Васил Пенчев

ОТВЪД МАШИНАТА НА ТЮРИНГ: КВАНТОВИЯТ КОМПЮТЪР

Институт за изследване на обществата и знанието

Българска академия на науките

Vasil Penchev

BEYOND THE TURING MACHINE:
QUANTUM COMPUTER

Institute for the Study of Societies and Knowledge
Bulgarian Academy of Sciences

Васил Пенчев

ОТВЪД МАШИНАТА НА ТЮРИНГ

КВАНТОВИЯТ КОМПЮТЪР

София 2014
Институт за изследване на обществата и знанието
Българска академия на науките

Отвъд машината на Тюринг: Квантовият компютър
Автор: Васил Динев Пенчев

Научни рецензенти:
Проф. д.м.н. Огнян Иванов Кунчев,
Българска академия на науките, Институт по математика и информатика
Доц. д-р Любен Михов Иванов,
Югозападен университет „Неофит Рилски“ – Благоевград, Катедра „Физика“

Издателство „Изток – Запад“

Книгата е посветена на възможността за компютър, чийто възможности принципно надвишават възможностите на съвременните компютри.

Машината на Тюринг е математическият модел, който ги обобщава. Квантовият компютър се основава на принципите на квантовата механика и теорията на квантовата информация. Изследва се въпросът дали квантовият компютър е машина на Тюринг. Предпочита се нова мета-математическа интерпретация и се обсъждат взаимоотношенията със съществуващите. Философска и онтологическа проекция е предлаганото видоизменено, а именно „*дуалистично* питагорейство”.

Неразрешими твърдения ли са самите т. нар. теореми на Гьодел за непълнотата, ако те се отнесат към самите себе си? Как следва да се тълкуват явленията на сдвояване (*entanglement*), квантовият компютър и квантовата информация аритметически и логически?

Книгата е предназначена за научни работници в областта на физиката, математиката и философията, за докторанти и студенти, за всеки, който се интересува от този съвсем нов отрасъл на знанието.

Авторът, Васил Пенчев е доцент в Института за изследване на обществата и знанието (http://issk-bas.org/) на Българската академия на науките (БАН) и доктор на философските науки, инженер по образование. Книги от него: „Битие и наука” („Дамян Яков”, 1996), „Коментар към Мамардашвили” (ЛИК, 1996), „Радичков другарува с думите” (Филвест, 2000), „Свирепа философия” (АИ „Проф. Марин Дринов”, 2007), „Мислене и стихотворене” (Булгед, 2007), „Мъртвият Бог?” (Булгед, 2007), „Разумът в цивилизацията” (ИФИ-БАН, 2008), „Историята на СССР. Догонващо развитие и/или историческа приемственост” (ИФИ-БАН, 2008), „Историческата приемственост в глобализиращото догонване” (АИ „Проф. Марин Дринов”, 2009), „Философия на квантовата информация“ (ИФИ-БАН).

Блогове, на които се публикуват негови научни текстове и презентации:
https://www.researchgate.net/profile/Vasil_Penchev
http://www.slideshare.net/vasil7penchev
https://www.scribd.com/vasil7penchev

ISBN 978-619-152-155-5

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

I. ВЪПРОСИ

1. "Сериозен проблем ли е непълнотата?" (**9**)

2. Не е ли физиката математика? (**10**)

3. Изпълнява ли първата теорема за непълнота на Гьодел собствените си условия? (**10**)

II. АКСИОМИ

4. Аксиома за редуцируемост и аксиома за интензионалност (**12**)

5. Времето (**14**)

6. Неизчислимост по Тюринг и непълнота по Гьодел (**21**)

7. „Гьоделизация" по Пенроуз (**24**)

III. РАЗУМ И ФИЗИКА

8. Квантовият компютър по Дойч (**29**)

9. Мисленият експеримент на Дойч: „многосветова срещу Копенхагенска интерпретация на квантовата механика" (**33**)

10. Термодинамичната цена на избора (**37**)

11. Съобщение и съ-общаване (**41**)

12. „Приятелят на Вигнер" (**42**)

13. Квантово-механичният автомат на Албърт (**49**)

14. Идентичност: вътрешен и външен наблюдател (**57**)

15. Относителност по Скулем (**58**)

16. „Разпознаване на образ", формализирано като рекурсивна функция (**60**)

17. Квантовият компютър като „котка на Шрьодингер" и „приятел на Вигнер" (**61**)

18. Две времеви скали и относителна формулировка на квантовата механика (**68**)

19. Математизиране на историята (**68**)

IV. ЧОВЕШКИЯТ ИНТЕЛЕКТ КАТО КВАНТОВ КОМПЮТЪР

20. Квантовият компютър като съвкупност от две машини на Тюринг и ускорена Тюрингова машина по Коупланд (**71**)

21. Еквивалентност на описанието чрез цялото и чрез частите (**72**)

22. Наблюдател по Албърт и наблюдател по Айнщайн (**76**)

23. Субективност и интерсуебктивност формализирани (**77**)

24. Марта, „приятелката на Албърт" (**80**)

25. Квантовата механика като „новата физика за разума" по Пенроуз (**82**)

26. Теореми за свободната воля (**85**)

27. Изчисление по Коупланд и о-машината на Тюринг (**87**)

28. Вътрешна и външна изчислимост (**89**)

29. „Ахил и костенурката", „Стрелата" и „Лъжеца" (**91**)

30. Случайност и повторение (**95**)

31. Случайно знание, „приятелят на недоверчивия Вигнер" и „недоверчивите приятели" на Вигнер (**101**)

32. Способност на квантовия компютър за универсално разпознаване на образи (**102**)

V. МАТЕМАТИКАТА НА РЕАЛНОСТТА: ХИЛБЕРТОВА СРЕЩУ ГЬОДЕЛОВА МАТЕМАТИКА

33. Аксиомите за редуцируемостта и екстензионалността, тълкувани семиотично (**104**)

34. Първо и второ издание на Principia и аксиомата за редуцируемостта (**108**)

35. Подходът на Генцен, аксиомата за фундираността и аксиомата за избора (**114**)

36. **Ψ**-функцията като число в обобщена бройна система (**115**)

37. Теоремата на Мартин Льоб за пропозицията, твърдяща доказуемостта си (**116**)

38. Редундантната концепция на Рамзи за истината (**118**)

39. Обща основа за парадокса на Лъжеца и на Стрелата (**119**)

40. Подход към проблема за пълнотата на Пеановата аритметика (**125**)

41. Теоремата на Генцен и принципът на трансфинитната индукция (**127**)

42. Стратегия за дуално обосноваване на пълнотата (**136**)

43. „Трите равнища на математиката“ по Генцен (**137**)

44. Въпросът за математика и физика отвъд пълнотата (**138**)

45. Трансфинитна индукция и финитизъм (**142**)

46. От позиция на „дуалистичното питагорейство” (**143**)

47. Функцията „наследник” и функцията „цялост” (**145**)

48. Идея за дуална непротиворечивост (**147**)

49. Суперфинитна индукция и недоказуемостта на трансфинитна индукция до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ (**149**)

50. Дуалност на крайно и безкрайно (**150**)

51. Аритметика на Генцен (**151**)

52. „Възможността за примиряване на различните гледни точки” (**152**)

53. Математика и физическа реалност по Генцен (**154**)

54. Рефлексия на отправната точка към теоремите на Гьодел (**156**)

55. Скицата на Гьодел на първата теорема за непълнотата (**157**)

56. Теория с противоречие и теория с неразрешимо твърдение (**158**)

57. Проблемът със самореференциално прилагане на първата теорема (**159**)

58. Идея за „негьоделова“, т.е. „хилбертова математика“ (159)

59. **ω-**непротиворечивостта (**161**)

60. Метаматематическото изключване на самореференциално прилагане на първата теорема за непълнотата (**163**)

61. Реалибитация за хилбертовата програма (**164**)

62. За гьоделовия номер на първата теорема за непълнотата (**166**)

63. Хилбертова и Гьоделова математика: Коя е математиката на реалния свят? (**167**)

64. Проблем с „първичните знаци“ (**169**)

65. Позицията на „дуалистичното питагорейство” (**171**)

TABLE OF CONTENTS

I. PROBLEMS
1. “Is incompleteness a serious problem?” (**9**)
2. Is not physics mathematics? (**10**)
3. Does the first incompleteness theorem fulfill its own conditions? (**10**)

II. AXIOMS
4. The axiom of reducibility and that of extensionality (**12**)
5. Time (**14**)
6. Noncomputability in Turing and incompleteness in Gödel (**21**)
7. “Gödelization” in Penrose (**24**)

III. MIND AND PHYSICS
8. Quantum computer in Deutsch (**29**)
9. Deutsch’s thought experiment: the “many-worlds vs. Copenhagen interpretation of quantum mechanics (**33**)
10. The thermodynamic value of choice (**37**)
11. Message and communication (**41**)
12. “Wigner’s friend” (**42**)
13. Albert’s quantum-mechanical automation (**49**)
14. Identity: an internal and an external observer (**57**)
15. Relativity in Skolem (**58**)
16. “Pattern recognition” formalized as a recursive function (**60**)
17. Quantum computer as “Schrödinger’s cat” and “Wigner’s friend” (**61**)
18. Two time scales and the relative formulation of quantum mechanics (**68**)
19. History as mathematics (**68**)

III. HUMAN INTELLECT AS QUANTUM COMPUTER
20. Quantum computer as a set of two Turing machines and Copeland’s accelerated Turing machine (**71**)
21. The equivalence of description by the whole and by its parts (**72**)
22. Albert’s observer and Einstein’s observer (**76**)
23. Subjectivity and intersubjectivity formalized (**77**)
24. Marta, „Albert’s friend” (**80**)
25. Quantum mechanics as Penrose’s “new physics of mind” (**82**)
26. The free will theorems (**85**)
27. Copeland’s Computation and Turing’s o-machine (**87**)
28. Internal and external computability (**89**)
29. “Achilles and the tortoise”, the “Arrow”, and the “Liar” (**91**)
30. Randomness and repetition (**95**)
31. Random knowledge, „Incredulous Wigner’s friend“, and „Wigner’s incredulous friends” (**101**)
32. The ability of quantum computer for universal pattern recognition (**102**)

V. MATHEMATICS OF REALITY: HILBERT MATHEMATICS VS GÖDEL MATHEMATICS

33. The axiom of reducibility and that of extensionality interpreted semiotically (**104**)
34. The first or the second edition of *Principia* and the axiom of reducibility (**108**)
35. Gentzen's approach, the axiom of foundation, and the axiom of choice (**114**)
36. **Ψ-**function as a number in a generalized counting system (**115**)
37. Martin Löb's theorem of about the proposition stating its own provability (**116**)
38. Ramsey's redundant concept of truth (**118**)
39. The common base for the Liar and Arrow paradox (**119**)
40. An approach to the completeness of Peano arithmetic (**125**)
41. Gentzen's theorem and the principle of transfinite induction (**127**)
42. A strategy for the dual foundation of completeness (**136**)
43. Gentzen's "three levels of mathematics" (**137**)
44. The question about mathematics and physics beyond completeness (**138**)
45. Transfinite induction and finitism (142)
46. From the viewpoint of "dualistic Phytagoreanism" (**143**)
47. The "successor" function and "wholeness" function (**145**)
48. An idea for dual consistency (**147**)
49. Superfinite induction the unprovability of transfinite induction until $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ (**149**)
50. The duality of finiteness and infinity (**150**)
51. Gentzen arithmetic (**151**)
52. "The possibility of reconciling the different viewpoints" (**152**)
53. Mathematics and the physical reality in Gentzen (**154**)
54. A reflection on the reference point to the Gödel theorems (**156**)
55. Gödel's sketch of the first theorem of incompleteness (**157**)
56. A theory with a contradiction and a theory with an undecidable statement (**158**)
57. If the Gödel first incompleteness theorem is applied to itself (**158**)
58. An idea about "non-Gödel mathematics", i.e. "Hilbert mathematics"
59. ω-consistency (**161**)
60. The meta-mathematical exclusion of self-applying the first theorem of incompleteness (**163**)
61. Rehabilitation for Hilbert's program (**164**)
62. About the Gödel number of the first incompleteness theorem (**166**)
63. Hilbert or Gödel mathematics: Which is the mathematics of the real world? (**167**)
64. A problem about the „prime symbols" (**169**)
65. The viewpoint of "dualistic Pythagoreanism" (**171**)

I. ВЪПРОСИ

1. "Сериозен проблем ли е непълнотата?"

Изходна точка са думите на Грегъри Чейтин, извод и заключение на негова статия със само по себе си знаменателното заглавие „Сериозен проблем ли е непълнотата?" (Chaitin 2007):

> *Така, по мое мнение, непълнотата е крайно сериозна. Тя ни принуждава да осъзнаем, че* може би математиката и физиката не са толкова различни, колкото повечето хора мислят.
>
> **Математика ≈ Физика**?! (Chaitin 2007: 302)

Теоремата за непълнотата може да се тълкува или извежда и от информационна гледна точка по следния начин. Ако една теорема съдържа повече информация от дадено множество аксиоми, то тогава е невъзможно теоремата да бъде изведена от аксиомите (Chaitin 1982), но очевидно може да бъде изказана изчерпателно и коректно на езика, въведен чрез самите тези аксиоми. Такава интерпретация обаче се подлага на остра критика (Franzén 2005: 143-144), както и цялостните и далеч отиващи философски изводи на Чейтин по отношение на непълнотата в контекста на сложността и безкрайността (пак там, цялата осма глава: 137-154).

Малко по-надолу ще се покаже, че поне съществува философска и метаматематическа позиция, от която възгледите на Чейтин могат да се обобщят по такъв начин, че критиките срещу неговата „случайна математика" и концепцията му за „вярно по случайност" да могат да отпаднат.

По темата за теоремите на Гьодел и непълнотата има изобилие от литература. Все пак биха могли да се отбележат работи, които по-скоро са насочени към концептуално и философско осмисляне, въпреки че не са направени съществени компромиси със строгостта на изложението (напр. Smith 2007; Mostowski 1952). Сред българските философски автори може да се спомене Люцканов (2008).

Съществена е връзката с по-късните работи на Гьодел и с теория на множествата (напр. Kanamori 2010: 147-166). Ще подчертаем, че доказателството на Гьодел съдържа построяването на една поредица от метаматематически твърдения, отнасящи се до аксиоматичната система на *Principia Mathematica* (Whitehead, Russell 1910; 1927). Те могат да бъдат явно и изчерпателно посочени (напр. Nagel, Newman 2001: 92-108).

2. Не е ли физиката математика?

Подходът ще бъде заедно с това диаметрално противоположен спрямо цитираната позицията на Чейтин: както две аксиоматики, споделящи аксиома и нейното отрицание. Докато той пита дали математиката не е физика, въпросът е: не е ли физиката математика? Така или иначе непълнотата поставя и двата въпроса. Неговата гледна точка води до първия вариант, който е собствено експлицираният от учения с аржентински произход, докато евентуалното ѝ отхвърляне или ограничаване ни насочва към втория и очевидно към някакъв тип питагорейство: далеч не само и не толкова математиката като частна, регионална онтология, но и една фундаментална онтология, която е математика … Разбира се, това е насока сходна с идеи на великия френски философ Бадиу и по-точно, от неговото основно произведение „Битие и събитие”. Все пак ако си позволим за миг да излезем от обхвата на настоящата работа, може да се отбележи съществуването на гледна точка, от която двата изложени и наглѐд противоположни подхода („математиката като физика” и „физиката като математика”) могат не само да се обединят, но и да се положат в синкретично единство на основата на скулемовски тип относителност (Пенчев 2009: 307 и сл.) на случайно и необходимо. „Половината относителност” на необходимото като случайно, би имплицирала възгледа на Чейтин, но другата и неразделна „половина” относителност на случайното като необходимо – идеи, сродни на развиваните в настоящия текст.

Феферман изтъква

> *големия контраст между дълбоките платонически убеждения, към които се придържа Гьодел относно обективната основа на математиката, и особената предпазливост, която упражняваше при разкриване на тези убеждения* (Feferman 2003: 96).

3. Изпълнява ли първата теорема за непълнота на Гьодел собствените си условия?

Една от основните тези на настоящата работа е, че т.нар първа теорема за непълнотата на Гьодел може и следва да се отнесе към себе си, тъй като изпълнява своите собствени условия. Поради това от нейната валидност следва нейната неразрешимост. Разглеждат се и множество контексти на подобна неразрешимост, редица от които се съдържат или произтичат от работите на Гьодел (1930; 1931). В частност следва и е особено подчертано, че самообосноваването на математиката на аритметична основа (програмата на Хилберт) нито може да се приеме, нито да се отхвърли с вътрешно-математически средства.

За да се отнесе т. нар. първа теорема за непълнотата на Гьодел към себе си, тя следва да се разгледа като завършена теория, която съдържа в себе си аритметиката на Пеано. За да бъде направено това, трябва да се подчертае, че всъщност разглеждането на Гьодел не обсъжда демаркационната линия между теорема и теория, че тя – независимо като коя от двете – съдържа аритметиката на Пеано. Наистина в крайна сметка това, което обичайно се приема за теория, всъщност може да се приеме за един единствен синтактично правилен низ, т.е. за една единствена теорема. Условието на т.нар първа теорема за непълнотата на Гьодел изисква да се съдържа аритметиката на Пеано. В условието на самата негова теорема тя се съдържа, бидейки явно посочена.

Дали обаче съществува или евентуално дали може да се обоснове забрана за приложението на теоремата към самата себе си? Гьодел собствено не го прави, освен в увода, като тогава се позовава на метаматематически съображения. Бихме могли само привидно да решим проблема като зачислим теоремата към метаматематиката, позовавайки се на Ръселовата теория на типовете (Russell 1908). Тогава теоремата наистина би могла да се постави на по-високо равнище в йерархията на типовете и това би пречило да се приложи към самата себе си. Наистина Ръселовата теория забранява отнасянето към себе си, доколкото тогава би се получил порочен кръг (Russell 1908: 236-237).

Как обаче тогава бихме могли да оправдаем или дори да извиним построяването на твърдение, което твърди собствената си недоказуемост (Gödel 1931: 176; 1986: 150, 151), като ключов момент в доказателството? Удовлетворява ли такова твърдение аксиомата за редуцируемостта (Russell 1908: 243)[1] или тази за екстензионалността?

[1] В бележка под линия Гьодел изрично е я посочил, пояснявайки смисъла на заглавието: „ … *Principia mathematica* und verwandter Systeme I”(Gödel 1931: 174; 1986: 144, 145).

II. АКСИОМИ

4. Аксиома за редуцируемост и аксиома за интензионалност

Първите два въпроса са дали теоремата е валидна в случаите и ако не се използва аксиомата за редуцируемостта, и ако не се използва ключовото „твърдение, твърдящо собствената си недоказуемост (Gödel 1931: 175; 1986: 148, 149). Има ли – и ако има, каква е – връзката между двете?

