiają przed filozofem matematyki nowe problemy, a jednocześnie dostarczają nowych narzędzi umożliwiających nowe spojrzenie na pewne znane już wyniki i nową ich interpretację. Przykładem może być tu teoria informacji i jej zastosowanie do epistemologii matematyki. Otóż analiza twierdzeń Gödla o niezupełności, z punktu widzenia teorii informacji właśnie, prowadzi do wniosków o quasi-empirycznym charakterze matematyki i o jej podobieństwie do nauk przyrodniczych, zwłaszcza jeśli chodzi o kwestię adaptacji nowych aksjomatów i metod. Zasadniczym bowiem kryterium przyjęcia danego aksjomatu czy dopuszczenia danej metody powinna być ich „użyteczność” do rozwiązywania otwartych dotąd problemów. Postęp i rozwój w matematyce mają charakter podobny do postępu i rozwoju nauk przyrodniczych. Zjawisko niezupełności (o którym mówią twierdzenia Gödla) nie jest czymś niezwykłym i rzadkim. Przeciwnie, jest ono czymś naturalnym. Dlatego chcąc uzyskiwać w matematyce nowe wyniki i dowodzić nowych, bardziej złożonych twierdzeń musimy stale wprowadzać nowe aksjomaty i dopuszczać nowe metody.

6. DYSKUSJE WOKÓŁ PROBLEMU ISTNIENIA

W ostatnim okresie ożywiły się też, ciągle obecne w filozofii matematyki, dyskusje wokół kwestii istnienia. Miały one głównie postać sporu realizm–antyrealizm, czy realizm–konstruktywizm. Zarówno realiści, jak i antyrealiści, odwołują się do koncepcji Gödla i Quine'a-Putnama, o których pisaliśmy powyżej. To właśnie platonizm Gödla i realizm Quine'a-Putnama były (i są) punktem wyjścia do rozwijania nowych koncepcji, zarówno będących w opozycji do nich, jak i stanowiących w jakiś sposób ich rozwinięcie.

Zauważmy, że obie wspomniane koncepcje, w swym charakterze realistyczne, opierają się na innych przesłankach i mają inny zupełnie charakter. Jak pisaliśmy wyżej, Gödel twierdził, że obiekty matematyczne tworzą pewną rzeczywistość poza czasem i przestrzenią. Poznanie ich umożliwia nam intuicja matematyczna, która też pozwala nam uznać pewne aksjomaty za oczywiste. Prawdziwość innych poznajemy poprzez ich konsekwencje i to, że są one owocne w dowodzeniu rozmaitych twierdzeń i rozwiązywaniu różnych problemów.

Punktem wyjścia dla Quine'a i Putnama są rozważania dotyczące struktury nauki, w szczególności fizyki. Ponieważ nie da się rozłożyć nauki na składową analityczną i syntetyczną (jak chciał Carnap), więc musimy zaakceptować pełną ontologię, tzn. uznać istnienie wszystkich przedmiotów, o jakich w naukowym dyskursie mowa (argument z niezbędności). Można zatem powiedzieć krótko, że w tym ujęciu stosowalność pociąga za sobą istnienie.

Platonizm Gödla został zakwestionowany przez P. Benacerrafa w klasycznej już dziś pracy „Mathematical Truth" (1973). Otóż Benacerraf stwierdza, że koncepcja Gödla nie spełnia wymogów metodologicznych stawianych teorii nauki, a zatem jest nie do przyjęcia. Benacerraf przyjmuje kauzalną teorię wiedzy. Stwierdza, że przedmioty matematyczne nie oddziałują przyczynowo i jednocześnie odrzuca percepcję pozazmysłową jako źródło wiedzy. To wszystko prowadzi go do wniosku o konieczności odrzucenia platonistycznego stanowiska Gödla, gdyż przyjmowana przez tego ostatniego koncepcja pozazmysłowej percepcji obiektów czy pojęć abstrakcyjnych jest zbyt mało precyzyjna i brak w niej wyjaśnienia związku pomiędzy naszymi zdolnościami poznawczymi a przedmiotem wiedzy.

