Artículo de Investigación
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

Euclides entre los árabes: un acercamiento a la lectura árabe de *Los Elementos*

Euclid among the Arabs: An Approach to the Arabic Reading of The Elements

Norma Ivonne Ortega Zarazúa
normaortega@filos.unam.mx
Colegio de Filosofía,
Facultad de Filosofía y Letras.
Universidad Nacional Autónoma de México.
https://orcid.org/0000-0002-4793-173X

Artículo recibido: 13 de enero de 2021
Artículo aceptado: 29 de mayo de 2021
Artículo publicado: 31 de julio de 2021

Resumen

Es común escuchar que el mundo Occidental debe a los árabes el descubrimiento del álgebra. No obstante, el desarrollo de esta disciplina puede interpretarse como un crisol de distintas tradiciones científicas que fue posible gracias a la clasificación, traducción y crítica tanto de los clásicos como de las obras que los árabes obtuvieron de los pueblos que conquistaron. Entre estos trabajos se encontraba *Los Elementos* de Euclides.

Los Elementos fueron cuidadosamente traducidos durante el califato de Al-Ma'mūn por el matemático Mohammed ibn-Musa Al-Khwārizmī, autor de *Al-jabr wa'l muqābalah*, quien sentó los fundamentos de la disciplina que más tarde sería conocida como álgebra y quien, en la primera parte de su obra, nos proporciona tres métodos para resolver tres tipos de ecuaciones que llama "ecuaciones combinadas". A lo largo de este artículo se ofrecen argumentos para sostener que los métodos para resolver estas ecuaciones constituyen una reinterpretación, en el terreno algebraico, de los teoremas 6, 7 y 8 del segundo libro de *Los Elementos* de Euclides. Mi objetivo es dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué lectura de *Los elementos* Euclides posibilitó la emergencia del álgebra en el mundo árabe? Para responderla, es necesario explorar el acercamiento que los árabes tuvieron con el Libro II de *Los Elementos*, con el fin de proponer una interpretación de los posibles factores que los llevaron a formular el álgebra. Esto último, en particular, se encuentra en la primera parte de la obra de Al-Khwārizmī.

Palabras clave: Álgebra, Al-Khwārizmī, Euclides, Ecuación, Teorema.

Abstract

It is common to hear that the Western world owes the Arabs the discovery of algebra. Nevertheless, the development of this discipline can be interpreted as a melting pot of different scientific traditions that was possible thanks to the classification, translation, and criticism of both the classics and the works that the Arabs obtained from the peoples they conquered. Among these works were *The Elements* of Euclid.

The Elements were carefully translated during the Caliphate of Al-Ma'mūn by the mathematician Mohammed ibn-Musa Al-Khwārizmī, author of Al-jabr wa'l muqābalah, who laid the foundations for the discipline that would later become known as algebra and who, in the first part of his work, provides us with three methods to solve three types of equations that he calls "combined equations". Throughout this paper I offer arguments to claim that the methods for solving these equations constitute a reinterpretation, in the algebraic field, of theorems 6, 7 and 8 of the second book of Euclid's *Elements*. My objective is to answer the following question: What reading of Euclid's *Elements* made possible the emergence of algebra in the Arab world? To answer this question, it is necessary to explore the approach that the Arabs had with Book II of *The Elements*, in order to propose an interpretation of the possible factors that led them to formulate algebra. The latter is found in the first part of Al-Khwārizmī's work.

Keywords: Algebra, Al-Khwārizmī, Euclid, Equation, Theorem.

1. Introducción[1]

Suele decirse que el *álgebra* comenzó a estudiarse en Europa gracias a los árabes, pues ellos *descubrieron* y desarrollaron esta disciplina. La raíz etimológica de su nombre es una muestra de su indiscutible origen y, aunque "álgebra" designó originalmente la operación de *restituir* huesos, fue utilizada por primera vez en el terreno matemático por Mohammed ibn-Musa al-Khwārizmī. Este último elaboró métodos *de restitución* para resolver una serie de ecuaciones en su *Al-jabr wa'l muqābalah* (en adelante *El libro del álgebra*).

Roshdi Rashed (1994) sugiere que la matemática árabe tiene su origen en al menos tres tradiciones: el cálculo y sistema de numeración indio, la astronomía mesopotámica y tanto en la geometría como trigonometría griega. En este sentido, la matemática árabe se nos muestra como una rica amalgama de saberes surgida de una pluralidad de tradiciones que ella misma restructuró. Esto se debió, al menos en primera instancia, a la clasificación, traducción y crítica de las obras que sus precursores recuperaron tanto de los clásicos como de los pueblos que conquistaron, entre las cuales nos interesa rescatar *Los Elementos* de Euclides y la influencia que este tratado ejerció sobre la formulación del álgebra que Al-Khwārizmī llevó a cabo en la obra mencionada. Teniendo esto presente, a lo largo de este artículo intento dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué lectura de Euclides posibilitó la emergencia del álgebra en el mundo árabe? Para ello es necesario explorar e interpretar el acercamiento que los árabes tuvieron con el Libro II de *Los Elementos*, pues en éste pueden atisbarse los fundamentos que, en concreto, subyacen al álgebra que Al-Khwārizmī presenta en la primera parte de su obra.

Para lograr mi cometido, en primer lugar, expongo brevemente la importancia que las traducciones tuvieron para reconstruir la recepción y líneas de trasmisión de *Los Elementos* en el mundo árabe. En segundo lugar, llevo a cabo una interpretación de los factores que, desde mi perspectiva, posibilitan la emergencia de un álgebra como la que encontramos en el primer libro de la obra de Al-Khwārizmī. En tercer lugar, examino la primera parte de *El libro del álgebra* con la finalidad de mostrar los elementos con que Al-Khwārizmī trabaja, la forma de resolver las ecuaciones que plantea y la relación que existe entre éstas y los teoremas seis, siete y ocho del segundo libro de *Los Elementos*. Finalmente, integro lo anteriormente analizado y con ello muestro qué lectura de *Los Elementos*, desde mi interpretación, posibilita la emergencia del álgebra planteada en la primera parte de *El libro del álgebra* de Al-Khwārizmī.

2. Los árabes como traductores

Desde tiempos remotos, la península arábiga estaba poblada por semitas, fenicios, babilonios y asirios. Los árabes de la costa estaban conformados por grupos sedentarios que vivían de la agricultura y el comercio; los árabes del interior (los beduinos) eran pastores seminómadas que alternaban el cuidado de

[1] Este trabajo se llevó a cabo en el marco del Proyecto de Investigación "Experiencia, Experimentación y Explicación en la Historia y la Filosofía de la Ciencia" con clave de registro PROINV_21_24 que dirige la Dra. Fernanda Samaniego Bañuelos del Sistema de Universidad Abierta de la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM.

Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

sus rebaños con la guerra y el pillaje. Tanto sedentarios como beduinos desconocían otra organización política que no fuera la unión de familias en grupos tribales sometidas, en tiempos de paz, a la autoridad patriarcal de un *sheik*. Por otro lado, en tiempos de guerra las órdenes eran dictadas por un líder común o *emir*.

La religión de los árabes antes de la reforma de Mahoma era politeísta y, además, creían en la existencia de *djinns* o genios que intervenían en todos los actos humanos. Si bien cada tribu y cada familia tenía un culto particular, existía en la Meca un santuario común en el que las tribus más importantes habían reunido a sus ídolos y en donde se adoraba una gran piedra negra. Esta última, de acuerdo con la tradición, era blanca y brillante cuando cayó del cielo, pero tras el paso del tiempo se había ennegrecido debido a los pecados del hombre.

Mahoma, miembro de la poderosa familia de los Koreichitas y fundador del islam, posibilitó en los árabes la unidad entre su gobierno y fe. No obstante, ésta constituyó únicamente una hegemonía religiosa y económica antes que política. Tras la muerte del profeta, su endeble unificación se transformó rápidamente en un imperio y, en menos de cien años, los árabes conquistaron un inmenso territorio que se extendió por la costa sur del Mediterráneo. La expansión árabe quedó paralizada a mediados de siglo VIII[2], aunque en cien años de guerras triunfales propagaron su religión por Asia, África y Europa, desde Siria hasta el valle del Indo y desde Armenia hasta los Pirineos. Sin embargo, el imperio árabe era demasiado extenso para mantenerse unido por mucho tiempo y en la segunda mitad del siglo VIII, tras cruentas batallas, se dividió en dos califatos: el de Occidente, con capital en Córdoba, donde reinó la dinastía de los Omeyas y el de Oriente, con capital en Bagdad, donde gobernaron los ‘Abbāsíes.

La dinastía ‘Abbāsí desempeñó un papel crucial dentro de la cultura árabe y su desarrollo intelectual. Desde el año 650 hasta el 750 fueron atraídos a Bagdad sabios de Siria, Irán y Mesopotamia. Hacia el siglo VIII, y bajo el patrocinio de los califas abbāsidas, comenzó la traducción de textos griegos, indios, mesopotámicos y otros. Entre los primeros textos traducidos al árabe se encuentra una versión de los *Siddhāntas,* procedente de la India, el *Tetrabiblos* de Ptolomeo y fragmentos de *Los Elementos* de Euclides. Más tarde, durante los califatos de Al-Mansūr, Hārūn Al-Rashīd y Al-Ma’mūn, Bagdad se convirtió en una *nueva Alejandría*. Con la fundación de la llamada *Casa de la Sabiduría*, la cultura árabe alcanzó su máximo esplendor intelectual, pues se tradujeron, comentaron y criticaron con especial interés obras de Dioscórides, Aristóteles, Ptolomeo y Euclides. Asimismo, se aprehendió la aritmética, química, astronomía y medicina de los indios.