Преди всичко се нуждаем от едно вглеждане в аксиомата за редуцируемостта, още повече, че се твърди, че ограничаването на нейната употреба и замяна с аксиомата за екстензионалността – твърдение, нуждаещо се от множество уточнения, част от които следват по-нататък – е една основните разлики между двете издания на *Principia*:

> *Критичната промяна във второто издание включва аксиомата за редуцируемостта. В своята философска автобиография Ръсел пише: „*Моята главна цел в това ново издание беше да минимизирам употребите на 'аксиомата за редуцируемостта' *" (p. 89). Съмненията му относно аксиомата го карат да намери алтернатива за аксиомата; в това издание, той вместо това допуска принципа на екстензионалността, който му позволява да постигне подобни резултати както в първото издание. Изглежда той е бил мотивиран повече от липсата на причини да запази аксиомата, отколкото от специфични причини да я отрече. Принципът на екстензионалността не дава всички резултати, които дава аксиомата за редуцируемостта, но Ръсел все още я намира да е алтернативата за предпочитане* (Berkelhammer 2006: 59).

Този подход на Ръсел (и Уайтхед), както и самата аксиома за редуцируемостта преди това, също среща критика:

> *Видоизменението, което е предложено в Ръселовото въведение към второто издание (и базирано на идеи на Витгенщайн), да замести аксиомите на редуцируемостта с аксиомите на екстензионалността, една за всеки тип, е неудовлетворителен – защото резултатната система не е адекватна за класическата математика* (Church 1976:758)*.*

При обсъждането, когато Гьодел за първи път обявява своята теорема, Нойман заявява, че ако се отхвърли Ръселовата „аксиома за редуцируемостта" , „никога не може да се получи обосноваване за класическата математика чрез логически средства” (Yougrau 2005: 57).

Всъщност още сега можем да изясним подчертания си интерес към съотношението на аксиомата за редуцируемостта и тази за екстензионалността от гледна точка на квантовия компютър в разликата му от Тюрингова машина. И двете целят да обезопасят самореференциалното прилагане чрез постулирана сводимост до несамореференциално. Всъщност и двата подхода за нас не са удовлетворителни, защото преведени на нашия език – с множество допълнителни уговорки, които заради простотата и яснотата на изложението засега ще пропуснем – биха постигали по различен начин едно и също нежелано нещо: всеки квантов компютър е сводим до Тюрингова машина. Ако това е принципно валидно и е невъзможно да се заобиколи, то би поставяло кръст на усилията за квантово изчисление в качеството на супертюрингово. Все пак аксиомата за сводимостта сякаш е по-слабата, доколкото оставя интензионалните елементи, макар и тълкувани чисто (в смисъла на сводимо до) екстензионално като екстензионалните елементи от по-висш тип:

> *Ръселовата първоначална цел е да даде система, по-обща от просто екстензионалната област на математиката, но с принципа на екстензионалността той ограничава границите на своята област до екстензионална такава. В работа от 1936 Куайн се аргументира, че аксиомата за редуцируемостта и принципът на екстензионалността заедно анулират разклоняването от ръселовата теория на типовете. Обаче трябва да отбележим гледната точка на Ървинг Копи, че Ръсел никога едновременно не защитава аксиомата за редуцируемостта и принципа на екстензионалността. Куайн и Гьодел са съгласни с Рамзи, а покъсно Ръсел, че простата теория на типовете е достатъчна да се избегнат парадоксите. Необходимостта от аксиомата за редуцируемостта вече не е на дневен ред без една разклонена теория на типовете* (Berkelhammer 2006: 59).

Може да се твърди в рамките на една фигуративна изразност, че проблемът е как да се раздели „добрата” непредикативност, използвана в редица раздели на математиката и даваща резултати, които не могат да се получат без нея, от „лошата” непредикативност на порочния кръг. Нашето „подозрение”, да го наречем така засега, е, че те са принципно неотличими, че представляват още един, нов ипостас на скулемовски тип относителност. Проблеми възникват не от самата референциалност, а само от едновременното ѝ прилагане с една операция или принцип, за които сякаш все още отсъства название: един *принцип на частичността или на нецялостността, или на не-тоталността. Той би гласял, че всяко нещо може да се разгледа като част, не като цяло, не като тоталност*.

Обратно, самореференциалното прилагане изисква неявно тъкмо противоположното: това същото нещо да е видяно не като част, а като цяло, като тоталност. Тогава единството на въпросното нещо в тези два противоречащи си контекста поражда масата от парадокси в основите на математиката.

5. Времето

Всъщност *времето* по самото си естество непрекъснато поражда и разрешава този тип парадокси. Но за да изясним проблема – и то с надеждата технически да го употребим под формата на квантов компютър или устройства, базирани на квантова нелокалност – ни е необходимо да въведем модел, почерпен от квантовата механика и информация. Неговата същност може да се отнесе още на фундаментално логическо равнище чрез съпоставянето на двата основни квантора „за всички от" (∀) и „и кой да е от" във връзката му със „съществува поне едно … такова, че" (∃):

> *За да се избегне непредикативността същественото ограничение е, че кванторизацията над всяка област тип не трябва да бъде позволено да добавя нови членове към областта, понеже се твърди, че добавянето на нови членове променя значението на кванторизацията над областта по такъв начин, че се получава порочен кръг* (Church 1976:747).

Така Чърч изяснява сравнителната „философия" на подходите на двете издания на *Principia*:

> *Ефектът на аксиомите е, че обхватът на функционалните променливи е вече екстензионално пълен на ниво 1, в смисъл че то съдържа пропозиционална функция, която е екстензионално (или … „формално") еквивалент на всяка пропозиционална функция, която влиза като стойност на функционални променливи на всяко по-високо равнище; и че именно по интензия следва да мислим за добавените стойности на функционални променливи като възникващи на всяко ново равнище. Следователно отхвърлянето на непредикативните дефиниции се анулира в екстензионални, но не в интензионални въпроси. И това*

е достатъчно за класическата математика, особено за математическия анализ (Church 1976:758).

На този фон ясно можем да посочим фундаменталната разлика в нашия подход: една своеобразна логика на квантовия компютър или квантовата информация. Преходът от „за всички от" към „кой да е от" – т.е. преходът към ръселовски по-висш тип или в друга терминология: от интензията към екстензията на по-висша интензия (често вместо това се използва объркващото и неточно „от интензия към екстензия") – не може да е забранен или ограничаван по никакъв начин. Той се осъществява от самия ход на времето. Решаващото обаче е, че е съпроводен с „приток на информация" в следния смисъл:

„За всички от" означава една тоталност, която позволява самореференциално прилагане като тази тоталност бъде разгледана и като елемент на себе си. Тази цялост бива разгледана като тоталното Едно, което изключва външна множественост. *Същото това едно* по отношение на външни елементи от една множественост се превръща „в кое да е от", при което е налице въпросният приток на алтернативи, заради който общата информация нараства, но относителната информация на въпросното Едно (съдържащо *вътрешно* множество), станало едно (от *външно* множество) намалява от 100 % към по-малък дял, заради алтернативите, отчетени като нови. Следователно, самият ход на времето имплицира – и то по фундаменталното си логическо естество – увеличаване на ентропията. Обратно нейно неувеличаване или намаляване изисква свободно движение и против неговата стрела.

Нека това ново положение на нещата се обсъди и в друг контекст, в термините на истината по Тарски. Стандартната позиция е изразена от Чърч по следния начин:

> *Именно решението на Тарски на проблема на семантичните антиномии е, че семантичните предикати за отделен език не трябва да се съдържат в самия език, а винаги в мета-език. … . … изглежда оправдано да се каже, че решението на Ръсел на семантичните антиномии не е различно от онова на Тарски, а е негов специален случай* (Church 1976:756).

Така можем да кажем, че с хода на времето семантичните предикати за отделен език, напр. като 'истината', „се движат" във времето. В миналото и настоящето те са в самия език, или мета-езикът съвпада с езика, но това не е валидно за бъдещето, спрямо което миналото е в качеството на „мета-езика".

Обсъденото следва да съпоставим веднага с факта, че Гьодел изрично включва като условия на разглеждането за своята работа от 1931 г. и второто издание на Principia (следователно аксиомата за екстензионалността), и изрично аксиомата за редуцируемостта (сводимостта).

Всъщност аксиомата за екстензионалност съдържа една съществена двусмисленост: дали е валидно или не следното нейно тълкувание: дали две множества, които се различават само по това, че едното съдържа и себе си като елемент, а другото – не, са екстензионално, или следователно по силата аксиомата за екстензионалността, изобщо еквивалентни. Ако приемем положителния отговор, то разгъването на тоталността – в нашата терминология, от „Едно" към „едно" – не променя с нищо едно съждение или неговата екстензия. Тогава всъщност това положение на нещата, евентуално приложено неограничен брой пъти, е напълно еквивалентно на резултата, получаван по аксиомата за редуцируемостта. Може отново да се спомене вече цитираното становище на Ървинг Копи, но вече тълкувано малко по различно: Ръсел сякаш избягва да уточни горната двусмисленост по отношение на начина употреба на аксиомата за екстензионалността в *Principia*.

Необходимо е да се кажат няколко думи и за отношението на тези две аксиоми към аксиомата за избора. Неявно становището е, че става дума за различни и самостоятелни аксиоми, което личи например в следния показателен контекст:

> *Когато аксиомите за безкрайността и избора са добавени към системата на логиката от второто издание на Уайтхед и Ръселовата* Principia mathematica *и когато, както във второто издание аксиомата за редуцируемостта е пропусната (така че разклоненото естество на ръселовата теория на типовете, особено неговото разграничение между „редовете" всъщност не е зачеркнато), получената система оттук насетне ще се упоменава като „разклонената* Principia" (Fitch 1938: 140).

Всъщност – поне интуитивно – изглежда, че аксиомата за избора е достатъчно условие на аксиомата за редуцируемостта и следователно след прибавяне на първата втората е вече излишна. Наистина ако е осъществена добрата наредба на едно множество, то сякаш вече е напълно сигурно, че *може* да се сведе до своите елементи, всеки един от които е вече „разпознат" по силата на аксиомата за избора.

Между другото функцията на избор, чието съществуване за всяко множество се гарантира от аксиомата за избора, е тъкмо нерекурсивна, макар и чрез последващото ѝ „рекурсивно" прилагане да се осъществява добрата наредба на всяко множество. Склонни сме да тълкуваме този последваща възможно рекурсивна употреба именно като „разпознаване на образ", какъвто е и емпиричният тест от типа на „китайската стая" в Интернет дали клиентът на сървър е човешко същество.

Редукцията на вълнов пакет, установяване на дадена стойност на кюбит е – възможно – такъв тип „разпознаване на образ", избор или повторен избор сред безкрайно множество, емпирично реализирана функцията на избор, гарантирана от аксиомата за избора. Проблемът да бъде мислена като изчисление се състои в това, че е случайна. Следователно е неизбежно въвличането на колмогоровски тип осмисляне на случайността като сложност, ако желаем да разберем квантовия компютър в термини на хипер- (или супер-) тюрингово изчисление.

Тогава можем да интерпретираме допълнението на обхвата на аксиомата на избора до този за редуцируемост както случаите на квантови корелации: тъкмо сдвояването (entanglement), изучавано от квантовата информация. С други думи, дори и когато аксиомата за избора не гарантира винаги избора на елемент, поради сдвоеността му с други, аксиомата за редуцируемостта позволява свеждането до неговите (евентуално сдвоени помежду си или с външни) елементи.

Що се отнася до аксиомата за екстензионалността, когато може – както сега ще видим, в квантовата интерпретация – само ограничено да замени аксиомата за редуцируемостта, то тя визира единствено частния случай на адитивност на математическото очакване, обсъден още от фон Нойман (Neumann 1932: 167-173), но не и критиката на Бел (Bell 1966) и съответно случая, водещ до нарушаване на знаменитите неравенства на последния (Bell 1964)[2]. При това положение се натрапва хипотезата, че замяната на аксиомата за редуцируемост с тази екстензионалност орязва квантовата неадитивност на математическото очакване и напълно съвпада по обхват с гарантирания от аксиомата за избора.

Тогава подходът на Гьодел да запази аксиомата за редуцируемостта, прилагайки все пак преди всичко второто издание на *Principia* и аксиомата за избора, е – от квантова гледна точка – по-мъдрият и *по-общият*. Заедно с това влече неизбежното отнасяне на т. нар. първа теорема за непълнотата към самата себе си (поради

[2] По-подробно Пенчев 2009: 338-445.

рефлексивността на еквивалентността на аксиомата за екстензионалността и за редуцируемостта в обхвата на първата). Това предполагаемо положение на нещата ще се експлицира многократно по-подробно в хода на настоящия текст.

Преди да преминем към собственото изложение е уместно да се направи кратък преглед на начините на доказателство на т.нар. теорема за непълнотата на Гьодел. Съвсем съвременен и релевантен обзор, и то в интересуващия ни контекст на изчислимостта, се съдържа в работата на Лафит (Lafitte 2008). Освен това ще се позовем и на две монографии, посветени на теоремата на непълнотата (Smullian 1992; Smith 2007).

За нас решаващият момент е може ли да се осъществи такова доказателство, което да изключи прилагането на теоремата към самата себе си. Основанието да се приложи към себе си – дори още от пръв поглед – произтича от ключовото твърдение, което се отнася към себе си и твърдящо собствената си недоказуемост. То, поне видимо, е избягнато чрез „трика на Роусър” (Rosser 1936). Обаче ние всъщност, по отношение на самата теорема ще приложим тъкмо този „трик”: той предлага да се използва твърдение, от чиято доказуемост следва неговата неразрешимост (буквално, неговото отрицание притежава по-кратко доказателство). Точно в такъв тип твърдение въдворяваме самата т.нар. първа теорема за непълнота: от нейната валидност следва нейната неразрешимост.

Можем да добавим и сродното (напр. Smith 2007: 166) усилване на теоремата чрез отслабване на изискването за ω-консистентност (напр. Shepherdson 1961).

В крайна сметка, според мен, в най-дълбоката си основа теоремата експлоатира скулемовски тип относителност (Пенчев 2009: 307-318). Неразрешимите твърдения са всички, които – донякъде фигуративно казано – имат „кентавърообразен характер”, съчетавайки в единство черти от двете несъвместими области, които в нашата квантова интерпретация са дуални. Наистина такива твърдения има, но сред тях е и самата теорема, твърдяща тяхното съществуване. Какво се получава тогава, как да процедираме? Как да осмислим “половината” истина, че след като теоремата, твърдяща тяхното съществуване, сама е такава, в известен смисъл всички твърдения са разрешими. В какъв?

Ако погледнем на двете – от нас тълкувани като дуални – области на собствена и несобствена интерпретация в смисъла на скулемовски тип относителност като на едно квантово цяло, то в духа на резултатите на Албърт за квантовомеханичния автомат, които предстои да обсъдим подробно, то можем да предложим следната хипотеза. Всички твърдения са разрешими във вътрешен смисъл, т.е. по отношение на системата, от която автоматът е част и заедно и с това има твърдения, които са неразрешими във външен смисъл, т.е. ако автоматът не е част от системата.

Всъщност тази схема прецизно повтаря нашия подход по отношение на самата т.нар. първа теорема за непълнотата. Ако теоремата е външна, т.е. в метапозиция по отношение на системата, тя запазва валидност, т.е. има неразрешими твърдения в смисъла на нейните условия. Обаче ако самата тя бъде разгледана като обхващаща тоталност, такива твърдения няма. Най-сетне, имаме възможност както да не разделяме тези два контекста (в интуиционистки тип въздържане от така определен тип твърдения), така и да ги разделим чрез подходяща допълнителна аксиома, донякъде или напълно еквивалентна на Гьоделовата теорема.

Всъщност едни от същностните характеристики на времето – а именно затвореността на съвкупността на цялото от минало и настояще, от една страна, и отвореността на бъдещето, спрямо което настоящето остава външно – добре представят (или може би точно е да се каже „са представени в") неразделността на двата контекста, за която ще използваме определението „от интуиционистки тип". Заедно с това и съответно приемането на аксиома за съществуване на неразрешими твърдения поражда един – всъщност само във философски и метаматематически смисъл – тип математика, която ще наричаме Гьоделова. Неин белег е, че остава външна спрямо действителността, класическата схема на математически модел и външна реалност е валидна, а в горната времева фигура тя е свързана с бъдещето.

Обратно, не неприемането, а приемането на отрицание на аксиомата за съществуване на неразрешими твърдения поражда друг тип математика, която се самообосновава и която е справедливо да наречем Хилбертова в чест на неговата програма за формално, т.е. вътрешно самообосноваване на математиката, която възкресяваме, подходящо ограничавайки областта на приложимост на Гьоделовия резултат. Тя не е външна спрямо действителността, а класическата схема на математически обект и реалност следва да се замени с феноменологическата схема на модел, съвпадащ с реалността, в един тип питагорейство, което сме нарекли „дуалистично" (по-подробно в: Пенчев 2009: 224-225). Фундаментални резултати са теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри (Neumann 1932: 167-173) и нейното обобщаване от Бел (Bell 1966) в духа на предложените от него неравенства (Bell 1964), обсъждащи случая на неадитивност на математическото очакване (квантовомеханичните физически величини), произтичаща от квантовата нелокалност. Ще ги тълкуваме като математическо, следователно вътрешно доказателство за съвпадение на модел и реалност. Във времевата фигура по-горе, Хилбертовата математика се отнася към миналото + настоящето.

Можем да охарактеризираме и самия ход на времето от минало към бъдеще и като общност на минало и бъдеще. При това преходът към бъдеще изисква непрестанното отваряне на тоталността и размиването на първоначално съвсем точния ѝ образ в нарастващата ентропия, обяснима чрез приток на нови алтернативи, респ. приток на информация със самия ход на времето.

Ако обаче за нас е необходим инвариантен поглед към миналото (заедно с настоящето) и бъдещето, да го наречем времеви в собствен смисъл или от интуиционистки тип в математическа перспектива, то (поне засега) единствен модел ни предлага квантовата механика. Това не е случайно. Поради огромната разлика в масите, дължините на настоящето, тълкувани като периода на аташираните на уреда и квантовия обект дьобройловски вълни се различава с порядъци (по-подробно Пенчев 2009: 134, 172 и сл.). Това принуждава квантовата механика да намери инвариантния прочит на миналото и бъдещето, който – цялата нейната история го показва – се оказва във висша степен взривоопасен не само за ежедневния здрав смисъл, не дори само за основополагащите принципи на физиката, но дори и за самата идеята за научност, каквато бива изграждана в Новото време.

Моделът на квантовата механика има няколко фундаментални белега, които ще подчертаем в нашия контекст на изследване:

– допълнителност на минало и бъдеще;

– наличие на двойки, „спрегнати” величини, отнасящи се до минало и бъдеще, чиято некомутативност получава вече естествено обяснение чрез стрелата на времето;

– наличие на нелокални феномени, изучавани от квантовата информация и характеризиращи се с общност на минало и бъдеще; частична или пълна едновременна определеност на двойки спрегнати величини, съответно „и на миналото, и на бъдещето”;

– по теоремата на Коушън и Шпекър (Kochen, Specker 1968) некомутативността на спрегнатите величини е само достатъчно условие за нелокалност (букв. за отсъствието на скрити параметри); необходимото условие е наличие на дискретни морфизими на движение и следователно в частност, преходът от минало към бъдеще е (и) от такъв тип, наред с дифеоморфизмите, влечащи непрекъснатост, изучавани от класическата физика и от теориите на относителността;

– от квантовата нелокалност следва (също и) изначална вероятностност и случайност на света.

