

Contribuciones de Einstein a la teoría cuántica(1905-1925)

Luis Navarro Veguillas

Arbor CLXVII, 659-660 (Noviembre-Diciembre 2000), 437-457 pp.

El mito Einstein se ha formado básicamente en torno a sus teorías relativistas que, entre otras implicaciones, conducían a una original concepción del espacio-tiempo e incluso a una nueva forma de descripción del mundo físico. No obstante, sus contribuciones a la teoría cuántica —aunque no tan divulgadas— son de tal envergadura que por sí solas constituyen un aporte más que suficiente para que su autor ocupara un destacadísimo lugar entre los grandes creadores científicos de todos los tiempos. En el presente trabajo nos proponemos justificar tan categórica afirmación, empleando los medios que la historiografía moderna ofrece e incluyendo también resultados de algunas investigaciones propias.

1. Cincuenta años de especulación consciente

Albert Einstein (1879-1955) dirigió, en 1904, su atención hacia la radiación emitida por un cuerpo negro en equilibrio térmico, por considerarlo un sistema adecuado para contrastar ciertos aspectos relacionados con la mecánica estadística que acababa de formular¹. En 1905 —*su annus mirabilis*— publicó su primer trabajo sobre la teoría cuántica, en el que llegaba a la siguiente conclusión²:

La radiación cromática de baja densidad (dentro del rango de validez de la fórmula de Wien para la radiación) se comporta termodinámicamente

como si estuviera constituida por quanta de energía, mutuamente independientes, de valor $h\nu$.

Fue sólo el principio. Los *quanta* de energía pronto sobrepasaron el terreno de la radiación para inmiscuirse —de la mano de Einstein— en el de la materia, proporcionando una mejor comprensión del comportamiento de los calores específicos de los sólidos³. A partir del Primer Congreso Solvay (1911)⁴, los *quanta* de acción reemplazaron a los de energía, especialmente en el establecimiento de diversas reglas de cuantización, que restringían el número de estados permitidos para un sistema mecánico, en comparación con el tratamiento clásico. Su instalación en la física se aceleró notablemente; en buena parte debido a los éxitos espectaculares logrados por la aplicación de estas reglas —cuyos enunciados no estaban exentos de imprecisiones— a los espectros atómicos y a sus alteraciones por la influencia de campos eléctricos y de campos magnéticos⁵.

Por obra de las investigaciones de Einstein, en las que la mecánica estadística siempre jugó un destacadísimo papel⁶, en 1917 el *quantum* de radiación —una extraña unidad de intercambio de energía— se convirtió en fotón —una auténtica partícula con sus características propias—, lo que parecía implicar la naturaleza discreta de la radiación electromagnética⁷. En 1922 recibió el Premio Nobel «por sus servicios a la física teórica y, especialmente, por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico». La explicación teórica del efecto Compton, en 1923, acabó prácticamente con las grandes resistencias hacia el fotón. Las ideas originales de Bose, de 1924, para deducir la ley de Planck a partir de un tratamiento estadístico puramente cuántico⁸, fueron rápidamente extendidas por Einstein a un gas de moléculas⁹. Así Einstein presentó la teoría cuántica de los gases ideales, ¡antes de que la mecánica ondulatoria fuera formulada!

A partir de 1926, el nombre de Einstein se desliga de toda aportación constructiva a la teoría cuántica. Desde entonces sus esfuerzos en el campo los dirigió a la crítica de la nueva teoría, resaltando el carácter provisional e incompleto de la mecánica cuántica, y abriendo un debate —que no cabe considerar del todo extinguido— en torno a ciertos aspectos polémicos; entre ellos el de la relación entre el formalismo cuántico y la teoría de la medición. Se da así una situación ciertamente singular. Uno de los principales artífices del desarrollo de la física cuántica, aunque nunca plenamente convencido ni siquiera del carácter definitivo de sus propias aportaciones al campo, se aparta de la corriente general, justo cuando —debido a la coherencia de la doctrina y a sus éxitos experimentales— se impone la idea de que se ha llegado a desvelar el comportamiento del

mundo atómico. La opinión de Einstein se refleja claramente en una carta dirigida a M. Besso, a finales de 1951¹⁰:

Un total de cincuenta años de especulación consciente no me ha acercado a la respuesta a la cuestión «¿qué son los *quanta* de luz?» Es cierto que hoy día cualquier pillastre cree conocer la respuesta, pero se equivoca.

Ante tan compleja situación, resulta forzoso delimitar el alcance de este trabajo. Nos ocuparemos de las aportaciones de Einstein a la teoría cuántica hasta 1925, pero en lugar de comentar con algún detalle sus trabajos más relevantes, hemos optado —sin descuidar del todo lo anterior— por otra vía. Concretamente trataremos de poner de manifiesto ciertos rasgos característicos de sus principales aportaciones, así como de presentar algunas no tan conocidas. También haremos ciertas reflexiones a propósito del desigual impacto causado por sus ideas, algunas de las cuales fueron tachadas de revolucionarias por el propio autor; calificativo éste que Einstein no empleó al referirse a otras contribuciones suyas, incluidas sus teorías de la relatividad.

2. De las moléculas a los *quanta* de energía: sobre el famoso artículo de 1905

Este trabajo suele reconocerse como aquél en el que Einstein logró explicar teóricamente el efecto fotoeléctrico, a partir de una hipótesis cuántica sobre la energía de la radiación electromagnética, cuya relación con los *quanta* introducidos por Planck en 1900 no resulta del todo clara. Desde tal perspectiva, se requieren varias precisiones.

Comenzando por el final, hay que distinguir claramente la profunda diferencia entre las respectivas concepciones de Einstein y Planck. Éste impuso como condición previa —es decir, como suficiente— la cuantización de la energía de un oscilador cargado, para lograr una justificación teórica de la ley que lleva su nombre. El talante con el que Planck abordó el problema se refleja en ciertos párrafos de su contestación al requerimiento que se le hizo en 1931 para que, con la suficiente perspectiva, explicara el tipo de consideraciones que le llevaron a proponer su hipótesis cuántica en 1900¹¹:

Resumiendo brevemente, lo que hice puede ser descrito tan simplemente como un acto de desesperación. Por naturaleza yo soy pacífico y rehuyo todo tipo de aventuras dudosas. Pero llevaba seis años (desde 1894) de lu-

cha infructuosa con el problema del equilibrio entre radiación y materia y sabía que este problema era de fundamental importancia para la física; también conocía la fórmula que expresa la distribución de energía en el espectro. Por todo ello *había que* encontrar una interpretación teórica a cualquier precio, por muy alto que éste fuera. Para mí resultaba claro que la física clásica no podía ofrecer solución al problema ... Boltzmann había explicado cómo el equilibrio termodinámico se establece por medio de un equilibrio estadístico, y si un tratamiento similar se aplica al equilibrio entre materia y radiación, se llega a que la pérdida continua de energía [en un oscilador cargado] en forma de radiación se puede evitar suponiendo, como principio, que la energía ha de permanecer reunida en ciertos quanta. Se trataba de una hipótesis puramente formal y ciertamente no le dediqué mucha atención salvo que, a toda costa, me debía conducir a un resultado positivo.

