ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LX, numer 1 – 2012

LIDIA OBOJSKA

ALGEBRAICZNE ASPEKTY MEREOLOGII NIEEKSTENSJONALNEJ

1. WPROWADZENIE

Relacja części do całości już od starożytności była źródłem zainteresowań wielu uczonych. Arystoteles w czwartej księdze *Fizyki* rozróżnił osiem rodzajów relacji „bycia w" lub też „części do całości" [2]. Podstawową kwestią było rozeznanie, czy część jest „w" całości (zatem interesuje nas lokalizacja przestrzenna), czy też jest nieodzownym elementem całości, tzn. czy całość jest wyczerpywana przez swoje części. Oznacza to postawienie sobie pytania, czy część określa relację całość-część czy część-całość, np. czy dom to tylko ściany, fundament i dach, czy coś więcej. Arystoteles przeanalizował relację część-całość zarówno w ekstensjonalnym, jak i intensjonalnym znaczeniu, w sensie zawierania klas oraz zawierania pojęć, np. krowa jako gatunek jest częścią gatunku ssaków, ale także jej geny są częścią gatunku ssaków, ponieważ ssak to część składająca się na pojęcie krowa [2]. Taka dwupłaszczyznowa analiza została przyjęta przez wielu autorów, m.in. przez Tomasza z Akwinu, Lebniza, Brentana, etc.

Relacja część-całość jest również bardzo ważna dla metafizyki i logiki. Leibniz wyodrębnił dwa zasadnicze rodzaje tej relacji [4]: pierwsza z nich to ta, w której części mogą istnieć bez powiązania z całością. Takie obiekty Leibniz nazywa „agregatami". W tym przypadku całość to prosta suma swoich części, np. stos kamieni jest sumą poszczególnych kamyków składających się na niego. Z matematycznego punktu widzenia można uważać ten stos kamieni za klasyczny (Cantorowski) zbiór kamieni. Drugi rodzaj całości proponowany przez Leibniza to ten, w którym części są ze sobą istotnie powiązane: komputer nie byłby komputerem,

---

Dr LIDIA OBOJSKA – adiunkt Zakładu Algebry i Teorii Liczb w Instytucie Matematyki i Fizyki na Wydziale Nauk Ścisłych Uniwersytetu Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach; adres do korespondencji: ul. 3 Maja 54, 08-110 Siedlce; e-mail: lidia.obojska@gmail.com

gdyby pozbawić go pamięci czy procesora, tak samo człowiek nie byłby człowiekiem, gdyby był tylko sumą swoich części bez wzięcia pod uwagę relacji między nimi.

Jak widać, pojęcie całości jest ściśle powiązane z pojęciem zbioru. Stanisław Leśniewski [12], słynny polski logik ze szkoły lwowsko-warszawskiej, rozróżnił dwa zasadnicze pojęcia zbioru: w sensie dystrybutywnym (według idei Cantora) oraz w znaczeniu kolektywnym. Zbiór w sensie dystrybutywnym to pojęcie abstrakcyjne. Określa ono pewną całość, która jest zawsze możliwa do utworzenia z dowolnych elementów. Proces tworzenia zbioru jest zatem dokonywany jakby „od dołu": najpierw wybieramy elementy, a w następnym kroku grupujemy je w całość, nazywając ten nowo utworzony obiekt zbiorem. W sensie kolektywnym natomiast zbiór to całość utworzona ze swoich części. Perspektywa postrzegania całości jest zatem zupełnie odmienna: najpierw widzimy obiekt integralnie, jako całość, a dopiero w następnym kroku wyróżniamy jego części. To rozróżnienie między dwoma rodzajami całości jest powiązane z pojęciem podzielności i rozdzielania. Już sam Cantor zauważył pewien paradoks w jego pojęciu zbioru. Zbiór liczb rzeczywistych, którego obrazem jest prosta, nigdy nie będzie zwykłą sumą swoich punktów. Trzeba wziąć pod uwagę także relacje między nimi. Dlatego, z tego punktu widzenia, teoria zbiorów kolektywnych, nazywana inaczej mereologią, jest teorią ciekawą.

Mereologia ekstensjonalna – *EM* (z ang. *extensional mereology*) – w oryginalnym ujęciu Leśniewskiego [12] została ufundowana w oparciu o pojęcie relacji bycia częścią, która częściowo porządkuje uniwersum obiektów (relacja jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia). Teoria ta została dość szczegółowo przebadana przez wielu autorów: [9], [16], [6], [23], [19]. Udowodniono, że jest to model odpowiadający algebrom Boole'a bez zera, tzn. że w tym modelu nie istnieje element najmniejszy. Nie istnieje natomiast systematyczna analiza modelu mereologii nieekstensjonalnej – *NEM* (z ang. *non-extensional mereology*) – tzn. takiej, w której relacja pierwotna nie musi częściowo porządkować uniwersum obiektów (nie chodzi nam tutaj o znane algebraiczne podejście przez wprowadzenie relacji równoważności i operowaniu na klasach abstrakcji tej relacji [21]). Fragmentaryczne, nieformalne opracowania mereologii nieekstensjonalnej zostały opisane przez [8], [24], [7], nie ma natomiast systematycznego opracowania tej teorii. P. Simons [19] wspomina przypadek mereologii nieekstensjonalnej, analizując symetryczną relację koincydencji. A. Cotnoir [7] podaje ogólną deskrypcję takiego modelu, zatrzymując się na problemie nierozróżnialności elementów [24]. Niniejsza praca zatem pragnie być przyczynkiem do bardziej kompletnej analizy takich modeli. Nie wyczerpuje ona oczywiście wszystkich możliwości modeli nieklasycznych, ale pragnie zaoferować formalny i systematyczny opis takiej teorii.

Przez mereologię nieekstensjonalną zatem będziemy rozumieli teorię, w której relacja pierwotna, odpowiednik relacji bycia częścią, jest tylko *quasi*-porządkiem, tzn. nie jest spełniony warunek antysymetryczności. Aby przeanalizować tę teorię, w rozdziale drugim zajmiemy się pojęciem równości i identyczności obiektów matematycznych w związku z analizą pojęcia ekstensji. Rozdział trzeci to formalny opis modelu mereologii nieekstensjonalnej ukazujący, że odpowiada on algebraicznej strukturze kraty. W rozdziale czwartym kontynuujemy formalną analizę, wprowadzając relację porządku kratowego i dowodząc, że pełny model mereologii nieekstensjonalnej odpowiada, pod pewnymi warunkami, kracie implikatywnej z jedynką [18]. Praca kończy się krótkim podsumowaniem i dyskusją wyników.

2. EKSTENSJA A IDENTYCZNOŚĆ OBIEKTÓW

Na gruncie nauk ścisłych, w teorii mnogości, pojęcie identyczności obiektów wyraża *Aksjomat Jednoznaczności* (Równości zbiorów), który orzeka, że każdy zbiór, czyli matematycznie obiekt zbudowany ze swoich elementów, jest jednoznacznie wyznaczony przez swe elementy. Oznacza to, że dwa zbiory są równe (tzn. matematycznie identyczne, czyli są tym samym zbiorem), jeśli mają te same elementy [10], [17]. Zasadę równości zbiorów możemy zatem formalnie zapisać następująco:

Aksjomat 2.1 $A = B \equiv \forall x : (x \in A \equiv x \in B)$ [1]

Z zasady tej wynika, że zbiory $\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}$ itd. są wyznaczone jednoznacznie przez swoje elementy, tak więc dla dowolnego a istnieje dokładnie jeden zbiór, którego jedynym elementem jest *a*, itd. Zupełnie inaczej jest w przypadku zbiorów kolektywnych – mereologicznych. Zbiór wcale nie musi być wyznaczony jednoznacznie. Europa, może być zbiorem swoich państw, ale równocześnie zbiorem krain geograficznych pomiędzy Uralem a Oceanem Atlantyckim.