Ние ще обсъдим надолу в подробности и разнообразни контексти отражението на такъв фундаментално квантов възглед за света и в определен смисъл питагорейски (Пенчев 2009: 40 и сл.) по отношение на Гьоделовата непълнота (която е в тясна връзка с възгледа на Айнщайн, набеждаващ квантова механика за непълна – по-подробно за този връзка в *Пенчев 2009: 302-337*). Но тук бегло бихме искали да покажем как се ревизира концепцията за истината по Тарски, следвайки постепенно очертаващия се квантов образец:

Аспектът на отсъствие на вътрешна истина се запазва само по отношение на бъдещето: настоящето образува метаезика, в който говорим за истината по отношение на бъдещето. Заедно с това по отношение на миналото вътрешната истина е напълно допустима, т.е. сливането на език и метаезик, която позволява да се говори за истината в собствените термини, дори и на достатъчно добра теория. Самият ход на времето я размива повече или по-малко бързо чрез простия приток на информация, дори и тогава, когато остава неизвестен. В накакъв смисъл може да се твърди, че не просто човек научава нови факти, които го принуждават да ревизира истината на истинната теория на миналото, но и че принципно нови факти (фрапантен пример биха били нови физически закони) непрестанно възникват и ревизират старата научна теория независимо от знанието на човека.

6. Неизчислимост по Тюринг и непълнота по Гьодел

Тълкуванието на теоремите за непълнотата в контекста на квантовия компютър изискват обръщане и към един добре известен резултат:

> *Една важна стъпка напред е постигната от Алан Тюринг в 1936. Той показа, че непълнотата може да се изведе като следствие от неизчислимостта. Защото ако има неща, които не могат да бъдат изчислени (Тюринговият проблем дали машината ще спре), тогава тези неща също така не могат и да бъдат доказани. По-точно, ако има крайно множество от аксиоми F, които винаги ни позволяват да докажем дали отделни програми P спират или не спират, то*

> *бихме могли да изчислим дали дадена програма спира или не чрез пробягване по дървото на всички възможни дедукции от аксиомите F, докато или намерим доказателство, че P спира, или намерим доказателство, че P никога няма да спре. Но както Тюринг показва в своята прочута статия от 1936 г. „За изчислимите числа с приложение към* Entscheidungsproblem" [Turing 1936], *не може да има алгоритъм за решаване дали отделни програми P спират* (Chaitin 2007: 300).

След малко ще се обърнем към собственото тълкуване на Тюринг, според когото неговият резултат е напълно различен от този Гьодел, за да изясним на какво би могла да се основава подобна позиция. Но преди това нека обърнем внимание, че според току-що приведения пасаж от Чейтин, по негово мнение неизчислимостта влече непълнота. Следователно обратно, от пълнотата следва изчислимост: или в малко по-свободен изказ, „заобикалянето" на т. нар. първа теорема за непълнотата на Гьодел е достатъчно условие за неограничена изчислимост (изчислимост в смисъла на Тюринг), каквато се надяваме да се въплъти в квантовия компютър. Настоящият текст е насочен именно в тази посока. Заедно с това следва да се отбележи, че тъй като такова заобикаляне не е необходимо условие, то квантовият компютър в смисъла на пълна изчислимост може да се обсъжда и в рамките на една Гьоделова математика, в която се доказва или постулира т.нар. първа теорема за непълнотата.

Бихме искали сега да подчертаем, че твърдението, до което достига Тюринг, на основата на своя довод, разглеждащ „проблема за спирането", е по-слабо от това на Гьодел по мнението на първия:

> *Би трябвало да се отбележи, че това, което ще докажа, е съвсем различно от добре познатите резултати на Гьодел. Гьодел е показал, че (във формализма на Principia Mathematica) има пропозиции $\mathfrak{A}$, такива че нито $\mathfrak{A}$, нито $-\mathfrak{A}$ е доказуема. Като следствие от това се показва, че няма доказателство за непротиворечивостта на Principia Mathematica (или на* **K***), което може да се даде вътре във формализма. От друга страна, аз ще покажа, че няма общ метод, който да ни каже дали дадена формула $\mathfrak{A}$ е доказуема в* **K** *или, което достига до същото, дали системата от* **K** *с присъединена $-\mathfrak{A}$ като допълнителна аксиома е непротиворечива* (Turing 1937: 259).

От това, че Тюринговата машина не може да изчисли дали ще спре следва по току-що цитираните думи на самия Тюринг единствено че няма „общ метод”, но той не изключва съществуването на „частен метод”, по който всяко отделно твърдение, което е неразрешимо по Гьодел, все пак да бъде разрешено като ‘истинно’ или ‘неистинно’.

В тази връзка са уместни две допълнителни бележки, първата от които е свързана с възможността за „абсолютно неразрешимо твърдение”, обмисляна в продължение на десетилетия от самия Гьодел:

> *Теоремата за непълнотата показва, че за всяка достатъчно силна непротиворечива формална система на математиката има математически твърдения, неразрешими относно тази система. Естествен и интригуващ въпрос е дали има математически твърдения, които са в някакъв смисъл абсолютно нерешими, тоест нерешими спрямо всяко множество от аксиоми, които са обосновани. Гьодел побързва да изтъкне, че неговата оригинална теорема за непълнотата не поражда примери на абсолютна неразрешимост и оттук не подкопава убеждението на Хилберт, че за всеки точно формулиран математически въпрос има определен и откриваем отговор. Обаче в своя последваща работа по теория на множествата Гьодел открива това, което първоначално смята като възможен кандидат за абсолютно неразрешимо твърдение. По-нататък, той изразява надеждата, че някой може действително да го докаже. В края на краищата достига до отхвърляне на този възглед и придвижвайки се до другата крайност изразява надеждата, че би могло да има обобщена теорема за пълнотата, според която няма абсолютно неразрешими твърдения* (Koellner 2010: 189).

Другата бележка е свързана с току-що поставения въпрос, който е:

> *тясно свързан с природата на разума и обосноваването на нови аксиоми и това е защо изглежда неуловим и труден. Много по-лесно е да се покаже, че едно твърдение не е абсолютно неразрешимо, отколкото да се покаже или че едно твърдение е абсолютно неразрешимо или че няма абсолютно неразрешими твърдения* (Koellner 2010: 190).

7. „Гьоделизация" по Пенроуз

Можем да използваме „абсолютната решимост", но „без общ метод" като определение на разума. С подобна насока също и Роджър Пенроуз въвежда термина „гьоделизация" (Penrose 1999: 143):

> *Обаче това в някаква степен си проси въпроса как действително* решаваме *дали една пропозиция е истинна или неистинна. Критичният момент на всеки етап е да се види как да се кодира присъединяването на безкрайно семейство от Гьоделови пропозиции за осигуряване на една единствена допълнителна аксиома (или краен брой аксиоми). Това изисква нашето безкрайно семейство да може да бъде систематизирано по някакъв алгоритмичен начин. За да бъдем сигурни, че такава систематизация прави* правилно *това, което се предполага да прави, ще имаме нужда да използваме* вътрешен поглед *отвън на системата – точно както направихме, за да видим, че $P_k(k)$* [Гьоделовото неразрешимо твърдение] *е истинна пропозиция преди това. Именно тези вътрешни погледи не могат да се систематизират – и наистина трябва да са извън всяко алгоритмично действие* (Penrose 1999: 143).

Бихме могли да подчертаем, че основните – поне според традицията на философията – мисловни актове, рефлексия, идеация, снемане, са свързани с изследването на истинността на неразрешими в дадена аксиоматика (Гьодел) или неразрешими по общ метод (Тюринг) твърдения. Експлицитно Пенроуз говори за рефлексия:

> *Вътрешният поглед, чрез който заключихме, че Гьоделовата пропозиция $P_k(k)$ е действително истинно твърдение в аритметиката, е пример на общ тип процедура, известен на логиците като* принцип на рефлексията: *следователно, чрез 'рефлектиране' върху* значението *на аксиоматичната система и правила за процедура и убеждаването си, че те наистина осигуряват валидни начини за достигане на математическа истина може да сме в състояние да кодираме този вътрешен поглед в по-нататъшни истинни твърдения, които сами не следва да са изводими от самите тези аксиоми и правила. Извеждането на истината на $P_k(k)$ … зависеше от такъв принцип* (Penrose 1999: 144).

Бихме разграничили трите споменати мисловни акта в схемата на Пенроуз, третираща гьоделовски тип непълнота, по следния начин. 'Рефлексията' в нашия смисъл се ограничава до включване на мета-твърдение като предикат на самото твърдение или на самото множество като елемент на това множество: следователно тя се тълкува като самореференциалност или непредикативност. 'Идеацията' е замяната на неограничен брой неразрешими твърдения с една нова аксиома, която вече позволява всички те да бъдат разрешени. Най-сетне 'снемането' съответства на редукцията: приема се, че множеството, което включва себе си като елемент (или непредикативното определение) може да се разглежда като същото множество, но без себе си като елемент, или че непредикативното определение може да се представи предикативно. По такъв начин допускаме, първо, че мисленето за разлика от машинен алгоритъм от тюринговски тип има непосредствено отношение към истината; второ, че все пак процесът на получаване на нова истина – според традиционната терминология на философията за такава се смята „синтетичното", а не „аналитичното" твърдение – може поне частично да се формализира, като насоката се определя от тези три или може би повече така дефинирани мисловни актове, които на свой ред са „разбиване" на „принципа на рефлексията":

> *Всичко това показва, че менталните процедури, чрез които математиците достигат до своите съждения за истина са не просто вложени в процедурите на някаква специфична формална система. Ние* разбираме [see] *валидността на Гьоделовата процедура $P_k(k)$, макар да не можем да я изведем от аксиомите. Типът 'разбиране'* ['seeing']*, който се включва в един принцип на рефлексията, не е резултат от чисто алгоритмични операции, които биха могли да се кодират в някаква математическа формална система* (Penrose 1999: 144).

Нашият въпрос в тази връзка ще бъде: може ли квантовият компютър да осъществява тези мисловни актове; или по-грубо, но по-ясно, може ли квантовият компютър да мисли, може ли да открива нови истини, което по силата на цитираното твърдение на Тюринг не може да се направи по общ метод.

Добре би било още отначало да се направят следните разграничения в употребата на термина:

> *Полезно е да се разграничат три различни задачи, с които се асоциира хипотезата на Чърч – Тюринг: характеризиране на ефективно изчислимото, снабдяване еволюцията на физическите състояния с математически смисъл и*

фиксирането на една полезна дефиниция за физическа изчислимост (Timpson 2004: 238).

За да преминем от традиционната философска терминология за „синтетични" и „аналитични" твърдения към тази на Тюринг, ще ги положим еквивалентни съответно на „неизчислими" и „изчислими" твърдения, без да имаме обаче възможността за пространното отклонение, необходимо за да се обсъди степента на релевантност на подобно полагане. По-нататък – в духа на Гьоделовото кодиране на синтактично правилните пропозиции в дадена аксиоматика чрез естествени числа – ще заместим въпроса за изчислимите („аналитичните") твърдения с този за числата, изчислими от машина на Тюринг или друга:

> *Все още не е направен опит да се покаже, че „изчислимите" числа включват всички, които естествено биха могли да се сметнат в качеството на изчислими. Всички аргументи, които могат да бъдат дадени, е фундаментално необходимо да бъдат призиви към интуицията и по тази причина доста неудовлетворителни математически. Реалният спорен въпрос е: „Какви са възможните процеси, които могат да се извършат при изчисляване на число?"* (Turing 1937: 249).

В току-що приведения пасаж от Тюринг ще помолим нашия контекст да разграничи три свързани смислови пласта: синтетичните твърдения като неизчислими; основателността на модела на човек, изчисляващ с помощта на молив и хартия като модел изобщо на изчислението; примери за нерекурсивно представимо, или хипертюрингово изчисление.

> *„Изчислимите" числа могат да се опишат накратко като реални числа, чийто изрази като десетични числа са изчислими с крайни средства. … Според моята дефиниция едно число е изчислимо, ако неговият десетичен запис може да се изпише от машина* (Turing 1937: 230).

Нека сега – на фона на такова определение – се запитаме дали число, което може да се получи и теоретично, чрез функцията на избор според аксиомата за избора, и практически, като измерена стойност на квантово-механична величина, е изчислимо. Измерването несъмнено е краен процес и следователно такова число е „изчислимо с крайни средства". Доколкото квантовият компютър се приема за машина и то може да се „изпише" като нейно състояние, изглежда трябва да приемем, че така полученото число е изчислимо и заедно с това не е изчислимо от машина на Тюринг, а само от квантов компютър. Изводът е, че не можем да приемем валидността на предпоставката на следния сложен силогизъм:

> *Ако веднъж се приеме, че изчислимите числа са всички „изчислими", следват няколко други твърдения от същия характер. В частност следва, че ако има общ процес за определяне дали една формула от Хилбертовото изчисление на функции е доказуема, тогава определянето може да се извърши от машина* (Turing 1937: 249).

Концепцията за квантов компютър не само отрича цитираната предпоставка, но и потвърждава заключението, че определянето „дали една формула от Хилбертовото изчисление на функции е доказуема" „може да се извърши от машина". При това положение не можем да се твърди нищо определено нито относно отсъствието, нито относно наличието на въпросния общ процес или метод. Следователно на тази основа не можем да отличим разума на човек от изкуствен интелект.

Може да се добави, че както вторият, така и първият би трябвало да се основава на някакви естествени физически процеси, върху които мисленето изобщо може да се положи. Съумеем ли да достигнем до тях, от една страна, ще се гарантира възможността за построяване машинен аналог на човешкия разум, а от друга, самата природа, и то на фундаменталното физическо равнище, ще се окаже интелигибелна, тъй като за реализиране на разума се използват естествени процеси. Нашата хипотеза – впрочем отдавна и широко застъпена в пледоариите около изкуствения интелект – е, че квантово-механичните са тези или такива процеси. Следва още веднъж да подчертаем единството на посочените току-що две страни: ако квантовият компютър е машина, която би могла съвършено да моделира или да представи човешкия разум, то заедно с това трябва да приемем и получаваме достъп до информационния или интелигентния ипостас на природата, който според традицията на човешката култура е обичайно зачислен към религията и категорично противопоставян на научността и науката, основана в Новото време тъкмо върху пълното отсъствие на разум или антропоморфно поведение на равнище физически процеси. В тази връзка по-нататък ще се обърнем към идеята на Пенроуз за необходимостта от „нова физика на изкуствения интелект", а засега ще започнем да обсъждаме разликите между Тюринговата машина и квантовото изчисление в природата, за да легитимираме квантовия компютър на собствено основание, следвайки Дейвид Дойч и особено Дейвид Албърт.

III. РАЗУМ И ФИЗИКА

8. Квантовият компютър по Дойч

Нека започнем с един пространен цитат от Дойч, въдворяващ за обсъждане нетюрингови изчислителни процеси в природата и потвърждаващ някои от изброените интенции:

> *Често се твърди, че всеки 'разумен'* физически *(като противопоставен на математически) модел за изчисление, поне детерминистичното изчисление на функции от $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$, е еквивалентен на Тюринговия. Но това не е така: няма a priori причина защо физическите закони би трябвало да се съобразяват с ограниченията на математическите процеси, които наричаме 'алгоритми' (т.е. функциите $C(\mathcal{T})$). Макар в тази работа да не намирам за нужно да направя така, няма нищо парадоксално или противоречиво в постулиране на физически системи, които изчисляват функции не от $C(\mathcal{T})$. Би могло да има експериментално проверими теории за този ефект: напр. да разгледаме всяко рекурсивно изброимо множество (такова като множество от естествени числа, представящи програми за завършващи алгоритми на дадена машина на Тюринг). По принцип, една физическа теория би могла да има сред своите следствия, че определено физическо устройство $\mathcal{F}$ би могло да изчисли за определено време дали произволно естествено число на нейния изход принадлежи на това множество. Тази теория би била експериментално опровергана, ако по-прозаичен компютър от Тюрингов тип, програмиран да изброи множеството някога не се съгласи с $\mathcal{F}$. (Разбира се, теорията би трябвало да направи и други предсказания, иначе никога няма да бъде нетривиално* потвърдена*, а нейната структура би трябвало да бъде такава, че екзотичните ѝ предсказания относно $\mathcal{F}$ естествено не би могло да бъдат разделени от другото ѝ физическо съдържание. Всичко това е логически възможно)*[3] (Deutsch 1985 (Proc.): 4-5).

[3] „Нито, обратно, е очевидно, *a priori*, че коя да е от известните рекурсивни функции е изчислима във физическата реалност. Причината защо откриваме, че е възможно да се строят, да речем, електронни калкулатори, и наистина защо можем да извършваме ментална аритметика, не може да се намери в математиката или логиката. *Причината е, че законите на физиката се е случило' да позволяват съществуването на физически модели за операциите на аритметиката* − като събиране, изваждане и умножение. Ако не беше така, тези познати операции биха били неизчислими функции. Все още би могло да знаем за тях и да ги

Тук с $\mathbb{Z}$ е означено множеството на естествените числа, а с $C(\mathcal{T})$ – множеството от рекурсивни функции (Deutsch 1985 (Proc.): 3). Бихме искали да подчертаем, че машината на Тюринг въплъщава няколко предпоставки, заети от стандартния светоглед на Новото време, които са преминали в модела без критичен анализ, като саморазбиращи се, докато всъщност са предразсъдъци, пречещи на познанието. На първо място, човекът е, който притежава разум, а природата е не-разумна, неинтелигибелна, инертна и противопоставена нему. Може би най-фрапантната е тази уникалната интелигибелност на човека в света: ето защо неговата осъзнавана дейност по изчисляване с лист и молив е тази, която следва да се схематизира и идеализира под формата на модел. На трето място, че трябва да се вземе човешката дейност тъкмо за изчисляване, а не напр. за разпознаване на образ. В резултат машинното поведение се оказва напълно детерминистичен и следователно, абсолютно контролируем процес – алгоритъм, но човешкото мислене не е такова освен в третостепенни или поддържащи свои части. В самата си основа то се отнася към свободата, творчеството, истината: не само първите две, но дори истината се оказва напълно отстранена в алгоритмичния процес, изисквайки метаистанция, в която естествено са настанява човекът, осмисляйки компютъра като един, макар и може би от нов тип, свой инструмент.

Теоремите на Гьодел за непълнотата само формализират и математически представят такъв подход, който свежда мисленето до модел в аритметиката. Съвсем закономерно отрицателните резултати, получени от него, следва при философска рефлексия да се отнесат към самия този модел като невярна предпоставка и съответно – да се осмислят като „доказателство от противното". Нашата хипотеза е, че, ако променим предпоставката, като положим в основата квантовото изчисление, тези резултати биха били неизводими и по този начин косвен, макар и не решаващ довод в негова полза. Всъщност в самите Гьоделови теореми моделът не е експлициран, а се въвежда косвено и вторично като уж самоподразбиращия се факт, че следва да се поставят в позицията на метаистанция, тази, която е запазеният пиедестал за "човека" в класическото мислене. Ако го поставим под съмнение и проверим какво ще се получи след приемане не неговото отрицание до противоречие не

привличаме в математически доказателства (които вероятно биха били наричани 'неконструктивни'), но ние не бихме могли да ги изпълняваме" (Deutsch 1985 (Proc.): 5).