Gödlowską koncepcję intuicji matematycznej krytykowali też inni filozofowie, w szczególności C. Chihara, D. Gottlieb i H. Field. Koncepcja ta znalazła jednak także swoich obrońców (Maddy, Resnik).

Field poddał krytyce nie tylko koncepcje platonistyczne Gödla, ale także argument z niezbędności Quine'a-Putnama (por. Field, 1980). Jego koncepcja należy do jednej z najczęściej dyskutowanych dziś propozycji w filozofii matematyki. Analizując rolę matematyki w naukach przyrodniczych, w szczególności w fizyce, Field dochodzi do wniosku, że nie jest prawdziwa teza głosząca, iż matematyka jest w nich niezbędna oraz do konkluzji, iż matematyka jest w nich stosowana jedynie jako pewien skrót opisowy i inferencyjny, i jako taka jest teoretycznie zbędna. Obiekty matematyczne pełnią w tych teoriach inną rolę niż abstrakcyjne obiekty teoretyczne. Te ostatnie bowiem rozszerzają teorie czysto obserwacyjne, podczas gdy w teoriach używających abstrakcyjnych obiektów matematycznych nie można udowodnić niczego więcej, niż w teorii, w której nie odwołujemy się do takich obiektów. Field ilustruje swoje tezy na przykładzie Newtonowskiej teorii grawitacji, tzn. formułuje pewną wersję tej teorii, która nie zakłada istnienia liczb i funkcji. To wszystko prowadzi go do nominalizmu — twierdzi on mianowicie, że matematyka jest jedynie użyteczną i wygodną fikcją, zbiorem stwierdzeń, które umożliwiają nam formułowanie i uzasadnianie pewnych tez o realnym świecie, ale które w istocie nie mają żadnej interpretacji w rzeczywistości. Matematyka nie jest zatem niezbędna, jest co najwyżej użyteczną fikcją.

W przeciwieństwie do Fielda, Chihara (1990) twierdzi, że w naukach przyrodniczych potrzebne jest coś na kształt formalizmu matematycznego, aby móc w ich ramach formułować i rozwijać teorie. Formalizm ten jednak nie musi dotyczyć obiektów matematycznych wprost, nie musi prowadzić do zobowiązań ontologicznych. Proponuje on rozwinięcie systemu matematycznego, w którym twierdzenia egzystencjalne zostaną zastąpione stwierdzeniami dotyczącymi konstruowalności, przy czym konstruowalność rozumie on szerzej niż intuicjoniści. Nie tylko koncepcje antyrealistyczne odwołują się do Gödla i Quine'a-Putnama. Także realiści czerpią podstawowe inspiracje (choć oczywiście w inny sposób) z tych teorii.

Jedną z koncepcji realistycznych odwołujących się do platonizmu Gödla jest propozycja P. Maddy nazywana platonizmem fizykalistycznym. Pisaliśmy o tej koncepcji wyżej przy okazji omawiania problemów ontologicznych teorii mnogości. Inną próbę skonstruowania teorii wiedzy matematycznej, która umożliwiałaby przyjęcie stanowiska realizmu, przynosi strukturalizm. Można go scharakteryzować jako doktrynę głoszącą że matematyka bada struktury a nie wyizolowane obiekty oraz że przedmioty matematyki są jedynie pozbawionymi pozarelacyjnych cech pozycjami w tych strukturach. Koncepcja taka ma swe źródła w pracach R. Dedekinda, B. Russella, D. Hilberta, P. Bernaysa i N. Bourbakiego, a rozwijana jest obecnie głównie przez M. Resnika, S. Shapiro i G. Hellmana (analizę krytyczno-porównawczą koncepcji strukturalistycznych znaleźć można w pracy Bondeckej-Krzykowskej, 2002).