Na gruncie teorii aksjomatycznych różnica między teorią mnogości a teorią zbiorów kolektywnych wypływa przede wszystkim z pojęć pierwotnych tych teorii [17], [15] oraz z przyjętych aksjomatów. W przypadku teorii mnogości mamy do czynienia z relacją przynależności – $\in$, która jest relacją przeciw-

[1] W niniejszej pracy będziemy się posługiwali językiem logiki pierwszego rzędu ze zmiennymi indywiduowymi oznaczanymi małymi literami alfabetu łacińskiego.

zwrotną i nie jest relacją przechodnią[2]. W mereologii klasycznej oryginalną relacją pierwotną przyjętą przez Leśniewskiego była relacja bycia częścią[3] – $\sqsubseteq$, która jest relacją częściowego porządku (zwrotną, antysymetryczną i przechodnią[4]), i która jest synonimem przynależności elementu do zbioru. Można ugruntować mereologię także w oparciu o inne pojęcia pierwotne, np. na relacji bycia częścią właściwą [16], czy na relacji nakładania [11], czy też na relacji rozłączności [16], [11], [19], [9]. W tej pracy przez mereologię (= mereologię ekstensjonalną) będziemy zawsze rozumieli teorię, w której relacją pierwotną jest relacja bycia częścią – $\sqsubseteq$.

Mereologia dopuszcza istnienie obiektów jednakowych, tożsamych, ale składających się z różnych części. Także tu istnieje tak zwana zasada ekstensjonalności [24], która bardzo przypomina Aksjomat równości zbiorów:

Aksjomat 2.2. *Jeżeli x i y są obiektami złożonymi posiadającymi te same części właściwe, wtedy x jest tym samym obiektem co y.*

Zasada ekstensjonalności odpowiada kryterium identyczności dla obiektów złożonych, tzn. posiadających części właściwe. Mając dwa identyczne obiekty x i y, na podstawie nierozróżnialności obiektów identycznych, to, co jest prawdziwe dla x, powinno być też prawdziwe dla y, np. bryła gliny i posąg zrobiony z gliny. Wydaje się naturalne uważać, że mają one te same części właściwe, lecz nieprawdą jest, że wszystko to, co jest prawdą dla bryły, jest też prawdą dla posągu, np. bryłę można spłaszczyć, a posągu – nie. Z tych przyczyn niektórzy autorzy odrzucają zasadę ekstensjonalności [4].

Odnośnie do identyczności obiektów sam twórca mereologii, Stanisław Leśniewski, wyodrębnił trzy różne pojęcia identyczności: *identyczności indywiduów*, *słabej identyczności* i *mocnej identyczności*. Na gruncie Ontologii Elementarnej [13], [14], [1], zakładając, że nie ma nazw pustych, Leśniewski stworzył model, w którym jeśli wyrazimy funktor ε jako matematyczny funktor inkluzji $\subseteq$,

---

[2] Formalnie zapiszemy to następująco:

$\forall x : \neg(x \in x)$

$\forall x, y, z : \neg(x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z)$

[3] Przez Leśniewskiego nazywana *ingrediensem*. Leśniewski używa pojęcia części jako synonimu części właściwej. W niniejszej pracy pojęcie części będzie się zawsze odnosić do części niewłaściwej.

[4] $\forall x : x \sqsubseteq x$

$\forall x, y\ (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y)$

$\forall x, y, z\ (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq z)$

wtedy obiekty jednostkowe – indywidua będą singletonami, a nasze uniwersum – niepustą rodziną zbiorów. W ogólności, w teorii mnogości zakłada się, że elementy nie są zbiorami (jeśli nie działamy na rodzinach indeksowanych), gdyż prowadzi to do sprzeczności. W takim kontekście możemy wprowadzić atomową strukturę algebry Boole'a (z singletonami jako atomami), definiując funktory: sumy, iloczynu i różnicy zbiorów [20], [9]. Kontynuując, wprowadzamy funktor „$=_E$" – odpowiednik funktora identyczności „$=$", będącego funktorem dla indywiduów [$\forall U,W.(U\varepsilon X \wedge W\varepsilon X) \Rightarrow U=W$], za którego pomocą definiuje się pojęcie *słabej identyczności* dla obiektów złożonych:
$X =_E Y \equiv \forall Z.(Z\varepsilon X \Leftarrow Z\varepsilon Y)$.

Natomiast w Ontologii nieelementarnej tworzymy funktory wyższych rzędów, których argumentami mogą być również inne funktory. Na tym poziomie zasada ekstensjonalności gwarantuje nam, że funktory stosowane do identycznych argumentów dają identyczne obiekty, co w konsekwencji prowadzi do zasady Leibniza: $X=Y \equiv X\varepsilon V \wedge Y\varepsilon V \wedge \forall\varphi.(\varphi(X)\equiv\varphi(Y))$, gdzie X,Y – to obiekty, V – zbiór nazw, a φ – predykat.

Przy pewnych dodatkowych założeniach, w strukturach mereologicznych zasada ekstensjonalności jest konsekwencją tzw. *Mocnej Zasady Uzupełniania*, czyli faktu który głosi, że jeśli jeden obiekt nie jest częścią drugiego, to pierwszy z nich zawiera część, która nie przecina się z drugim. Jak zobaczymy w dalszej części pracy, fakt ten wcale nie nie musi zachodzić w mereologii nieekstensjonalnej.

W niniejszej pracy zatem, zajmując się mereologią nieekstensjonalną, dopuszczamy takie przypadki, kiedy nasze uniwersum obiektów M może składać się tylko z dwóch obiektów $\{a,b\}$. Relacją pierwotną jest zmodyfikowana relacja bycia częścią, którą oznaczymy symbolem „$\trianglelefteq$" oraz może zachodzić warunek: $(a \trianglelefteq b \wedge b \trianglelefteq a)$ dla różnych obiektów a,b. Będziemy stosować małe litery alfabetu łacińskiego do obiektów oraz wielkie – do zbiorów. Potraktujemy mereologię jako teorię nieelementarną, tzn. obok zmiennych indywiduowych będą występowały również zmienne przebiegające zbiory obiektów. Dodatkowo wykluczamy przypadek, kiedy uniwersum M złożone jest tylko z jednego obiektu (card M >1).

3. MEREOLOGIA NIEEKSTENSJONALNA – *NEM*

Niech $\trianglelefteq$ oznacza relację binarną, a M będzie dowolnym, niepustym, przynajmniej dwuelementowym zbiorem obiektów. Niech relacja $\trianglelefteq$ będzie relacją zwrotną i przechodnią, czyli spełnia następujące dwa warunki:

Aksjomat 3.1.
(NEM1) $\forall x \quad x \trianglelefteq x$
(NEM3) $\forall x, y, z \quad (x \trianglelefteq y \wedge y \trianglelefteq z \Rightarrow x \trianglelefteq z)$

Bezpośrednią konsekwencją tych własności jest następująca zależność:

Wniosek 3.1. $x \trianglelefteq y \equiv \forall z \ (z \trianglelefteq x \Rightarrow z \trianglelefteq y)$

Wniosek 3.1 jest równoważną formułą wyrażającą własność przechodniości dla relacji $\trianglelefteq$ i wypływa bezpośrednio z praw rozdzielności dla kwantyfikatora ogólnego.