се достига, а се оказва, че по-скоро т.нар. първа теорема за непълнотата следва да се тълкува като може би най-фундаменталната известна ни досега аксиома, разделяща математиката на два типа според отношението ѝ към света: външно за „Гьоделов тип” математика и вътрешно за „Хилбертовия тип” математика. Последната имплицира едно подновено питагорейство, тясно свързано с философията на квантовата механика и особено на квантовата информация, и затова обозначавано като „дуално”, докато първата влече класически тип научен светоглед за света.

Във втората естествено се вписва възгледът за изначално „изчислителен” – „изчислителен” в обобщен смисъл, запазено като название заради традицията, но винаги придружавано от решаващото определение „квантово” – характер на света. Така Дойч въвежда, че

> *универсалният квантов компютър $\mathcal{Q}$ може напълно да симулира всяка Тюрингова машина и може да симулира с произволна точност всеки квантов компютър или симулатор. Сега ще покажа как $\mathcal{Q}$ може да симулира различни физически системи, реални и теоретични, които са извън обхвата на универсалната Тюрингова машина $\mathcal{T}$ ...* (Deutsch 1985 (Proc.): 10).

И по-специално според него това са: „случайни числа и дискретни стохастични системи” (Deutsch 1985(Proc.): 10); „квантови корелации” (Deutsch 1985(Proc.): 11); „съвършена симулация на произволни крайни физически системи” (Deutsch 1985(Proc.): 11-13); „паралелна обработка на последователен компютър (Deutsch 1985(Proc.): 13-15); *„по-бързи компютри”* (Deutsch 1985(Proc.): 15).

Напълно в съзвучие с нашия подход Дойч предлага и констатира:

> *Да се види хипотезата на Чърч-Тюринг като физически принцип не просто прави компютърната наука клон от физиката. То също така прави част от експерименталната физика клон от компютърната наука. Съществуването на универсален квантов компютър $\mathcal{Q}$ влече, че съществува програма за всеки физически процес. В частност $\mathcal{Q}$ може да осъществи всеки физически експеримент* (Deutsch 1985(Proc.): 18).

Тук трябва да се има предвид, че Дойч заменя собственото твърдение на Тюринг, което той формулира така:

(1.1) Всяка 'функция, която естествено може да се сметне като изчислима' може да се сметне от универсалната машина на Тюринг (Deutsch 1985 (Proc.): 3)[4]

Новото, по-силно твърдение, което предлага на негово място и което по-нататък обозначава като силна или физическа форма на принципа на Чърч – Тюринг, е следното:

(1.2) 'Всяка крайно реализируема физическа система може да бъде съвършено симулиране чрез универсален модел изчисляваща машина чрез крайни средства' (Deutsch 1985 (Proc.): 3).

Тук „машината на Тюринг" от първата формулировка е заменена с „универсален модел изчисляваща машина". Имплицитният антропоморфен модел е заменен с този на природни процеси. Точно този е нашият контекст, в който новото питагорейство се вписва естествено или дори се изисква, но такава е също и изходната позиция, от която Дойч въвежда квантовия компютър.

По-нататък той прави още една важна крачка, като по същество предлага принципа на Чърч – Тюринг в новата обобщена формулировка да се разглежда като фундаментален принцип на познанието, намиращ се в основата на такъв важен принцип като третия принцип на термодинамиката:

(1.3) 'Никой краен процес не може да сведе ентропията или температурата на един крайно реализируем процес до нула' (Deutsch 1985 (Proc.): 4).

Тук следва да се добави, че най-малкото съществува позиция, от която третият принцип на термодинамиката влече първите два[5]. Тогава, ако от така формулирания обобщен принцип на Чърч – Тюринг следва въпросният трети принцип, то и цялата термодинамика следва да се постави на информационно-изчислителна основа, която по хипотезата на Дойч и по нашата е квантова:

Видяхме, че квантовата теория се подчинява на силната форма на принципа на Чърч-Тюринг (1.2) само при допускането, че третият закон на термодинамиката (1.3) е верен. Това отношение се разбира може би по-добре чрез

[4] Навсякъде страниците са посочени според широко разпространения онлайн-вариант на текста.
[5] Пенчев 2007.

разглеждане на принципа на Чърч-Тюринг като по-фундаментален и извеждане третия закон от него и от квантовата механика (Deutsch 1985(Proc.): 17)

9. Мисленият експеримент на Дойч: „многосветова срещу Копенхагенска интерпретация на квантовата механика"

По-нататък и подробно в друга работа, публикувана същата година, Дойч въвлича квантовия компютър в мислен експеримент да се разграничат емпирично многосветовата и стандартната интерпретация на квантовата механика (Deutsch 1985(Int. J.) 32-36). Обаче това, заради което нас ни интересува, е включването в него на уникален елемент – изкуствен интелект. Ще го приравним в нашия контекст на мислещата машина, която намира доказателство на *всяка* теорема, без да има общ метод и следователно, в този ясно определен смисъл проявява творчество. По-нататък, повтаряйки дословно разсъжденията и идеите на Дойч, можем да установим, че самото емпирично разграничение на многосветовата и стандартната интерпретация на квантовата механика зависи в крайна сметка, а по-точно казано – в самото начало, от тезиса на Чърч – Тюринг (– Дойч) през вече разгледаното съотнасяне на аргументите на Тюринг и на Гьодел спрямо т. нар. *Entscheidungsproblem*. Към тази връзка всъщност насочва самият Дойч при обсъждането на концепцията си за квантов компютър в контекста на тезиса на Чърч – Тюринг (Deutsch 1985(Proc.) 105)[6].

[6] Пасажът от Дойч съдържа и други важни философски идеи, макар и да излизат извън непосредствения обхват на настоящото изследване: "Другаде съм описал (Deutsch 1985 [Int. J.], ср. и Albert 1983) как би било възможно да се направи решаваща експериментална проверка на Евърътовата ('многосветова') интерпретация на квантовата теория чрез използване на квантов компютър (следователно в противоречие с широко поддържаното убеждение, че тя не е експериментално разграничима от други интерпретации). Обаче изпълнението на такива експерименти трябва да почака също така построяването на квантови компютри и разработването на истински програми за изкуствен интелект. В обяснение действието на квантовите компютри съм приел, където е необходимо, Евърътовата онтология. Разбира се, обясненията биха могли винаги да се 'преведат' в конвенционалната интерпретация, но не без да загубят своята обяснителна сила. Да предположим, например, че квантовият компютър е програмиран, както беше описано в „Проблема на фондовата борса". Всеки ден се дават различни данни. Евърътовата интерпретация обяснява добре как поведението на компютъра следва от това, че е делегирал подзадачи на копия от себе си в други вселени. В дните, когато компютърът успява в изпълнението на два процесорни дни изчисление, как конвенционалната интерпретация би обяснила наличието на правилния отговор? Къде е изчислен той?" (Deutsch 1985(Proc.) 105). „Проблемът на фондовата борса" е описан от Дойч на предходната страница и се състои в това да се определи най-добрата стратегия за инвестиции. Дойч тълкува квантовия паралелизъм като протичащ в паралелни вселени, но само една от тях може да разполага с общия резултат.

Нека предварително изясним ролята на изкуствения интелект в този експеримент: той трябва да е експерименталната реализация на „професор X, член на Кралското научно дружество" според шеговитото определение на Дойч, който да заявява, че определена стойност е наблюдавана, но без да ни съобщава коя точно в „интерес на целите на експеримента". Тъй като наблюдението – а в нашите въведени по-горе термини, то е „рефлексия и снемане" – трябва да се провежда за изключително кратко време и произволен брой пъти[7], то е непосилно за което и да е реално човешко същество и изисква изкуствения интелект, в ролята на какъвто и Дойч, и ние виждаме квантовия компютър.

С мисления експеримент, предложен от Дойч, обаче ще се окажем в самата сърцевина на проблемите, които питагорейството и аксиоматичната математика пораждат. Едва ли във формàта на настоящето изследване можем да си позволим нещо повече от това да дадем рамката и да предложим груба скица на типа решение.

В самата си основа се налага да тематизираме една „свръхочевидна" предпоставка и да я експлицираме като аксиома, с което неизбежно откриваме пътя за нейното проблематизиране, заменяне с отрицание или пропускане. Става дума за *метааксиомата, че аксиоматичният подход е допустим*. Под „допустим" ще разбираме, че чрез аксиоми могат да се строят математически структури, които да служат като модели на *външна* спрямо тях реалност или на *външни* спрямо тях други модели.

Цялото развитие още от Евклид до наши дни и безчислените приложения на математиката потвърждават основателността на подобен постулат, както и изясняват защо никой не си е дал труда (поне доколкото ми е известно) да го формулира. Квантовият компютър като ключов елемент за емпирично разграничение между многосветовата и копенхагенската интерпретация на квантовата механика (следвайки Дойч) обаче ни принуждава да вникнем все пак в нейния конвенционален характер.

Друго основание – специфично за нашия контекст – е, че, ако тълкуваме квантово-механичните модели като вътрешно-доказуемо съвпадащи с реалността, то

[7] "Тъй като се проверяват статистически предсказания, както обикновено в квантовата теория, трябва да мислим за мисления експеримент като изпълняван достатъчно много пъти, за да бъдат резултатите статистически значими" (Deutsch 1985(Int. J.): 33).

трябва да допуснем и противоположния полюс на пълна (безкрайна) неадекватност на математическите модели по принцип. Това би бил един съвсем странен, „фентъзи" свят, пълен с чудеса, където науката – най-малкото според стандартната ни представа за нея – би била на пръв поглед напълно изключена. Дали обаче? Няма ли той всъщност да е квантовият свят, разширен до макроскопичните размери на нашето ежедневие? С други думи, дали пълното съвпадение на модел и реалност в квантовата механика и информация няма за своя обратна, допълнителна, дуална страна безкрайното им несъвпадение и пълна неприложимост на модели? Поне доколкото квантовата механика е несъмнено наука, тя все пак ще е възможна дори и в такъв, „фентъзи" свят.

И така, квантово-компютърното разграничение между многосветовата и „Копенхагенската" интерпретация изисква във философската си основа да определим качествено „разстоянието" между математически модел и реалност. *Класическата предпоставка е за неголямо, но ненулево „разстояние" между модел и реалност: възможни са повече или по-малко приблизителни модели на реалността.* Усиленият принцип на Чърч – Тюринг (като физически по Дойч) очевидно предполага обратно, а именно нулево „разстояние" между тях („съвършената симулация"). От негово полагане като ключов елемент в мисления експеримент, предложен в другата работа на Дойч от 1985 г., се извежда разграничение между двете интерпретации на квантовата механика тъкмо чрез предсказваното различно отстояние между квантов модел (квантово-компютърна симулация и реалност) и реалност. По „Копенхагенската" интерпретация трябва да е нулево, докато по многосветовата ще бъде ненулево, поради онова „количеството реалност", останало в паралелните светове.

Квантовият компютър, постулиран с нулево отклонение от реалността и работещ в интерпретацията на Дойч не само в нашия, но и във всички паралелни, ще се използва като абсолютно необходимия репер, спрямо който реалността може да бъде „повече или по-малко", заради остатъка в многото други вселени. Така всъщност се оказва, че многосветовата интерпретация ще запази класическата предпоставка за неголяма, но ненулева разлика между модел и реалност и именно по нея ще се разграничи от „Копенхагенската", постулираща съвпадение.

Така по Дойч вселената е квантов компютър, смятащ паралелно по всички клонове, а реалността е само един неин клон, избиран някак си или по определени критерии. Това не значи, че реалността по един клон е по-малко в сравнение с общата, тъй като приносът на останалите клонове към реалността е отрицателен, понеже те предвидливо са снабдени с чисто имагинерен коефициент, както и се полага за въображаеми, имагинерни светове.

Чрез процесите, протичащи в паралелните светове, Дойч простичко ни обяснява предполагаемо супертюринговите, черти на квантовия компютър и способността му за хиперизчисление. След като цитираме в най-съществените моменти и коментираме неговия мислен експеримент ще покажем, че тези същите лелеяни свойства на квантовия компютър не по-малко простичко се обясняват и в „Копенхагенската" интерпретация.

Ето в едри щрихи, чрез думите на самия Дойч:

Сега произходът на разликата между двете предсказания лежи в твърдението на К.И., че квантовите системи са подложени на аномална времева еволюция, а именно промяна на техните Хайзенбергови състояния на някакъв късен етап във всяка пълна верига от измервания. Определянето експериментално посредством интерферентни експерименти, че такава промяна не се е случила в една непосредствена точка на измерване, не опровергава К.И., както видяхме. Тя просто показва, че всяка промяна трябва да се случи в по-късен момент. По тази причина всеки експеримент за разграничаване между двете „интерпретации" необходимо включва измерване на наблюдателя върху себе си (или еквивалентно, на единия наблюдател от друг). И следователно построяването на мислен експеримент (т.е. на експеримент, чието изпълнение понастоящем е практически невъзможно, но по принцип се позволява от физическите закони) заради това необходимо включва описанието на модел на наблюдател. За щастие, ще открием, че само няколко детайла от вътрешната конституция на наблюдателя е необходимо да се определят в модела, главното изискване за него е да бъде субсистема на света и да се подчинява на квантовата теория (в една или друга версия за определеност). Това изискване със сигурност е изпълнено, ако квантовата теория е универсална теория. … Единственото друго важно допускане е обичайното в теорията на измерването, че динамиките на уредите, включително и в онези, които измерват наблюдателя, са неограничено определими" (Deutsch 1985(Int. J.) 32).

От приведения цитат става ясно, че наистина моделът на наблюдател – да са надяваме, експериментално реализируем като квантов компютър – е ключовият момент в разграничаването на двете интерпретации. В нашите термини, той ще извърши многократно, по-точно статистически значим брой пъти, едно елементарно наблюдение, което е и елементарен мисловен акт. Така квантовият компютър по замисъла е на границите между машина и човек, понеже ще извърши може би милиони пъти едно единствено повтарящо се действие еднообразно, каквато е участта на автоматите, но това, макар и монотонно, действие е досега запазвано за човека – рефлексия (наблюдение) и снемане (съобщаване).

10. Термодинамичната цена на избора

Дали обаче то няма термодинамична цена, бидейки един нов, макар и съвършено преквалифициран „демон на Максуел"? Аналогията не е повърхностна. Задачата на демона на Максуел може да се опише – в термините на машината на Тюринг – като разделяне на нулите и единиците в една неограничено дълга нейна лента. Задачата на „демона на Дойч" е да съобщи, че е преминала нова клетка, но без да ни каже какво е било записано в нея. Следователно общото и за двата „демона" е, че отброяват клетките на лентата на машината на Тюринг, като после се различават по това, че Максуеловият разделя (съобщава), докато този на Дойч не си прави този труд заради целите на експеримента.

Следователно, *ние се запитваме дали аксиомата на избора няма термодинамична цена*: защото общото и за двата „демона" е, че осъществяват добра наредба в една произволно, макар и крайно множество.

Нека сега осмислим термодинамично причината за различното предсказание на „многосветова" и на Копенхагенската интерпретация в мисления експеримент на Дойч. И в двата случая, в резултат на действието на квантовия компютър се появяват нови алтернативи с ненулева вероятност в резултат на декохеренция на суперпозицията поради наблюдението. По многосветовата интерпретация наблюдението остава чисто, идеално, каквото е в класическата физика, и следователно не изисква термодинамична цена, каквато има всеки материален процес. Новопоявяващите се алтернативи всъщност възникват в паралелни светове и не променят нито ентропията, нито енергията, а следователно – не и температурата, в реалния свят, поради осъщественото наблюдение.

Не такъв е случаят, ако е валидна Копенхагенската интерпретация. Защо? Поради липсата на паралелни светове, породените от наблюдението алтернативи няма как да не останат в нашия свят. Те ще увеличат ентропията като термодинамична цена на наблюдението. Ако няма приток на енергия поради самото наблюдение, температурата ще спадне. Всъщност така ние предложихме едно обяснение за причината да действа законът за увеличаване на ентропията („изстиването” на затворени физически системи).

По-нататък ще видим и подробно ще коментираме, че ‘наблюдението’, доскоро привилегия на човека, веднъж предадено на квантовия компютър, необходимо се оказва притежание на всичко съществуващо, фундаментално свойство на битието, на една изначално интелигибелна природа. Това е гарантирано дори още на математическо равнище чрез „снемането”: рефлексивната (самореференциалната) тоталност се отваря чрез преобразуването си в елемент (от множество) на новото равнище. Преходът към по-висш тип в ръселовска йерархия или преобразуването на интензия в екстензия е и физически процес с неизбежна термодинамична цена.

Сега може да предложим обаче съществено опростяване на експеримента на Дойч: просто трябва да поставим „наблюдателя” в термос и да измерваме температурата. Ако остава непроменена, валидна е многосветовата интерпретация, ако спада – Копенхагенската интерпретация.

Всъщност дори и постоянство на температурата пак може да се обясни и от последната с производство на енергия от наблюдението, която да компенсира съвършено увеличаващата се ентропия. С други думи, квантовият компютър не просто би изчислявал, както досегашните му събратя, но и би произвеждал реалност. В този случай, многосветовата интерпретация вероятно би се оказала покосена от бръснача на Окам, тъй като отива отвъд наблюдавания факт, предлагайки непроверимо, но по-сложно и метафизично обяснение: невзаимодействащите с реалния паралелни светове.

Всъщност ние отдавна разполагаме с данни за изстиване на вселената, а съвсем отскоро и за постоянен приток на колосална енергия с неустановен източник: т. нар. черна енергия. Първите се обясняваха с „Големия взрив” преди 13-14 млрд. години, след който вселената непрекъснато изстива, а вторите – макар и твърде смущаващи – с евентуалното (и твърде проблечатично) въздействие на друга вселена. Може би истинското обяснение е съвсем различно: посредством термодинамичната цена на „наблюдението”, осъществявано от всичко на всичко поради фундаментално свойство на една изначално интелигибелна природа.

Една друга предпоставка, положена от Дойч в многосветовата интерпретация на квантовия компютър, се оказа експериментално опровергана от явленията на сдвояване (entanglement), изучавани от квантовата информация. Става дума за следното:

> Аксиома 4. *Светът може да се раздели на подсистеми, които имат свои собствени пространства на състоянията.* $\mathcal{H}$ *е директното произведение* $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots$ *на пространствата на състоянията на подсистемите* (Deutsch 1985(Int. J.): 5).

Освен че отхвърля явленията на сдвояване, тази аксиома оставя една съществена неяснота, какво да разбираме под „свят”: дали съвкупността от всички паралелни светове или реалния свят като само един от тях.

По Копенхагенската интерпретация „паралелните светове” от многосветовата са просто (все още невзаимодействали) части на вселената, в които се разпределят паралелните. Обратно, отхвърлянето на горната аксиома, макар и оставайки в рамките на многосветовата, чрез което се допуска взаимодействие между паралелните светове чрез явленията на сдвояване размива границите между нея и Копенхагенската. В известен смисъл може да се твърди, че квантовата информация ги обединява като по-скоро времеви изказ (многосветовата интерпретация) и по-скоро пространствен изказ (Копенхагенската) на едно и също положение на нещата, което – поради айнщановската относителност – не може да е друго освен време-пространствено.