Por el contrario Einstein invirtió completamente su línea de razonamiento. En lugar de partir —como hizo Planck— de los *quanta* para justificar el comportamiento de la radiación, Einstein razonó que la ley de radiación —por cierto, la propuesta por Wien, no la de Planck— parecía conducir a la cuantización de la energía de la radiación. Por decirlo brevemente, mientras que Planck demostró que la hipótesis cuántica era suficiente para explicar el comportamiento de la radiación térmica en equilibrio, Einstein optó por deducir la necesidad de los *quanta* —dada la extraordinaria novedad del concepto— para explicar ese comportamiento.

Pero había otras diferencias notables. Mientras los *quanta* de Planck se asociaban a una propiedad de ciertos osciladores materiales, los *quanta* de Einstein parecían hacer referencia —como se comprueba en el texto de la nota 1— a la estructura interna de la radiación. Así, en tanto que los *quanta* de Planck —aunque extraños y pendientes de aclaración— tal vez podrían resultar compatibles con el discreto que rige en la mecánica clásica, los de Einstein parecían sugerir —cuando menos— una revisión de la doctrina del campo electromagnético, en el que la propagación continua de energía a través del espacio era una noción esencial. Más adelante volveremos a este punto, al tratar el impacto de los *quanta* de Einstein.

La consulta de este trabajo de Einstein puede deparar otras sorpresas. Por ejemplo, permite comprobar que el efecto fotoeléctrico no juega allí un papel especialmente destacado. Su explicación teórica no constituye la motivación; es simplemente una de las tres aplicaciones que Einstein sugiere —junto con la regla de Stokes para la luminiscencia y la ionización de gases por luz ultravioleta— para contrastar tímidamente algunas consecuencias que se deducirían de la existencia de los *quanta* de energía.

Tal vez sorprenda aún más el tipo de razonamiento empleado por Einstein para llegar a los *quanta*. Se basa esencialmente en la analogía existente entre determinadas expresiones válidas para un gas ideal de moléculas, y las equivalentes para la radiación térmica. Dado que la energía del gas es la suma —discreta— de la de sus moléculas, Einstein sugiere emplear la analogía para traspasar ese carácter discreto a la energía de la radiación, concibiéndola así como adición de unidades elementales: los *quanta*. El argumento no resulta del todo convincente; menos aún si se tiene en cuenta que la analogía clave no es completamente general, sino que se da sólo en la región de Wien —las frecuencias para las que la distribución de energía se ajusta a la ley propuesta por éste— del espectro de la radiación del cuerpo negro¹².

3. Una década de dilemas cuánticos

El artículo de Einstein (1905), lejos de resolver un gran enigma, parecía abrir la puerta a otro de mayor envergadura: el de la aparente incompatibilidad entre los *quanta* y la por entonces muy prestigiosa teoría del campo electromagnético. Ante la disyuntiva de elegir entre el rechazo de la hipótesis cuántica de Einstein o la revisión —cuando menos— de la teoría de Maxwell, la inmensa mayoría de los líderes del momento se inclinaron por la primera opción. Esta posición generalizada se refleja con nitidez en un párrafo de la presentación —sumamente elogiosa, en su conjunto— que Planck, Nernst, Rubens y Warburg hicieron de Einstein como candidato a la Academia de Ciencias de Prusia [en 1913!]¹³:

En suma, puede afirmarse que entre los problemas importantes, tan abundantes en la física moderna, difícilmente exista uno ante el que Einstein no adoptara una posición de forma notable. Que, a veces, errara en sus especulaciones, como por ejemplo en su hipótesis acerca del quantum de luz, no puede esgrimirse realmente demasiado en su contra. Porque sin correr un riesgo de vez en cuando es imposible, incluso en la ciencia natural de mayor exactitud, introducir verdaderas innovaciones.

Tampoco Einstein parecía decantarse con claridad a favor de una propuesta sobre la definitiva introducción del *quantum* de radiación. Ni siquiera defendió esta idea en el Primer Congreso Solvay —convocado, a finales de 1911, para discutir acerca de las primeras ideas cuánticas— donde presentó una comunicación acerca del problema de los calores específicos¹⁴. Se trataba de una actualización de un trabajo anterior, ex-

tensamente reconocido como una interesante aportación acerca del problema de los calores específicos de los sólidos¹⁵; en el tratamiento, la hipótesis cuántica se refería a la energía de un oscilador material, lo que no parecía atentar —al menos claramente— contra los principios de la física clásica. No obstante, en la discusión que siguió a su presentación hubo de precisar más su posición al respecto¹⁶:

La hipótesis cuántica es un intento provisional para interpretar la expresión de la probabilidad estadística W de la radiación. Si se concibe la radiación compuesta por pequeños elementos de energía $h\nu$, se encuentra una interpretación intuitiva de la ley de probabilidad para la radiación de baja intensidad. Insisto en el carácter provisional de esta idea auxiliar, que no parece compatible con las conclusiones de la teoría ondulatoria comprobadas experimentalmente.

Está suficientemente documentado que la hipótesis cuántica de Planck fue mejor aceptada —o, como mínimo, menos rechazada— que la de Einstein. Ello fue debido principalmente a que fueron percibidas con diferentes implicaciones físicas. Pais, entre otros, ha analizado el desigual impacto con mayor detalle; nos conformamos con señalar aquí que la ínfima aceptación del *quantum* einsteiniano no varió sustancialmente ni siquiera tras que Millikan, en 1916, comprobara experimentalmente —con elevadísimo grado de fiabilidad— la validez de la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico¹⁷.

A pesar del ambiente generalizado contra la aceptación del *quantum* de radiación, Einstein publicó, entre 1906 y 1917, más de una veintena de trabajos acerca de la incipiente teoría cuántica. Constituyen intentos —más o menos logrados— de justificar la necesidad del *quantum* de radiación, a partir de los datos experimentales. Nos limitaremos a comentar ciertos aspectos de algunos de ellos¹⁸.

En 1906, Einstein dedicó un artículo a intentar poner de manifiesto las posibles inconsistencias del tratamiento de Planck que, a primera vista, no parecía atentar gravemente contra la física clásica¹⁹. Sin entrar en el análisis del trabajo no nos resistimos a reproducir la opinión de Klein sobre un aspecto importante del mismo²⁰:

Él [Einstein] logró penetrar en las oscuridades de la teoría de Planck sobre el espectro de la radiación del cuerpo negro, y quedó evidentemente sorprendido por lo que encontró. Todo el que aún piense que la utilización que Einstein hizo de los quanta de luz en 1905 fue una generalización o una extensión de la teoría de Planck, sólo necesita leer este trabajo de 1906 para quedar desengañado de tal idea.