A zatem x jest częścią y-a wtedy i tylko wtedy, gdy każda część x-a jest częścią y-a.

Za pomocą relacji $\trianglelefteq$, będącej nieekstensjonalnym odpowiednikiem mereologicznej relacji bycia częścią, zdefiniujemy trzy inne relacje, mające również swoje odpowiedniki w mereologii ekstensjonalnej. Pierwsza z tych relacji to relacja nakładania, określająca zachodzenie na siebie obiektów i stwierdzająca, że dwa obiekty nakładają się (bądź przecinają), jeśli istnieje obiekt, który jest częścią zarówno jednego jak i drugiego:

Definicja 3.1. *Relacją przecięcia lub nakładania nazywamy relację* „$\circ$” *spełniającą założenie:* $x \circ y \equiv \exists z \ (z \trianglelefteq x \ \wedge \ z \trianglelefteq y)$.

Kolejna relacja, to relacja rozłączności, która orzeka, że dwa obiekty x i y są rozłączne, jeśli nie istnieje żaden inny obiekt, który byłby częścią zarówno x-a, jak i y-a:

Definicja 3.2. *Relacją rozłączności nazywamy relację* „$\wr$”: $x \wr y \equiv \neg(x \circ y)$.

Trzecia relacja, to relacja części właściwej stwierdzająca, że dany obiekt x jest częścią właściwą obiektu y, jeśli x jest częścią y-a i x nie jest y-em.

Definicja 3.3. *Przez relację (odpowiednik relacji bycia częścią właściwą)* „$\triangleleft$” *rozumiemy relację:* $x \triangleleft y \equiv (x \trianglelefteq y \ \wedge \ x \neq y)$.

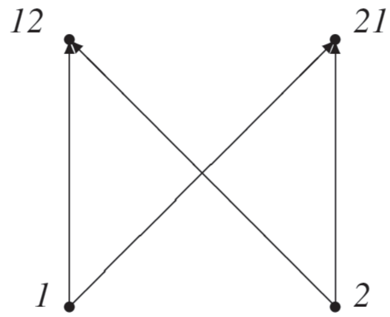
Z Wniosku 3.1 oraz z prawa transpozycji otrzymujemy następującą zależność:
$\left[x \ntrianglelefteq y \equiv \exists z \ (z \trianglelefteq x \ \wedge \ \neg(z \trianglelefteq y))\right]$.

Warunek zatem postaci $\left[x \ntrianglelefteq y \Rightarrow \exists z\left(z \trianglelefteq x \wedge z \wr y\right)\right]$ jest warunkiem mocniejszym nie wynikającym z aksjomatów (NEM1) i (NEM3). Weźmy go jako dodatkowy aksjomat:

Aksjomat 3.2.
(NEM4) $x \ntrianglelefteq y \Rightarrow \exists z\left(z \trianglelefteq x \wedge z \wr y\right)$

Jest to odpowiednik tzw. *Mocnej Zasady Uzupełniania – Strong Supplementation Principle* (SSP) w *EM*. Zasada ta jest niezależna od charakteryzującego *EM* częściowego porządku, tak samo w słabszej teorii – *NEM*. Jak pokazuje [9], w przypadku *EM* warunek ten implikuje tzw. *Słabą Zasadę Uzupełniania – Weak Supplementation Principle* (WSP) – $\left[x \triangleleft y \Rightarrow \exists z\left(z \triangleleft y \wedge z \wr x\right)\right]$, która wraz z aksjomatami częściowego porządku dla relacji $\sqsubseteq$ wymusza warunek antysymetryczności (M2): $\left[x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x \Rightarrow x = y\right]$. W przypadku *NEM*, takie zależności wcale nie muszą mieć miejsca.

Przykład 3.1 *Niech* $M = \{1,2,12,21\}$ (Rysunek 1).
Wektory są symbolem relacji $\trianglelefteq$*, a kierunek zawierania jest zgodny ze strzałkami. Mamy następujący model:* $1 \trianglelefteq 12, 2 \trianglelefteq 12, 1 \trianglelefteq 21, 2 \trianglelefteq 21, 12 \ntrianglelefteq 21, 21 \ntrianglelefteq 12$. *W modelu tym spełniona jest (WSP), ale nie jest spełniona (SSP) – nie istnieje element, który byłby częścią* 12 *oraz byłby rozłączny z* 21.



Rysunek 1.

W niniejszej pracy całkowicie pomijamy zatem postulat (NEM4). Wariacje modelu *NEM* z uwzględnieniem warunków: (SSP) i (WSP) są przedmiotem innego artykułu.

Model brany przez nas pod uwagę, tzn. para <M, $\trianglelefteq$>, gdzie relacja $\trianglelefteq$ jest *quasi*-porządkiem (spełnia aksjomaty (NEM1), (NEM3)), oraz dodatkowy aksjomat istnienia sumy – (NEM5), o którym będzie mowa na końcu tego rozdziału, będzie przez nas nazywany strukturą mereologiczną nieekstensjonalną.

Przeanalizujemy teraz kolejno własności *NEM*.

Fakt 3.1. *Dla dowolnych elementów x, y, z należących do M zachodzi:*

(*i*) $x \circ x$

(*ii*) $x \circ y \Rightarrow y \circ x$

(*iii*) $x \trianglelefteq y \Rightarrow x \circ y$

(*iv*) $x \trianglelefteq y \Rightarrow \forall z\ (z \circ x \Rightarrow z \circ y)$

(*v*) $x \circ y \Rightarrow \forall z\ (x \trianglelefteq z \Rightarrow z \circ y)$

(*vi*) $x \circ y \Rightarrow \exists z \forall u\ \left[u \circ z \Rightarrow (u \circ x \wedge u \circ y)\right]$

(*vii*) $x \wr y \Rightarrow y \wr x$

(*viii*) $x \wr y \Rightarrow \forall z\ (z \trianglelefteq x \Rightarrow z \wr y)$

(*ix*) $(z \trianglelefteq x \wedge z \wr y) \Rightarrow x \ntrianglelefteq y$

(*x*) $x \ntriangleleft x$

Dowód.

(i) $x \circ x \equiv_{(\text{Def. } 3.1)} \exists z\ (z \trianglelefteq x)$.

Połóżmy zatem $z = x$. Z (NEM1) otrzymujemy: $x \trianglelefteq x$.

(ii) Dowód wynika bezpośrednio z przemienności koniunkcji oraz z Def. 3.1.

(iii) $x \trianglelefteq y \equiv_{(\text{Wn. } 3.1)} \forall z\ (z \trianglelefteq x \Rightarrow z \trianglelefteq y)$.

W szczególności dla $z = x$ otrzymujemy: $x \trianglelefteq x \Rightarrow x \trianglelefteq y$. Stąd dla pewnego z: $z \trianglelefteq x \wedge z \trianglelefteq y$, co na mocy Def. 3.1 daje: $x \circ y$.

(iv) Załóżmy, że $x \trianglelefteq y \wedge \neg\left[\forall z\ (z \circ x \Rightarrow z \circ y)\right]$. Zatem

$x \trianglelefteq y \wedge \neg\left[\forall z\ (z \circ x \Rightarrow z \circ y)\right] \equiv x \trianglelefteq y \wedge \exists z\ (z \circ x \wedge \neg z \circ y)$

$\equiv x \trianglelefteq y \wedge \exists z\ (z \circ x \wedge z \wr y)$. Skoro $x \trianglelefteq y$, z Wn. 3.1 otrzymujemy:

$\forall z (z \trianglelefteq x \Rightarrow z \trianglelefteq y)$, co daje nam sprzeczność.