Como podemos observar, el proceso de conquista árabe no se dio de forma unilateral. En otras palabras, los conquistadores fueron también conquistados por la cultura de los pueblos con quienes tuvieron contacto pues, en la mayoría de los casos, estas culturas fueron asimiladas, trasmitidas y enseñadas. Sin embargo, los árabes también “descubrieron nuevos teoremas matemáticos, hicieron progresar la astronomía y desarrollaron el cálculo indio con métodos procedentes de la cultura griega” (Moreno, 2010, p.12). Juan Vernet (1999) nos dice que a partir del establecimiento de la dinastía ‘Abbāsí en el poder, se

[2] *N. del E.*: Todos los siglos y años mencionados por la autora están comprendidos en el periodo después de Cristo (d.C)

comienzan a tener más datos acerca de cómo penetra la ciencia de la antigüedad en el mundo árabe, así como de las instituciones que se dedicaron a su preservación y traducción.

En el año 661, después de la muerte de Mahoma, Muawiya se proclamó como califa y extendió su dominio desde la península Ibérica hasta la India. Sin embargo, su intento por conquistar Constantinopla fracasó y, finalmente, en el 732 Charles Martel frenó el avance árabe en Francia, hecho con el cual culminó la época de conquistas de este pueblo y se vio diezmada la fuerza de tal dinastía. Mientras tanto, los ʻAbbāsís, principales adversarios de los Omeyas, se aliaron con los chiítas, grupo perseguido por estos últimos, a fin de derrocarlos. De esta manera, en el año 749 Abu-Abbas fue proclamado califa de la ciudad de Kufa y de inmediato ordenó una matanza sistemática de los Omeyas. Vale la pena destacar que de esta escapó Adberramán, nieto del último califa omeya, quien tras su huida se refugió en España y fundó un emirato independiente. El segundo califa ʻabbāsí, Al-Mansūr, trasladó la capital a Bagdad y adoptó la administración y maneras de los persas rodeándose, al igual que ellos, de sabios y traductores. Más tarde, en el 786, durante el califato de Al-Rashīd que es conocido gracias a *Las mil y una noches*, se buscaron y tradujeron al árabe manuscritos griegos. Este hecho marcó el comienzo de una de las épocas más brillantes del califato de Bagdad.

Al-Ma'mūn, hijo y sucesor de Al-Rashīd, fundó *La Casa de la Sabiduría*. Esta última fue un lugar en el cual se tradujeron obras que el califa adquirió como tributo, regalo o compra y que fueron escritas en palheví, sánscrito, copto y griego. Entre dichas obras destacan textos de Ptolomeo, Euclides, Menelao, Herón, Apolonio, Galeno, Hipócrates y Dioscórides. Es importante notar que las obras traducidas por los árabes (o al menos las que hasta ahora se conocen) son de índole científica y filosófica, pues al parecer "*no* se preocuparon de la traducción de textos literarios *a pesar* de que los conocieron" (Vernet, 1999, p.122). Muestra de ello es, por ejemplo, el cuento de *Simbad el marino*, que nos recuerda a las aventuras relatadas por Homero en *La Odisea*. Tal discriminación se debió quizás al siguiente supuesto:

> El verdadero sentido de la poesía sólo lo poseen los árabes y las gentes que hablan árabe. Las poesías no se dejan traducir ni pueden ser traducidas. Si se las traduce, la estructura poética se destroza, el metro ya no es auténtico, la belleza de la poesía desaparece y no queda nada que admirar en los poemas. Con la prosa es distinto […] (Ŷāḥiẓ citado por Vernet, 1999, p. 123).

Por otra parte, los árabes no solo desarrollaron la capacidad para asimilar las obras que recibían, sino que también hicieron una importante labor de recolección, discriminación y clasificación de ellas. Los periodos de traducción se pueden dividir de la siguiente manera:

I. Primer periodo (siglo VIII al X.): en donde se transmite el saber griego al mundo árabe y se tradujeron obras escritas en sánscrito como los *Siddhāntas*; libros de medicina y astrología del palheví y obras sobre alquimia escritas en copto. No obstante, las traducciones que más abundan en este periodo provienen de los textos griegos.

II. Segundo periodo (siglo XI al XIV): en donde las traducciones y ciencia árabe pasan al latín.

Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

El periodo de traducción que nos interesa es el primero. Este se llevó a cabo en la Casa de la Sabiduría y, a su vez, se divide en tres momentos:

i. El primero se caracterizó principalmente por atesorar y copiar -literalmente- libros. Asimismo, se realizó una primera traducción de varias obras de Aristóteles, del *Almagesto* de Ptolomeo, obras de medicina, cálculo, música y astrología. Estas traducciones fueron llevadas a cabo por sabios indios como *ibn Kankah* e *ibn Bahla*.

ii. Durante el segundo momento, la Casa de la Sabiduría se convirtió en un organismo especializado en la traducción. Además, durante este periodo se hizo posible la asimilación de los diversos conceptos que se empleaban en las obras traducidas y se incrementó el interés por traducir obras útiles para la argumentación y organización de las ideas. Las traducciones se alejaron de la literalidad, ya que su realización dependía de una comisión compuesta por copistas, correctores y revisores tanto de estilo como de contenido que evaluaban la viabilidad y comprensión de la obra.

iii. Finalmente, durante el tercer periodo la actividad de la Casa de la Sabiduría se centró la creación de ideas nuevas y en el dominio y enseñanza de las ideas aprendidas. La actividad traductora de este organismo disminuyó notablemente en esta etapa por dos razones: las iniciativas del califa Al-Mutawakkil y la producción de tratados originales por los intelectuales árabes.

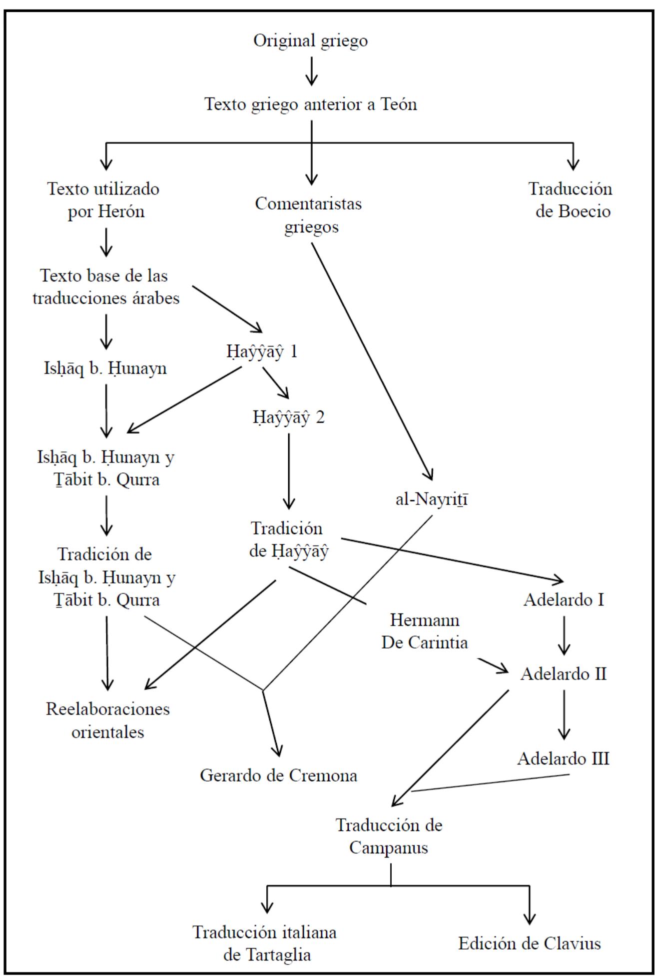
La Casa de la Sabiduría permitió a los árabes reunir, seleccionar, clasificar, traducir y criticar las obras científicas de la antigüedad. Esta labor es loable porque con ella no sólo conservaron y estudiaron las obras que llegaron a sus manos, sino que también las enriquecieron, discutieron sus alcances, sus deficiencias y, con ello, nos heredaron a través de su lengua y cultura el valioso legado de la antigüedad. Entre las obras que llegaron a tal centro se encuentran *Los Elementos* de Euclides que, como se suele afirmar, sistematiza una importantísima parte del saber matemático griego. Esta obra es la que nos interesa.

3. La llegada y recepción de *Los Elementos* en el mundo árabe

Durante los califatos de la dinastía ‘Abbāsí se aceleró la adquisición de manuscritos destinados al estudio y la traducción. La importancia de esta actividad dio pie a que se estableciera como una política de Estado “hacerse del máximo número de libros en un plazo mínimo de tiempo” (Vernet, 1999, p.131). Gracias a esta política, el emperador de Bizancio envió al califa Al-Mansūr (cca. 775) los textos de Euclides y algunos libros de Física, lo cual propició que, más tarde, sus sucesores enriquecieran las bibliotecas a base de donaciones, saqueos, contribuciones de guerra y negociaciones. Por otro lado, Al-Ma’mūn, califa aficionado a la ciencia griega, escribió al emperador bizantino para solicitarle el envío de obras antiguas. Además, formó una comisión que se encargaría tanto de seleccionarlas como de llevarlas a Bagdad y que estuvo integrada por Salmān (director de la Casa de la Sabiduría), Al-Bitrīq y Al-Hāyyāy (en otras versiones Al-Hājjāj). De este último hablaremos a continuación.

Pareciera que la primera versión de *Los Elementos* en latín se debe a Adelardo de Bath, quien se basó en la traducción árabe de Al-Hāyyāy. A decir de Ricardo Moreno (2010), la versión mencionada se confeccionó en la época de Al-Rashīd. No obstante, esta traducción no se basó en el texto original, pues la primera versión de Euclides que llegó a los árabes fue por vía del Bizancio, y éstos ya lo habían traducido. Otras traducciones fueron realizadas por Hishāq b. Hunayn, corregida por Tābit Qurra y una más fue realizada por Al-Damasqī, quien tradujo algunos libros que Al-Nayrizi comentó. Arnzen y Lo Bello (2009) nos dicen que, en el prólogo del *Comentario de Al-Nayrizi*, este asegura que conoce la segunda traducción de Al-Hāyyāy, aunque no se sabe si esta traducción fue el texto en que basó sus comentarios. En cualquier caso, la traducción que realiza Al-Hāyyāy es decisiva en la recepción y asimilación de la obra euclidiana. La razón es que es muy probable que Al-Khwārizmī (de quien nos ocuparemos más tarde) haya tenido acceso a ella y también a los comentarios de Al-Nayrizi que se enriquecen con los de Herón, Simplicio y un comentador desconocido. Todas estas versiones, de acuerdo con nuestra interpretación, influyeron en la lectura que Al-Khwārizmī realizó del libro II de *Los Elementos*.