En 1909 Einstein presentó una comunicación en la reunión de físicos germánicos, en Salzburgo, en la que aportaba nuevos elementos para la comprensión de la naturaleza de los *quanta* de radiación²¹. Una contribución que Pauli no dudó en calificar como «uno de los hitos en el desarrollo de la física teórica»²². Mediante el análisis de uno de sus famosos *Gedanken-Experiment* y el empleo magistral de sus métodos estadísticos, Einstein obtuvo resultados ciertamente adelantados a la época. No sólo argumentó con rigor a favor de la necesidad de admitir la existencia de los *quanta*, sino que estuvo a punto de atribuirles impulso; es decir, de dotarles de los atributos de una partícula²³.

El análisis que presentó en Salzburgo le llevó también a argumentar contra la ampliamente supuesta incompatibilidad entre los *quanta* de radiación y el electromagnetismo maxwelliano²⁴:

Resulta innegable que existe un amplio conjunto de hechos, referentes a la radiación, que muestran que la luz tiene ciertas propiedades fundamentales que pueden ser entendidas mucho más apropiadamente a partir del punto de vista newtoniano de la teoría de la emisión, que desde el punto de vista de la teoría ondulatoria. Es mi opinión, por consiguiente, que la próxima fase del desarrollo de la física teórica nos aportará una teoría de la luz que pueda ser interpretada como una especie de fusión de las teorías ondulatoria y de emisión.

Einstein bautizó como «ley de la equivalencia fotoquímica» al siguiente enunciado: la descomposición de un equivalente gramo de cualquier sustancia, en virtud de un proceso fotoquímico producido por radiación de frecuencia ν , exige por parte de ésta la aportación de una energía $Nh\nu$, donde N representa el número de Avogadro. La ley resulta una trivialidad si se describe la radiación en términos de *quanta*. Pero puede dar más juego si se contempla desde otra perspectiva.

Es lo que hizo Einstein, en 1912. Publicó un artículo —y un suplemento— en el que, una vez más, invirtió la línea deductiva usual para demostrar que, con razonamientos puramente termoestadísticos, se podía justificar la ley de Wien y, a partir de ésta, la necesidad de que cada molécula que se descomponga por efecto de la radiación absorba, en promedio, una energía $h\nu$ ²⁵. Es una aportación que hemos analizado con detalle en otra ocasión, pues no sólo representa un paso más en su búsqueda de la necesidad de los *quanta*, sino que —sobre todo— contiene una innovación: Einstein introduce unos procesos elementales —aquí de dos tipos, uno de excitación y otro de des-excitación— que representan un claro precedente de los que cuatro años más tarde —aunque ampliados

de dos a tres y formalizados— darían pie a la instalación definitiva de los *quanta* de radiación en la física²⁶.

Hemos de llamar la atención acerca de un artículo de Einstein (1914) que, escasamente citado al no ser reconocido como una aportación a la teoría cuántica, sí contiene un aspecto importante para nuestra forma de tratar el tema²⁷. Es el trabajo en que, por primera vez, Einstein utiliza la hipótesis cuántica como tal; es decir, como condición —suficiente— de partida y no como un resultado —necesario— deducible de los datos experimentales. Cabe pensar que la aparición del modelo atómico de Bohr, con sus llamativos éxitos en la explicación del espectro del hidrógeno, constituyera una razón importante, sobre todo de orden psicológico, para la reorientación que Einstein adoptó desde entonces en sus investigaciones acerca de la teoría cuántica. Pero ello no pasa de ser una justificación plausible, entre otras; de hecho en el trabajo no aparece referencia alguna a Bohr, ni a su trabajo de 1913.

No quisiéramos acabar este apartado sin hacer mención de otra semidesconocida publicación de Einstein, en 1917: una regla de cuantización con pretendidas ventajas en relación con otras reglas anteriores²⁸. Se trata, en nuestra opinión, de una contribución relevante por distintos aspectos, pero que ha sido prácticamente ignorada, incluso en varias reconstrucciones famosas del desarrollo de la teoría cuántica²⁹.

Ésta regla de cuantización nace con la pretensión explícita de establecer una formulación de las condiciones de cuantización que resulte independiente de las coordenadas elegidas para su aplicación, lo que no sucedía con las reglas de cuantización entonces existente, que privilegiaban las coordenadas en las que se daba la separación de variables en la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi, hecho que —en opinión de Einstein— nada tiene que ver con el problema físico de la cuantización.

El enunciado de la regla y sus posibles aplicaciones fue sometido a crítica, sobre todo por parte de Epstein, resultando como consecuencia de ello que las pretendidas ventajas no resultaban tan claras³⁰. Pero aunque el objetivo no se logró del todo, la regla enunciada por Einstein se mostró eficaz en manos de L. de Broglie. Éste encontró argumentos que permitían interpretarla como una condición de resonancia, lo que le ayudó —en cierta medida y como el propio De Broglie reconoció— a reforzar sus ideas acerca de las ondas de fase asociadas a los puntos materiales³¹.

4. El nacimiento del fotón (1916-1917)

En 1916 el terreno estaba abonado para el surgimiento de ideas acerca de formas de interacción entre los átomos de Bohr y la radiación, que

condujeran —mediante el correspondiente tratamiento mecánico-estadístico— a la ley de radiación de Planck. El paso clave en esa dirección lo dio Einstein, tras completar su formulación de la relatividad general —su preocupación principal hasta entonces— a finales de 1915. Al retomar el problema cuántico se le ocurrió una nueva línea, que describió con estas palabras a Besso³²:

He tenido un destello de lucidez a propósito de la absorción y la emisión de radiación; esto te interesará. Una demostración completamente sorprendente de la fórmula de Planck, yo incluso diría *la* demostración. Todo completamente cuántico. Estoy ahora redactando este resultado.

Veamos cuál era ese «destello» al que se refería Einstein para lograr una «demostración completamente cuántica», pues introducía aspectos que habían de resultar cruciales para el desarrollo posterior de la teoría cuántica.

Aunque los razonamientos empleados por Planck en 1900 conducían a una fórmula indudablemente válida para el espectro de la radiación del cuerpo negro, la deducción se apoyaba —según Einstein— en supuestos incompatibles: en el tratamiento se simultaneaba el análisis clásico (electromagnetismo maxwelliano) de la emisión y absorción de radiación por osciladores cargados, con la cuantización de la energía de los mismos osciladores. Por coherencia lógica —y dada la demostrada impotencia de la física clásica para resolver por sí sola la situación— había que abolir cualquier recurso al electromagnetismo y tratar de encontrar una deducción estrictamente cuántica.

