ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXVI / 2000, s. 140–144*

Adam OLSZEWSKI

APOLOGIA HARDY'EGO

- G. H. Hardy, *Apologia matematyka*, przekład M. Fedyszak, Prószyński i S–ka, Warszawa 1997, ss. 104.

Recenzowana książeczka została wydana estetycznie, w twardej okładce, w serii Klasycy Nauki. Oryginał angielski opublikowano po raz pierwszy w 1940 roku. Potem wielokrotnie przedrukowywana, w większości razy z przedmową C. P. Snowa. Po raz pierwszy spotykam książkę, której przedmowa ma więcej niż pięćdziesiąt procent objętości zasadniczego tekstu. Snow wyznaje w niej swoje głębokie przyjacielskie zafascynowanie Hardym. Z przedmowy zapoznajemy się z pewnymi aspektami, istotnymi dla zrozumienia tekstu, życiorysu Hardy'ego (1877–1947).

Teraz chciałbym podzielić się pewnym wrażeniem, jakie odniosłem po przeczytaniu książki, choć nie mogę go uzasadnić w wystarczającym stopniu. Zasadniczy tekst został napisany przez jednego z najwybitniejszych matematyków dwudziestego wieku. Tytuł książki jest zastanawiający z tego powodu, że właściwie nie wiadomo czego broni w niej Hardy. Matematyki czy siebie? Z tekstu można sądzić, iż broni matematyki. Nie wiadomo jednak przed czym. Wydaje się, że kluczową rolę, dla zrozumienia książki, odgrywa paragraf ostatni. Pisze Hardy: „Napisana przeze mnie apologia życia profesjonalnego matematyka w gruncie rzeczy musi być usprawiedliwieniem mojego życia." (s. 97) Teza książki brzmi zatem — usprawiedliwienie może nastąpić przez matematykę. Dla mnie książka jest tragiczna w swej wymowie. Hardy zdecydowanie twierdzi, że sensem życia może być matematyka. Czytając wspomnienia Snowa o Hardym i sam tekst, jest moim odczuciem (subiektywnym), że Hardy wcale nie był tego tak pewien. Czy przypadkiem nie właśnie Brown, z powieści A. St. Aubyna, fascynował Hardy'ego? Podczas lektury można zwrócić uwagę na ten wątek.

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

Kompetencja spostrzeżeń odnoszących się do matematyki nie może budzić żadnych wątpliwości, lecz podziw i fascynację. Tekst pisany niezwykle jasnym i pięknym stylem. Hardy pisze o najważniejszych sprawach związanych z pracą i powołaniem matematyka. Paragrafy 11–15 i 22, odnoszą się w szczególny sposób do filozofii matematyki. Trudno sobie jednak wyrobić na ich podstawie całościowy, dokładny pogląd o filozofii matematyki Hardy'ego. Pisze on, odnośnie istnienia przedmiotów matematycznych: „Sądzę, że rzeczywistość matematyczna znajduje się poza nami, że naszym zadaniem jest odkrywać ją lub obserwować i że twierdzenia, których prawdziwość dowodzimy i które opisujemy górnolotnie jako nasze wytwory — to po prostu zapiski z naszych obserwacji." (s. 86) W tych jego poglądach pojawia się bardzo interesujący wątek. W paragrafie 13, gdy wspomina o pięknych twierdzeniach teorii mnogości, (tłumacz pisze: „...w teorii sum (Mengenlehre)..." s.72), dokładnie o nieprzeliczalności continuum, czytamy: „Dowód twierdzenia będzie dość prosty, gdy opanujemy język tej teorii, lecz potrzeba sporo wyjaśnień, zanim jasne stanie się *znaczenie twierdzenia.*" (s. 72) (podkreślenie A.O.) Ta uwaga oraz: „Poważne twierdzenie to twierdzenie, które zawiera istotne idee" (s. 75), są bardzo inspirujące. Nie wiem jaka jest różnica pomiędzy ideą zawartą w twierdzeniu a znaczeniem twierdzenia. Jednak dalej: „Człowiek, który zdołałby w przekonywujący sposób opisać *rzeczywistość matematyczną, rozwiązałby wiele najtrudniejszych problemów metafizyki.*" (s. 86; podkreślenie A.O.) Występuje tutaj tak charakterystyczny motyw dla myślenia matematyków. Skromna redukcja jednego problemu do innego. Wydaje się, że kiedy uważnie czyta się (również „między wierszami") ten tekst wybitnego fachowca, „znaczenie" jawi się jako „szara eminencja" zarówno filozofii matematyki, jak i matematyki samej.