(v) Niech $x \circ y \wedge \neg\left[\forall z\ (x \trianglelefteq z \Rightarrow z \circ y)\right]$

Zatem $x \circ y \wedge \neg\left[\forall z\ (x \trianglelefteq z \Rightarrow z \circ y)\right] \equiv x \circ y \wedge \exists z\ (x \trianglelefteq z \wedge z \wr y)$

$\Rightarrow_{(\text{Def.3.1.})} \exists m\ (m \trianglelefteq x \wedge m \trianglelefteq y) \wedge x \trianglelefteq z$.

Z (NEM3) otrzymujemy: $\exists m, z\ \ m \trianglelefteq z \wedge m \trianglelefteq y \wedge z \wr y$.

Na mocy Def. 3.1 $\exists z\ \ z \circ y \wedge z \wr y$, co daje nam sprzeczność.

(vi) Z Def. 3.1 mamy: $x \circ y \equiv \exists z\ (z \trianglelefteq x \wedge z \trianglelefteq y)$.

Na mocy (iv) otrzymujemy: $\exists z\ \left[\forall u\ (u \circ z \Rightarrow u \circ x) \wedge (u \circ z \Rightarrow u \circ y)\right]$

$\equiv \exists z \left\{\forall u\ \left[u \circ z \Rightarrow (u \circ x \wedge u \circ y)\right]\right\}$

(vii) Z Def. 3.2 $x \wr y \equiv \neg(x \circ y) \equiv_{(ii)} \neg(y \circ x) \equiv_{(\text{Def. } 3.2)} y \wr x$

(viii) Załóżmy, że $x \wr y \wedge \neg\left[\forall z \ (z \trianglelefteq x \Rightarrow z \wr y)\right] \equiv_{(\text{Def. } 3.2)} \neg(x \circ y) \wedge$
$\exists z \left[\neg(\neg z \trianglelefteq x \vee z \wr y)\right] \Rightarrow x \wr y \wedge \exists z \ (z \trianglelefteq x \wedge \neg z \wr y)$
$\Rightarrow \exists z \ (x \wr y \wedge z \trianglelefteq x \wedge \neg z \wr y) \Rightarrow \exists z \ (x \wr y \wedge z \trianglelefteq x \wedge z \circ y)$
$\Rightarrow_{(\text{Def. } 3.1)} \exists z \exists m \ (x \wr y \wedge z \trianglelefteq x \wedge m \trianglelefteq z \wedge m \trianglelefteq y) \Rightarrow_{(NEM3)}$
$\exists m \ (x \wr y \wedge m \trianglelefteq x \wedge m \trianglelefteq y) \ \Rightarrow_{(\text{Def. } 3.1)} (x \wr y \wedge x \circ y)$,
co prowadzi do sprzeczności.

(ix) Załóżmy, że $z \trianglelefteq x \wedge z \wr y \wedge x \trianglelefteq y \Rightarrow_{(NEM3)} z \trianglelefteq y \wedge z \wr y$,
co prowadzi do sprzeczności.

(x) Niech $x \triangleleft x$. Na mocy Def. 3.3 $x \trianglelefteq x \wedge x \neq x$,
co prowadzi do sprzeczności i co kończy dowód całości.

□

Podsumowując: relacja *quasi*-porządku $\trianglelefteq$ pociąga za sobą to, że relacja nakładania $\circ$ jest zwrotna i symetryczna. Ponadto: jeśli obiekt x jest częścią obiektu y, to x i y nakładają się oraz każda część x-a jest częścią y-a. Dodatkowo relacja rozłączności $\wr$ jest symetryczna oraz, jeśli obiekty x i y są rozłączne, to każda część x-a jest rozłączna z y-em. I na koniec, jeśli x ma jakąś część, która jest rozłączna z y-em, to x nie jest częścią y-a. Ostatni fakt orzeka, ze relacja części właściwej jest przeciwzwrotna.

Przez strukturę mereologiczną ekstensjonalną rozumiemy zazwyczaj parę <M, $\sqsubseteq$ >, gdzie relacja $\sqsubseteq$ częściowo porządkuje uniwersum obiektów. Struktury te są równoważne strukturom <M, $\sqsubset$ > [16], gdzie dla dowolnych elementów x, y z M, relacja $\sqsubset$ jest asymetryczna i przechodnia:

(L1) $x \sqsubset y \Rightarrow y \not\sqsubset x$

(L2) $x \sqsubset y \wedge y \sqsubset z \Rightarrow x \sqsubset z$

W *NEM* (z relacją $\trianglelefteq$ zdefiniowaną jak w Definicji 3.3[5]), nie zachodzi warunek (L1). Połóżmy w miejsce relacji $\trianglelefteq$ relację $\sqsubseteq$. Pokażemy, że aksjomaty

[5] W mereologii ekstensjonalnej Definicja 3.3 jest równoważna następującej Definicji 3.4:
Definicja 3.4 $x \sqsubset y \equiv x \sqsubseteq y \wedge y \not\sqsubseteq x$
Niech: $x \sqsubseteq y \wedge x \neq y$. Z warunku antysymetryczności dla $\sqsubseteq$ otrzymujemy $y \not\sqsubseteq x$.
Zatem mamy $x \sqsubseteq y \wedge y \not\sqsubseteq x \equiv_{(\text{Def. } 3.4)} x \sqsubset y$.
Niech $x \sqsubseteq y \wedge y \not\sqsubseteq x$. Znowu, z warunku antysymetryczności, otrzymujemy: $x \neq y$.
Zatem: $x \sqsubseteq y \wedge x \neq y \equiv_{(\text{Def. } 3.3)} x \sqsubset y$.
W mereologii nieekstensjonalnej, te dwie definicje nie pokrywają się. Jest to przedmiotem kolejnego artykułu.

(NEM1) i (NEM3) nie implikują (L1). Udowodnimy jednak najpierw twierdzenie odwrotne:

Twierdzenie 3.1. *W EM zachodzą warunki (L1) i (L2).*

Dowód.

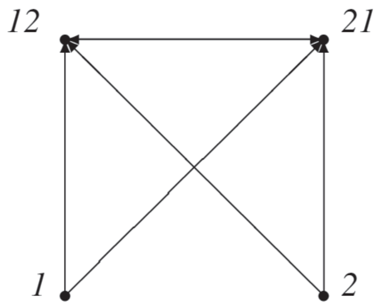
(L1) Niech $x \sqsubset y \wedge y \sqsubset x$.
Z Definicji 3.3 części właściwej dla $\sqsubset$ otrzymujemy:
$x \sqsubseteq y \wedge x \neq y \wedge y \sqsubseteq x \wedge x \neq y$. Z (M2) otrzymujemy: $x = y \wedge x \neq y$, co prowadzi do sprzeczności. Zatem (M2) wymusza warunek (L1).

(L2) Niech $x \sqsubset y \wedge y \sqsubset z$.
(*) Z Def. 3.3 otrzymujemy $x \sqsubseteq y \wedge x \neq y \wedge y \sqsubseteq z \wedge y \neq z$.
Jeśli $z = x$, wtedy na podstawie pierwszej części dowodu, (M2) otrzymujemy *x*=*y*, co prowadzi do sprzeczności. Zatem $z \neq x$. Korzystając w (*) z (NEM3) oraz Definicji 3.3, otrzymujemy warunek (L2), co kończy dowód.