En esta línea, Einstein presentó una formulación original que pretendía liberar a la justificación teórica de la ley de Planck de esos —y de otros— inconvenientes: en su deducción afirmaba prescindir del marco maxwelliano y, además, reemplazaba aquellos oscuros resonadores planckianos —asociados a la materia como recurso para disponer de un modelo capaz de hacer posible la interacción entre ésta y la radiación— por moléculas susceptibles de experimentar transiciones bohrianas. La base del nuevo tratamiento era la consideración del equilibrio estadístico entre la radiación y las moléculas, suponiendo que éstas sólo pueden existir en un conjunto discreto de estados energéticos³³.

Pero la principal innovación afecta a la descripción de la interacción entre materia y radiación en función de tres procesos elementales: uno espontáneo (*Ausstrahlung*), en el que las moléculas emiten radiación sin estímulo exterior, y dos inducidos por la radiación presente (*Einstrahlung*). Estos últimos —uno de emisión y otro de absorción— se suponía

que ocurrían con una probabilidad proporcional a la densidad de radiación presente, mientras que la emisión espontánea era independiente de la radiación. El tratamiento —esencialmente consistente en la imposición del equilibrio estadístico— conduce al anhelado resultado: la deducción de la ley de Planck. Dos de estos procesos —la absorción de radiación y la emisión espontánea— eran adaptaciones de los previamente introducidos en el análisis de la equivalencia fotoquímica: los de excitación y des-excitación, respectivamente. Pero empleando únicamente estos dos procesos se obtenía la ley de Wien, y no la de Planck, por lo que la emisión inducida por la radiación presente —el fundamento teórico del láser— resultaba novedad imprescindible para obtener la ley de Planck, que constituía, en principio, el objetivo esencial.

Es importante destacar que entre las hipótesis de partida figura la naturaleza discreta de los intercambios de energía entre materia y radiación; es decir, la existencia de los *quanta* de radiación, pero no se incluyen supuestos sobre su valor. El que esta unidad elemental de intercambio energético —para el caso de radiación monocromática de frecuencia ν — valga $h\nu$, es otro resultado del trabajo, que se obtiene a partir de la ley del desplazamiento, por entonces ampliamente confirmada por los experimentos.

Hasta aquí, la primera parte del trabajo. Pero la deducción de la fórmula de Planck sin recurrir al electromagnetismo maxwelliano³⁴, no le pareció a Einstein el resultado más importante de su trabajo, a juzgar por una carta en la que se lo anticipaba a Besso³⁵:

Lo que hay de esencial [en Einstein (1917 a)] es que las consideraciones *estadísticas* que conducen a la ley de Planck se han *sistematizado* (...). Esto conduce al resultado (que todavía no se encuentra en el trabajo que te he enviado) de que, cuando existe intercambio de energía elemental entre la radiación y la materia, se transfiere el impulso $h\nu/c$ a la molécula. Se deduce que todo proceso elemental de esta naturaleza es un proceso *enteramente orientado*. Así queda establecida la existencia de los cuantos de luz.

En el mismo artículo, a la hora de comentar las conclusiones, Einstein señalaba como resultado principal, precisamente, esta transferencia de impulso a la molécula en los procesos elementales³⁶. A tal conclusión había llegado en la segunda parte de su trabajo, en la que se autoplantaba un test de coherencia, ante la novedad de las hipótesis empleadas. Para ello Einstein recurrió —como en tantas otras ocasiones— al análisis de las fluctuaciones de energía —ahora en su *Gedanken-Experiment* de 1909— llegando a un resultado no necesario para deducir la ley de

Planck, pero sí para que el tratamiento tuviera coherencia lógica. Es el momento en el que los *quanta* de radiación, hasta entonces imprecisas unidades de intercambio energético, se transforman en auténticas partículas —los fotones— con características específicas, que dotan de pleno carácter discreto a la radiación, en su interacción con la materia³⁷.

Pero el impacto del fotón introducido por Einstein en 1916-1917 no fue del todo positivo, por decirlo suavemente. Su aceptación imponía un alto precio, pues parecía implicar la revisión —cuando menos— de la teoría del campo electromagnético; todo ello en virtud de algo recurrente en Einstein, pero tan ajeno a la teoría y a la práctica de la mayoría de sus colegas como era el análisis de las fluctuaciones, en un experimento ideal³⁸. La actitud más generalizada fue la de mantener a toda costa la imagen clásica del electromagnetismo maxwelliano y, en la medida de lo posible, tratar de profundizar en el mecanismo de la interacción materia-radiación, siempre con la esperanza de lograr en algún momento eliminar la noción de fotón, por innecesaria.

En 1923 se operó un cambio sustancial, como consecuencia de la publicación de la explicación teórica del efecto Compton, a partir de la aplicación conjunta de la cinemática relativista y de la teoría cuántica —en principio dos teorías independientes— al choque elástico entre un fotón y un electrón libre. Puede considerarse que desde entonces el fotón quedó definitivamente instalado en la física, a pesar de que la resistencia no desapareció del todo en esa fecha.

Cabe recordar que en 1924 Bohr, Kramer y Slater protagonizaron un último intento por prescindir del fotón, a pesar del crucial papel representado por éste en la explicación del efecto Compton. Publicaron un conocido artículo en el que rechazaban sin ambigüedad la realidad del fotón, a costa de introducir en la interacción radiación-materia propiedades entonces tan inusuales como la no conservación de la energía ni del impulso en los procesos elementales. El artículo de Bohr, Kramer y Slater no tuvo repercusión —por lo que al destierro del fotón se refiere— pues, en 1925, Bothe y Geiger pusieron de manifiesto experimentalmente lo inadecuado de ciertas predicciones de aquellos, y lo acertado de las basadas en la existencia del fotón³⁹.

5. De los fotones a las moléculas: la teoría cuántica de los gases ideales (1924-1925)

Bose había presentado en 1924 un trabajo —traducido por Einstein al alemán y recomendado para su urgente publicación— en el que se de-

ducía por vez primera la fórmula de Planck, de una forma verdaderamente independiente del electromagnetismo clásico⁴⁰. A cambio se hacía pleno uso del fotón y de la hipótesis de que sus estados no estaban asociados a los puntos del espacio de las fases, sino a regiones de éste —celdas— de volumen finito, de valor h^3 .