Analizy pokazują, że strukturalizm nadaje się najlepiej do wyjaśniania statusu czystych obiektów matematycznych, takich jak liczby czy zbiory. Tu pojawia się jednak problem tzw. wieloredukcji, tzn. problem tego, z jaką z danych struktur podobnych należy identyfikować definiowane strukturalistycznie obiekty i jakie są (czy mogą być) zasady takiej identyfikacji. Pojawiają się też problemy związane ze stosowaniem logiki drugiego rzędu czy operatorów modalnych.

7. ZAKOŃCZENIE

Powyższy zarys rozwoju filozofii matematyki w XX wieku pokazuje silne wzajemne oddziaływanie logiki matematycznej i podstaw matematyki z jednej strony oraz filozoficznej refleksji nad matematyką z drugiej. Wskazuje też na wyraźną tendencję do przekraczania ograniczeń wynikających z podstawowych założeń kierunków klasycznych współczesnej filozofii matematyki. O ile kierunki te koncentrują się na rekonstrukcji matematyki (z wykorzystaniem narzędzi logiki matematycznej i teorii mnogości) w celu pokazania, że jest ona bezpieczna i może być dalej bez obaw uprawiana, o tyle nowe prądy próbują analizować rzeczywistą praktykę badawczą matematyków. To prowadzi do kierunków quasi-empirystycznych. Nie należy jednak traktować tych ostatnich jako konkurencji kierunków klasycznych i oczekiwać zupełnego ich wyeliminowania. Są one tylko ich uzupełnieniem wynikającym ze zwrócenia uwagi na inne jeszcze aspekty fenomenu matematyki.

LITERATURA CYTOWANA

Benacerraf, P.

[1973], Mathematical Truth, *Journal of Philosophy* 70, 661-680.

Bondecka-Krzykowska, I.

[2002], Koncepcje strukturalistyczne we współczesnej filozofii matematyki, rozprawa doktorska, Poznań.

Cantor G.

[1932], *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Hrsg. E. Zermelo, Verlag von Julius Springer, Berlin.

Chihara, C.

[1990], *Constructibility and Mathematical Existence*, Clarendon Press, Oxford.

Cohen, P.J.

[1971], Comments on the foundations of set theory, w: *Axiomatic Set Theory*, D. Scott (Ed.), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XIII, Part 1, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, ss. 9-16. Przekład polski: ‘O podstawach teorii mnogości’ w: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2002.

Field, H.

[1980], *Science without Numbers*, Basil Blackwell, Oxford.

Fraenkel, A.A.Y. Bar-Hillel,
A Levy (in collaboration with D. vanDalen)

[1973], *Foundations of Set Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Lakatos, I.

[1963-64], Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery, *British Journal for the Philosophy of Science* 14. Wydanie książkowe: Cambridge University Press, Cambridge 1976.

Maddy, P.

[1988], Believing the axioms. I i II, *Journal of Symbolic Logic* 53, 481-511 oraz 736-764. Przekład polski (fragmentów §I, §II.1 i §II.2 oraz §VII): 'Wierząc w aksjomaty', w: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2002.

Maddy, P.

[1990], *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Murawski, R.

[1984], G. Cantora filozofia teorii mnogości, *Studia Filozoficzne* 11-12, 75-88.

Murawski, R.

[1986], „Humanizacja" matematyki, czyli o nowych prądach w filozofii matematyki, *Studia Filozoficzne* 8, 67-79.

Murawski, R.

[1995], *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa (wyd. II: 2001).

Putnam H.

[1975], What is mathematical truth?, w: Putnam, H., *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers*, vol. I, Cambridge University Press, Cambridge-London-New York-Melbourne, 60-78. Przekład polski: 'Czym jest prawda matematyczna?' w: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2002.

Weyl, H.

[1918], *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Veit, Leipzig.

Wilder, R.L.
[1968], *The Evolution of Mathematical Concepts. An Elementary Study*, John Wiley & Sons, New York.
Wilder, R.L.
[1981], *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon Press, Oxford.