В скоби може да се отбележи, че явленията на сдвояване намаляват изчислителната мощ на квантовия компютър, но заедно с това са инструмент за управляемо по принцип прехвърляне на данни и резултати между различните паралелни клонове на изчислението.

Нека сега отново се върнем към схемата на мисления експеримент на Дойч:

> *Четири субсистеми са включени в този експеримент. Първата е спин-* $\frac{1}{2}$ *атом (така* n_1*=2). Минава през Щерн-Герлах апарат по такъв начин, че двете изходни траектории, съответстващи на спиновете Север и Юг, минават през подсистеми 2 и 3. Тези са също спин-* $\frac{1}{2}$ *атоми, които представляват част от*

чувствителния „сетивен орган" на наблюдателя (така $n_2=n_3=3$). Техните рецептивни състояния са „спин надолу" ($|\downarrow_2\rangle$ и $|\downarrow_3\rangle$) и връзката е такава, че ако атомът от подсистемата 1 описва траекторията Север, минавайки през атом-2, спинът на атом-2 се преобръща със сигурност в „спин нагоре", докато спинът на атом 3 остава непроменен. Аналогично, атом-3 се преобръща, ако атом 1 описва южната траектория. След преминаване през „сетивния орган", всяка траектория влиза в пръстена на ускорител, предназначен да съхрани всеки атом, влизащ в него, в орбита завинаги. Подсистема 4 е наблюдателят или мозъкът на наблюдателя, така може би n_4 е $(10^{10})^{10}$ или повече – това няма значение (Deutsch 1985(Int. J.): 33).

По-нататък ролята на наблюдателя, която вече обсъдихме като ключова за експеримента, е описана така:

След завършване на измерването наблюдателят записва (в своята памет или ако е необходимо в бележника си) не стойностите „N" или "S" на спина, а само дали знае или не тази стойност*. Той може да напише „Аз, професор X, член на кралското научно дружество, с настоящето удостоверявам че в момента t'" аз съм определил дали спинът на атом-1 е $+\frac{1}{2}\hbar$ или $-\frac{1}{2}\hbar$. В този момент аз наблюдавам в моя ум една и само една от тези две стойности. За да улесня следващата част от експеримента, няма да разкрия коя точно." Това представлява запис за* завършването *на измерването, запис, който, ще видим, не е задължително да се разруши от последващи интерференчни експерименти. Честното записване на такова твърдение включва измервания, направени от подсистеми на подсистема 4 помежду им, свеждайки в крайна сметка до измервания на подсистеми 2 и 3* (Deutsch 1985(Int. J.): 34).

Особено следва да се подчертае, че „наблюдателят се предполага да има точното знание на (т.е. да направи точното измерване на) наблюдаеми вътре в себе си" (Deutsch 1985(Int. J.): 34). При това, както ще видим във връзка с обсъждането на Албърт, това знание не може да се добие „отвън", но може да съобщи навън. При това обаче преходът от узнаване към съобщаване е възможно да си има своя термодинамична цена. След това, в t"' атомът се подлага на интерференчен експеримент, който би било твърде обемисто дори само да се опитаме да охарактеризираме (Deutsch 1985(Int. J.): 35). Благодарение на него обаче:

> *В тази точка, t"" , според интерпретацията на, всички копия на наблюдателя са още веднъж пак идентични, макар те да са били различни в двата клона във време t"' … Според К.И. само един от тези членове е наличен* (Deutsch 1985(Int. J.): 36).

След още няколко операции, които възвръщат в изходното състояние след осъществяване на посочения експеримент, се достига до желаната експериментално установима разлика:

> *Сега, най-сетне, емпиричната разлика между „интерпретациите" става достъпно. Всичко, от което имаме нужда е следващ апарат на Щерн-Герлах, за да измери компонентата „нагоре" на спина на атом-1. Според К.И. стойностите* $\pm\frac{1}{2}\hbar$ *ще се наблюдават случайно с еднаква вероятност. Според Евърът със сигурност ще се наблюдава стойността* $+\frac{1}{2}\hbar$ (Deutsch 1985(Int. J.): 36).

Според нашето разбиране, концепцията за квантов компютър зависи само термодинамично от възприетата интерпретация измежду двете. Дали ще тълкуваме паралелността на квантовото изчисление в различни светове или в различни подсистеми е по-скоро въпрос на изказ. От философска гледна точка и в двата случая имаме части и цяло. Решаващи са квантовите корелации между частите, които са физическият механизъм за образуване на цяло. Реалността и в двете интерпретации е съсредоточена в известна наблюдаема част, в която обаче всички външни части са представени и вътрешно чрез квантовите корелации: по този начин тази наблюдаема част, която е 'реалната', встъпва в ролята и на представяща (дори едно-еднозначно) цялото. Всъщност едва така, т.е. холистично – чрез цялото, получаваме някакъв достъп до физически смислено определяне на реалността. Такъв подход, водещ началото си от айнщайновските „елементи на реалността", всъщност не толкова ги обобщава, включвайки квантовите корелации, колкото ги отхвърля. Причината е в това, че реалността произтича от Едното и преобразувайки го в едно от още, тя става недостъпна и се губи, но може да бъде все пак *съобщена*.

11. Съобщение и съ-общаване

Нека вникнем в това *съобщаване*, мислейки го вече като *съ-общаване*. В мисления експеримент на Дойч професор X записва резултата класически с молив и хартия, досущ като в модела на машината на Тюринг. Бихме могли поне да си въобразим, че отправя съобщението си към останалата част от вселената, кодирано с квантови корелации. Най-сетне това може да е и един „квантов професор Х", дори не и квантов компютър, а „редови" квантов обект, мислен обаче като тях, който отправя своето квантово послание към останалата вселена: това е „рентата" му за мястото му в нея, за да бъде част от нея.

Истинският въпрос, който трябва да поставим, е дали този редови квантов обект може да скрие – както със сигурност може реалният „професор Х, член на Кралското научно дружество" – част от информацията, макар и за целите на експеримента: а именно да съобщи само, че е наблюдавана декохеренция, но не и в кое от двете възможни суперпозиционни състояния се е оказало при наблюдението. Да допуснем, че редовият квантов обект не може. Тогава скриването на част от информацията от реалния професор Х би било несъществено, негова и на хората самозаблуда, доколкото в качеството на своето „квантово тяло", той „си е казал всичко", „докладвал е чинно" на останалата част от вселената.

Попаднали сме следователно на един нов ипостас на „теоремата за свободната воля": ако професор Х може да скрие част от информацията, то това може да стори и всеки редови член на квантовата вселена: изправени сме пред една непреодолима квантова демокрация.

Всъщност мисленият експеримент на Дойч може да се разгледа и като модификация на „парадокса" с „приятеля на Вигнер", доколкото „приятелят" съобщава не цялата информация; в гротескно нагледните термини на „котката на Шрьодингер": не дали още е жива, или вече е погубена, а само че има точно знание, че е реализирана една от двете алтернативи във фиксиран момент от време.

12. „Приятелят на Вигнер"

Ще обсъдим подробно „парадокса" с „приятеля на Вигнер", тъй като от него могат да се извлекат съществени поуки относно проблемите, които ни вълнуват в настоящето изследване:

> *Даден е някакъв обект, цялото възможно знание относно този обект може да се даде от вълновата функция. Това е математическото понятие, точната природа на което тук няма нужда да ни касае: то е съставено от (изброима) безкрайност числа. Ако някой знае тези числа, може да се предскаже поведението на обекта, доколкото то* може *да бъде предвидено. По-точно, вълновата функция позволява да се предскаже с какви вероятности обектът ще предиз-*

вика у нас едно или друго усещане, ако го оставим да взаимодейства с нас пряко или непряко. Обектът може да е радиационно поле, и неговата вълнова функция ще ни каже с каква вероятност ще видим светване, ако поставим нашите очи в определени точки, с каква вероятност ще остави тъмно петно върху фотографската плака, ако е поставена на определени места (Wigner 1967: 170-171).

И по-конкретно, предлага се за илюстрация следният схематичен пример:

Да предположим, че всички наши взаимодействия със системата се състоят в поглеждане в определена точка в моменти t_0, t_0+1, t_0+2, … и нашите възможни усещания са да се види или да не се види светване (Wigner 1967: 171-172).

От философска гледна точка е особено интересен и поражда много размисли знакът на равенство, който поставя Вигнер, между съществуването и предаваемостта на вълновата функция:

Информацията, давана от вълновата функция, е предаваема. Ако някой друг определи вълновата функция на система, той може да ми каже за нея и според теорията, вероятностите за възможни различни впечатления (или „усещания") ще бъдат еднакво големи, няма значение дали той или аз взаимодействам със системата по даден начин. В този смисъл вълновата функция „съществува" (Wigner 1967: 171).

За целите на съпоставянето с мисления експеримент на Дойч за нас е важно да вникнем в тази връзка или еквивалентност между съществуване и предаваемост. Наистина това, че ако нещо съществува, информацията за него може да бъде предадена, изглежда достатъчно валидно както в класическата физика, така и в квантовата механика. Дори и да става дума за уникални или неповторими факти, какъвто е и случаят с предаване на квантовото самонаблюдение извън системата (т. нар. от нас снемане), горното твърдение остава в сила.

Вигнер обаче акцентира върху обратното: от това че вълновата функцията е предаваема, да се заключи нейното съществуване. Проблемът идва от това, че неистината е точно толкова предаваема, колкото и истината. Самата вълнова функция може да се тълкува като суперпозиция на истинно и на едно или повече неистинни състояния. По-нататък това, което е истинно в даден момент от време, е неистинно в друг: тогава всяко валидно твърдение относно такива два момента има характер на суперпозиция и вълнова функция. Наблюдението, както впрочем и редукцията на вълновия пакет, означава избор на даден момент, за който вече еднозначно може да се твърди истинност или неистинност на конкретно синтетично или опитно проверимо твърдение:

> *Предаваемостта на информацията означава – в настоящия пример, – че ако някой друг погледне в момент t и ни каже дали той е видял светване, можем да погледнем в момент t+1 и да наблюдаваме светване със същата вероятност, както ако сме видели или не сме видели светването в момента t сами. С други думи, той може да ни каже това, което е вълновата функция: ψ_1, ако е видял, ψ_2 ако не е видял светване* (Wigner 1967: 172).

Възможността за избор на подобен момент, еднозначно определящ истинностната стойност, се гарантира в общия случай от аксиомата за избора, за която освен това може да се предположи – както видяхме по-горе, – че има термодинамична цена. Така, посредством този постулат се сдобиваме с вътрешна възможност за истина: не чрез мета-наблюдател, т.е. външен на системата, а вътрешен, включен в нея. Нещо повече, наблюдението е невъзпроизводимо извън системата (тук и засега само в скоби ще отбележим и поставим проблема за възпроизводимостта вътре в системата), но то остава *предаваемо*.

> *Важната точка е, че усещането, което се получава при едно взаимодействие може – и изобщо го прави – да видоизмени вероятностите, с които се получават различни възможни усещания при последните взаимодействия. С други думи, усещането, което се получава при взаимодействие, наричано също* резултат от наблюдението *видоизменя вълновата функция на системата. Видоизменената вълнова функция е по-нататък в общия случай непредсказуема преди усещането, получено от взаимодействието да е влязло в нашето съзнание: то е навлизането на усещане в нашето съзнание, което променя вълновата функция, защото видоизменя нашата оценка на вероятностите за различни впечатления, които очакваме да получим в бъдеще. Именно в тази точка съзнанието влиза в теорията неизбежно и непроменимо. Ако се говори в термините на вълновата функция, нейните промени са свързани с навлизането на усе-*

щания в нашето съзнание. Ако се формулират законите на квантовата механика в термините на вероятности за усещания, те са ipso facto *първичните понятия, с които се борави* (Wigner 1967: 172-173).

При положение, че външният наблюдател – бил той самият Вигнер, или професор Y, друг член на Кралското научно дружество, или друг квантов компютър, или друг редови квантов обект, или дори и най-вече останалата част от вселената – по принцип няма възможност да се провери достоверността на получената информация съответно от „приятеля на Вигнер”, от професор X, от първия квантов компютър или редови квантов обект, най-сетне от интересуващата ни системата в качеството ѝ на неразделна част от холистичната вселена, то следва да се постулира една „аксиома за искреността”, с което обаче се отваря пътя за нейното вариране и до отрицанието ѝ:

1. Вътрешният наблюдател *съ-общава* „истината, само истината и цялата истина”.

2. Вътрешният наблюдател *съобщава* „истината, само истината”, но не непременно цялата истина, както – по благородни научни подбуди, но може би самозаблуждавайки се – професор X от мисления експеримент на Дойч.

3. Вътрешният наблюдател съобщава истината, но не само нея, нито пък цялата истина. Той е „Лъжецът” от древната апория, който лъже или не по свое (случайно или неизвестно) усмотрение.

Близко е до ума, че целостта на вселената изисква „лоялни” части, подчиняващи се аксиомата в първия вариант. Те трябва да са „надеждни и искрени”: да не бъркат в своите уникални, невъзпроизводими и поради това изключително отговорни наблюдения и да ги съобщават незабавно и честно. Именно това ще гарантира интегритета на вселената, нейната цялост а оттук – както изведохме по-горе – *реалността*.

Всъщност тъкмо това е случаят на съобщенията, предавани чрез квантови корелации. Те са разпространяват мигновено (поне според преобладаващото понастоящем мнение) и ограничават степените на свобода на предаващата и приемащата система, което изключва „лъжата”.

Обратно, не такъв е случаят с „класическата информация”, която се предава чрез дифеоморфизъм (за разлика от дискретния морфизъм в горния случай) и следователно, имайки скорост, е подчинена на постулата за ненадвишаване скоростта на светлината във вакуум, изисква носител, което ще рече, че *не всички* характеризиращи го физически величини представляват значима информация. Поради това може да се извърши естествено или изкуствено кодиране, неволно или нарочно дезинформиране и подслушване. В частност този тип информация може да се унищожава (изтрива) както и да се създава (презаписва). Това са свойствата, които са добре известни и които не се отнасят до доскоро неизвестната квантова информация, предавана чрез квантови корелации.

Информацията за всеки квантов обект на произволно място във вселената е комбинация от двата типа: класически и квантов. Квантовите корелациите предават мигновено базовата и „абсолютно истинната" част от информация, необходимо за архиважните задачи за поддържане на интегритета и целостта, в крайна сметка – на произтичащата от тях реалност, която е и собствено реалността.

Тя се допълва от класическа информация, която пътува във времепространството и се отнася до индивидуалността на обекта, подложена на конкурентни изкривявания от другите индивидуалности, борещи се за „място под слънцето": в случая – във вселената.

Такъв подход навежда към поразителен извод относно *естеството на досегашната ни физика: тя е имала повърхностен, епифеноменален характер, отнасящ се до повече или по-малко случайни и несъщностни черти на битието. Едва с квантовата информация като физическа дисциплина може да повдигнем булото, обвивало самата реалност.*

Нека сега, с тези философски разсъждения наум, се обърнем към „парадокса" с „приятеля на Вигнер" и неговата връзка с мисления експеримент на Дойч. Думата „парадокс" е поставена в кавички – както и в случая с „парадокса" на Айнщайн, Подолски и Розен – защото такъв няма, а е налице само сблъсък с утвърдени, но в достатъчно широк контекст – безпочвени, предразсъдъци:

> *Естествено е да се запита относно ситуацията, ако не някой сам прави наблюдението, а кара някой друг да го извърши. Каква е вълновата функция, ако моят приятел погледне на мястото, където светването би могло да се покаже в момент t? Отговорът е, че информацията, налична относно обекта не може да бъде описана чрез вълнова функция. Би могло да се припише вълнова функция на съвместната система: приятел плюс обект и тази съвместна система би имала също така вълнова функция, тоест след като моят приятел е пог-*

леднал. Мога тогава да вляза във взаимодействие с тази смесена система, питайки моя приятел дали е видял светване. Ако неговият отговор ми даде усещането, че той е видял, съвместната вълнова функция от приятел + обект ще се промени в такава, в която те имат отделни вълнови функции (общата вълнова функция е произведение) и вълновата функция на обекта е ψ_1. Ако каже не, вълновата функция на обекта е ψ_2, т.е. обектът се държи оттогава насетне както ако е бил наблюдаван и не е било видяно светване. Обаче даже в този случай, в който наблюдението е извършено от някой друг, типичната промяна във вълновата функция се случва само когато някаква информация (да или не от моя приятел) е влязла в моето *съзнание. Следва, че квантовото описание на обектите е повлияно от впечатленията влизащи в моето съзнание* (Wigner 1967: 173).

Защо това положение на нещата се тълкува като парадокс проличава особено ясно, ако си представим едно безкрайно множество от „приятели на Вигнер", предаващи си един на друг информацията за определения резултат от декохеренцията на дадена суперпозиция от възможни състояния. Тогава тя ще се е случила „напълно" едва когато цялата вселена „научи", а „мълвата" се разпространи из всичките ѝ кътчета. Тъй като „приятелите на Вигнер" си съобщават вестта посредством обмен на класическа информация, то, първо, разпространението е ограничено от скоростта на светлината във вакуум и второ, всеки един от тях е свободен да „спести" част от информацията или да дезинформира. Така, от една страна, събитието се е случило, а от друга, би му трябвало милиарди години, докато се разпространи из вселената вестта за него, за да се е случило наистина. Най-сетне поради неволно или нарочно изкривяване на информацията за него по дългия ѝ път, то се оказва, че няма да се случи никога.

Видяхме, че тези всъщност не парадоксални, а очевидно неверни следствия се избягват с въвеждането на квантовата информация, която, първо, се разпространява „мигновено" (по-точно, скоростта на разпространението, ако можеше да се дефинира, би се оказала безкрайна, доколкото съответства на дискретни морфизми в пространството) и второ, не може да се „спестява" или изкривява, доколкото няма носител, на който да може да се въздейства за получаване на такива ефекти.

Един друг извод, който подчертава Вигнер, а преди него – плеяда основатели на квантовата механика, се отнася до „субективизма” или дори до „солипсизма” на квантовата механика:

> *Съществeният момент е не, че състоянията на обектите не могат да бъдат описани посредством координатите на положението и импулса (поради принципа на неопределеността). Важното е по-скоро че валидното описание посредством вълновата функция е повлияно от усещания, влизащи в нашето съзнание* (Wigner 1967: 173(footnote 6)).

Такава видимост или представяне на положението на нещата не са съвсем коректни и произтичат по-скоро от използването на неадекватен модел, зает в основата си от класическата философия. Ето защо необходимата фигура на наблюдател в квантовата механика, който верифицира едно състояние, установимо само за система, от която е част, и го съобщава на външен наблюдател, който по принцип не може да го осъществи, се тълкува като „субект”: човек, живо същество (котка, например) или дори просто само индивидуален предмет.

Що се отнася до солипсистката видимост, то тя се появява от единствено вътрешната за системата установимост на наблюденията, но заедно с това оказващи се универсално валидни.

Всъщност става дума за фундаментално свойство на квантовите системи, които „обективно и честно” си обменят мигновено квантова информация и в резултат на това целостта се запазва и на тази основа продължава да съществува ‘реалността’.