Los Elementos que los árabes recibieron no constituyen el texto original de Euclides, sino que, como ya se indicó, se trataba de una traducción bizantina. Esta última posiblemente estaba basada en una versión de Herón de Alejandría, de lo cual da fe el siguiente estema (Vernet, 1999, p.180):



 Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

Los Elementos fueron conservados a través de tres copias basadas en una edición de Teón de Alejandría (cca. 370), quien "se vio en la necesidad de redactar de nuevo los ejemplares que tenía a la mano y que ya estaban ya bastante deteriorados" (Ehrenfried, 1978, p.30). Respecto a las tres copias, la primera de ellas fue la de Herón, texto base de los árabes. Luego, está la de algunos copistas y comentadores griegos cuyos nombres se desconocen, copia que pareciera corresponder al texto traducido por Al-Nayrizi[3]. Finalmente, estaba la copia hecha por Boecio, que también tradujo Adelardo de Bath, y que a su vez fue traducida por Clavius y Tartaglia.

Hay que señalar con especial ahínco que el texto euclidiano no sólo fue traducido, sino que también fue comentado y discutido. Ejemplos son el *Comentario a los postulados del libro de Los Elementos y Solución a las dudas de Los Elementos* de Tābit b. Qurra, los comentarios de Al-Nayrizi (de los cuales nos ocuparemos más adelante), los intentos de Al-Khayyam y Alhazen por demostrar el quinto postulado y el libro *De proportione et proportionalitate* de Yūsuf Al-Dāya, que fue traducido por Gerardo de Cremona. La variedad de discusiones que Euclides despertó entre los árabes hace imposible soslayar la influencia que *Los Elementos* ejercieron sobre sus formulaciones matemáticas, de las cuales nos interesa revisar el espíritu euclidiano que subyace al álgebra planteada por Al-Khwārizmī. Este será el tema del que nos ocuparemos a continuación.

4. Interpretación de las condiciones que posibilitan una lectura algebraica del Libro II de *Los Elementos*

Roshdi Rashed (1994) nos dice que hasta ahora los historiadores han sostenido un intenso debate sobre dos asuntos complementarios y fundamentales: la relación entre los orígenes del álgebra y los recursos utilizados por Al-Khwārizmī, sobre los cuales se ha asegurado que el matemático árabe se basa en la matemática helénica, india y babilónica. Teniendo esto en consideración, el presente apartado discutirá tal problema basándonos en una interpretación del Libro II de *Los Elementos* para, posteriormente, relacionarlo con las *ecuaciones* de Al-Khwārizmī.

4.1. Las nociones comunes de *Los Elementos*

Pretender relacionar el Libro II de *Los Elementos* con el álgebra árabe supone establecer, en primer lugar, en qué sentido las *ecuaciones* de Al-Khwārizmī pueden vincularse con la obra euclidiana. Si entendemos por ecuación *la igualdad entre dos expresiones matemáticas que contienen una o más incógnitas*, debemos revisar en qué condiciones dos expresiones son iguales. Siguiendo este objetivo,

[3] Con reserva de lo que asegura Vernet; Arnzen y Lo Bello (2009) afirman que Al-Nayrizi conoció no sólo la versión comentada por los griegos, sino que también la realizada por Al-Hāyyāy (aunque hay ciertas dudas sobre si esta traducción fue en la que Al-Nayrizi se basó para realizar su comentario). Asimismo, es importante señalar que el comentario de Al-Nayrizi a los libros II, III y IV de *Los Elementos* incluye los comentarios de Herón, cuya *Métrica* fue probablemente conocida por Al-Khwārizmī, quien recuperó problemas del ingeniero griego en su *Álgebra*. No obstante, y de acuerdo con Ricardo Moreno (2010), no se conserva ninguna traducción árabe, persa o siria de los textos de Herón.

debemos ofrecer un breve escrutinio del papel que desempeñan las nociones comunes al interior de la obra euclidiana, ya que éstas nos muestran cuándo dos *cosas* pueden relacionarse mediante la igualdad.

Los *Elementos* fueron escritos probablemente hacia el año 325. Su contenido se encuentra dividido en trece libros que incluyen dos tipos de *proposiciones*: enunciados que podemos interpretar como *teoremas* y enunciados que solicitan construcciones y podríamos nombrar *problemas*. Un ejemplo de *teorema* es: "Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados subtendidos bajo tales ángulos serán también iguales". Por otro lado, un ejemplo de *problema* sería: "Dividir en dos un ángulo rectilíneo dado". Todas estas proposiciones son antecedidas por una serie de definiciones que presentan los objetos con que se trabajará a lo largo de los libros, y la palabra que se traduce por definición es ‘΄Οροι (Oroi) que significa "los límites" o "las fronteras". En este sentido, las definiciones señalan los alcances de la materia abordada en cada libro por lo que, cuando Euclides define punto, línea, ángulo, figura, circunferencia, etc., señala los objetos propios de su geometría.

Ahora bien, además de presentar las veintitrés definiciones con que se trabajará, en el primer libro de *Los Elementos* también se enuncian una serie de postulados y nociones comunes. Los postulados son una serie de peticiones, pues la palabra que se traduce por petición, αἰτήματα (aiteemata), proviene del verbo αἰτέω (aiteoo) que significa "pedir", por lo que αἰτήματα significará "petición". De este modo, cuando Euclides dice en su primer postulado: "Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera", nos pide que, dados dos puntos cualesquiera, podamos trazar una línea que los una sin necesidad de *demostrar* que de hecho puede hacerse.

Finalmente, las nociones comunes, κοιναί ἔννοιαι (koinai ennoiai), término que significa "consideraciones en común", enuncian una serie de afirmaciones que debemos tener presentes en todos los libros dado que establecen las condiciones bajo las cuales dos *cosas* son iguales. Al respecto, Beppo Levi nos dice que:

> [...] se interpreta lo más comúnmente por los autores la palabra c*omunes* en el sentido de "comunes a todas las ciencias". Vamos a mostrar pronto que tal interpretación no puede corresponder a la del autor de los *Elementos*. Preferentemente podríamos considerarlas como los postulados generales de la noción geométrica de igualdad (Levi, 2001, p.93).

La noción que subyace a la enunciación de las consideraciones en común es la de igualdad, ya que a través de ellas Euclides indica en qué condiciones podemos considerar dos cosas como iguales.

La primera noción común: "Las cosas iguales a una misma son iguales entre sí", puede entenderse, de acuerdo con nuestra interpretación actual, como la propiedad transitiva de la igualdad. Esto último porque nos dice que, si una cosa es igual a otra y ésta, a su vez, es igual a una tercera, entonces, la primera será igual a la última. Si escribimos esta afirmación empleando nuestra simbología actual, Euclides parece plantear que:

$$Si\ a = b\ y\ c = b, entonces\ a = c$$

 Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

Por otro lado, desde nuestra lectura, la segunda y la tercera noción común representan la preservación de la igualdad bajo las operaciones de suma y resta. La razón de esto es que sostienen que, si añadimos o quitamos cosas iguales a lo que era igual, entonces, el total o la diferencia serán iguales respectivamente. De esta manera, la segunda noción, “y si a iguales se añaden iguales, los todos son iguales”, podría escribirse en términos actuales de la siguiente manera:

$$Si\ a = b, entonces\ a + c\ =\ b + c$$

Por su parte, la tercera noción común, “y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, las diferencias son iguales”, podría expresarse:

$$Si\ a = b, entonces\ a - c\ =\ b - c$$

La cuarta noción común: “Y las cosas congruentes entre sí son iguales”, parece establecer una forma de preservación de la igualdad. En efecto, si asumimos que dos cosas son congruentes entre sí, siempre que tengan la misma forma y tamaño, entonces la igualdad no dependerá ni de la posición u orientación del objeto en cuestión. Podemos concluir que Euclides probablemente establece preservación de la igualdad no sólo bajo las operaciones ya mencionadas, sino que, como diríamos actualmente, bajo traslación y rotación. Cabe mencionar que la palabra que se traduce como “congruencia”, ἐφαρμόζοντα (efarmózonta), proviene del verbo ἐφαρμόζω (efarmozoo) que significa “aplicar”, “ajustar” o “acomodar”. Esta aclaración es relevante porque Euclides demuestra congruencias entre triángulos, y sus pruebas consisten en poder “aplicar”, “ajustar” o “acomodar” un triángulo sobre otro. Así, con esta noción se demuestra que un triángulo es igual a otro independientemente de la *posición u orientación* del segundo.

Finalmente, la quinta noción común, “Y el todo es mayor que la parte”, establece que es posible descomponer una cosa en partes y que tales partes serán desiguales con respecto a la cosa entera. En otras palabras, señala que la parte no puede ser igual al todo. Podríamos reescribirla en términos actuales de la siguiente manera:

$$Si\ asumimos\ que\ a = b + c, con\ a \neq b\ y\ a \neq c, entonces\ a > b\ y\ a > c$$

Con base en el desarrollo anterior, podemos afirmar que las nociones comunes establecen cuándo considerar dos *cosas* como iguales. Sin embargo, en ellas no hay nada que nos diga el estatus de las *cosas* que podemos igualar. En otras palabras, y a pesar de que estas señalan cuándo las podemos relacionar mediante la igualdad, no sabemos aún si un punto puede ser igual a una línea, o una línea a una figura, u otros casos similares. Exploraremos este asunto a continuación.