La deducción pasaba por una original forma de distribuir los fotones entre las celdas, para calcular la probabilidad de un estado. Introducida dicha probabilidad en el principio de Boltzmann se obtenía la entropía de la radiación, de la que se deducía sin dificultad —tras la imposición de la condición de equilibrio como estado de máxima entropía— la fórmula de Planck para la radiación. Hoy diríamos que la idea de Bose consistió simplemente en tratar a los fotones como partículas indistinguibles. Pero la terminología no sólo resulta anacrónica, sino que conduce a una idea falsa del contexto en el que se produjo la aportación de Bose quien, según propia confesión, nunca fue consciente de que su tratamiento representara una innovación, pues pensó que actuaba plenamente dentro del marco de la mecánica clásica de Boltzmann⁴¹:

No tenía idea de que lo que había hecho era realmente novedoso (...) No era yo estadístico hasta el punto de saber que lo que hacía era algo distinto de la estadística de Boltzmann.

Einstein, en cambio, sí era estadístico y percibió inmediatamente que la deducción de Bose representaba una forma de aunar ideas cuánticas y mecánico-estadísticas, lo que implicaba —de hecho— reemplazar la mecánica estadística de Boltzmann por una teoría diferente. Aunque era demasiado prematuro precisar el significado y el alcance del nuevo método, vio enseguida una aplicación del mismo. El trabajo de Bose ofrecía la peculiaridad de considerar a los fotones como si de partículas ordinarias se tratara, con la salvedad de que tenían masa nula y dos estados de polarización. Einstein invirtió el sentido de la analogía que en 1905 le llevó desde el gas ideal a los *quanta*, para ahora transplantar las ideas de Bose sobre éstos a las moléculas. Tan inmediata le resultó la adaptación que ¡en una semana! elaboró una teoría cuántica de los gases materiales ideales, completada cuatro meses después con algunos detalles a los que nos referiremos más adelante⁴²: había nacido así —antes de que apareciera cualquier formulación de la mecánica cuántica— la luego llamada mecánica estadística de Bose-Einstein.

La nueva teoría de los gases resolvía varios enigmas largamente pendientes. Entre otros, aclaraba diversos problemas asociados con el teorema de equipartición de la energía y explicaba ciertas anomalías experi-

mentalmente observadas en relación con la ley de Dulong-Petit⁴³. Predecía el fenómeno luego conocido como condensación de Bose-Einstein; también precisaba en qué situaciones la mecánica estadística de Boltzmann se podía considerar una aproximación aceptable de la nueva teoría. Pero había un aspecto especialmente oscuro en el nuevo tratamiento cuántico que fue puesto de manifiesto por Ehrenfest, entre otros. Einstein lo abordó en su segunda memoria —la de 1925— planteando la cuestión en los siguientes términos⁴⁴:

Ha sido criticado por el Sr. Ehrenfest y otros colegas que en la teoría de Bose, y en la análoga mía para el gas ideal, los quanta (y las moléculas, respectivamente) no son tratados como entidades estadísticamente independientes entre sí, sin que ello se haya indicado explícitamente en nuestros respectivos trabajos. Ello es completamente exacto. Si se trata a los quanta como estadísticamente independientes los unos de los otros, por lo que respecta a su localización, se obtiene la ley de Wien; si se trata a las moléculas de gas de forma análoga, se obtiene la ecuación de estado clásica de los gases perfectos, aunque en el resto se proceda exactamente como Bose y yo mismo hemos hecho. Voy a comparar aquí los dos métodos para el gas, con objeto mostrar claramente en qué se diferencian y facilitar la comparación entre nuestros resultados y los de la teoría de moléculas independientes.

Resultaba que, en efecto, como consecuencia del nuevo tratamiento, se introducía una cierta correlación entre las moléculas del gas ideal. La existencia de tan misteriosa influencia entre dichas moléculas —supuestamente libres— fue puesta de manifiesto por Einstein, aunque de forma un tanto indirecta: mostró que si se trataban con expresa independencia estadística —es decir, «a lo Boltzmann»— se obtenían resultados distintos a los que proporcionaba el nuevo método cuántico; dado que con éste se obtenían, entre otros, un par de resultados que con la mecánica estadística clásica no se podían obtener conjuntamente —en concreto, la aditividad de la entropía y el tercer principio de la termodinámica— Einstein se inclinó por adoptar el nuevo método y tratar de profundizar en el significado de la enigmática influencia entre las moléculas del gas ideal⁴⁵. Así, en cierta forma, puede afirmarse que Einstein se apercibió —aunque de forma un tanto rudimentaria, pero antes del advenimiento de la mecánica cuántica— de la regla de superselección que impone al estado cuántico de un agregado de partículas idénticas no localizadas unas ciertas condiciones de simetría, aunque no exista interacción dinámica entre sus componentes.

Einstein no se conformó con obtener resultados mediante la aplicación del nuevo método estadístico. Una vez más, ante la introducción de

un nuevo concepto con serias implicaciones, se planteó un test para comprobar la coherencia del tratamiento. Y también una vez más —como en 1916-1917, a propósito de los tres procesos elementales introducidos— recurrió al análisis de las fluctuaciones —ahora no de la energía, sino del número de moléculas— en otro *Gedanken-Experiment* acerca de dos gases de la misma naturaleza; pero esta vez el razonamiento no aclaró ninguna cuestión pendiente. Más bien al contrario: el inesperado resultado obtenido por Einstein tras el análisis de dichas fluctuaciones le llevó a pensar que todo resultaba más coherente si se asociaba alguna característica de tipo ondulatorio a las moléculas, lo cual —aunque sumamente impreciso en aquel momento— no le pareció una idea intrascendente⁴⁶:

Me propongo profundizar un poco en esta interpretación porque creo que se trata de algo más que de una simple analogía.

En una publicación verdaderamente destacada L. De Broglie [se cita la tesis doctoral de éste, de 1924] ha expuesto cómo se puede asociar un campo de ondas (escalar) a una partícula material, o a un sistema de partículas materiales.

Un sencillo cálculo —que Einstein afirma haber hecho, pero que no muestra en su trabajo— le lleva a manifestarse convencido de la coherencia entre estas ideas de L. de Broglie, y el resultado de su análisis de la fluctuaciones; pero no se piense que estas consideraciones de Einstein acerca de la idea de asociar un campo escalar ondulatorio a cada partícula —un clarísimo precedente de la dualidad onda-corpúsculo, en la línea ya apuntada en 1909⁴⁷— era algo puramente formal. En su trabajo incluye sugerencias acerca de la posible detección de esos campos, mediante experimentos en torno a fenómenos de difracción asociados a haces de partículas⁴⁸:

Este campo ondulatorio —cuya naturaleza física nos resulta oscura por ahora— debe, en principio, poder ser detectado por los movimientos que le corresponden. Así, un haz de moléculas de gas que atraviesa una abertura deberá sufrir una difracción, análoga a la que experimenta un rayo luminoso. Para que un fenómeno tal pueda ser observado, hace falta que la longitud de onda λ sea de un orden de magnitud comparable al de las dimensiones de la abertura.