Така и в този смисъл наблюдението (или „усещането”, ако използваме термина на Вигнер) е съществена част от реалността, доколкото „доопределя” вълновата функция:

> *Беше споменато преди, че даже пълното знание на вълновата функция не ни позволява винаги да предскажем с определеност усещанията, които могат да се получат от взаимодействие със системата. В някои случаи, едно събитие (да се види святкане) е точно като друго (да не се види святкане)* (Wigner 1967: 171).

Наистина ситуацията е съществено различна спрямо класическата физика или познание изобщо, където субектът не съдържа част от знанието, а измерването е

„прозрачно". Измененията, които той може да внесе, са единствено по посока на неговото намаляване, изкривяване, „субективизиране".

В квантовата механика всяко възможното знание се отнася само до системата от обект и наблюдател („субект"), но е изключено по принцип – например поради съотношенията за неопределеност – да се отнесе до един класически разбран „обект сам по себе си".

Така вълновата функция представлява наистина универсалното знание, валидно за всеки наблюдател, но то е непълно (разбира се, не в смисъла на Айнщайн).

Така подхожда и Албърт, за да въведе и изследва квантово-механичния автомат.

13. Квантово-механичният автомат на Албърт

> *Идеята е … да се тълкува квантово механичната вълнова функция като* по-малко от пълно описание на света. *Идеята е, че нещо* допълнително *има нужда да се добави към описанието с вълнова функция, нещо което може най-общо да бъде мислено като* избирането между *двете условия, напластени тук, нещо, което може да се мисли като нещо,* бележещо *едно от тези две условия като уникално,* действително*, резултат от измерването, което води до него* (Albert 2003: 143).

Знанието, въплътено във вълновата функция е непълно, тъй като в него отсъства конкретният избор на точно едно от суперпозиционните състояния, което ще направи наблюдателят чрез самото свое наблюдение. Същността на неговия избор все пак обаче е „обективна": така се фиксира определен момент от времето, в който именно и определящо е направено наблюдението.

Най-сетне може да се допълни, че наблюдателят в квантова система разширява релативистката инвариантност включително и спрямо наблюдатели „движещи се с безкрайна скорост", тоест свързани с отправни системи, които се получават от изходната чрез дискретни морфизми. В случая обаче ние се интересуваме или постулираме – и дебело подчертаваме! – ***дискретния*** *характер на прехода от вътрешно наблюдение (познание) на системата към съобщаването му навън*.

В светлината на изложеното отново можем да поставим следния въпрос: доколко „професор Х, член на Кралското научно дружество" е възможно да „спести" информация, макар и за целите на експеримента? Алтернативите биха се основава-ли на това, какъв е характерът на „спестената" информация: квантова или класическа? И после, на кой от двата типа или на комбинация от тях се основава предложеното от Дойч емпирично разграничение между многосветовата и „Копенхагенската" интерпретация?

Доколкото се използва цитираната вече аксиома 4, постулираща отсъствие на сдвоени състояния, целият мислен експеримент се основава изключително на разграничаване посредством класическа информация. Поради същата причина „спестената" от професор Х информация може да е само класическа и експлицитното ѝ определение ясно показва, че е такава: точно един бит информация за случилото се при измерването на двете възможни състояния. Тя и не може да бъде друга, доколкото само класическа информация може да се „спести". Тогава, доколкото класическата информация има вторичен или епифеноменален характер, а разграничението лежи в нейната област, естественото е да се предположи, че то притежава същите характеристики.

Следвайки информационните интенции на Чейтин към теоремата на Гьодел, можем да се запитаме какъв вид е информацията, която предава ключовото твърдение, което „твърди" собствената си недоказуемост. Доколкото по време на формулиране и доказателство на теоремата квантовата информация все още не е била известна, то очевиден е изводът, че имплицитно се има предвид да е класическа.

С термина, който въведохме, това твърдение е от типа „снемане", с една съществена особеност: то твърди не собствената "изчислимост" или доказуемост (което по теоремата на Мартин Льоб (Löb 1955) не поражда проблеми), а обратното. Бихме могли да тълкуваме особеното положение на теоремата на Гьодел, от чиято валидност следва нейната неразрешимост, като свидетелство от противното, че предположеното в основата на доказателство твърдение не съществува.

Действително, то може да се формулира само като твърдение, предаващо класическа информация, т.е. фигуративно казано, „способно да лъже". Неговият квантово-информационен аналог е тъкмо единствената възможна „неподвижна точка", гарантирана от теоремата на Льоб. Тогава се оказва, че причината за експлицираната в хода на настоящото изследване неразрешимост на теоремата се основава на квантовата информация и в нейните термини означава просто, че квантово-информационен негов модел не съществува[8], макар че класически-информационен има. Появяващата се неразрешимост следва от факта, че във формулировката и доказателството на теоремата не се определя за какъв вид информация става дума: теоремата е валидна за класическа и невалидна за квантова информация. Заради шегата, можем да кажем, че тя е неразрешима като „Шрьодингеровата котка"; намира се в суперпозиция от състоянията: валидна (жива) и невалидна (мъртва).

Нека сега преминем към модела на Албърт на квантово-механичния автомат, вече споменаван многократно по-горе:

> *Описан е автомат, чиито състояния са решения на квантово-механични уравнения и са разгледани възможностите на такъв автомат да „измерва" и да „знае" и да „предсказва" определени физически свойства. Изследва се какъв вид емпирично описание би произвел такъв автомат за* себе си*. Оказва се, че това описание би било съвсем нов тип, такова, което не е представено в конвенционалните теории на измерването* (Albert 1983: 249).

Още сега подчертаваме момента на „рефлексия": „емпиричното описание" на „автомат за *себе си*". Описанието на квантово-механичния автомат е следното:

> *Да предположим, че построим автомат с механизъм за вход и изход на информация с разнообразни инструменти за измерване на разнообразни физически наблюдаеми с вътрешна програма, която включва множество от правила за предсказване на поведението на някои прости физически системи (включително себе си), ако са дадени начални условия и които сами работят в съответствие със законите на квантовата механика. Тази последната фраза значи, че всяко възможно състояние на този автомат е вектор в някое квантово-механично хилбертовото пространство и че всеки вектор в това пространство е възможно състояние на този автомат (състояние, в което автоматът предсказва някакво отделно нещо, например, да бъде вектор в това пространство; и състояние, в което се* предсказва *някакво друго нещо ще бъде ортогонален вектор), и че всяко измеримо свойство на този автомат* (това, което *се предсказва*

[8] По формулирания от Дойч принцип на Чърч – Тюринг не може да има и физически процес, който да служи като модел или да се моделира по този начин. Съществуването на класически-информационен модел следователно е „физически погрешно", в смисъла, че такъв физически процес няма. Мимоходом отбелязваме тази теза, която изисква много по-подробно обсъждане.

например) ще съответства на някакъв ермитов оператор в това пространство, и че всеки такъв оператор може по принцип да се измери; накратко, че автоматът е във всички отношения квантово-механичен обект (Albert 1983: 249).

Нека сега сравним квантово-механичния автомат на Албърт с машина на Тюринг, помнейки за своето подозрение към последната за антропоцентричност и надеждата си тя да се преодолява от квантовото изчисление. Всяко състояние на машината на Тюринг е последователност от нули и единици (не непременно крайна), а на Албърт – последователност от комплексни числа (също така възможно безкрайна). Всяка клетка на машината на Тюринг представлява един бит: така и всяко комплексно число от вектора на състоянието на квантово-механичния автомат може да се разгледа като клетка, която съдържа кюбит (т.е. квантов бит).

Строгото определение на кюбит е малко по-различно: той съответства на две комплексни числа, нормирани по модул единица, и е изоморфен на двайки точки вътре във и на повърхността на тримерно единично кълбо. Лесно е да се забележи, че съществува едно-еднозначна нормираща процедура, която превръща всеки вектор на състоянието в еквивалентна поредица от кюбитове.

И така, състоянието на машината на Тюринг е едно двоично число, поредица от битове, докато състоянието на автомата на Албърт е квантово число, поредица от кюбитове. Сравнението може да се сведе до съпоставяне на елементарните клетки: бит с кюбит. Битът кодира една двоична цифра и е най-простият случай на крайно позиционно кодиране, докато кюбитът в общия случай кодира една „безкрайна цифра“, тъй като всяка точка от тримерната единична сфера съотвества на (или дори нправо е) една такава и различна „цифра”.

Оттук веднага е очевидна една хипотеза относно естеството на причината за свойствата „в повече” на квантово-механичния автомат в сравнение с този на Тюринг: в играта е въвлечена безкрайността, още на равнище „цифра”. Така всеки кюбит, т.е. единичната клетка на автомата на Албърт, може да кодира посредством безкрайното множество от цифри самото свое собствено състояние, т.е. съвкупността от безкрайно кюбитове. В случая се експлоатира фундаменталното, понякога използвано като дефинитивно, свойство на безкрайни множества: да са еквивалентни (в смисъла на равномощни) на свое същинско (необходимо също безкрайно) подмножество (в случая – отделният кюбит, който кодира и така „знае” състоянието на целия автомат).

Следователно деантропоморфизирането на машината на Тюринг се осъществява по прост начин и напълно според очакванията на множество философски учения: чрез преодоляването на крайността в безкрайността. Нека сега мислим за човешкия мозък: той би могъл да бъде квантов компютър и въпреки че несъмнено винаги е във владение на конкретен човек, неговото познание парадоксално да бъде деантропоморфизирано, т.е. да не се използва модела на крайното изчисление, на крайността за неговото представяне. По-друг начин казано, за да достигне до познанието на своя мозък, човекът следва да се осмисля като безкрайно същество, един предикат обичайно запазван за „Бога”.

Това може да даде обяснение за своеобразното ограничение, което си налага сам Албърт в своето изследване:

> *Няма да има опит тук да се реши дали обичайните машини или компютри, или мозъци са такива обекти (определено, те* могат *да бъдат, доколкото знаем); въпросът е: какво става, ако са? Или: какви са следствията от описването по този начин? Или: ако предположим, че следваше да построим такъв обект (а със сигурност можем да си представим, че правим това), как би се държал?* (Albert 1983: 249).

Макар квантовият свят да е отдавна известен със своята чудатост, все пак сега отново успява да ни изненада, този път с неравнопоставеността на вътрешната и външната позиция; или доколкото мислим за квантовия автомат като своеобразен субект – на „субективната” и на „обективната”: на знанието му за себе си и знанието за него отвън:

> *Така има нещо субективно … относно способността на първия автомат да бъде в положение да предсказва … ; защото тази способност зависи не само от* структурата*, но също така и от това,* кой от тях *е, от неговата* идентичност*. Или бихме могли да го поставим по този начин: има комбинации от факти, които могат по принцип да се предскажат от един автомат* само относно себе си (Albert 1983: 251).

В хода на предшестващото изложение вече многократно се позовавахме на това необикновено свойство. Сега вече ще се опитаме да вникнем в неговата същност, какво го предизвиква, т.е. да обособим необходимото и по възможност неговото достатъчно условие.

Очертават се два подхода за неговото осмисляне, които – възможно – се съчетават в някаква доста далечна перспектива: теоретико-множествен и логически. От теоретико-множествена позиция се обръщаме към неравнопоставеността на кодирането на безкрайно множество в собствено подмножество и в някакъв външен произволен клас, за който в общия случай не може да се твърди, че е множество, нито че аксиомата за избора може да действа върху него. От логическа гледна точка трябва да се отнесем към факта, че пропозицията, твърдяща доказуемостта на своето отрицание, както и твърдящата недоказуемостта му, не са „неподвижни точки” в очевидния смисъл, който всяко самореференциално твърдение въвежда, т.е. неподвижната точка на изображението на твърдението или отрицанието в себе си или своето отрицанието.

„Пропозициите” тук се интерпретират „квантово” в следния смисъл. Всяка класическа пропозиция може да се кодира като двоична лента от клетки и съответно да се произведе от машина на Тюринг; пропозициите, обаче, които ние имаме предвид са произведени от автомата на Албърт. Следователно те съдържат вместо двоични променливи такива с безкрайно много стойности в общия случай.

Нуждаем се остро от тяхна интерпретация в термините на класическата логика. Това, че обсъждането ни е в контекста на Гьодел и неговите подходи, ни навежда към това да ги тълкуваме, поне първоначално, като включващи Пеанова аритметика. Склонни сме да мислим, че те трябва да са необходимо непредикативни (самоференциални), т.е. да твърдят неща относно самите себе си, на следното основание: те трябва да присъстват и от двете страни на формулата за гьоделовото номериране, което може да е изпълнено само ако гьоделовият им номер е безкраен.

С това обаче бихме нарушили едно-еднозначността на гьоделовото кодиране: всички твърдения от такъв тип биха имали „един същ” безкраен номер, но все пак би било възможно да се разграничат по ординално число, което винаги ще бъде трансфинитно. Тогава всяко несамореференциално твърдение ще има самореференциален двойник с трансфинитен гьоделов номер: това, което първите твърдят за друго, вторите твърдят за себе си. Що се отнася обаче до валидността, те са ограничени да твърдят единствено собствена си валидност (пропозициите на Хенкин). Те не могат да твърдят нищо относно собствената си невалидност (пропозициите на Гьодел), нито за валидността на своето отрицание (пропозициите на Йерослоу), нито пък за невалидността му (пропозициите на Роджърс).

Нека сега по маниера на Гьодел включим „в играта" аксиомата за редуцируемостта или за екстензионалността, имайки предвид при втората разясненията погоре относно амбивалентността на включването на самото множество като елемент на себе си. Според тях замяната на самореференциалното твърдение с трансфинитен гьоделов номер с несаморефернциално твърдение с финитен гьоделов номер е допустима. С други думи: всеки квантов компютър може да се представи като машина на Тюринг и следователно не може да сметне нищо в повече от нея.

Очевидно бихме могли да „спасим" квантовия компютър като изключим тези две аксиоми и съответно се отървем от гьоделовските типове неразрешимост. Но нашата (засега само) хипотеза е, че дори да ги запазим може да покажем неразрешимостта на самата гьоделовска неразрешимост.

За целта трябва само да приложим тези аксиоми, „обратно" на описания маниер. Как точно? Присъединяваме финитния гьоделов номер на т. нар. първа теорема за непълнотата, твърдяща съществуването на неразрешими твърдения. Образуваме гьоделовия номер на нейния трансфинитен двойник чрез просто добавяне като множител на символа за най-малкото трансфинитно ординално число. Той ще твърди – според даденото по-горе определение на описаната процедура – същото за себе си: т.е. собствената си неразрешимост.

Нашият основен проблем е: следва ли от валидността на Гьоделовата теорема валидността на самореференциалния ѝ двойник с трансфинитен гьоделов номер.

Забавно би било отново да приложим аксиомата за редуцируемостта или за екстензионалността, но този път в „правата посока": тогава е законно да заменим твърдението за собствената неразрешимост с това, че други твърдения са неразрешими. Но ако сме го позволили за самата гьоделова теорема, то не можем да забраним същото и за останалите „набедени" за неразрешими твърдения: образуваме трансфинитния им двойник, който твърди неразрешимия предикат по отношение на самите тях и след това го „разрешаваме" чрез прилагане на аксиомата за редуцируемост или екстензионалност, при което на други твърдения може да се припише неразрешимият предикат и те вече не са неразрешими. След двукратно преминаване „под дъгата", т.е. извършвайки преход към самореференциално и обратно към несамореференциално твърдение, боравейки със съответното твърдение с трансфинитен гьоделов номер и обратно с двойника с финитен гьоделов номер се оказва, че двете твърдения „А е неразрешимо” и „А е неразрешимото В” са еквивалентни. Но второто твърдение вече не е неразрешимо.

„Хватката” е в това, че за да образуваме самореференциалното твърдение, трябва да експлицираме неразрешимостта като предикат, с други думи, да заменим екстензията на неразрешимостта с нейната интензия, с което и след завръщане в екстензионалната формулировка неразрешимостта се оказва разрешена. С други думи, възползвахме се от амбивалентността на аксиомата за екстензионалността, която беше обсъждана по-горе. Балансирането „по ръба на острието” чрез едновременно използване на аксиомата за редуцируемостта и за екстензионалността може също толкова коректно да се използва като „нож с две остриета”, за да се докаже отсъствието на неразрешими твърдения.

Съмненията в коректността на описаната процедура могат да се съсредоточат в два пункта: имаме ли право да прилагаме „в обратна посока” аксиомата за редуцируемостта и за екстензионалността; имаме ли право да добавим символа за най-малкото трансфинитно ординално число при образуване на Гьоделов номер.

По първия въпрос: да допуснем противното, т.е. че има твърдения, които не могат да се отнесат към себе си[9]: чисти мета-твърдения и такова е напр. т. нар. първа теорема за непълнотата на Гьодел. Тогава следва, че машината на Тюринг може да сметне неща, които квантовият компютър не може. Това е в очевидно противоречие с принципа на Чърч-Тюринг, както е формулиран от Дойч. Също и логически такава хипотеза може да се опровергае: съществуването на чисти мета-твърдения противоречи на аксиомата за редуцируемостта в права посока, тъй като биха били нередуцируеми, т.е. до твърдения.

По втория въпрос: множеството на естествените числа кодира множеството на естествените числа плюс добавен символа за най-малкото трансфинитно ординално число и след като разполагаме с първото, разполагаме и с второто.

[9] Забележете, че не става дума дали отнесени към себе си са истинни: например „има жълти предмети“ и „твърдението, че има жълти предмети, е жълто“; второто твърдение е неистинно. Така ние само образувахме твърдението за неразрешимост на Гьоделовата теорема в обсъждането малко по-горе, но не сме твърдели неговата истинност, тъй като посочените съображения не зависят от това. С други думи можем да редуцираме както истинно така и неистинно твърдение; аксиомата за редуцируемостта не е ограничена до истинни твърдения.

14. Идентичност: вътрешен и външен наблюдател

След това доста обширно отклонение нека се върнем отново към непосредствения проблем за логическото тълкуване на особеното свойство на неравнопоставеност на външната и вътрешната позиция, наричано и „идентичност" или даже „субективност" на квантовия компютър. Нека подходим така:

Каквото и да е състоянието на другия компютър, за него този компютър не може да знае нищо по силата на това, че нито пропозицията на Йерослоу, нито пропозицията на Роджърс не е неподвижна точка, т.е. не може да е валидна и за двата компютъра. По друг начин казано, каквото и да е становището на този компютър за състоянието на другия, то със сигурност е невалидно. Единственото възможно твърдение, валидно и за двата компютъра, е, че единият може да сметне нещо (пропозицията на Хенкин), но другият няма начин да узнае кое е то, колкото и да се „мъчи", докато първият не му го съобщи. Освен това пропозицията на Гьодел, а именно, че този компютър не може да сметне нещо, също не може да е универсално валидно и за двата.

Конституцията на вселената като съставена от много (или по-точно от един в множество ипостаси) квантови компютри ни се представя така: това, което сметне всяка негова част, е универсално валидно; универсално валидната информация се представя от частта „изцяло и честно" посредством квантовите корелации и то мигновено се усвоява от цялата вселена. Нищо друго не е универсално валидно. Това е механизмът, по който вселената запазва своята цялост и по който се формира реалността.