El primer libro de *Los Elementos* nos enseña que las *cosas* sujetas a la relación de igualdad son del mismo tipo. De esta manera, en I.5 encontramos: “En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y, si se prolongan las dos rectas iguales, los ángulos de debajo de la base serán también iguales entre sí”, es decir, un ángulo es igual a otro ángulo. En I.6 leemos: “Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados subtendidos bajo tales ángulos serán también iguales”, o sea, una recta es igual a otra recta. Finalmente, en I.35: "Paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí", en otros términos, una figura es igual a otra figura.

Por otra parte, podemos encontrar una cierta homogeneidad en los resultados que arrojan las operaciones que se realizan con los ángulos, rectas y figuras. En I.13 encontramos: "Si una recta levantada sobre otra hace ángulos, serán o bien dos rectos o igual a dos rectos", aquí se menciona que la suma de ángulos será un ángulo. Por su parte, I.47 dice: "En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subyace el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto", de lo que podemos interpretar que la suma de figuras es igual a otra figura. Por último, en I.3 se lee: "Dadas dos rectas desiguales quitar de la mayor una recta igual a la menor", en el cual se indica que, si quitamos una recta a otra, el resultado será otra recta.

Quizá parezca trivial hacer las aclaraciones anteriores. Sin embargo, es preciso señalar no sólo cuáles son los criterios que condicionan la relación de igualdad, sino que también debemos tener claro que los objetos con los que Euclides trabaja y las operaciones que podemos hacer con ellos son iguales a objetos del mismo tipo. En términos actuales, podríamos decir que las operaciones euclidianas son cerradas. De manera análoga, será imposible bajo estas condiciones sumar rectas con figuras o rectas con ángulos. Dicho de otro modo, las operaciones de "poner" o "quitar" pueden efectuarse sólo con objetos del mismo tipo.

En lo que sigue exploraremos otro tipo de objetos que hasta ahora no hemos contemplado y que son de vital importancia para alcanzar el objetivo propuesto: la relación entre algunos objetos geométricos, las figuras, y su expresión en proporciones.

4.2. Los libros II y VI de *Los Elementos*

El libro II de *Los Elementos* es un tratado geométrico conformado por dos definiciones y catorce proposiciones: las primeras incluyen la definición de paralelogramo rectángulo y gnomon; las segundas dos problemas, un corolario y doce proposiciones, de las cuales dos se enuncian como desigualdades (aunque se pide probar igualdades) y las diez restantes presentan igualdades entre rectángulos[4].

El cuarto teorema del libro que tratamos dice: "Si se corta una línea recta, el cuadrado de la línea es igual a los cuadrados de las partes más el duplo del rectángulo comprendido por las partes". En otras palabras, si tenemos una recta AB dividida arbitrariamente en el punto G, el cuadrado de AB es igual a la suma del cuadrado de AG y el cuadrado de GB más dos veces el rectángulo comprendido por las rectas AG y GB. Este teorema, como podemos observar, establece la igualdad entre un cuadrado y la suma de dos cuadrados y un rectángulo formados a partir de la división arbitraria de una recta. Dicho de otra forma, se pide probar que:

$$(AB)^2 = (AG)^2 + 2(AG)(GB) + (GB)^2$$

[4] Con la finalidad de no incurrir en anacronismos, quisiera advertir que, a partir de este momento, escribiré con la notación algebraica actual todas las expresiones que desde mi interpretación representan operaciones en los textos griego y árabe.

Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

igualdad que, reescrita en nuestros términos, se puede expresar:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, asumiendo\ que: AG = a, GB = b\ y\ AB = a+b$$

Por otra parte, el primer problema que aparece en este libro es el siguiente: "Dividir una recta de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea igual al cuadrado de la parte restante" en el cual se pide que, dada una recta AB, hay que cortarla de modo que, si AG y GB son las partes que resultan del corte, entonces, debemos construir:

$$(AG)^2 = (AB)(GB)$$

Este problema es particularmente interesante porque podemos leer en él una enunciación de la *proporción* áurea, pues si se nos pide construir:

$$(AG)^2 = (AB)(GB)$$

que también puede expresarse:

$$(AG)^2 = (AG+GB)(GB)$$

y si ésta a su vez se escribe:

$$(AG)(AG) = (AG+GB)(GB)$$

entonces, se puede establecer la siguiente proporción:

$$AG{:}GB = (AG+GB){:}AG$$

que es precisamente la proporción áurea, sobre la cual García Olvera dice:

> La *sección* se califica con el adjetivo de *áurea*, cuando se divide un todo en dos partes desiguales, de tal manera que el todo sea a la parte mayor, como la parte mayor es a la parte menor. Entonces aparece la proporción también llamada áurea, en la cual la razón entre el todo y la parte mayor es igual a la razón entre la parte mayor y la parte menor. (García Olvera, 2005, p.70-71)

De acuerdo con esta caracterización, se observa que Euclides nos propone dividir un todo, la recta AB, en dos partes desiguales de modo que, si expresamos AB como *AG+GB*, siendo AG la parte mayor y GB la parte menor, entonces, $AG{:}GB = (AG+GB){:}AG$ puede ser leída de la siguiente manera: el todo es a la parte mayor como la parte mayor es la parte menor, siendo precisamente la proporción áurea.

Ahora bien, e independiente de que este problema pueda ser interpretado como una construcción de la proporción áurea, quiero llamar la atención sobre un asunto pertinente para el desarrollo de este trabajo. Me refiero a la posible relación entre los libros II y VI de *Los Elementos*, ya que, a través de este problema, se puede observar que los dos problemas que se encuentran en el libro que hasta ahora se ha presentado pueden ser expresados en lenguaje de proporciones.

El segundo problema del libro II dice: "Construir un cuadrado igual a un dominio rectilíneo dado". En él se señala que, si tenemos un dominio rectilíneo A, es posible construir un cuadrado ET que sea igual a dicho dominio. Dicho de otra manera, debemos encontrar:

$$A = (ET)^2$$

de modo que, si consideramos A = ab, hay que construir un cuadrado tal que:

$$x^2 = ab$$

y, si reescribimos $x^2 = ab$ como $(x)(x) = (a)(b)$, tendremos:

$$x : a = b : x$$

expresión equivalente al problema trece del libro VI (en el que se trata de la teoría de las proporciones después de la introducción realizada por el libro V): "Dadas dos líneas rectas encontrar una media proporcional". En otras palabras, si tenemos dos rectas AB y BC, entonces hay que encontrar BD tal que $AB : BD = BD : BC$ y para ello se colocan las rectas AB y BC en el semicírculo AC y se traza la perpendicular BD a la recta *AC* que es igual a *AB+BC*. Pero, como BD forma un ángulo recto con la base del triángulo ADC, entonces DB es la media proporcional entre los segmentos de la base que son precisamente AB y BC. Por lo tanto, $AB : BD = BD : BC$.

De acuerdo con el desarrollo anterior, se puede afirmar que ciertas magnitudes geométricas pueden ser *formuladas* en términos de proporcionalidad. Dicho de otro modo, las magnitudes geométricas representadas por dominios rectilíneos pueden reescribirse mediante *magnitudes que tienen razones análogas* (Euclides, Libro V, Def. 6), en donde se entiende por razón, de acuerdo con la tercera definición del libro V de *Los Elementos*, "cualquier relación entre dos magnitudes del mismo género según su cantidad" (Euclides, Libro V, Def. 3). Detengámonos ahora en esta definición.

La razón es cualquier relación entre dos magnitudes del mismo género según su cantidad, es decir, la razón es la relación establecida entre dos *cosas* del mismo tipo de acuerdo con su cantidad. Si bien la palabra "cantidad" no es definida por Euclides, podemos decir que proviene del griego πηλικότητά (peelicóteetá), que viene de πηλίκος (peelícos) que significa "cuán grande" o "de qué tamaño". Cantidad, etimológicamente, se refiere a una *cosa* que puede medirse porque su raíz designa cuán grande o de qué tamaño es algo. Por otro lado, la definición en donde aparece la palabra cantidad es la número tres, y, aunque Euclides no nos dice nada de ésta, con base en las definiciones subsecuentes se podría afirmar

 Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

que la cantidad es una magnitud susceptible de aumento y decremento[5]. De este modo, la cantidad, tal cual la definimos anteriormente, queda inserta en *Los Elementos* como una entidad geométrica que nos permite establecer una relación entre figuras y proporciones, aspecto que nos permite suponer la existencia de una cierta homogeneidad entre ellas. Así, las expresiones $ad = cb$ y $a:b = c:d$ son equivalentes con *ad* y *cb* rectángulos y *a, b, c, d* cantidades. En consecuencia, Euclides nos da licencia para establecer una equivalencia entre figuras y razones (y por ello nos permite considerar la figura de acuerdo con su cantidad, consideradas ambas como magnitudes geométricas). A este respecto, Beppo Levi afirma:

> […] el Libro V nos presenta un súbito cambio de la ruta, desvinculándose casi por completo de las ideas directoras de los Libros anteriores; los elementos con lo que se trata ya no son más segmentos, ángulos y polígonos, sino magnitudes en general; y el hecho de que la figuración que acompaña las demostraciones se hace todavía exclusivamente por segmentos, mientras que los comentaristas se esfuerzan frecuentemente en acentuar el nuevo punto de vista con el dibujo de objetos diferentes, sólo demostrará más claramente el pensamiento más puramente abstracto del autor antiguo, desvinculado de la representación material; pues esos segmentos no tienen diferente significación que las letras en nuestras demostraciones algebraicas (Levi, 2001, p.167).

A partir de lo anterior, se puede sugerir que el hecho de que Euclides permita expresar ciertas proposiciones de contenido puramente poligonal en un lenguaje de proporciones nos da licencia para expresarlas en un lenguaje algebraico. Este lenguaje es el mismo que verá su génesis en la *teoría de las ecuaciones* construida por Al-Khwārizmī y que abordaremos en breve, pero no sin detenernos antes a examinar de soslayo el comentario del libro II hecho por Al-Nayrizi. Este último será el asunto que abordaremos a continuación.