No se le ocultó a Einstein la dificultad de llevar a cabo este tipo de experimentos, que mostraran efectos del hipotético aspecto ondulatorio de la materia. Llegó a pensar en difracciones de haces de moléculas me-

diante colisiones con moléculas en reposo. Como es bien conocido, en poco tiempo se dispararon acontecimientos —desarrollos teóricos y experimentos— que modificaron la situación y llegaron mucho más lejos que las arriesgadas previsiones de Einstein y De Broglie⁴⁹. En esta línea el auténtico impulso llegó meses después de la mano de Schrödinger. Pero las ideas de aquellos tuvieron indudable influencia en el desarrollo de la mecánica ondulatoria. Schrödinger lo reconoció en diversas ocasiones, como en ésta, de 1926⁵⁰:

Le agradezco de todo corazón su tan amable carta del día 16. Su aprobación y la de Planck son tan preciosas para mí como las de medio mundo. Por lo demás, todo ello [el desarrollo de la teoría de Schrödinger] no habría aparecido aún, y puede que jamás (al menos por lo que a mí respecta) si, en su segundo artículo sobre el gas degenerado, Vd. no me hubiera abierto los ojos acerca de la importancia de las ideas de De Broglie.

6. Epílogo

Es un hecho que, desde la primavera de 1925, el nombre de Einstein aparece desvinculado de toda aportación constructiva al desarrollo de la teoría cuántica, mostrándose cada vez más escéptico ante el cariz de los acontecimientos. A finales de 1925, se refería al formalismo de la mecánica matricial —con tono un tanto irónico— en estos términos⁵¹:

La cosa más interesante suministrada últimamente por la teoría es la de Heisenberg-Born-Jordan de los estados cuánticos. Un verdadero cálculo de hechicería, donde aparecen determinantes infinitos (matrices) en lugar de las coordenadas cartesianas. Esto es eminentemente ingenioso y, a causa de su complicación, está suficientemente protegido contra toda demostración de falsedad.

El formalismo de la mecánica ondulatoria le mereció, en principio, mayor consideración, llegando a dedicar ciertos elogios a los primeros desarrollos de la misma, presentados por Schrödinger en 1926, que constituían la base de la nueva teoría y que incluían la luego conocida como «ecuación de Schrödinger independiente del tiempo»⁵². Parece que ésta fue su última alabanza a cualquier presentación de la mecánica cuántica. Sin duda, estuvo estrechamente relacionado con el mazazo que para Einstein representó, no tanto el desarrollo del formalismo cuántico, como sus implicaciones; en particular la interpretación probabilística de la función de onda —introducida por Born a mediados de 1926— fue la gota

que llenó el vaso de su insatisfacción. En una famosa carta a Born, escrita a finales de 1926, Einstein explicaba su posición⁵³:

La mecánica cuántica es ciertamente impresionante. Pero una voz interior me dice que no constituye aún la última palabra. La teoría explica muchas cosas, pero realmente no nos acerca más al secreto de «el viejo» [sic]. Yo, en cualquier caso, estoy convencido de que *Él* no juega a los dados.

Su marginación científica llegó casi a ser una marginación social, a pesar del interés que gran parte de los colegas —especialmente los de su generación— tenían por mantener a Einstein como uno de los protagonistas del desarrollo de la nueva teoría cuántica. Un ejemplo que corrobora lo anterior es su actitud en relación con el Quinto Congreso Solvay, convocado en el otoño de 1927 —bajo el título de «Electrones y fotones»— para analizar y discutir los múltiples aspectos de los diferentes desarrollos cuánticos surgidos en los dos o tres últimos años. Lorentz, como presidente del congreso, le cursó una invitación para presentar en el mismo una ponencia acerca de las estadísticas cuánticas, dado su protagonismo en el nacimiento de la primera de ellas. La contestación de Einstein contiene elementos suficientes para detectar el profundo desaliento que comenzaba a embargarle⁵⁴:

Recuerdo haberme comprometido con usted a hacer un informe sobre estadística cuántica en el Congreso Solvay. Después de mucha reflexión por sí y por no, llegué al convencimiento de que no soy competente para hacer tal informe, de una forma que realmente corresponda al estado de cosas. La razón está en que no he podido participar en el desarrollo moderno de la teoría cuántica, tan intensamente como hubiera sido necesario para este propósito. Esto se debe, en parte, a que tengo muy escaso talento receptivo para seguir por completo los desarrollos tormentosos, y en parte también, porque no apruebo la forma de pensar puramente estadística sobre la que están basadas las nuevas teorías... Hasta ahora continué confiando en poder contribuir con algo de valor en Bruselas; he abandonado esa esperanza. Le ruego no se disguste conmigo por ello; no lo tomé a la ligera, sino que probé con todas mis fuerzas... Quizá Herr Fermi en Bologna... o Langevin... podrían hacerlo bien.

En el congreso estaban presentes, además de los mencionados Lorentz y Einstein, los principales creadores de la antigua y de la nueva teoría cuántica; entre ellos Planck, Bohr, Ehrenfest, Born, Schrödinger, De Broglie, Pauli, Heisenberg y Dirac. Einstein no presentó comunicación alguna en el congreso; no obstante mostró insistentemente su desacuer-

do —también Schrödinger y De Broglie, aunque con distintos matices— con la interpretación que se daba al formalismo de la nueva teoría, especialmente a través de las intervenciones de Bohr. El debate que allí surgió entre ambos no puede considerarse del todo extinguido, pues no sólo afecta a la interpretación del formalismo de la mecánica cuántica, sino — en nuestra opinión— a la misma forma de entender el conocimiento científico⁵⁵.

Einstein nunca dejó de pensar que había que investigar en torno a la búsqueda de una nueva teoría —algo así como una «estructura fina» de la mecánica cuántica— en la que los fenómenos físicos pudieran ser descritos con independencia de peculiaridades asociadas a las formas de observación. Por supuesto que aceptaba plenamente los resultados proporcionados por la aplicación de la mecánica cuántica; pero siempre entendidos como algún tipo de promedio deducible de la nueva teoría, aún por encontrar. Sus discusiones con Bohr, aunque colaboraron enormemente a la clarificación de variados aspectos relacionados con la interpretación de la mecánica cuántica, no hicieron cambiar sustancialmente las ideas de Einstein en estos temas⁵⁶.

Finalmente una anécdota al respecto⁵⁷. Durante una de las sesiones del Quinto Congreso Solvay, Ehrenfest le pasó una nota a Einstein en la que escribió: «¡No te rías! Existe una sección especial en el purgatorio para los profesores de teoría cuántica, donde están obligados a escuchar clases de física clásica diez horas cada día». A lo que Einstein contestó: «Sólo me río de su ingenuidad. ¿Quién sabe el que reirá dentro de unos pocos años?». En relación con el desarrollo posterior de estas cuestiones, Einstein nunca llegó a esbozar una sonrisa.