□

Jak widać, w dowodzie obu warunków niezbędna jest zasada (M2), bez której nie jesteśmy w stanie udowodnić przechodniości relacji $\sqsubset$. Z drugiej strony samo tylko (L2) wystarcza do udowodnienia przechodniości relacji $\trianglelefteq$, gdyż wykorzystujemy fakt, że relacja identyczności „=” jest przechodnia, warunku, który nie jest spełniony dla relacji przeciwnej „$\neq$”. Spójrzmy na Rysunek 2:

Przyklad 3.2. *(Rysunek 2) Niech* $M = \{1,2,12,21\}$, $1 \trianglelefteq 12, 2 \trianglelefteq 12, 1 \trianglelefteq 21, 2 \trianglelefteq 21$. *Niech ponadto* $12 \trianglelefteq 21$ *i* $21 \trianglelefteq 12$. *Ponieważ nie ma antysymetryczności dla relacji* $\trianglelefteq$, *nie mamy równości obiektów* 12 *i* 21, *ale, z Definicji 3.3,* $12 \triangleleft 21$ *i* $21 \triangleleft 12$. *Spełniony jest zatem warunek (L2), ale nie jest spełniony warunek (L1).*



Rysunek 2.

Spójrzmy na kolejny przykład:

Przykład 3.3. *Niech* $M = \{1,2\}$ *(Rysunek 3).*
$1 \trianglelefteq 2$ *and* $2 \trianglelefteq 1$. *Ponieważ nie jest spełniony postulat (M2), taki model jest dopuszczalny dla różnych elementów* $1,2$. *Z Definicji 3.3 wynika iż* $1 \triangleleft 2 \wedge 2 \triangleleft 1$. *Zatem nie jest spełniony warunek (L1).*

Rysunek 3.

Kolejną relacją charakterystyczną dla *NEM* jest relacja sumy. W różnych opracowaniach, różni autorzy używają wyrażenia fuzji, lecz ma ono nieco inne własności. W niniejszej pracy przyjmiemy określenie używane przez Tarskiego [16], czyli sumy. Suma jest określona na iloczynie kartezjańskim $M \times 2^M$ i jest eksplikacją mereologicznej definicji klasy Leśniewskiego [12].

Definicja 3.5. $x \,\mathrm{Sum}\, X \equiv \forall y \in X \left(y \trianglelefteq x \right) \wedge \forall z \left(z \trianglelefteq x \Rightarrow \exists w \left(w \in X \wedge w \circ z \right) \right)$[6].

Obiekt x jest sumą (klasą) przedmiotów będących elementami zbioru X, jeśli każdy element X-a jest częścią x-a oraz każda część x-a ma część wspólną z pewnym elementem zbioru X.

Z tej definicji wynikają pewne własności, mianowicie to, że nie istnieje obiekt, który byłby sumą zbioru pustego, czyli – inaczej – nie istnieje klasa niemająca żadnego elementu. Ponadto każdy obiekt jest klasą oraz każda klasa jest sumą swoich części. Formalnie wyrazimy to w następujący sposób:

Fakt 3.2 *Niech* x *będzie dowolnym elementem z M. Wtedy:*
- (i) $\neg x \,\mathrm{Sum}\, \varnothing$
- (ii) $x \,\mathrm{Sum}\, \{y : y \trianglelefteq x\}$
- (iii) $x \,\mathrm{Sum}\, \{x\}$

Dowód.

(i) Załóżmy, że istnieje taki obiekt x.
Z Def. 3.5 wynika iż $\forall y \left(y \trianglelefteq x \Rightarrow \exists z \left(z \in X \wedge z \circ y \right) \right)$
Dla $y = x$ otrzymujemy zależność: $x \trianglelefteq x \Rightarrow \exists z \left(z \in \varnothing \right)$, co prowadzi do sprzeczności.

6 W niniejszej pracy zawsze zakładamy, że zbiór X jest niepusty.

(ii) Pierwsza część definicji Sumy jest spełniona, wystarczy zatem wskazać takie w, które spełniałoby warunek:
$\forall y \left[y \trianglelefteq x \Rightarrow \exists w \left(w \in \{y : y \trianglelefteq x\} \wedge w \circ y \right) \right]$.
Niech $w = y$. Z Faktu 3.1 otrzymujemy $y \circ y$, co kończy dowód.

(iii) Z Faktu 3.1 otrzymujemy: $x \trianglelefteq x \Rightarrow x \circ x$.
Z (ii) mamy: $x \,\mathrm{Sum}\, \{y : y \trianglelefteq x\}$.
Niech $y = x$, wtedy $x \,\mathrm{Sum}\, \{x : x \trianglelefteq x\} \equiv x \,\mathrm{Sum}\, \{x\}$.

□

Ponadto:

Stwierdzenie 3.1 *W NEM, suma nie jest relacją monotoniczną.*

$$\neg\left[\forall x, y, X, Y \ \left(X \subseteq Y \wedge x \,\mathrm{Sum}\, X \wedge y \,\mathrm{Sum}\, Y \Rightarrow x \trianglelefteq y \right) \right]$$

Rysunek 1 przedstawia przypadek kiedy $M = \{1,2,12,21\}$, $X = \{1,2\}$, $Y = X$ oraz $12 \, \mathit{Sum}\, X$, $21 \, \mathit{Sum}\, Y$, ale $12 \ntrianglelefteq 21$.

C. Gorzka [9] podaje dowód na to, że relacja sumy jest relacją monotoniczną w *EM*, zakładając jednak, że zachodzi warunek (SSP), jednak – jak wspomnieliśmy na początku – w naszym modelu nie bierzemy pod uwagę tego warunku. W *EM* zakłada się także istnienie sumy jako elementu największego (choć czasami może to być niezgodne z intuicją), jednak ze względu na jej możliwe zastosowania w geometrii, także dla naszych celów założymy jej istnienie w *NEM*:

Aksjomat 3.3. $\forall X \subseteq M \setminus \varnothing \ \exists x \quad x \,\mathrm{Sum}\, X$

Jak zobaczyliśmy poprzednio, konsekwencją braku antysymetryczności dla relacji bycia częścią w *NEM* jest brak jednoznaczności sumy. W Przykładzie 3.1, 12 jest sumą zbioru $\{1,2\}$ oraz 21 jest sumą tego samego zbioru.

Wprowadźmy teraz pewną unarną operację $\sqcup : 2^M \setminus \{\varnothing\} \to M$, dzięki której będzie można zdefiniować dodatkowe operacje algebraiczne oraz pojęcie przestrzeni mereologicznej:

Definicja 3.6. $X \in 2^M \setminus \{\varnothing\} \Rightarrow \sqcup X := x \,\mathrm{Sum}\, X$.

Za pomocą tej operacji unarnej definiujemy przestrzeń mereologiczną, operację sumy oraz iloczynu. Nie definiujemy dopełnienia, gdyż w *NEM* nie istnieje element najmniejszy. Zauważmy, że tak zdefiniowana operacja iloczynu jest operacją warunkową właśnie ze względu na brak istnienia elementu najmniejszego.

Definicja 3.7. (Λ) $\Lambda := \sqcup M$

($\sqcup$) $x \sqcup y := \sqcup\{z : z \trianglelefteq x \vee z \trianglelefteq y\}$

($\sqcap$) $x \circ y \Rightarrow x \sqcap y := \sqcup\{z : z \trianglelefteq x \wedge z \trianglelefteq y\}$

Przestrzeń mereologiczna to zatem taki obiekt, który jest klasą[7] wszystkich swoich części. Suma algebraiczna dwóch obiektów to taka klasa wszystkich swoich części, które są zawarte albo w pierwszym albo w drugim obiekcie. Jeśli dwa obiekty się nakładają, wtedy ich iloczyn to taka klasa wszystkich części, które są zawarte zarówno w pierwszym jak i w drugim obiekcie.