4.3. El comentario de Al-Nayrizi al libro II de *Los Elementos*

Se ha dicho ya que *Los Elementos* fueron conservados a través de tres copias: las realizadas por Herón de Alejandría, las que hicieron algunos comentaristas griegos y las que fueron hechas por Boecio. Todas, a su vez, se basan en una edición de Teón de Alejandría. La copia y el comentario que analizaremos a continuación son los que elabora Al-Nayrizi, que corresponden a las del segundo caso y que será nuestra primera aproximación a la lectura de Euclides que hicieron los árabes. En el comentario en cuestión se encuentra una traducción de la obra euclidiana, la transcripción de los comentarios de Herón al respecto y "ejemplos con números" de distintas proposiciones.

Las proposiciones no son anunciadas como tales, sino que como figuras. De este modo, la primera proposición o primer teorema dice: "Primera figura del segundo tratado" (Al-Nayrizi citado por Arnzen y Lo Bello, 2009, p.21). Es importante mencionar esta particularidad del tratado de Al-Nayrizi porque, a

[5] Véase la séptima definición del libro V: "Cuando entre (cantidades) igualmente multiplicadas, el múltiplo de la primera *supera* al múltiplo de la segunda, pero el múltiplo de la tercera *no supera* al múltiplo de la cuarta, se dice que la primera tiene a la segunda una razón *mayor* que la tercera a la cuarta" (Cursivas mías).

pesar de que actualmente llamamos teoremas a cada una de las proposiciones encontradas en la obra euclidiana que aquí trabajamos, en *Los Elementos* sólo se numeran cada uno de estos enunciados. Aunque no abordaremos este asunto, sería pertinente preguntarnos por qué Al-Nayrizi decide nombrar "figuras" a cada uno de los teoremas y qué importancia tiene tal denominación en la comprensión de la obra euclidiana. Ahora bien, los elementos que integran la presentación de las figuras son heterogéneos. Sin embargo, podemos rastrear una línea común en ellos pues, en general, incluyen: el teorema y su respectiva demostración, dos tipos de ejemplos y el comentario de Herón. Abordaremos estas características del tratado de Al-Nayrizi en detalle.

En primer lugar, cada figura contiene una transcripción modificada de los teoremas de Euclides. Esto se debe, posiblemente, a que la edición de *Los Elementos* conocida por Al-Nayrizi ya había sufrido alteraciones[6]. Por ejemplo, en la figura catorce del segundo tratado se dice: "Queremos demostrar cómo puede ser construida una superficie cuadrada igual a un triángulo conocido" (Al-Nayrizi citado por Arnzen y Lo Bello, 2009, p.53). Nuestro matemático se está proponiendo construir un cuadrado igual a un triángulo dado, lo cual no es exactamente lo propuesto por Euclides. No obstante, sí es equivalente, pues en II.14 se nos dice: "Construir un cuadrado igual a un dominio rectilíneo dado".

En segundo lugar, ya se mencionó que el comentario de Al-Nayrizi tiene dos tipos de ejemplos. De este modo, en la tercera figura encontramos:

> Por ejemplo: Si una línea AB ha sido dividida en dos segmentos en el punto G, entonces digo que la superficie que encierran la línea AB y el segmento BG es igual a la superficie que encierran los dos segmentos AG, GB con el cuadrado de GB. [...] Un ejemplo con números: Asociemos a la línea AB el número diez y dividámosla en dos segmentos en el punto G; AG será el número tres y GB el número siete. Así que la multiplicación de AB, que es diez, por BG, que es siete, es el número setenta, que es igual a la suma de la multiplicación de AG, que es tres, por GB, que es siete, y la multiplicación de GB, por sí misma. Y AG veces GB, es veintiuno, y la línea GB por sí misma es cuarenta y nueve, y la suma de las dos es setenta. Que es lo que queríamos demostrar (Al-Nayrizi citado por Arnzen y Lo Bello, 2009, p.25-26).

Recordemos que antes de la demostración de los teoremas Euclides presenta dos enunciados: en el primero se incluyen los datos que usaremos para demostrar el teorema (i.e. lo que actualmente llamaríamos hipótesis) y en el segundo se expresa claramente lo que se desea demostrar. Por ejemplo, en el teorema II.3 encontramos: "Divídase, pues, la AB, al arbitrio; pongo por caso por el punto G" y "Digo que el rectángulo comprendido por las AB, BG es igual al rectángulo comprendido por las AG, GB más el cuadrado de la BG", enunciados que pueden interpretarse como hipótesis y tesis respectivamente. Si comparamos el primer ejemplo de Al-Nayrizi con lo anterior, podemos concluir que en éste se incluyen tanto la hipótesis del teorema como la afirmación por demostrar. Esta presentación resulta muy interesante, porque desde nuestra mirada actual pensaríamos que Euclides propone una línea cualquiera

[6] El teorema catorce es anunciado exactamente igual en la copia realizada por Al-Hāyyāy, aunque no sucede lo mismo con otros teoremas (Arnzen y Lo Bello, 2009, p.62-67).

Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

dividida indistintamente por un punto cualquiera. No obstante, a los ojos de Al-Nayrizi no es cualquier línea, sino específicamente la línea AB que es usada para comprender o *ilustrar* el teorema sujeto a demostración. Por esta razón, la *hipótesis* y el *enunciado por demostrar* constituyen ejemplos para este matemático árabe (acaso este hecho puede brindarnos una *línea* argumentativa que permita comprender por qué los teoremas son enunciados como figuras). Por otro lado, el segundo tipo de ejemplo que Al-Nayrizi nos brinda es numérico y se enuncia una vez que se ha demostrado el teorema en cuestión, lo cual permite elaborar una demostración numérica del mismo. En él, como hemos visto, se asocia un número a cada segmento y, siguiendo la forma dada por el primer tipo de ejemplo, se demuestra la igualdad propuesta en el teorema mediante una serie de operaciones aritméticas.

En tercer lugar, los comentarios de Herón pueden ser clasificados en dos tipos: un comentario que llamaré aclarativo y una serie de comentarios que presentan demostraciones alternativas a las dadas por Euclides y en los cuales se incluyen, además, dos corolarios con sus respectivas demostraciones.

El primer comentario de Herón aparece en la primera figura y dice:

> Esta figura no puede ser probada sin dibujar dos líneas. Pero en lo que se refiere a las figuras restantes, es posible demostrarlas dibujando una sola línea. Asimismo, si demostramos con base en una sola línea, podemos presentar dos métodos de prueba, uno de ellos es el método de análisis y el otro es el método de síntesis. Análisis es cuando una cuestión u otra es poseída por nosotros y decimos: “Supongamos que lo que se busca es verdad”. Entonces, resolvemos algo cuya prueba está dada de modo que cuando ha sido demostrado decimos: “Lo que se buscaba ha sido encontrado por análisis”. Síntesis es cuando se inicia con cosas conocidas y después se las combina hasta que se encuentre lo desconocido, y con esto [se dice que] lo desconocido ha sido probado por síntesis. Y ahora que hemos dicho esto, procedamos a realizar nuestra tarea, de acuerdo con lo que se ha descrito y prometido.
>
> Con esto, [Herón] quiere decir que va a ilustrar lo que ha prometido en el resto de las figuras que Euclides presenta en este segundo tratado (Arnzen y Lo Bello, 2009, p.22-23).

En este comentario Herón menciona que, salvo en la primera figura, se puede construir una demostración analítica y una sintética para las figuras dadas por Euclides. En otras palabras, proveerá una prueba suponiendo que lo que se pretende demostrar es verdadero y otra en la que, a partir de la relación entre los datos proporcionados, lleguemos a lo que pretendemos demostrar. Este comentario es de tipo aclarativo debido a que Herón esclarece los medios que utilizará para demostrar las figuras propuestas por Euclides en el segundo tratado.

En las restantes figuras, salvo en la once y catorce (dado que piden construcciones y no demostraciones como tal), Herón propone una serie de pruebas alternativas a las que construye Euclides y que Al-Nayrizi reproduce. Asimismo, en las figuras doce y trece se incluyen dos corolarios propuestos y demostrados por Herón. En resumen, el *Comentario del libro II* se estructura de la siguiente manera: la primera figura incluye el teorema y su demostración, los dos tipos de ejemplos y el comentario aclarativo de Herón.

Desde la segunda hasta la quinta figura se presentan los teoremas y su demostración, los dos tipos de ejemplos y las pruebas alternativas de Herón. Desde la sexta hasta la onceava figura encontramos los teoremas y su demostración, el primer tipo de ejemplo y las pruebas de Herón. En la onceava figura está el teorema y su demostración, el primer tipo de ejemplo y la construcción de Herón. Las figuras doce y trece muestran los teoremas y su demostración, el primer tipo de ejemplo y los corolarios propuestos y demostrados por Herón. Finalmente, la figura catorce sólo incluye el teorema y su demostración.

De este breve análisis quiero destacar dos aspectos: el primero se refiere a la distinción que propusimos en la primera sección de este apartado, a saber, que las *proposiciones* que encontramos en *Los Elementos* podían dividirse en teoremas y problemas. Tal distinción también es llevada a cabo por Herón, pues las proposiciones once y catorce (que son los dos problemas del segundo libro de *Los Elementos*) no reciben el mismo tratamiento que las demás:

> Para esta figura es imposible probar sin una ilustración. Esto es porque, en ciertas igualdades, es absolutamente necesario que conozcamos las construcciones por las cuales llegamos a ellas. […] Y hemos demostrado en las figuras precedentes que las construcciones no son necesarias para la demostración; al contrario, necesitan sólo de la prueba y hemos mostrado sus pruebas sin recurrir a dibujos. Sin embargo, esta proposición requiere una construcción, por esta razón se hace imposible entenderla sin una ilustración. (Arnzen y Lo Bello, 2009, pp. 47-48).