Notas

¹ Véase, por ejemplo, Pais (1984), pp. 79-83.

² Einstein (1905), p. 97. (Para expresar la energía de un *quantum* hemos empleado la notación actual).

³ Einstein (1907).

⁴ Langevin *et al.* (1912).

⁵ A propósito de las reglas de cuantización —aunque más adelante nos habremos de referir a alguna de ellas con más detalle— y de sus problemas y aplicaciones, véase, por ejemplo, Jammer (1966), pp. 89-109.

⁶ Véase, por ejemplo, Navarro (1991).

⁷ Einstein (1917 a).

⁸ Las deducciones anteriores a la de Bose, sin excepción, incorporaban simultáneamente hipótesis cuánticas (de naturaleza discreta) y expresiones deducidas a partir del electromagnetismo maxwelliano (de naturaleza continua). Para un análisis más detalla-

do de la aportación de Bose —y de su relación con Einstein— véase, por ejemplo, Navarro (1996).

⁹ Einstein (1924, 1925).

¹⁰ Carta de Einstein a M. Besso, de 12 de diciembre de 1951; véase Speziali (1994), p. 396.

¹¹ Carta de Planck a R. W. Wood, de 7 de octubre de 1931. (Énfasis en el original). Reproducida en Hermann (1971), pp. 23-24.

¹² Para mayores precisiones acerca de este famoso artículo de Einstein (1905), véase, por ejemplo, Navarro (1990), pp. 98-110.

¹³ La presentación está reproducida en Beck (1995), pp. 337-338.

¹⁴ Einstein (1912 a).

¹⁵ Einstein (1907).

¹⁶ Langevin *et al.* (1912), p. 443.

¹⁷ Pais (1984), pp. 386-390.

¹⁸ Para detalles más abundantes y precisos en relación con estas aportaciones de Einstein, véase, por ejemplo, Navarro (1990), pp. 111-134.

¹⁹ Einstein (1906).

²⁰ Klein (1980), p. 171.

²¹ Para el texto de la comunicación, véase Einstein (1909).

²² Pauli (1970), p. 154.

²³ Véase, por ejemplo, Pais (1984), pp. 410-411.

²⁴ Beck (1989), p. 379. La lectura del párrafo suponemos que resultará disuasoria para todo aquél que piense que la insatisfacción de Einstein ante la mecánica cuántica pueda deberse a la dualidad onda-corpúsculo, que ésta incorpora.

²⁵ Einstein (1912 b).

²⁶ Bergia *et al.* (1988), pp. 85-90.

²⁷ Einstein (1914).

²⁸ Einstein (1917 b).

²⁹ No se cita, por ejemplo, en Jammer (1966).

³⁰ Es un tema sobre el que estamos trabajando, junto a S. Bergia, y pronto estaremos en condiciones de presentar un análisis detallado del contexto y del impacto asociados a esta contribución de Einstein.

³¹ Véase, por ejemplo, Navarro (1997).

³² Carta de Einstein a M. Besso, de 11 de agosto de 1916; véase Speziali (1994), p. 129. (Énfasis en el original).

³³ La condición de equilibrio térmico se impone mediante el empleo de la colectividad canónica.

³⁴ No es cierto que en el tratamiento se prescindiera por completo del formalismo maxwelliano. Pero ello no resulta excesivamente problemático para Einstein, porque cree que los recursos utilizados perdurarán sea cual sea la forma final del electromagnetismo; véase Einstein (1917 a), p. 178 de la versión inglesa.

³⁵ Carta de Einstein a M. Besso, de 6 de setiembre de 1916; véase Speziali (1994), pp. 131-132. (Énfasis en el original). La versión en español que citamos, contiene un error de fechas: escribe diciembre, en lugar de setiembre.

³⁶ Einstein (1917 a), p. 182 de la versión inglesa.

³⁷ El nombre de *fonón*, aunque lo utilizaremos desde ahora para designar lo que se siguió denominando *quantum* de radiación, es posterior. Lo introdujo G. Lewis en 1926 y se consagró en el Quinto Congreso Solvay (1927); véase Pais (1984), p. 409.

³⁸ La concepción y las manifestaciones de las fluctuaciones en mecánica-estadística es una característica del método de Einstein que no se da en el de Gibbs, por ejemplo, a pesar de que ambos suelen aceptarse como equivalentes; véase Navarro (1998), especialmente p. 158.

³⁹ Para más detalles en torno al tema, véase Pais (1984), cap. 22, titulado «Interludio: la propuesta BKS».

⁴⁰ Bose (1924).

⁴¹ Manifestaciones de Bose a Mehra que aparecen reproducidas en Pais (1984), p. 426. Para un análisis más preciso del contenido de Bose (1924), puede verse, por ejemplo, Navarro (1990), pp. 161-170. Y para más detalles acerca de la trayectoria científica del físico hindú, véase Navarro (1996).

⁴² Einstein (1924 y 1925).

⁴³ En relación con los problemas asociados al teorema de equipartición de la energía —entre 1905 y 1925— y su solución a la vista de Einstein (1924 y 1925), puede verse, por ejemplo, Bergia *et al.* (1997).

⁴⁴ Einstein (1925), p. 182 de la versión francesa.

⁴⁵ *Ibid.*, pp. 182-185.

⁴⁶ *Ibid.*, p. 187.

⁴⁷ En este contexto, puede ser interesante remitir a nuestra nota 24, y al texto al que se refiere.

⁴⁸ Einstein (1925), p. 188 de la versión francesa.

⁴⁹ Para mayores precisiones acerca de la posible interconexión entre las ideas de ambos acerca del aspecto ondulatorio de la materia, véase, por ejemplo Pais (1994), pp. 47-53.

⁵⁰ Carta de Schrödinger a Einstein, de 23 de abril de 1926; véase Balibar *et al.* (1989), p. 202.

⁵¹ Carta de Einstein a M. Besso, de 25 de diciembre de 1925; véase Speziali (1994), p. 228.

⁵² La alabanza se encuentra en una carta de Einstein a M. Besso, de 1 de mayo de 1926; véase Speziali (1994), p. 235. Hace referencia a las dos primeras memorias, de las cuatro de Schrödinger (1926).

⁵³ Carta de Einstein a M. Born, de 4 de diciembre de 1926; véase Born (1971), p. 91. (Énfasis en el original).

⁵⁴ Carta de Einstein a Lorentz, de 17 de junio de 1927; citada en Pais (1984), p. 434.

⁵⁵ Para más detalles en torno a diferentes aspectos del desarrollo del Quinto Congreso Solvay, véase Mehra (1975), pp. 132-181.