Weźmy dla przykładu — przypisywany Pitagorasowi — dowód niewymierności liczby „pierwiastek kwadratowy z liczby 2"($\sqrt{2}$), który przytacza Hardy (ss. 69–70). Chcemy zatem dowieść twierdzenia, że $\sqrt{2}$ nie jest elementem zbioru liczb wymiernych. Cóż to *znaczy*? Że $\sqrt{2}$ nie jest identyczny z żadną liczbą wymierną. Co to z kolei *znaczy* zwrot „być liczbą wymierną"? *Znaczy* to, że taka liczba jest przedstawialna w postaci a/b, gdzie $b \neq 0$. Pisze Hardy: „Stwierdzenie, że «$\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną», to tylko inny sposób stwierdzenia, iż liczby 2 nie można wyrazić w formie $(a/b)^2$..." (s. 70). Ten inny sposób stwierdzenia, to — jak mi się wydaje — nie tylko prosta równoważność zdań, ale coś więcej — równość *znaczeń* (treści). Pisze dalej Hardy: „...jest to *równoznaczne* ze stwierdzeniem, ze równanie $a^2 = 2b^2$ nie może być spełnione przez całkowite wartości a i b, nie mające wspólnego podzielnika." (s. 70, podkreślenie A.O.)

Załóżmy niewprost, że to ostatnie równanie może być spełnione przez dwie całkowite liczby a i b, nie mające wspólnego podzielnika. Co to *znaczy* „niewprost"? *Znaczy* to, że „poświęcamy" — jak pisze Hardy, porównując *reductio ad absurdum* do gambitu szachowego — poszukiwaną treść, zastępując ją treścią przeciwną, i poszukując w niej sprzeczności. Sprzeczność, to treść najbogatsza, to — *znaczyć* wszystko. To górna granica wszelkiego *znaczenia*, a zatem i przedmiotu matematyki. Dla matematyka sprzeczność jest największą obelgą i nieszczęściem, jak choćby pokazuje to reakcja Fregego na list Russella z informacją o znalezionym paradoksie w podstawie systemu Fregego. Ciekawe, że sprzeczność w języku potocznym dla przeciętnego czło–wieka nie jest takim samym szokiem. Analizujmy dalej *znaczenie* założenia niewprost. Ostatnie równanie pokazuje, że treść „a musi być parzysta" zawiera się w treści „a^2 dzieli się przez 2". Zgodnie z tym mamy: $a = 2c$, dla pewnej liczby całkowitej c. A stąd: $a^2 = 4c^2$. Ponieważ wiemy, że $a^2 = 2b^2$, uzyskujemy na podstawie *znaczenia* użytych znaków; $4c^2 = 2b^2$, skąd $b^2 = 2c^2$, co *znaczy*, że a oraz b są parzyste, czyli mają wspólnego podzielnika — 2. Wcześniej w treści tych liczb mieliśmy zawarte (jest to inny sposób wypowiedzenia tego, że o tych liczbach przyjęliśmy itd.), że nie mają one wspólnego podzielnika. Liczby te mają, i nie mają równocześnie wspólny podzielnik. Treść ta jest sprzeczna. Zatem, to znaczy wszystko, to nic nie znaczy. Zgodnie z wcześniejszymi uwagami powinna w niej mieścić się każda inna treść. Dla zobrazowania tej ogólnej tezy przytoczymy obiegowy przykład. Jest to zdarzenie przypisywane wspomnianemu Russellowi. Kiedyś, podczas luźnej rozmowy, Russell miał stwierdzić, iż sprzeczność implikuje dowolne zdanie. Został poproszony o wyciągnięcie ze zdania „$2 + 2 = 5$" wniosku, że on (Russell) jest papieżem. Russell rozumował następująco: jeśli $2 + 2 = 4$ oraz $2 + 2 = 5$, to $4 = 5$. Odejmując stronami liczbę 3, uzyskujemy $1 = 2$. *Znaczy* to, że każde dwie jednostki są jedną jednostką. Ponieważ Russell i papież są dwiema jednostkami, na mocy powyższego są jedną jednostką, a zatem Russell i papież to jedna i ta sama osoba. Jest to oczywiście żartobliwa historyjka. Pokazuje ona jednak coś interesującego. To mianowicie, że w sprzeczności zawiera się „obca" treść — czy lepiej, każda treść.