Con base en esta referencia notamos que el mismo Herón reconoce que las proposiciones once y catorce exigen un tratamiento distinto al que recibieron las otras: en ellas se requiere dibujar las figuras, ya que sólo a través de la construcción se entenderá el contenido de la proposición misma.

En segundo lugar, quiero destacar que resulta sugerente que Al-Nayrizi proponga ejemplos numéricos a ciertas figuras (específicamente desde la segunda hasta la quinta). Y es que a través de estos ejemplos se propone una *demostración* usando números (demostración que, por cierto, tampoco requiere la construcción de la figura), de manera que, si entendemos por número *una relación entre una cantidad determinada y otra considerada como unidad*, entonces podemos sospechar que este tipo de ejemplos establecen una relación entre las figuras del segundo tratado y las cantidades. Sin embargo, no todas las figuras presentan esta relación, por lo cual podríamos preguntarnos: ¿qué características hacen que estas proposiciones puedan ser demostradas mediante ejemplos numéricos? Este asunto es fundamental para la comprensión de la génesis del álgebra en el mundo árabe, expresada a través de las soluciones de "ecuaciones combinadas" de Al-Khwārizmī, pues éstas se pueden relacionar con los teoremas seis, siete y ocho del segundo libro de *Los Elementos* que no tienen prueba numérica en el *Comentario* que aquí revisamos. Podríamos aventurarnos a sugerir (injustificadamente en la medida en que no sabemos si Al-Khwārizmī conoció el trabajo de Al-Nayrizi) que tales ecuaciones brindan el ejemplo numérico que Al-Nayrizi no propone y que, en este sentido, nos ofrecen un modo de comprender tales teoremas sin recurrir a una figura (aunque después Al-Khwārizmī muestre la *causa* de sus ecuaciones recurriendo a construcciones geométricas).

Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

Para concluir, la finalidad de revisar brevemente el comentario de Al-Nayrizi estriba en que éste nos permite un primer acercamiento a *Los Elementos* que conocieron los árabes. Además, nos permite advertir la influencia que la matemática árabe recibió de esta obra que, para los fines de este artículo, se reduce a revisar el álgebra planteada por Al-Khwārizmī. De esta última hablaremos a continuación.

5. El álgebra de al-Khwārizmī

Ricardo Moreno (2010) nos dice, en su biografía sobre Al-Khwārizmī, que este matemático vivió aproximadamente entre los años 780 y 850 y que se conservan cinco de sus obras que tratan sobre aritmética, álgebra, astronomía, geografía y calendario. El tratado de astronomía es un compendio de tablas sobre los movimientos del Sol, la Luna y los planetas; al parecer su construcción se ve influenciada, al igual que el tratado de geografía, por Ptolomeo, aunque los cálculos se basan en la técnica india. Su trabajo sobre el calendario es un análisis del calendario judío en el que Al-Khwārizmī demuestra un buen conocimiento de la Biblia y la religión judía. Su aritmética, cuyo original está perdido, recupera la técnica india para multiplicar, dividir, extraer raíces y manipular fracciones, así como el sistema de numeración decimal del cual se dan ciertos visos en *El libro del álgebra* que trataremos a continuación.

5.1. *Los Elementos* del álgebra y muqabala de Al-Khwārizmī

El *Libro del álgebra y de muqabala* de Mohammed ibn Mūsā al-Khwārizmī es un tratado matemático que se puede datar entre los años 813 y 830. Este es el primer libro en el que la palabra “álgebra” designa una disciplina matemática dotada tanto de un lenguaje como de objetos propios y, aunque en sus páginas no hay ningún numeral, abreviatura o expresión que actualmente consideraríamos como algebraica, sí podemos encontrar en él una retórica algebraica como tal. El libro ya mencionado aborda tres asuntos: en el primer libro encontramos un tratado de resolución de ecuaciones. El segundo libro trata problemas de geometría, dos de ellos basados en soluciones de Herón. Finalmente, el tercer libro ofrece soluciones a diversos problemas testamentarios de acuerdo con la legislación del islam. De estos tres textos revisaremos el tratado de las ecuaciones.

La primera parte del *Libro del álgebra*, después una plegaria a Dios y la dedicatoria, comienza de la siguiente manera:

> Cuando pienso sobre lo que los hombres necesitan para el cálculo, encuentro siempre el número; encuentro que todos los números están compuestos por la unidad, y que la unidad forma parte de todos los números. Además, encuentro que todos los números que pueden expresarse desde el uno hasta el diez vienen de la unidad. […] Los números necesarios en el cálculo de álgebra y *muqabala* son tres: las raíces, los cuadrados y el número simple, es decir, que no está asociado ni a una raíz, ni a un cuadrado.
>
> La raíz es toda cosa multiplicada por ella misma, a partir de la unidad, los números que están debajo de ella y las fracciones que están por encima de ella. El cuadrado es lo que se obtiene al multiplicar la raíz por ella misma. El número simple es un número que se expresa sin ser asociado ni a una raíz ni a un cuadrado. (Al-Khwarizmi, 2007, p.96).

Al-Khwarizmi, al igual que Euclides, comienza con la definición de los objetos con que trabajará: raíces o cosas, cuadrados y números. Esta clase de objetos, como lo indica la anterior referencia, son todos números y, por lo mismo, pueden establecerse igualdades entre ellos: “De estos tres modos, algunos son iguales a otros; por ejemplo, cuando decimos: cuadrados son iguales a raíces, cuadrados son iguales números y raíces son iguales a números” (Al-Khwarizmi, 2007, p.96). Los tres tipos de números que define pueden ser relacionados mediante la igualdad, de manera que, si es posible reescribir tales igualdades en nuestros términos y asumimos que un cuadrado puede ser representado por x^2, una raíz por *x* y un número por *a, b, c…*, entonces, las primeras tres ecuaciones que serán resueltas mediante el álgebra y muqabala serán las siguientes:

$$ax^2 = bx$$

$$ax^2 = c$$

$$bx = c$$

Ahora bien, la palabra “álgebra” proviene de *ӯebr*, “reducción”, cuya raíz ӯ-b-r significa “reforzar, curar o restituir” (Corominas, 2005, v. ‘*álgebra*’). Este término estuvo relacionado con la medicina, pues el algebrista era un curandero de huesos que los restituía o acomodaba en su lugar. Al-Khwārizmī, por su parte, denota con “álgebra” el acto de *eliminar un elemento en uno de los dos miembros de la ecuación, de modo que ésta ha de ser restaurada en el otro miembro sumando o restando* (Moreno, 2010, p.36). Por otro lado, y a pesar de que la palabra “muqabala” no fue conservada en el lenguaje matemático, es preciso mencionar que significa *comparación u oposición y se refiere a la reducción de términos semejantes* (Moreno, 2010, p.37).

Líneas arriba listamos las ecuaciones que pueden construirse si igualamos raíces, números y cuadrados. Un ejemplo del primer tipo de ecuación que Al-Khwārizmī ofrece es el siguiente: “un cuadrado es igual a cinco raíces” (Al-Khwarizmi, 2007, p.96), que podríamos escribir:

$$x^2 = 5x$$

Si x^2 es equivalente a $x \cdot x$ y $5x$ a $5 \cdot x$, tendríamos que $x \cdot x = 5 \cdot x$. Ahora bien, como la muqabala reduce términos semejantes, tendríamos: $x = 5$ y, dicho en términos de Al-Khwarizmi: “la raíz del cuadrado es cinco y el cuadrado veinticinco, igual a cinco raíces” (Al-Khwarizmi, 2007, p.96).

Además de las ecuaciones anteriores encontramos un segundo género que bien podrían llamarse “ecuaciones combinadas”, puesto que, además de trabajar sólo con raíces, cuadrados y números, establecen combinaciones entre estos: “cuadrados más raíces igual a un número; cuadrados más un número igual a raíces; raíces más un número igual a un cuadrado” (Al-Khwarizmi, 2007, p.100). Estas ecuaciones pueden reescribirse con nuestros términos actuales de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 + c = bx$$

Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

$$bx + c = ax^2$$

Al-Khwārizmī propone métodos de solución particulares para cada una de estas ecuaciones (más adelante veremos que tales métodos pueden rastrearse en los teoremas seis, siete y ocho del segundo libro de *Los Elementos*). A continuación, mostraré el modelo general de solución que podemos inferir a partir del método particular que se propone para resolver cada una de ellas:

1) Cuadrados más raíces igual a un número ($\boldsymbol{ax^2 + bx = c}$)

En este caso la ecuación propuesta por el matemático árabe es la siguiente:

> Un cuadrado más diez raíces son igual a treinta y nueve dírhams, es decir, que si juntamos un cuadrado con <una cantidad> igual a diez raíces, el total será treinta y nueve. Procedemos así: partamos en dos mitades el número de raíces, el resultado de esto es cinco, que si multiplicamos por sí mismo es veinticinco; que sí juntamos con treinta y nueve, serán sesenta y cuatro; y si tomamos la raíz es ocho, del cual sustraemos la mitad de las raíces, que es cinco. El resto es tres, que es la raíz del cuadrado que queríamos y el cuadrado es nueve (Al-Khwarizmi, 2007, p.100).

La ecuación de al-Khwārizmī reescrita con nuestros términos actuales es:

$$x^2 + 10x = 39$$

Siguiendo con cuidado el método de solución que se propone, podemos decir que la forma general para resolver ecuaciones de este tipo es:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

si desarrollamos tenemos:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

de donde resulta:

$$c = x^2 + bx$$

que es equivalente a:

$$x^2 + bx = c$$

Este desarrollo nos permite asegurar que existe una relación de necesidad entre la solución de la ecuación y la ecuación misma. De esta manera, cualquier ecuación que tenga esta forma puede ser resuelta mediante el método que nos brinda Al-Khwārizmī, incluso si en nuestra ecuación hay más de un cuadrado. Veremos que con las ecuaciones restantes sucede lo mismo.