Z powyższych definicji wypływają następujące własności dla działania sumy mereologicznej:

Fakt 3.3. *Dla dowolnych elementów x, y, z należących do M spełnione są następujące własności:*

(i) $x \trianglelefteq \Lambda$

(ii) $x, y \trianglelefteq x \sqcup y$

(iii) $x \sqcup y = \sqcup \{x, y\}$

(iv) $x \sqcup x = x$

(v) $x \sqcup y = y \sqcup x$

(vi) $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z)$

Dowód.

(i) $\forall x \in M$, z Def. 3.5 wynika, że jeśli $x \in \sqcup M$ wtedy $x \trianglelefteq \sqcup M$, co na podstawie Def. 3.7 daje iż $x \trianglelefteq \Lambda$.

(ii) Z Def. 3.5 otrzymujemy, że dla każdego a takiego, że: $a \in \{z : z \trianglelefteq x \vee z \trianglelefteq y\}$, wynika iż $a \trianglelefteq \sqcup\{z : z \trianglelefteq x \vee z \trianglelefteq y\}$.
Zatem $x \trianglelefteq \sqcup\{z : z \trianglelefteq x \vee z \trianglelefteq y\}$ oraz $y \trianglelefteq \{z : z \sqcup\trianglelefteq x \vee z \trianglelefteq y\}$, gdyż $x \trianglelefteq x \wedge y \trianglelefteq y$ z (NEM1).
Z czego wynika, że $x, y \trianglelefteq \sqcup\{z : z \trianglelefteq x \vee z \trianglelefteq y\}$.
Na podstawie Def. 3.5 otrzymujemy: $x, y \trianglelefteq x \sqcup y$.

(iii) Niech $X = \{z \in M : z \trianglelefteq x \vee z \trianglelefteq y\}$

$(w \circ (x \sqcup y)) \equiv_{(\text{Def. } 3.7)} w \circ (\sqcup\{z : z \trianglelefteq x \vee z \trianglelefteq y\}) \equiv$

[7]Jak wspomnieliśmy wcześniej pojęcie to jest równoważne pojęciu sumy mereologicznej.

$$\equiv_{(\text{Def. }3.1)} \left(\exists m \in M \;\; m \trianglelefteq w \wedge m \trianglelefteq \sqcup X\right) \equiv$$

$$\equiv_{(\text{Def. }3.6)} \left(\exists m \;\; m \trianglelefteq w \wedge \left(m \trianglelefteq x \vee m \trianglelefteq y\right)\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\exists m\left(\left(m \trianglelefteq w \wedge m \trianglelefteq x\right) \vee \left(m \trianglelefteq w \wedge m \trianglelefteq y\right)\right)\right) \equiv$$

$$\equiv_{(R\exists)} \left(\exists m\left(m \trianglelefteq w \wedge m \trianglelefteq x\right) \vee \exists m\left(m \trianglelefteq w \wedge m \trianglelefteq y\right)\right) \equiv$$

$$\equiv_{(\text{Def. }3.1)} \left(w \circ x \vee w \circ y\right) \equiv w \circ \sqcup\left\{x, y\right\}$$

(iv) Z Def. 3.7 otrzymujemy:

$$x \sqcup x = \sqcup\left\{z : z \trianglelefteq x \vee z \trianglelefteq x\right\} = \sqcup\{z : z \trianglelefteq x\}$$

Na podstawie Faktu 3.2 dostajemy, że: $\sqcup\{z : z \trianglelefteq x\} = x$

(v) Z przemienności alternatywy i Definicji 3.7 dostajemy:

$$x \sqcup y = \sqcup\left\{z : z \trianglelefteq x \vee z \trianglelefteq y\right\} = \sqcup\left\{z : z \trianglelefteq y \vee z \trianglelefteq x\right\} = y \sqcup x$$

(vi) $\left(x \sqcup y\right) \sqcup z =_{(iii)} \sqcup\{x, \sqcup\{y, z\}\}$

Dla dowolnego w mamy: $w \circ \left[x \sqcup \left(y \sqcup z\right)\right] \equiv w \circ \sqcup\{x, \sqcup\{y, z\}\}$

$\equiv w \circ x \vee w \circ \sqcup\{y, z\} \equiv w \circ x \vee \left(w \circ y \vee w \circ z\right)$

Z łączności alternatywy otrzymujemy:

$\left(w \circ x \vee w \circ y\right) \vee w \circ z \equiv w \circ \sqcup\{\sqcup\{x, y\}\}$

$\equiv w \circ \left[\left(x \sqcup y\right) \sqcup z\right]$, co kończy dowód całości.

□

Algebraiczna operacja sumy jest zatem łączna, przemienna, idempotentna, a suma algebraiczna dwóch obiektów jest ich sumą mereologiczną, każdy element sumy algebraicznej jest jej częścią oraz każdy obiekt jest częścią przestrzeni mereologicznej. Podobnie możemy udowodnić pewne własności dla działania iloczynu mereologicznego:

Fakt 3.4. *Dla dowolnych elementów x, y, z należących do M spełnione są następujące zależności:*

(i) $x \circ y \Rightarrow x \sqcap y \trianglelefteq x \wedge x \sqcap y \trianglelefteq y$

(ii) $x \sqcap x = x$

(iii) $x \circ y \Rightarrow x \sqcap y = y \sqcap x$

(iv) $u \trianglelefteq x, y, z \Rightarrow \left(x \sqcap y\right) \sqcap z = x \sqcap \left(y \sqcap z\right)$

Dowód.

(i) Zauważmy: $\{z : z \trianglelefteq x \wedge z \trianglelefteq y\} \subseteq \{z : z \trianglelefteq x\}$ oraz

$\{z : z \trianglelefteq x \wedge z \trianglelefteq y\} \subseteq \{z : z \trianglelefteq y\}$.

$x \sqcap y =_{(\text{Def. } 3.7)} \bigsqcup\{z : z \trianglelefteq x \wedge z \trianglelefteq y\}$.

Zatem $\bigsqcup\{z : z \trianglelefteq x \wedge z \trianglelefteq y\} \subseteq \bigsqcup\{z : z \trianglelefteq x\}$.

Ale z Faktu 3.2 wynika iż $\bigsqcup\{z : z \trianglelefteq x\} = x$.

Ponadto, przez analogię, $\bigsqcup\{z : z \trianglelefteq x \wedge z \trianglelefteq y\} \subseteq \bigsqcup\{z : z \trianglelefteq y\}$.

Zatem $x \sqcap y \trianglelefteq x \wedge x \sqcap y \trianglelefteq y$.

(ii) $x \sqcap x =_{(\text{Def. } 3.7)} \bigsqcup\{z : z \trianglelefteq x \wedge z \trianglelefteq x\} \equiv \bigsqcup\left\{z : z \trianglelefteq x\right\}$.

Z Faktu 3.2 otrzymujemy: $\bigsqcup\{z : z \trianglelefteq x\} = x$.

(iii) Z przemienności koniunkcji $x \sqcap y =_{(\text{Def. } 3.7)} \bigsqcup\{z : z \trianglelefteq x \wedge z \trianglelefteq y\} =$

$\bigsqcup\{z : z \trianglelefteq y \wedge z \trianglelefteq x\} =_{(\text{Def. } 3.7)} y \sqcap x$.