Другият възможен подход за изясняване на неравнопоставеността на вътрешната и външната позиция е теоретико-множественият. Сблъскваме се със следния въпрос: след като множество, равномощно на свое същинско подмножество, е необходимо безкрайно, дали това е и достатъчно условие. Фактът, че понякога това свойство се използва като аксиоматична дефиниция на безкрайно множество, свидетелства, че такова становище е налице. С други думи, всяко безкрайно множество съдържа свое същинско безкрайно подмножество. От интересуващата ни гледна точка това означава, че всяко безкрайно множество се състои предимно от безкрайни подмножества, тъй като безкрайното подмножество на свой ред съдържа свое безкрайно подмножество: между крайно и безкрайно преходът е качествен и в този смисъл ще го тълкуваме като дискретен. Тогава обаче не е възможно да имаме най-малък трансфинитен ординал, тъй като за всеки трансфинитен ординал съществува строго по-малък, също трансфинитен, поради горното. Обратното, ако приемем най-малкия трансфинитен ординал, необходимо съществува безкрайно множество, което не съдържа свое безкрайно подмножество: именно на него съответства най-малкият трансфинитен ординал. Виждаме, че това е още един пункт, в който конструктивисткият и актуалисткият подход към безкрайността се различават.

Добре, но ако приемем и приложим аксиомата за избора към множеството от всички безкрайни подмножества на дадено безкрайно множество, то в него ще може да се установи добра наредба и следователно ще има най-малък елемент. Невъзможно е да притежава свое безкрайно множество, тъй като то би било елемент на множеството от всички безкрайни множества на даденото и заедно с това по-малък. Виждаме, че след приемане на аксиомата за избора конструктивисткият и актуалисткият подход към безкрайността – най-малкото в този пункт – се оказаха отново примирени.

15. Относителност по Скулем

Пак „добре", но след като сме приели аксиомата за избора, то по типа разсъждения, въведени от Сколем при обсъждане на неговия прочут „парадокс" (Skolem 1922; Пенчев 2011), всяко множество има външна област, която не е (непременно) множество и към която следователно аксиомата за избора не може да се приложи.

Нека сега този така набелязан ход на теоретико-множествени разсъждения интерпретираме „квантово". *Дискретният* преход между крайност и безкрайност, видян актуалистки, и конструктивисткото *непрекъснато* броене между тях (един своеобразен вълново-корпускулярен дуализъм на дискретно и континуално) се оказват примирени чрез аксиомата за избора (своеобразен теоретико-множествен аналог на измерването в квантовата механика). Чрез нея обаче възникна необходимата неравнопоставеност на вътрешната позиция на множеството, в която аксиомата за избора, „измерването", е налице, и външната – в която отсъстват в общия случай.

Това ни позволява да вникнем още по-дълбоко в начина на пораждане на неравнопоставеност на вътрешно и външно в квантовата механика. Причината се корени в естеството на самото измерване или наблюдение: те ограничават и отделят една област, в която са валидни, чрез което тя получава статута на цялост, на тоталност, от една страна, противопоставена на външната област, от друга, в известен смисъл еквивалентна в това си качество на самата универсална тоталност, каквато е вселената. Тази област може да се „нареди добре” благодарение именно на това, че възможността за наблюдение, измерване в нейния обхват е винаги валидна.

Измерването и наблюдението в този смисъл, макар и да прохождат от антропоморфната представа за човешките измерване и наблюдение, всъщност сега полагаме като произтичащи о̀т – и може би дори еквивалентни на̀ – самото ограничаване и разграничаване на дадена област, чрез което става възможно и различаването на външно и вътрешно и тяхното неравнопоставяне. Вътрешно и външно още онтологично нямат еднакви свойства, но заедно с това физическите закони навярно все пак остават инвариантни спрямо трансформацията, която разменя местата на вътрешно и външно. Тази хипотеза може да се изрази с други думи: вътрешно и външно не са свойства, а двете относими на единно и дори напълно рефлексивно отношение. В рамките на шегата можем да си позволим да изразим положението на нещата с такава парафраза на прочутата сентенция: окото, с което ние наблюдаваме света или вселената, е окото, с което те ни наблюдават нас. С други думи, нашето наблюдение върху тях е еквивалентно на тяхно наблюдение върху нас. Това обаче можа да стане ясно едва когато успяхме да се доберем до квантовия свят:

> *Ако квантово-механичният автомат следваше (по един особен начин) да погледне на себе си и да измери себе си да създаде описание на себе си, това описание би било различно, не само по съдържание, а по* естество, *от всяко описание, което ми могло да се създаде на външен обект; и такова положение на нещата като това няма прецедент или аналог сред класическите автомати* (Albert 1983: 252).

По-горе вече обсъдихме, че както „многосветовата”, така и „Копенхагенската” интерпретация еднакво могат да служат за основа на квантовия компютър, както и възможността човешкият мозък да е в един или друг смисъл „квантов компютър”:

> *Не може да се мисли за такива неща без да се мисли за многосветовата интерпретация на квантовата механика (да го кажем по друг начин: не може да се зададе такъв въпрос без дълбоко в ума да се зададе един, по-труден; дали такъв автомат би могъл да бъде модел на нашия* собствен *емпиричен опит). Нека се ограничим за момента да отбележим, че вътре в тази интерпретация каквото и да се каже тук за способностите на автоматите да предсказват не-*

щата трябва да бъде също така вярно за нашите собствени способности да знаем *неща* (Albert 1983: 252).

Досега предполагахме или обосновавахме, че квантовият компютър (и човешкият мозък) може да извършва нещо в повече, което е недостъпно за машината на Тюринг. Следва вече да се опитаме да го посочим явно. То изглежда свързано с функцията на избор, гарантирана от аксиомата за избора, както и с разпознаването на образи. За целта ще дадем две различни формулировки на аксиомата за избора, втората от които – по-силна и която ще свържем с квантовото изчисление, за да можем да прехвърлим необходимия мост между понятието за случайност и това за алгоритъм и така да обосновем видовата специфика на квантовия:

1. От всяко множество може да се избере елемент.

2. От всяко множество не само може да се избере елемент, но може повторно да бъде избран същият елемент.

16. „Разпознаване на образ", формализирано като рекурсивна функция

Ако вторият, усилен вариант на аксиомата не е валиден, ще говорим за „случаен избор в собствен смисъл". Избора във втория случай пък ще наричаме разпознаване на образ, както и съответната функция.

Това, че функцията на избор е нерекурсивна в общия, т.е. в първия случай, изглежда очевидно. Такава ли е обаче и „разпознаването на образ", ако приемем за дадено, че случаен избор веднъж е осъществен? С други под „разпознаване на образ" ще се ограничим само до усилването при втория вариант. Склонни сме да мислим, че тя е тъкмо общорекурсивна. Тук под „склонни сме да мислим" имаме предвид следното. Такова твърдение е със сигурност неразрешимо чрез машина на Тюринг, но е доказуемо от квантов компютър по отношение на себе си. Тоест един квантов компютър може да докаже, че е квантов компютър, но това е от типа твърдения за идентичност и може да се съобщи, но не може да се потвърди независимо извън квантовия компютър. Ако използваме метафората за „китайската стая", наличието на квантов компютър в нея не може да се установи чрез предаване от нея на каквато и да е класическа информация, но се гарантира от неизбежно предадената квантова информация.

Наистина „разпознаването на образ" се възползва единствено от оператора за минимизация, който тъкмо разграничава примитивно рекурсивните функции от частично рекурсивните, но бива постулиран универсално, т.е. удволетворява изискването за общорекурсивни функции.

Това ни навежда да дадем едно друго определение на „разпознаване на образ", като изкажем и хипотезата, че е еквивалентно на даденото. „Разпознаване на образ" е всяка общорекурсивна функция, за която всяка съответна частично рекурсивна функция, не е примитивно рекурсивна. Използвахме посредничеството на частично рекурсивните функции, понеже „разпознаването на образ" по определение не е примитивно рекурсивна.

А как стоят нещата от философска гледна точка? Изглежда необходимо условие за „разпознаването на образ" – доколкото тя се определя именно като общорекурсивна функция – е разпознаващото, каквото е да е то, да разпознае себе си, което е в състояние да направи само квантовият компютър (тъй като един негов кюбит може да представлява едно-еднозначен модел на самия него). В частност именно поради това може да разреши непосилния за машината на Тюринг проблем дали ще спре. Обратно, машината на Тюринг може най-много с различно приближение *единствено да имитира* разпознаването на образ, тъй като тя необходимо не може да разпознае себе си.

Оттук машината на Тюринг няма идентичност, тя е просто инструмент, разширение на човешката идентичност, докато ***квантовият компютър*** *ще я притежава,* ***ще бъде „Аз"****.* Свойството на идентичност, т.е. да си „аз", е такова, което е само иманентно, то може да се твърди от система за себе си, но не и за друга. То не може да се удостовери чрез предаване на каквато и да било класическа информация, а само чрез квантова. *Идентичността* обаче не е уникално свойство на човека, то е *фундаментално свойство на света, изисквано от неговата квантова природа*. *То лежи в основата на единството на битието, от какво единство възниква реалността*.

Въоръжени с тези твърде важни изводи, нека преминем към другата статия на Албърт, в която той обсъжда вече въведения в първата статия квантово-механичен автомат от по-широка и философска гледна точка.

17. Квантовият компютър като „котка на Шрьодингер" и „приятел на Вигнер"

Има някои прочути стари истории относно суперпозицията, истории като историята на Шрьодингеровата котка и историята на приятеля на Вигнер, кои-

то започват с предположението, че всяка физическа система в света (всяка система: електрони и атоми, и измерващи уреди, и котки, и хора) е квантово-механична система. Това, което се случва в тези истории е, че някой макроскопичен 'наблюдател' (котка, да речем, или приятел, или просто измерващ уред) взаимодействат с някаква микроскопична система (електрон или атом, може би) и завършва или трябва да завърши според законите на квантовата механика с някое твърде странно обстоятелство. Измерващият уред попада в суперпозиция на едно състояние, в което този уред показва, че някакъв отделен експеримент има някакъв отделен резултат и друго състояние, в което този уред показва, че този уред има друг, несъвместим резултат; приятелят попада в суперпозиция на състояния, в които има някакво отделно становище и други състояния, в които има друго, несъвместимо становище; а котката (най-лошото от трите!) попада в суперпозиция на състояния, в някое от които е жива и в други от които е мъртва! (Albert 1987: 577-578).

В тази последваща статия Албърт въвежда нов тип „странно обстоятелство": макроскопичната система, разгледана като квантова, извършва измерване върху себе си:

Искам да добавя нов обрат към тези истории; обрат, при който, в самия край на тези истории, когато онези странни обстоятелства тържествуват, котката или приятелят, или измерващият инструмент извършва известно множество от експерименти върху себе си*. Оказва се, че нещо става, нещо, което никога преди това не е се е въобразявало възможно в квантово-механичната теория на измерването* (Albert 1987: 578).

Накрая на своята работа, в бележка под линия (10) Албърт отново подчертава:

Да напомним, че нашата предпоставка *е, че историите на котката и на приятеля, историите, които пораждат уравнението,* не *са преувеличени. Ако това е така, тогава корелациите точно описани в текста, корелациите от вида, описан точно под уравнението, са всичко това, че може вероятно да следва това 'знаене' на A и $B^{(1)}$* (Albert 1987: 582).

Така има нещо субективно, сякаш, относно способността на първия автомат да е в положение да предскаже едновременно и A, и $B^{(1)}$ (или за втория да

> *бъде някога в положение да предскаже и А, и $^2B^{(1)}$); защото тази способност зависи не само от* структурата *на автомата; но също така и от това,* кой от тях е той, *от неговата* идентичност*. Или бихме могли да го кажем по този начин: има известни комбинации от факти, които могат по принцип да се предскажат от един автомат* само за себе си *(Albert 1987: 582-583).*

> *Мислейки за автомати, а не за котки и хора, по въпроса се пролива нова светлина. Бихме могли по принцип, преди всичко, да построим* автомат (макроскопичен *автомат, такъв, който се разхожда наоколо, който говори английски, такъв, за който би изглеждало естествено да се припишат умствени дейности), вътре в който* информацията *се съхранява и обработва в* микроскопични *физически системи: системи, които са* необходимо *квантово-механични* (Albert 1987: 584).

Това е добър повод да се обсъди следният въпрос: какво е физическото достатъчно условие за поява на „идентичност" в горния смисъл, която сме склонни да приемем като разграничителен белег на интелекта, бил той естествен, или изкуствен. Албърт отговаря на този въпрос като подчертава, че свойството произтича от разглеждането на макроскопична система като квантова. Ще се опитаме да вникнем още по-дълбоко и по-точно в причината, давайки определен тип, а именно времево тълкуване на квантовите суперпозиции.

> *Все пак едно е сигурно: ако би трябвало да се окаже накрая, че старите истории за котката и приятеля не са преувеличени (а напълно може да се окаже, че не са преувеличени), тогава тази история може да се продължи … за един автомат* (Albert 1987: 584).

Заедно с Албърт следва особено да подчертаем, че единственото условие, което се поставя, един автомат, например машината на Тюринг, чрез което обаче се имплицира той да се подчинява на законите на класическата физика, заедно с това да бъде описан и като квантова система. В такова родово определение попада и човекът със своя мозък. Наистина, самата машина на Тюринг е изведена като модел на поведението на човека при изчисляване, а неговият мозък – бидейки физическа система, управляваща поведението – се подчинява и на квантовите закони:

Може би е полезно да се припомни на читателя, че не е било предположено относно детайлната структура на автомата в нашата история нищо *друго, освен че е в състояние (с произволни средства) да измерва и записва, и обявява стойностите на наблюдаеми като А и В*$^{(1)}$*, и че работи изцяло в съответствие със законите на квантовата механика.* Всяко устройство, каквото и да е, *което удовлетворява тези изисквания необходими (при подходящи обстоятелства) ще реализира уравненията. Ако в частност се окаже, че човешките същества действат в съответствие с квантово-механичните закони, то тогава с необходимост ще бъде възможно да се разкаже историята за горните уравнения за човешко същество (или по-точно, за човешко същество, съоръжено с измервателни уреди за А и В*$^{(1)}$*).* (Albert 1987: 584).

Нека си послужим заради илюстрацията на идеята с „Шрьодингеровата котка”. Да приемем, че я наблюдаваме 20 секунди, от които 10 секунди тя е жива, точно след изтичането на 10-та секунда е настъпило фаталното събитие, което ще идеализираме да е протекло мигновено, и през останалите 10 секунди тя се е споминала … Това е печален обрат, но не се съдържа никакво противоречие или предизвикателство към класическите физически представи или здравия разум. Нека сега погледнем през очите на един невероятно муден наблюдател или обектива на фотоапарат, чиято експонация трае 20 секунди. Очевидно това, което ще се наблюдава в този случай, е суперпозиция на жива-и-мъртва котка.

По-нататък следва да идентифицираме нашия муден наблюдател физически. Това лесно може да се направи на основата на „четвъртото съотношение на неопределеност”, като добавим, че то нерядко се е поставяло под въпрос и че общата физическа картина се изгражда на основата на закона за запазване на енергията, която е несъвместима с него. Става дума за съотношението между енергия (маса) и време. То забранява „експонацията” за периоди по кратки от един критичен, обозначаван като период на аташираната дьобройловска вълна и който е обратно пропорционален на масата (енергията) на обекта. Така нашият муден наблюдател е достатъчно да притежава изключително малка маса енергия в сравнение с коя да е макроскопична система, дори да е прашинка. Такива са тъкмо квантовите обекти в собствен смисъл, напр. елементарните частици.

Тогава условието за „идентичност” на Албърт за макро система да се разглежда като квантова се оказва преобразувано в необходимото условие да са налице две времеви скали, чиито мащаби да се различават с десетки порядъци: една за макроскопичния и една за квантовия обект. Ще приведем доводи относно хипотезата, че това е също така достатъчно условие и ще изведем следствия от такава предпоставка.

Наистина, ако са налице две времеви скали, то можем да възстановим еквивалентен квантов обект, наблюдаван с макроскопичен уред, на основата на следната процедура. Въвеждаме посредством константата на Планк и впоследствие на тази за скоростта на светлината еквивалентни енергии и впоследствие маси за двете времеви скали. По-нататък построяваме за тях две време-пространства (пространства на Минковски). Накрая остава най-проблематичната част: да намерим достатъчно убедително правило за едно-еднозначно съответствие между събитията от всяка от двете времеви скали и обектите в съответното ѝ време-пространство. Това не се отнася до осите на времената, тъй като едната просто и тривиално се пренася в другата. Проблемът идва от намиране на основанието за изоморфизъм между тримерното евклидово пространство и стрелата на времето, евентуално разделена на три области: минало, настояще и бъдеще. Ограничителни условия биха били, че миналото е ограничен отгоре репер, бъдещето – също, но отдолу, а настоящето е отсечка с дължина, еднозначно определена от периода на дължината на аташираната дьобройловска вълна.

Проблемът вече е локализиран до това, че следва да намерим смислено обяснение за трите пространствени координати на обектите, които очевидно следва по разумен начин да обединят три времеви несъвместими времеви момента: точка от миналото, от настоящето и от бъдещето, които могат да се разглеждат като променливи. И освен това не бива да забравяме една четвърта времева точка, която е фиксирана за разлика от първите три.

Как бихме могли да намерим едно-еднозначна трансформация, която да примири синхронната пространствена картина с асинхронната времева, и то без да се нарушават изискванията, налагани от теорията на относителността или квантовата механика?

За да ограничим още малко възможните изображения от описания тип, ще въведем няколко допълнителни съображения:

Първото е следното. Настоящето е част от миналото и от бъдещето. Заедно с това едно събитие не се описва по еднакъв начин в качеството на принадлежащо съответно на миналото, на настоящето и на бъдещето. Необходими за това са *три* времеви координати. Освен че в общия случай са *три различни*, няма начин да се уточни, коя съответства на миналото, коя – на настоящето, коя – на бъдещето: никоя посока не е привилегирована и не може да се отличи от останалите.

Доколкото всяко едно от тези три времена принадлежи на настоящето те могат да се разглеждат като пространствените координати на точка от сфера с диаметър, равен на периода на дължината на аташираната дьобройловска вълна, която в случая на фиксиран обект може да се приеме за единица. По този начин освен пространствени координати, аташирани на събитие от дадена времева чрез посредничеството на константата на скоростта на светлината във вакуум, поставяме в едно-еднозначно съответствие един кюбит, който в общия случай е сдвоен (тъй като точката в общия случай не е само от повърхността на сферата, но и от вътрешността ѝ).

Веднага се вижда, че степента на сдвояването му произтича и зависи от различието между настоящето само по себе си и настоящето по отношение на миналото и на бъдещето. В последните два случая можем да приемем, че съответно миналото и бъдещето оказват влияние, което еквивалентно бива отразено чрез степента на сдвояване на дадения кюбит.