2) Cuadrados más números igual a raíces ($ax^2 + c = bx$)

En este caso se plantea:

> Un cuadrado y veintiún dírhams son iguales a diez raíces, es decir, ¿cuál es el cuadrado tal que cuando le sumas veintiún dírhams da todo ello diez raíces de dicho cuadrado? Procedemos así: partamos en dos mitades el número de raíces; serán cinco; lo multiplicamos por sí mismo y serán veinticinco, ahora restamos el veintiuno que está con el cuadrado y será cuatro; tomamos su raíz, que es dos; la restamos a la mitad del número de las raíces, que es cinco. Será tres, que es la raíz del cuadrado que quieres. Y el cuadrado es nueve.
>
> Si quieres, sumas la raíz con la mitad de las raíces; será siete, que es la raíz del cuadrado buscado, y el cuadrado es cuarenta y nueve (Al-Khwarizmi, 2007, p.104).

La ecuación puede reescribirse: $x^2 + 21 = 10x$, cuya forma general de resolución es:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

si desarrollamos tenemos:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

de donde resulta

$$-c = x^2 - bx$$

que es igual a:

$$x^2 + c = bx$$

3) Raíces más números igual a cuadrados ($bx + c = ax^2$)

Para esta combinación se propone:

> Tres raíces y cuatro en número son iguales a un cuadrado. Procedemos así: partamos el número de raíces en dos mitades, será uno más un medio; lo multiplicamos por sí mismo y será dos más un cuarto; le sumamos cuatro, será seis más un cuarto; tomamos la raíz de esta raíz que es dos más un medio; sumamos la mitad de las raíces, que es uno más un medio, serán cuatro, que es la raíz del cuadrado, y el cuadrado es dieciséis. Y si es más de un

Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

cuadrado o menos de un cuadrado, lo reduces a un solo cuadrado (Al-Khwarizmi, 2007, p.106).

En este caso, la ecuación que se nos propone resolver es: $3x + 4 = x^2$. Su forma general de resolución es:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

de donde se sigue:

$$x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

luego

$$x^2 - bx = c$$

que es igual a:

$$bx + c = x^2$$

Observamos que las soluciones que Al-Khwārizmī nos brinda están totalmente relacionadas con las ecuaciones que pretende resolver, es decir:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \equiv x^2 + bx = c$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \equiv x^2 + c = bx$$

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \equiv bx + c = x^2$$

Ahora bien, la solución de las ecuaciones que hemos revisado está sujeta a una pregunta no sólo interesante, sino que también pertinente: ¿por qué Al-Khwārizmī no logra construir la solución general para ecuaciones de segundo grado? Tal cuestión, que es interesante en la medida en que nuestro matemático da los elementos necesarios para establecer una ecuación general, no será abordada en este trabajo. No obstante, lo que sí abordaremos es la relación que existe entre éstas y los teoremas seis, siete y ocho del libro II de *Los Elementos*.

5.2 El libro II de *Los Elementos* en las soluciones de las ecuaciones combinadas de al-Khwārizmī

Al comenzar el *Libro del Álgebra*, Al-Khwārizmī explica los motivos que lo llevaron a escribir su tratado. Asimismo, nos dice:

> Y no cesaron los sabios de épocas pasadas y naciones ya desaparecidas de escribir libros sobre las ciencias y campos del saber, pensando en quienes vendrían después, esperando una recompensa en la medida de sus capacidades, confiando en alcanzar como premio el recuerdo y el reconocimiento, pidiendo para ellos la palabra sincera, que es poco al lado de lo mucho que trabajaron y la tarea que se echaron sobre sí mismos de desvelar los secretos y oscuridades de la ciencia. Hay quien progresa en relación a lo que se sabía antes de él, hay quien comenta lo que se conserva de sus predecesores y es difícil y expone claramente sus textos, aclara sus métodos y hace accesibles fuentes, hay quien encuentra errores en algún libro, junta lo disperso y mejora los descubrimientos de sus colegas sin arrogancia hacia ellos ni enorgulleciéndose de lo que hizo por sí mismo (Al-Jwarizmi, 2009, p.47).

Este hermoso fragmento deja ver claramente el papel que desempeñaron Al-Khwārizmī y los árabes frente al desarrollo del conocimiento: siendo conscientes de la importancia de los tratados que recibieron, asumieron la responsabilidad de preservar, corregir, ordenar y colaborar con los descubrimientos que en ellos se presentaban a fin de que la posteridad reconociera, recordara y admirara la grandeza de los sabios de épocas pasadas y naciones desaparecidas. A través de la palabra, el conocimiento de la antigüedad encontraría discípulos entre los árabes, quienes nos legarían los secretos desvelados y las oscuridades iluminadas que se hallaban en los textos que recuperaron, con lo cual se emulaba, al mismo tiempo, la valiosa enseñanza del profeta: “A través de él hizo comprender dónde estaba el error, salvó de la ruina, engrandeció lo que era pequeño y juntó lo que estaba disperso” (Al-Jwarizmi, 2009, p.47). Por medio del idioma árabe se rescató y corrigió lo valioso, se engrandeció aún más lo que ya era grande y se integró lo que se encontraba disperso. Al-Khwārizmī, como *discípulo* de Euclides, emprendió esta tarea.

En el estudio introductorio del trabajo de Al-Khwārizmī, Rashed nos dice que Thābit ibn Qurra, a partir de una doble lectura del *Libro del Álgebra* y *Los Elementos*, propone una “equivalencia entre las soluciones del matemático árabe y los teoremas cinco y seis de la obra euclidiana” (Al-Khwarizmi, 2007, p.30). Por nuestra parte, sostendremos que existe una equivalencia entre las obras mencionadas, pero no entre los teoremas propuestos por ibn Qurra, sino entre las soluciones de las tres ecuaciones combinadas y los teoremas seis, siete y ocho, respectivamente. Exploremos este asunto.

El teorema II.6 de Euclides se nos dice: “Si se divide una línea recta en dos y se le añade en recta otra recta cualquiera, el rectángulo comprendido por la recta entera más la añadida y por la añadida, junto con el cuadrado de la línea mitad, es igual al cuadrado de la línea compuesta de la línea mitad y de la añadida”. En este teorema se nos pide, dada una línea AB dividida en dos por G y a la cual se ha de añadir la recta BD, que probemos que el rectángulo comprendido por las líneas AD y DB junto con el cuadrado de GB es igual al cuadrado de GD. Si reescribimos II.6 en nuestros términos actuales, tendremos:

Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

$$AD \cdot DB + (GB)^2 = (GD)^2$$

De modo que, si sustituimos de la siguiente manera:

$$AB = y$$

$$AG = GB = \frac{y}{2}$$

$$AD = y + a$$

$$BD = a$$

$$GD = GB + BD = \frac{y}{2} + a$$

tendremos:

$$AD \cdot DB + (GB)^2 = (GD)^2 \equiv (y + a)a + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{2} + a\right)^2$$

Ahora, recordemos que la forma general de solución de la primera ecuación combinada de Al-Khwārizmī, cuadrados más raíces igual a un número, es:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \equiv x^2 + bx = c$$

de modo que, si sustituimos en la formulación euclidiana:

$$b = y$$

$$x = a$$

tendremos:

$$(y + a)a + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{2} + a\right)^2 \equiv (b + x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$$

y si consideramos que:

$$(b + x)x = bx + x^2$$

pero, según hemos sostenido:

$$x^2 + bx = c$$

de donde se sigue que:

$$(b+x)x+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2 \equiv c+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2$$

que es equivalente a:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$

por lo tanto:

$$(y+a)a+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{y}{2}+a\right)^2 \equiv \left(\frac{b}{2}\right)^2+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$

Observemos que, si aceptamos que la forma general de solución de la primera ecuación de Al-Khwārizmī y el teorema II.6 pueden escribirse como lo hemos propuesto, entonces son equivalentes. Y lo mismo sucede con las otras soluciones.

El teorema II.7 de Euclides nos dice: "Si se corta al arbitrio una línea recta, el cuadrado de la línea entera más el cuadrado de una de las partes, tomados de vez, son igual al duplo del rectángulo comprendido por la línea entera y la parte dicha más el cuadrado de la otra parte". En otras palabras, que dada la línea AB cortada arbitrariamente por G, probaremos que los cuadrados de las líneas AB y BG son iguales al doble del rectángulo comprendido por AB y BG más el cuadrado de GA. Si reescribimos en nuestros términos actuales, tendremos:

$$(AB)^2+\ (BG)^2=2AB\cdot BG+(AG)^2$$

pero si consideramos:

$$AB=y$$

$$BG=a$$

$$AG=AB-BG=y-a$$

obtendremos:

$$(AB)^2+\ (BG)^2=2AB\cdot BG+(AG)^2 \equiv y^2+a^2=2ay+(y-a)^2$$

Por otra parte, la solución que se propone para resolver la segunda ecuación combinada, a saber, cuadrados más números igual a raíces, es:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2-c=\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 \equiv x^2+c=bx$$

y si en:

Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

$$y^2 + a^2 = 2ay + (y - a)^2$$

sustituimos los valores:

$$a = \frac{b}{2}$$

$$y = x$$

tendremos:

$$y^2 + a^2 = 2ay + (y - a)^2 \equiv x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = bx + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

de donde se sigue que:

$$x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = bx + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \equiv x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

y como habíamos sostenido:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \equiv x^2 + c = bx \equiv x^2 - bx = -c$$

entonces:

$$x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \equiv -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

que es equivalente a:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

Esta última expresión es la solución de la segunda ecuación combinada de Al-Khwārizmī. Por lo tanto, podemos concluir que:

$$y^2 + a^2 = 2ay + (y - a)^2 \equiv \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