(iv) $\left(x \sqcap y\right) \sqcap z =_{(\text{Def. } 3.7)} \bigsqcup\{u : u \trianglelefteq x \sqcap y \wedge u \trianglelefteq z\}$.

Skoro $u \trianglelefteq x \sqcap y$, z (i) otrzymujemy: $u \trianglelefteq x \wedge u \trianglelefteq y$.

Zatem z powyższego faktu oraz z łączności koniunkcji:

$\left(x \sqcap y\right) \sqcap z = \bigsqcup\{u : u \trianglelefteq x \wedge u \trianglelefteq y \wedge u \trianglelefteq z\} =$

$\bigsqcup\{u \trianglelefteq x \wedge \left(u \trianglelefteq y \wedge u \trianglelefteq z\right)\} =_{(\text{Def. } 3.7)} x \sqcap \left(y \sqcap z\right)$.

$\square$

Warunkowa operacja iloczynu mereologicznego jest zatem łączna, przemienna, idempotentna oraz, jeśli dwa obiekty się nakładają, wtedy ich iloczyn mereologiczny jest częścią każdego z nich. Można również zauważyć, że tak zdefiniowane działania sumy i iloczynu mereologicznego spełniają własność pochłaniania:

Fakt 3.5 *Dla dowolnych elementów* x, y *należących do* M, *jeśli* $x \circ y$, *wtedy*

($P1$) $\left(x \sqcap y\right) \sqcup x = x$

($P2$) $\left(x \sqcup y\right) \sqcap x = x$

Dowód.

(P1) $(\rightarrow)$ $\left\{x \sqcap y \trianglelefteq_{(\text{F. } 3.4)} x\right\} \wedge \left\{x \trianglelefteq_{(NEM1)} x\right\}$.

Zatem na mocy faktu, że $\left(w \circ m \wedge m \trianglelefteq \left(x \sqcap y\right)\right) \Rightarrow \left(w \circ x \sqcap y\right)$ oraz Def. 3.7 otrzymujemy $\left(x \sqcap y\right) \sqcup x \trianglelefteq x$.

$(\leftarrow)$ $x \trianglelefteq_{(\text{F. } 3.3)} x \sqcup \left(x \sqcap y\right)$

(P2) $(\rightarrow)$ $\left(x \sqcup y\right) \sqcap x \trianglelefteq_{(\text{F. } 3.4)} x$

$(\leftarrow)$ $\left\{x \trianglelefteq_{(\text{F. } 3.3)} x \sqcup y\right\} \wedge \left\{x \trianglelefteq_{(NEM1)} x\right\}$.

Z Def. 3.7 oraz na mocy faktu jak w (P1) i Def 3.5 wynika zatem, że $x \trianglelefteq (x \sqcup y) \sqcap x$.

□

Na mocy zatem powyższych faktów i stwierdzeń struktura $\langle M, \sqcup, \sqcap \rangle$ jest algebrą typu $(2,2)$ odpowiadającą *kratom* [18]. W ogólności struktury mereologiczne raczej nie są kratami, wystarczy, że istnieje jeden obiekt x, który jest rozłączny z y. Jeśli jednak narzucimy warunek, by każde dwa elementy nakładały się, wymuszamy wtedy istnienie takiej struktury. Tak jak w każdej kracie możemy zdefiniować również relację porządku na jej elementach [3]. Jeżeli ponadto pokażemy, że dla dowolnego elementu tej struktury istnieje element największy, udowodnimy, że struktura ta odpowiada *kracie implikatywnej*, co jest przedmiotem analizy następnego rozdziału.

4. KRATA IMPLIKATYWNA

Definicja 4.1 *Algebrę* $\langle A, \sqcup, \sqcap \rangle$ *typu* $(2,2)$ *nazywamy kratą, jeśli* $\forall x, y, z$ *z* A*:*

(1) $x \sqcup x = x, \;\; x \sqcap x = x$

(2) $x \sqcup y = y \sqcup x, \;\; x \sqcap y = y \sqcap x$

(3) $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z, \;\; x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$

(4) $x \sqcup (x \sqcap y) = x, \;\; x \sqcap (x \sqcup y) = x$

Krata zatem to struktura z dwoma operacjami algebraicznymi, które na dowolnych elementach zbioru są idempotentne, łączne, przemienne oraz pomiędzy nimi zachodzą prawa pochłaniania. Porządek kratowy możemy zdefiniować następująco:

Definicja 4.2. $x \leq y$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x \sqcap y = x$

Tak zdefiniowana relacja jest rzeczywiście porządkiem:

(i) zwrotność ($x \leq x$) wynika z idempotentności iloczynu.

(ii) antysymetryczność [$(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow (x = y)$]

$x =_{\text{(Def. 4.2)}} x \sqcap y =_{\text{(F. 3.4)}} y \sqcap x =_{\text{(Def. 4.2)}} y$

Oczywiście jest to wynikanie warunkowe, jeśli $x \circ y$.

(iii) przechodniość [$(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$]

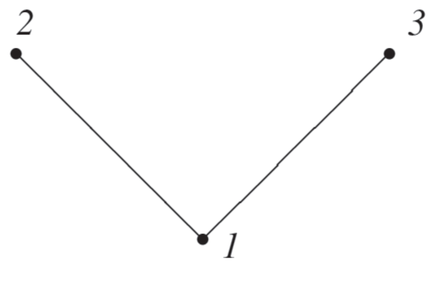
$z =_{\text{(Def. 4.2)}} y \sqcap z =_{\text{(Def. 4.2)}} (x \sqcap y) \sqcap z =_{\text{(F. 3.4)}} x \sqcap (y \sqcap z) =_{\text{(Def. 4.2)}} x \sqcap z$

Ponieważ w *NEM* nie istnieje element najmniejszy (podobnie jak w *EM*), dlatego nie możemy zdefiniować operacji dopełnienia, ale tylko *relatywne pseudo-uzupełnienie* elementu a względem b.

Definicja 4.3. *Dla dowolnych elementów* a, b *będących częściami* M, *element największy w zbiorze* $\langle \{x \trianglelefteq M : a \sqcap x \leq b\}, \leq \rangle$ *nazywamy relatywnym pseudo-uzupełnieniem – (rpu) elementu* a *względem* b.

Ponieważ założyliśmy, że zawsze istnieje suma mereologiczna w M (Aksjomat 3.3) oraz definicja operacji iloczynu mereologicznego jest definicją warunkową, wtedy *rpu* zawsze istnieje. Nie mamy natomiast elementu najmniejszego, dlatego nie interesuje nas *uzupełnienie górne*.

Przyklad 4.1 *Załóżmy, że mamy model składający się z trzech elementów* $M = \{2,3,1\}$ *takich, że:* $1 \leq 2 \wedge 1 \leq 3$. *Wtedy* 2 *jest relatywnym pseudo-uzupełnieniem* 2 *względem każdego elementu z* M, 3 *jest relatywnym pseudo-uzupełnieniem* 3 *względem każdego elementu z* M, *ale nie istnieje relatywne pseudo-uzupełnienie* 1 *względem np.* 2, *gdyż* $1 \sqcap x = \{2,3,1\}$ *a w tym zbiorze nie ma elementu największego. Zatem skutkiem nieistnienia sumy jest nieistnienie relatywnego pseudo-uzupełnienia.*



Rysunek 4.