Powyższe uwagi miały na celu pokazać, że da się, w pewnym sensie, wyeliminować z wnioskowań matematycznych zwrot „wynika, że" na korzyść zwrotu „znaczy, że". dokładniej: „zdanie A wynika ze zdania B" rozumiem jako „treść zdania A zawiera się w treści zdania B”. Sam, nie będąc zawodowym matematykiem lecz filozofem, miałem okazję wielokrotnie rozmawiać z rasowymi matematykami. Właśnie podczas rozmów z nimi, a nie w czasie lektury ich prac, narzuciły mi się powyższe spostrzeżenia. Zasadniczy problem polega jednak na tym, że termin „znaczenie” nie został dotychczas, o ile mi wiadomo, zadawalająco scharakteryzowany. Spróbujmy zatem opisać zagadnienie nieco inaczej.

Załóżmy, że „znaczenie”, zgodnie z wittgensteinowskim pomysłem, określimy jako użycie treści. Rozróżniamy wobec tego znaczenie i treść jakiegoś wyrażenia. Pierwsze co należy zrobić, to opisać użycie treści zdania względem dowolnych spójników zdaniowych. Niech A, B oraz C reprezentują dowolne treści zdaniowe. W ogólnym przypadku do treści zdania nie należy informacja o jego wartości logicznej. Wyrażenie $A \Rightarrow B$ czytać będziemy; treść zdania B zawiera się w treści zdania A. Zwrot ten ma sens zdecydowanie pragmatyczny, chodzi o to, że cokolwiek możemy pomyśleć, myśląc treść zdania B, to możemy to pomyśleć, myśląc treść zdania A. Jasno widać, że np. $A \Rightarrow A$. Wyrażenie $A \wedge B$ czytać będziemy; treść będąca zestawieniem treści zdania A oraz treści zdania B. Ta złożona treść zawiera tylko to, co zawiera treść A oraz treść B. Odróżniamy ją od $A*B$, które czytamy; treść, która jest wspólna treści A oraz treści B. Jest tak, że: $(A \wedge B) \Rightarrow (A*B)$, ale nie odwrotnie. Zachodzi również; $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ i znak „$\wedge$” nie może być zastąpiony przez „*”. Ten pierwszy znak można intuicyjnie rozumieć jako konkatenację treści. Konkatenacja treści jest łączna i przemienna. Równocześnie mamy: treści $A \vee B$ oraz $A+B$, pierwsza z nich to treść zawarta w co najmniej jednej z treści A lub B, zaś druga to treść zawarta w obu treściach składowych i treść zawarta w ich złożeniu. Aby powyższe uwagi uporządkować, wypowiemy treści: $(A+B) \Rightarrow (A \wedge B)$, $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$, $(A \vee B) \Rightarrow (A*B)$. Najważniejszą sprawą jest kwestia identyczności treści zdaniowych. Sformułujemy ją następująco: $(A=B)=((A \Rightarrow B) *(B \Rightarrow A))$, i czytamy: treść „treść zdania A jest identyczna z treścią zdania B” jest identyczna z treścią wspólną treści; „treść B jest zawarta w treści A” oraz „treść A jest zawarta w treści B”. Jeszcze powiemy, że treść $\neg A$, to treść przeciwna treści A. Z powyższych ustaleń: $B \Rightarrow (A*\neg A)$, ale $(A+\neg A) \Rightarrow B$.

Rozważania powyższe dokonane na marginesie książki Hardy'ego nie są zakończone. Zadaniem ich jest propozycja innego ujęcia, w stosunku do tradycyjnych, filozofii matematyki. Jest tu jeszcze wiele znaków zapytania. Między innymi to ujęcie filozofii matematyki ma jeden podstawowy brak. Nie wiadomo jak intersubiektywnie, co jak się wydaje jest fundamentalnym wymogiem naukowości, wyrazić np. zawieranie się treści w treści. Kierunek wydaje się raczej jasny. Należy rozeznać dokładniej pracę mózgu (umysłu?). To umysł decyduje o tym czy jakaś treść zawiera się w innej czy też nie. Kierunkiem jest zatem pragmatyka.

Adam Olszewski