Finalmente, el teorema II.8 de *Los Elementos* dice: "Si se corta al arbitrio una línea recta, el cuádruplo del rectángulo comprendido por la línea entera y por una de sus partes más el cuadrado de la otra parte es igual al cuadrado descrito por la línea entera más la parte dicha tomadas como un solo lado". En este caso se nos pide probar que, si G corta arbitrariamente una recta AB, entonces el cuádruplo del rectángulo comprendido por las rectas AB y BG, más el cuadrado de AG es igual al cuadrado descrito por las líneas AB y BG tomadas como una sola recta. Podemos expresar esto de la siguiente manera:

$$4AB \cdot BG + (AG)^2 = (AB + BG)^2$$

de manera que si hacemos:

$$AB = y$$

$$BG = a$$

$$AG = AB - GB = y - a$$

resultará:

$$4AB \cdot BG + (AG)^2 = (AB + BG)^2 \equiv 4ay + (y - a)^2 = (a + y)^2$$

Ahora bien, si consideramos:

$$y = x$$

$$a = \frac{b}{2}$$

tendremos:

$$4\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$$

que es equivalente a:

$$2bx + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$$

si desarrollamos:

$$2bx + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + bx + x^2$$

de donde se sigue que:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - bx + x^2$$

y con:

 Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

$$c = -bx + x^2$$

resultará:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

Esta última expresión es la solución de la tercera ecuación combinada de Al-Khwārizmī, de lo que se concluye que:

$$4ay + (y - a)^2 = (a + y)^2 \equiv \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

El desarrollo anterior nos ha mostrado que lo propuesto por Euclides en II.6, II.7 y II.8 es equivalente a las soluciones de las tres ecuaciones combinadas que Al-Khwārizmī propone en *El Libro del Álgebra*, esto es:

Euclides			**al-Khwārizmī**	
Teorema II.6:	$(y + a)a + (y/2)^2 = (y + a)^2$	$\equiv$	1ª ecuación:	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \equiv x^2 + bx = c$
Teorema II.7:	$y^2 + a^2 = 2ay + (y - a)^2$	$\equiv$	2ª ecuación:	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \equiv x^2 + c = bx$
Teorema II.8:	$4ay + (y - a)^2 = (a + y)^2$	$\equiv$	3ª ecuación:	$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \equiv bx + c = x^2$

Llegados a este punto, y con base en lo que hasta este momento hemos señalado, podemos establecer una interpretación global de las posibles condiciones que permiten la emergencia del álgebra de Al-Khwārizmī a partir de la lectura de *Los Elementos*. Este asunto será abordado en la siguiente y última sección.

6. Conclusión: Interpretación de las posibles condiciones que permiten la emergencia del álgebra de al-Khwārizmī a partir de la lectura de *Los Elementos*

En la introducción de este trabajo planteamos la siguiente pregunta: ¿Qué lectura de Euclides posibilitó la emergencia del álgebra en el mundo árabe? Para responderla hemos desarrollado tres argumentos: primero, presentamos una interpretación de las nociones comunes como criterios de igualdad. Luego, revisamos la relación entre los libros II y VI, poniendo especial énfasis en la noción de razón y con ella en la de cantidad. Finalmente, expusimos el *Comentario* de Al-Nayrizi a fin de obtener un primer acercamiento a la lectura que los árabes hicieron de Euclides. A continuación, veremos cómo se relacionan estos tres elementos para dar respuesta a la pregunta planteada.

El álgebra que Al-Khwārizmī formuló en la primera parte de su obra puede entenderse como una teoría de solución de ecuaciones, y esta es la razón por la cual su trabajo se considera como un tratado de álgebra elemental. Por otro lado, dijimos que "ecuación" es *la igualdad entre dos expresiones matemáticas que contienen una o más incógnitas*, de manera que *resolver una ecuación* implica seguir un procedimiento que nos ayude a determinar el valor de las incógnitas. Ahora bien, si ecuación es una igualdad y las nociones comunes se han interpretado como criterios que condicionan tal relación, se hace necesario evaluar si a las ecuaciones de Al-Khwārizmī subyace lo demandado por Euclides en sus *Elementos*. En efecto, que la relación de igualdad debe establecerse entre dos objetos del mismo tipo, por ello, debemos preguntarnos si las ecuaciones que analizamos se componen de objetos del mismo tipo.

Respecto a la pregunta recién planteada, y a primera vista, parece que los objetos relacionados en las ecuaciones no son del mismo tipo. Por ejemplo, en "cuadrados más raíces igual a números" podríamos pensar que el resultado de sumar dos figuras, un cuadrado y un rectángulo, es un número y no una figura. Sin embargo, hay que recordar que los elementos con los que Al-Khwārizmī trabaja son todos del mismo tipo, es decir, son todos números: "Los *números* necesarios en el cálculo de álgebra y muqabala son tres: las raíces, los cuadrados y el número simple, es decir, que no está asociado ni a una raíz, ni a un cuadrado" (Al-Khwarizmi, 2007, p.96). De esta manera, *El libro del álgebra* solo relaciona objetos del mismo tipo, esto es, las *operaciones* son cerradas. Por lo tanto, los elementos de las ecuaciones son del mismo tipo y las operaciones que se proponen para su solución, álgebra y muqabala, son también cerradas.

De acuerdo con lo anterior, podríamos formular dos conclusiones. La primera es que el número (como cantidad) constituye un medio para homogeneizar los objetos del álgebra, pues éste permite que los resultados de las operaciones sean cerradas y evita que se igualen u operen objetos de distinto tipo. La segunda es que *El libro del álgebra*, según dice en su presentación, fue escrito con fines prácticos, por lo cual Al-Khwārizmī se vio obligado a trabajar con números ya que como él mismo señala: "Cuando pienso sobre lo que los hombres necesitan para el cálculo, encuentro siempre el número" (Al-Khwarizmi, 2007, p.96). En esta última afirmación se expresa la necesidad de establecer una relación entre el álgebra y el cálculo, llevado a cabo por los hombres a través del número. Ambas conclusiones muestran una homogeneización de los objetos con los que se trabaja, tal cual lo sugiere Euclides en las nociones comunes.

Por otro lado, se ha dicho que el número es *una relación entre una cantidad determinada y otra considerada como unidad* y también se ha visto que la palabra "cantidad" forma parte del lenguaje de proporciones. De esta manera, que ciertas proposiciones del libro II puedan expresarse como resultados del libro VI indica que determinados resultados "poligonales" son igualmente expresables como igualdades entre razones y, por ello, pueden ser expresables según su cantidad.

La equivalencia que Euclides propone nos da licencia para tratar las magnitudes del modo más general posible, a través del concepto de razón y con ella a través del lenguaje de proporciones. Por lo tanto, podemos afirmar junto con Beppo Levi (2001, p. 167) que "los segmentos empleados en la teoría de

 Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759

proporciones no tienen diferente significación que las letras usadas en el álgebra”, a partir de lo cual sostenemos que el hecho de que los dos problemas del libro II hayan sido expresados mediante proporciones hace posible comprender algunos de sus teoremas según la cantidad y, con ella, según su número.

Ahora, hay que recordar que la obra de Al-Nayrizi nos ofrece un primer acercamiento a la lectura árabe de *Los Elementos*, pues en ella encontramos consideraciones que se tomaron en cuenta para su comprensión. Entre estas consideraciones destacan, en primer lugar, los comentarios de Herón que son importantes en la medida que se proponen construir una demostración sin necesidad de recurrir a las figuras. En otras palabras, solo necesita los segmentos en virtud que el método de análisis y síntesis al que apela requiere de una sola línea. Por otro lado, Al-Nayrizi nos ofrece una serie de ejemplos numéricos, lo cual muestra la relación establecida entre ciertas proposiciones del libro II y la cantidad, aspecto sobre el cual llamamos la atención debido a que no todas las figuras los poseen. Sin embargo, muestran la necesidad de proveer una demostración sin necesidad de recurrir a la figura.

En resumen, las razones entre magnitudes están ligadas al concepto de cantidad y, si podemos expresar ciertas magnitudes como razones, entonces podemos relacionarlas mediante un lenguaje de proporciones. Esto nos permitiría vincularlas mediante la igualdad y, por lo tanto, construir ecuaciones con ellas. De este modo, concluimos que las ecuaciones combinadas de Al-Khwārizmī expresan este hecho.

Bibliografía

Al-Jwarizmi (2009). *El libro del Álgebra.* Traducción de Ricardo Moreno Castillo. España: Nivola.

Al-Khayyam, O. (2008). *An Essay by the Uniquely Wise ‘Abel Fath Omar Bin Al-Khayyam on Algebra and Equations*. Traducción de Roshdi Khalil. Líbano: Garnet.

Al-Khwarizmi (2007). "Livre d'algèbre et d'al-muqābala de Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī". En R. Rashed (comp; trad.), *Al-Khwārizmī : le commencement de l'algèbre / Texte établi, traduit et commenté par R. Rashed*, París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard

Arnzen, R. y Lo Bello, A. (2009). *The Commentary of Al-Nayrizi on Books II-IV of Euclid’s Elements of Geometry: with a translation of that portion of Book I missing from Leiden or. 399.1 but present in the newly discovered Qom manuscript edited by Rüdiger Arnzen and Anthony Lo Bello.* Netherlands: Brill.

Corominas, J. (2005). *Breve diccionario etimológico de la lengua castellana.* España: Gredos.

Euclides (1992). *Los Elementos.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

García Olvera, F. (2005). *El producto del diseño y la obra de arte.* México: Universidad Autónoma Metropolitana.

Levi, B. (2001). *Leyendo a Euclides*. Argentina: Libros del Zorzal.

Moreno Castillo, R. (2010). *Al-Jwarizmi. El algebrista de Bagdad.* España: Nivola.

Rashed, R. (1994). *The development of Arabic mathematics: between arithmetic and algebra.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rashed, R. (1996). *Encyclopedia of the History of Arabic Science*. Nueva York: Routledge.

Vernet, J. (1991). *Los orígenes del islam*. Barcelona: El Acantilado.

Vernet, J. (1999). *Lo que Europa debe al Islam de España.* Barcelona: El Acantilado.

 Vol.2 | N°1 | Pág. 76-105 | Julio 2021 | ISSN-E: 0719-9856
https://doi.org/10.35588/cc.v2i1.4759