Mocą powyższych faktów, wnioskujemy:

Wniosek 4.1. *Krata* $\langle A, \sqcup, \sqcap, \rangle$, *gdzie* $\langle A, \leq \rangle$ *jest strukturą częściowo uporządkowaną oraz dla dowolnych* x, y *będących częściami* A, *z relacją porządku wprowadzoną następująco:* $x \leq y$ *wtedy i tylko wtedy* $x \sqcap y = x$, *jest kratą implikatywną.*

5. PODSUMOWANIE

W niniejszej pracy wykazaliśmy, że mereologia nieekstensjonalna z odpowiednio zdefiniowanymi operacjami algebraicznymi oraz relacją porządku może tworzyć strukturę odpowiadającą kratom implikatywnym z jedynką. Zyskiem tej szczegółowej analizy jest określenie niezbędnej liczby aksjomatów potrzebnych do opisania tej teorii – w naszym przypadku trzech: (NEM1), (NEM3) oraz (NEM5), a także jasność co do wykorzystania Mocnej i Słabej Zasady Uzupełniania. W związku z wprowadzeniem relacji porządku kratowego, warto zauważyć pewien szczegół z nią związany. Posłużymy się przykładem:

Przyklad 5.1 *Załóżmy, że mamy model dwuelementowy* $M = \{a, b\}$, *taki że:* $a \trianglelefteq b \wedge b \trianglelefteq a$. *Ponieważ nie mamy warunku antysymetryczności dla relacji* $\trianglelefteq$, *powyższe założenie nie implikuje równości tych obiektów. Tożsamość tych obiektów wynika z warunków:* $a \sqcap b =_{(\text{Def. } 3.7)} a$ oraz $b \sqcap a =_{(\text{Def. } 3.7)} b$. *Co więcej Def. 4.2 implikuje zależność* $a \leq b \wedge b \leq a$, *co pociąga za sobą równość tych obiektów:* $a = b$.

Obiekty te zatem są tożsame ze względu na relację porządku, która je jakby „skleja”, natomiast są różne ze względu na relację $\trianglelefteq$. Poruszamy się jakby na dwóch płaszczyznach, z perspektywy relacji $\trianglelefteq$ – obiekty są różne, a z perspektywy bardziej złożonej (gdyż relacja porządku jest definiowana za pomocą relacji $\trianglelefteq$) – są one tożsame.

Jaki jest zysk tej systematycznej analizy mereologii nieekstensjonalnej? Gdyby od razu działać na klasach abstrakcji, już na początku operowalibyśmy na obiektach „sklejanych”, tak więc na strukturze bardziej ogólnej, natomiast ta szczegółowa analiza pozwala nam dostrzec wiedzę bardziej szczegółową, partykularną. Dzięki temu odpowiedź na pytanie o minimalny układ aksjomatów nie jest trywialna, jeśli wyjdziemy z zupełnie innych założeń.

REFERENCJE

[1] *Analogia e Autoreferenza*, red. G. Basti, C.A. Testi, Genua: Marietti 2004.

[2] Arystoteles: *Fizyka*, ks. IV, 210a, s. 14-24.

[3] Birkhoff G., MacLane S.: *Przegląd Algebry Współczesnej*, Warszawa: PWN 1966.

[4] Burkhardt H., Degen W.: *Mereology in Leibniz's Logic and Philosophy*, „Topoi” 9 (1990 s. 9-13.

[5] Clarke B.L.: *A Calculus of Individuals Based on ‘Connection’*, „Notre Dame Journal of Formal Logic” 22 (1981), s. 204-218.

[6] C l a y R.E.: *Relation of Leśniewski's mereology to Boolean Algebra*, „The Journal of Symbolic Logic" 39 (1974), s. 638-648.
[7] C o t n o i r A.: *Anti-symmetry and Non-extensional mereology*, „Philosophical Quarterly" 60 (2010), z. 239, s. 396-405.
[8] F o r r e s t P.: *Nonclassical mereology and Its Application to Sets*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 43 (2002), z. 2, s. 79-94.
[9] G o r z k a C.: *Mereologia a Topologia i Geometria Bezpunktowa*, Toruń: Wydawnictwo UMK 2003.
[10] K u r a t o w s k i K.: *Wstęp do Teorii Mnogości i Topologii*, Warszawa: PWN 1977.
[11] L e o n a r d H.S., G o o d m a n N.: *The Calculus of Individuals and Its Uses*, „Journal of Symbolic Logic" 5 (1940), s. 45-55.
[12] L e ś n i e w s k i S.: *O Podstawach Matematyki*. „Przegląd Filozoficzny" 30 (1927), s. 164-206; „Przegląd Filozoficzny" 31 (1928), s. 261-291; „Przegląd Filozoficzny" 32 (1929), s. 60-101; „Przegląd Filozoficzny" 33 (1930), s. 77-105; „Przegląd Filozoficzny" 34 (1931), s. 142-170.
[13] L e ś n i e w s k i S.: *Collected Works*, Dordrecht–Boston–Londyn 1991.
[14] *Leśniewski's Systems. Ontology and Mereology*, red. T.J. Srzednicki, V.F. Rickey, Haga: Martinus Nijhoff Publishers, Wrocław: Ossolineum 1984.
[15] M o s t o w s k i A., K u r a t o w s k i K.: *Teoria Mnogości*, Warszawa: PWN 1966.
[16] P i e t r u s z c z a k A.: *Metamereologia*, Toruń: Wydawnictwo UMK 2000.
[17] R a s i o w a H.: *Wstęp do Matematyki Współczesnej*, Warszawa: PWN 2005.
[18] R a s i o w a H.: *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*, Warszawa: PWN 1977.
[19] S i m o n s P.: *Parts. A Study in Ontology*, Oxford: Clarendon Press 1987.
[20] S ł u p e c k i J.: *S. Leśniewski's Calculus of Names*, „Studia Logica" 3 (1955), s. 7-72.
[21] S z r e j d e r J.A.: *Równość, podobieństwo, porządek*, Warszawa: WNT 1975.
[22] T a r s k i A.: *Foundations of the Geometry of Solids*, [w:] *Logics, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, Oxford 1956, s. 24-29.
[23] V a r z i A.: *A Note on the Transitivity of Parthood*, „Applied Ontology" 1 (2006), s. 141-146.
[24] V a r z i A.: *The Extensionality of Parthood and Composition*, „The Philosophical Quarterly" 58 (2008) s. 108-133.

ALGEBRAIC ASPECTS
OF NON-EXTENSIONAL MEREOLOGY

S u m m a r y

An extensional mereology was subjected to analysis of many authors. It was proved that it corresponds to a Boolean algebra without a null element. A slightly modified version of this model in which the primitive relation of being a part does not fullfill the Extensional Principle, will be called: Non-extensional Mereology. There is no systematic analysis for such a model until now. Some authors present partial descriptions of it. In this work we would like to propose a detailed and systematic analysis of Non-extensional Mereology. We present a minimal set of axioms and show that this model, under certain conditions, corresponds to an implicative lattice.

Summarized and translated by Lidia Obojska

Słowa kluczowe: zasada ekstensjonalności, mereologia, kraty.
Key words: Extensional Principle, mereology, lattices.

Information about Author: LIDIA OBOJSKA, Ph.D. – Assistant Professor, Department of Algebra and Number Theory, Institute of Mathematics and Physics at the Faculty of Sciences in the University of the Life Sciences and Humanities in Siedlce; address for correspondence: ul. 3 Maja 54, PL 08-110 Siedlce; e-mail: lidia.obojska@gmail.com