⁵⁶ En cuanto al debate Einstein-Bohr y a sus implicaciones posteriores, nos remitimos al artículo de J. L. Sánchez Gómez, incluido en este mismo ejemplar de *Arbor*.

⁵⁷ Véase Mehra (1975), p. 152.

Bibliografía

- BALIBAR, F., DARRIGOL, O., JECH, B. (eds.) (1989): *Albert Einstein. Œuvres choisies*, vol. 1, *Quanta*. Seuil/CNRS, Paris.
- BECK, A. (1989): *The collected papers of Albert Einstein*, vol. 2, *The Swiss years: writings, 1900-1909*. (English translation). Princeton University Press, Princeton.

- BECK, A. (1995): *The collected papers of Albert Einstein*, vol. 5, *The Swiss years: correspondence, 1902-1914*. (English translation). Princeton University Press, Princeton.
- BERGIA, S., NAVARRO, L. (1988): «Recurrences and continuity in Einstein's research on radiation between 1905 and 1916», *Archive for History of Exact Sciences* 38, 79-99.
- BERGIA, S., NAVARRO, L. (1997): «Early quantum concepts and the theorem of equipartition of energy in Einstein's work (1905-1925)», *Physica* 34, 183-223.
- BORN, M. (ed) (1971): *The Born-Einstein Letters. Correspondence between Albert Einstein and Max and Hedwig Born from 1916 to 1955, with commentaries by Max Born*. (Traducción por Irene Born de la versión original alemana, de 1969). MacMillan, London.
- BOSE, S. N. (1924): «Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese», *Zeitschrift für Physik* 26, 178-181. Versión inglesa en: Theimer *et al.* (1976).
- EINSTEIN, A. (1905): «Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt», *Annalen der Physik* 17, 132-148. Versión inglesa en: Beck (1989), pp. 86-103.
- EINSTEIN, A. (1906): «Zur Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption», *Annalen der Physik* 20, 199-206. Versión inglesa en: Beck (1989), pp. 192-199.
- EINSTEIN, A. (1907): «Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme», *Annalen der Physik* 22, 180-190. Versión inglesa en: Beck (1989), pp. 214-224.
- EINSTEIN, A. (1909): «Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung», *Physikalische Zeitschrift* 10, 817-826. Versión inglesa en: Beck (1989), pp. 379-394.
- EINSTEIN, A. (1912 a): «L'état actuel du problème des chaleurs spécifiques», en: Langevin *et al.* (1912), pp. 407-435.
- EINSTEIN, A. (1912 b): «Thermodynamische Begründung des photochemischen Äquivalentgesetzes», *Annalen der Physik* 37, 832-838 y 38, 881-884.
- EINSTEIN, A. (1914): «Beiträge zur Quantentheorie», *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* 16, 820-828.
- EINSTEIN, A. (1917 a): «Zur Quantentheorie der Strahlung», *Physikalische Zeitschrift* 18, 121-128. Con el mismo título y contenido había aparecido previamente en *Physikalische Gesellschaft Zürich, Mitteilungen* 18 (1916), 47-62. Versión inglesa en: Ter Haar (1967), pp. 167-183.
- EINSTEIN, A. (1917 b): «Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein», *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* 19, 82-92.
- EINSTEIN, A. (1924): «Quantentheorie des einatomigen idealen Gases», *Preussische Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse, Sitzungsberichte* 22, 261-267. Versión francesa en: Balibar *et al.* (1989), pp. 172-179.
- EINSTEIN, A. (1925): «Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung», *Preussische Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse, Sitzungsberichte* 23, 3-14. Versión francesa en: Balibar *et al.* (1989), pp. 180-192.
- HERMANN, A. (1971): *The genesis of quantum theory (1899-1913)*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. (Versión alemana original, 1969).
- JAMMER, M. (1966): *The conceptual development of quantum mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- KLEIN, M. J. (1980): «No firm foundation: Einstein and the early quantum theory», en: Woolf (1980), pp. 161-185.
- LANGEVIN, P., DE BROGLIE, M. (eds.) (1912): *La théorie du rayonnement et les quanta (Rapports et discussions de la réunion tenue à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911)*. Gauthier-Villars, Paris.

- MEHRA, J. (1975): *The Solvay conferences on physics. Aspects of the development of physics since 1911*. D. Reidel, Dordrecht.
- NAVARRO, L. (1990): *Einstein, profeta y hereje*. Tusquets, Barcelona.
- NAVARRO, L. (1991): «On Einstein's statistical-mechanical approach to the early quantum theory (1904-1916)», *Historia Scientiarum* 1, 39-58.
- NAVARRO, L. (1996): «Satyendranath Bose: un cometa fugaz», *Arbor CLIII*, 45-65.
- NAVARRO, L. (1997): «Sobre una regla de cuantización de A. Einstein (1917) y su influencia en L de Broglie», *Llull* 20, 597-622.
- NAVARRO, L. (1998): «Gibbs, Einstein and the foundations of statistical mechanics», *Archive for History of Exact Sciences* 53, 147-180.
- PAIS, A. (1984): *'El Señor es sutil...' La ciencia y la vida de Albert Einstein*. Ariel, Barcelona. (Versión inglesa original, 1982).
- PAIS, A. (1994): *Einstein lived here*. Clarendon Press, Oxford.
- PAULI, W. (1970): «Einstein's contributions to quantum theory», en: Schilpp (1970), pp. 147-160.
- SCHILPP, P. A. (ed.) (1970): *Albert Einstein: philosopher-scientist*. Open Court, La Salle. (Primera edición, 1949).
- SCHRÖDINGER, E. (1926): «Quantisierung als Eigenwertproblem», *Annalen der Physik: «Erste Mitteilung»* 79, 361-376, «Zweite Mitteilung» 79, 489-527, «Dritte Mitteilung» 80, 437-490, «Vierte Mitteilung» 81, 109-139. Versión inglesa de las cuatro memorias en: Schrödinger (1982).
- SCHRÖDINGER, E. (1982): *Collected papers on wave mechanics*. Chelsea, New York. (Esta versión incorpora —a la original inglesa, de 1928— cuatro conferencias de Schrödinger sobre mecánica ondulatoria).
- SPEZIALI, P. (ed.) (1994): *Albert Einstein. Correspondencia con Michele Besso (1903-1955)*. Tusquets, Barcelona. (Versión francesa original, 1979).
- TER HAAR, D. (1967): *The old quantum theory*. Pergamon Press, Oxford.
- THEIMER, O., RAM, B. (1976): «The beginning of quantum statistics», *American Journal of Physics* 44, 1056-1057.
- WOOLF, H. (ed.) (1980): *Some strangeness in the proportion: a centennial symposium to celebrate the achievements of Albert Einstein*. Addison Wesley, New York.