Граничният и частен случай на независимост на настоящето от миналото и от бъдещето съответства на отсъствие на сдвояване и всъщност той изчерпва съдържанието не само на класическата физика и специалната теория на относителността (общата теория на относителността е по-особен случай, изискващ специално обсъждане), но и на „класическата" квантова механика (т.е. без квантовата информация). Нещо повече, той представлява, метафорично казано, „екран", на който може да се проектират явленията на сдвояване, изучавани от квантовата информация (а може би и от общата теория на относителността след определена нейна интерпретация), и по този начин да се опишат еквивалентно като несдвоени плюс съответна корекция за въздействаща „сила", „поле", „калибровка" и др. под.

Естествен е въпросът дали цялата сегашна физика не се съдържа в този тип проекция и разбира се, дали не е квантовата информация, която поставя нещата на мястото му като заменя образите върху „екрана", аналог на стената на Платоновата „пещера", с действителността от вътрешността на кюбита, респ. – „извън пещерата"?

Второто допълнително ограничително съображение е следното. Нека сега включим концепцията и за вселената като квантов компютър, разбира се, съществено надвишаващ способностите на машина на Тюринг, тъй като може да реши проблема с „разпознаването на образ” в общия случай, т.е. да използва оператора на минимизирането като общорекурсивна функция. Поради това си свойство той може да разпознае и себе си в качеството на граничния, но все пак частен случай на разпознаване на образи. Мимоходом ще отбележим хипотезата, че може би е вярно и обратното. Всеки автомат, който разпознава себе си или с други думи – има „идентичност”, е интелект, т.е. може да разпознае всеки образ.

Но как следва да се формализира тази така определена способност за универсално разпознаване на образ? *Всеки случаен избор може да се повтори* и от това веднага следва – неограничен брой пъти. Тогава би се оказало – впрочем доста шокиращо, – че видимото постоянство на света е резултатът от работата на този вселенски компютър. Може да приемем, че той винаги изчислява съхраняването на собствената и вселената цялост и оттук – на реалността, продължаващото протичане на този „изчислителен” в твърде широк смисъл процес.

Тогава от тази така набелязана гледна точка можем да тълкуваме настоящето като един кюбит от безкрайната (в общия случай) поредица на квантовия алгоритъм, който *осъществява* реалността. За разлика от крайния бит на машината на Тюринг, той може да кодира вечността и целостта на вселената едно към едно. Казано по друг начин, на всеки такт на хипер-изчислителния процес, квантовите алгоритъм (т.е. квантовият софтуер) и дори всъщност самият квантов компютър (т.е. квантовият хардуер) се преконфигурират с оглед перспективите на протичащото изчисление и на текущо получения междинен резултат. Може да се предположи един принцип на минималното възможно преконфигуриране: тоест съществени изменения се правят в краен случай, а фундаментални – при екстремални или аварийни обстоятелства.

Третото и последно съображение е такова. Ако се нуждаем единствено от две времеви скали, които са с порядъци различни, за да конструираме квантов компютър (като не забравяме, че „конструираме” тук е употребено математически, тъй като квантовият компютър, както впрочем и машината на Тюринг, е само математически модел), то от това следват няколко твърде важни извода:

18. Две времеви скали и относителна формулировка на квантовата механика

Първият се отнася до факта, че е възможна относителна формулировка на квантовата механика в следния смисъл. Традиционното полагане на микроскопичен обект и макроскопичен уред може да се обобщи за два произволни обекта, чиято разлика в масите, респ. в периодите на аташираните дьобройловски вълни е аналогична на изходния случай, т.е. тя е десетки порядъци.

Вторият произтича от първия. Тази относителна формулировка може да се приложи по отношение на нашия обичаен макроскопичен свят, разгледан обаче по отношение на достатъчно големи космически мега-обекти, напр. нашата галактика, Млечния път, и целият формализъм на квантовата механика с изводите да се пренесат едно към едно. В частност това веднага обосновава постулата на Албърт да въведем квантово описание на макроскопичния света, според завета на „котката на Шрьодингер", „приятеля на Вигнер" и други знайни и незнайни квантови „парадокси", които всъщност се сблъскват с несъстоятелността на обичайните предразсъдъци, и да „преглътнем" новата порция квантови изводи, този път относно квантовия компютър.

19. Математизиране на историята

Третият извод също произтича от първия и обобщава втория. Няма вътрешно изискване квантовото описание да се ограничава до двойки физически системи в тесен смисъл. Например, твърде важен частен случай е двойката от обичайното време на нашите ежедневни действия, които добре осъзнаваме, което сега ще тълкуваме като „ускорената машина на Тюринг" спрямо бавното историческо време, въведено от школата „Анали" (longue durée, фр., а на английски: long term, long run), играещо ролята на отправен репер, „инерциална машина на Тюринг".

След подобно полагане можем да въведем „квантов компютър на историческия процес" и да тълкуваме последния в един напълно строг и научен смисъл в качеството на Хегеловия „Разум в историята", освобождавайки последния напълно от съпътстващите спекулативни, хипотетични елементи. Концепцията за „Разума в историята" се отчислява от „метафизичния", принципно неверифицируем философски инвентар, за да придобие стандартния за нашата епоха на качествена и може би и количествена теория, чиито предсказващи следствия подлежат на проверка.

За да преминем пътя от качествена към количествена теория за „Разума в историята", предстоят още няколко стъпки, които да позволят „математизиране на историята" в същностен смисъл, вместо повърхностния, акцидентален, който сега преобладава изключително в подобни начинания. Ще покажем, че реалните сега достигнати успехи в предлагане на релевантни математически модели за историческия процес имат една и съща обща основа и като такава може да служи тъкмо така въведен квантов „Разум в историята".

Ще отбележим три основни типа математически модела в историята, които понастоящем се използват *ad hock*, за да покажем, че всички те – а може би дори всеки успешен математически модел на исторически процеси – следват от възприетия квантов подход към човешката история, шокиращ само на пръв поглед. Става дума за противофактовия анализ на исторически процеси, моделирането посредством теорията на хаоса, уейвлет-анализа на количествено измерими или поне съпоставими показатели като времеви редове.

Всеки от тях експлоатира отделни (и различни) черти на квантовия подход. Противофактовият анализ може да се тълкува въз основа на файнмановска интерпретация на квантовата механика: тук – за една човешка история протичаща паралелно и виртуално по множество пътища, което позволява те да бъдат сравнявани помежду си чрез „приноса си за реалността": т.е. вероятността историята да е протекла по този път. Ако на мястото на дискретен морфизъм, каквито са квантовите, „с безкрайна скорост" на протичане във времето, поставим дисипативен процес, протичащ в реална среда „със съпротивление" , от една страна, но и поради това с може би голяма и дори все по-бързо нарастваща скорост, ала все пак крайна, от друга, то квантовият модел ще се превърне в модел от теорията на хаоса. Всъщност ние се интересуваме по-скоро, обаче, от прехода в обратна посока. Най-сетне, ако използваме квантовия подход, то той въвежда хилбертово пространство, като различните уейвлети са модификации на неговия базис в обобщен клас векторни пространства, в който хилбертовото пространство е най-простият елемент.

Към темата на третото заключение нека добавим и следното: обратно, съществуващият модел на интелект, т.е. човешкият, може да се тълкува посредством квантов компютър, като отново обичайното време на нашите ежедневни действия, които добре осъзнаваме, ще мислим като „ускорената машина на Тюринг" спрямо техния бавен квантов модел в мозъка, чиято бавност именно и ще е онази, която позволява осмислеността, целесъобразността, телеологичността на човешките действия. В частност по този начин може да се обоснове и релевантността (степента) на антропоморфното оприличаване и на историческия процес (този извод), и на физическия свят (т.е. предходният извод).

IV. ЧОВЕШКИЯТ ИНТЕЛЕКТ КАТО КВАНТОВ КОМПЮТЪР

20. Квантовият компютър като съвкупност от две машини на Тюринг и ускорена Тюрингова машина по Коупланд

Четвъртият извод се състои в това, че квантовият компютър изглежда еквивалентен на съвкупност от бърза и бавна машина на Тюринг. Бавната машина изпълнява метаоперации по отношение на (безкрайно по-) бързата. Един кюбит е съвкупността от операции на бързата машина – дори да е безкрайна, – разгледана като актуално завършена по отношение на бавната. Обратно, бавната машина може да се тълкува като машина на Тюринг, в която битовете са заменени с кюбитове, с други думи, във всяка клетка от лентата може да се запише не бит, а кюбит: резултат от работата на бързата машина, дори и тя да е необходимо да извърши безкраен брой операции за получаването му. Междинен случай е съвкупността от „инерциална” и ускорена машина на Тюринг, обсъждана от Коупланд (напр. Copeland 2002) и на която ще се отдели място по-надолу. Ако ускорението е безкрайно, получаваме квантов компютър в собствен смисъл, който може да се разглежда като идеализация на двойката инерциална и ускорена, когато „ускорението” на втората е достатъчно голямо, за да може да се приеме, че клони към безкрайност.

Нека вече се върнем непосредствено към описанието на квантово-механичния автомат, дадено от Албърт, и по-конкретно към въвеждащите определения и философски контекст, който по негово и наше мнение – видяхме по-горе – е релевантният:

> *Това е точно онова странно обстоятелство, в което котката и приятелят попадаха в онези стари истории. Състоянието на автомата тук е суперпозиция на едното състояние, в което автоматът предсказва, че A = a_1 и друго състояние, в което той предсказва, че A = a_2 и при което – независимо от това (тъй като E_A=0) – предсказанието е точно. (Може би това изисква известно обяснение. Какво може да значи да кажем, че, макар P_A и A самите не са добре определени в това състояние, предсказанието на автомата е, в това състояние, със сигурност, точно? Да се каже това се отнася до факта, че ако A и следваше някога да се измерят в това състояние, макар резултатите на тези две измервания сами биха били непредсказуеми, то* би могло *да се предскаже със сигурност, че резултата за P_A ще бъде* еднакъв *с резултата за A.)* (Albert 1987: 580).

Смисълът на „E_A=0” Албърт е изяснил по следния начин:

> *Така ще казваме за всяка наблюдаема А, за която E_A=0, че предсказанието на автомата относно А е точно и ще се ангажираме тук да определим какви наблюдаеми, в какви комбинации и при какви обстоятелства, могат да се предскажат точно от квантово-механични автомати* (Albert 1987: 580).

Означенията са следните: „наблюдаемата P_A е мярка за стойността *предсказана от автомата* за А” (Albert 1987: 579); тоест при точното предсказание: „P_A – A = 0” (Albert 1987: 580).

С $B^{(1)}$е означена наблюдаемата на съставната система (S+Au) от измерваната система S и автомата Au, която представлява предсказанието на автомата за А и че „автоматът е инструктиран да измери А и $B^{(1)}$ (и тук бива инструктиран да измери нещо относно себе си, относно своето собствено предсказание за А) и да направи предсказание относно резултата на последователните измервания на тези и двете” (Albert 1987: 581); „макар че А и $B^{(1)}$ са несъвместими, E_A и $E_B^{(1)}$ са и *двете нула*” (пак там).

Тук Албърт в бележка под линия (9) изяснява нещо много важно за нас: точно в какъв смисъл измерването на автомата е относно себе се. Затова ще я приведем изцяло:

> *Нека се отклоним за момент, за да бъде напълно ясно какво се има предвид като се казва, че автоматът … е измерил нещо относно* себе си *(или по-точно, нещо относно съставната система S+Au). Има два пункта. От една страна, автоматът е сам по себе си съставна система като човешкия мозък, да речем. P_A и $P_B^{(1)}$ се отнасят до отделни физически системи, отделни регистри памет, ако желаете, вътре в автомата. В хода на измерването, описано с горното уравнение, P_A първо стана съотнесено с А и после $P_B^{(1)}$ става съотнесено с $B^{(1)}$, последното бидейки наблюдаема на съставната система, състояща се от регистъра памет за А и от S.*

21. Еквивалентност на описанието чрез цялото и чрез частите

Сега в тази връзка ще се опитаме да подчертаем една особеност, на която обръща внимание и Албърт. Става дума за *еквивалентността на описанието чрез цялото и чрез частите.* Такова отъждествяване – ако бъде прието – има множество логически, мета-математически, онтологико-математически и физически следствия, за които думата „интересни” е твърде слаба. Ситуацията изпъква особено релефно, ако се предположи неадитивност на частите, каквато се наблюдава дефинитивно при явленията на сдвояване, изучавани от квантовата информация. Нека като илюстрация се опитаме да отговорим на въпроса, какъв е еквивалентът на ограничаването на степените на свобода на частите, ако те са пространствено обособени, при описание „от гледната точка на цялото”?

Единственият наблюдаем ефект ще бъде тъкмо ограничаването на степените на свобода. Според традицията на физиката такъв е прието да се приписва на потенциално поле, т.е. чрез действието във всяка точка от пространството, в която полето „съществува” (или казано математически – „е дефинирано”), на една хипотетична причина, наричана физическа сила. По-нататък, следвайки темелите на общата теория на относителността, всяко потенциално поле с механично действие се представя еквивалентно и принципно неотличимо като гравитационно. По обратния път можем да представим всяко гравитационно поле като сдвояване на неговите, чести, ако се премине от описание в термините на цялото към такова в термините на частите.

В контекста на нашето изследване по-скоро се интересуваме от мета-математическите и изчислителни интерпретации. Очевидно аксиомата за екстензионалността и за редуцируемостта биха се превърнали в невалидни що се отнася до общия случай, тъй като две множества с еднакви елементи могат да се отличават по „степента на сдвояване” между елементите или ще се наруши едно-еднозначното съответствие между интензия и екстензия на едно множество: и по-точно, на една екстензия (значение) ще съответстват множество интензии (смисли), произтичащи от различното цяло (контекст) във всеки един от тези случаи. В частност теоремите на Гьодел ще бъдат невалидни или ще изискват съществена преформулировка.

Но дори и при валидност на тези аксиоми, оставайки в границите на ръселово-гьоделовски тип разглеждане, нашата чувствителност вече е изострена за своеобразната „няма”, нулева или „потенциална” разлика между интензия и екстензия, между „смисъл” и „значение”. И тъкмо квантово-механичният автомат на Албърт е този, който ни „навира в очите” разликата: необходимо интензията съдържа, а екстензията не съдържа себе си. *Квантовият компютър „смята” интензионално*, а машината на Тюринг – екстензионално. Преведено на теоретико-множествен език това ще рече, че квантовият компютър е необходимо трансфинитният двойник на машината на Тюринг; той „разпознава образи" в общия случай, необходимо и достатъчно условие за което е, че разпознава себе се.

> *Това е странно състояние. Автоматът тук точно* знае*, той е в положение да обяви стойностите и на A, и на* $B^{(1)}$*. Да предположим, че следва да измерим* $B^{(1)}$ *и после A (редът е важен, не би работило в обратен ред) и после* $P_B^{(1)}$ *и* P_A*; тогава би излязло, че* $P_B^{(1)} - B^{(1)} = 0$ *и* $P_A - A = 0$*. Автоматът може да предскаже със сигурност и предварително резултатите от тези експерименти* (Albert 1987: 582).

Нека сега запомним важността на реда – в нашите термини, първо цялото, после *неговата* част – и с него наум вникнем в пасажа, който следва и чиито интенции и обобщения обсъждахме непосредствено по-горе:

> *От друга страна (и това е решаващата точка) фактът, че* P_A *и* $P_B^{(1)}$ *се отнасят до отделни физически системи, не значи, че тези две системи не могат лесно да бъдат скачени към по-обширна система (по-точно, както при това тук имплицитно сме ги* предположили *да бъдат скачени) по такъв начин както по функция, така и като системи за съхраняване за паметта на един и същ автомат. Да предположим, за да заострим аргумента, че въпросните автомати тук са човешки същества или нещо като човешки същества (тоест нещо, на което бихме могли да припишем ментални състояния). После аргументът, че фактът, че* P_A *и* $P_B^{(1)}$ *се отнасят до различни физически системи (различни неврони, да речем), не значи, че тези две системи не могат да бъдат скачени в по-обширна система (точно както невроните, както ги откриваме в природата, са скачени в мозъци) по такъв начин както по функция, така и като системи за съхранение на паметта на един и същи* разум*; и моментът на рефлексия ще потвърди, че цялото това скачване по никакъв начин не препятства физически процеси, които пораждат състоянието от уравнението (макар че скачването, на практическо равнище, може даже да изисква тези процеси да са твърде деликатни и сложни).*

Имайки предвид важността на реда, която запомнихме, се оказва, че външността и вътрешността на една система се третират различно. Ако добавим система отвън към дадена система, все пак ще отсъства знанието, което е налично в случая, когато първо е дадена съвкупната система и се обсъждат нейните подсистеми. Във връзка с това възникват два въпроса.

Първият е: дали това несводимо към сумата от частите знание за системата се изчерпва с тяхното сдвояване. Вторият е: след като Албърт не въвежда сдвояване на частите, какъв е източникът на сега обсъжданата неравнопоставеност между гледните точки на частите и на цялото. Изглежда, че тя е еквивалентна на отхвърляне както аксиомата за редуцируемостта, така и за екстензионалността, и следователно ръселово-гьоделовският тип „доказуема” непълнота е неизводим.

Отново можахме да се убедим, в съществуването на още един пункт на несъвместимост между концепцията за квантов компютър (а ние го тълкуваме и като математически модел на изкуствен интелект, заради формализируемото свойство да „разпознава образи”, в т.ч. – да разпознава и себе си) и теоремите на Гьодел:

> *Когато такова скачване се осъществи, тогава, макар и резултатният автомат да е съставна система и макар че компонентите подсистеми на този автомат могат дори (както в горното уравнение) да извършват сложни измервания помежду си, независимо от това има много ясен и непосредствен смисъл, в който паметите, съхранени в различни подсистеми, са всички* собствените памети на този единствен автомат *и в който, когато този автомат измерва наблюдаема като В* $^{(1)}$*, това е измерване на нещо относно* себе си (Albert 1987: 581-582).

Както ние, така и Албърт дебело подчертава, че *вътрешният и външният наблюдател* ***по принцип*** *знаят различни неща*:

> *Да разгледаме два автомата (автомат 1 и автомат 2), които описах погоре. Да предположим, че някакво бъдещо действие на първия автомат следва да се определи според твърд алгоритъм от резултатите на измерванията на А и В* $^{(1)}$*. Тогава първият автомат е в положение да предскаже това действие; но не е така за втория автомат, нито за кой да е друг. Така може да възникне в напълно* детерминистична физическа[10] *теория, че по принцип може да се построи автомат, който може да установява със сигурност своите бъдещи*

[10] В контекста Албърт има предвид детерминистичната интерпретация на квантова механика от Дейвид Бом. – Бел. моя, В.П.

действия предварително; макар да не може да ги установи никакъв друг автомат и никакъв външен наблюдател, каквито и да биха били, дори предполагайки, че могат да измерят с безкрайна деликатност и безкрайна точност. Нищо такова, доколкото зная, не е било допускано преди (Albert 1987: 584).

22. Наблюдател по Албърт и наблюдател по Айнщайн

Нека сега – макар и с цената на кратко отклонение – съпоставим така описания ‘наблюдател по Албърт’ с ‘наблюдателя по Айнщайн’. Натрапва се едно фундаментално различие: при Айнщайн вътрешният и външният наблюдател са равнопоставени; търси се физическото описание на света, което да е валидно за всички и за всеки един наблюдател. Вътрешният наблюдател, приравнен по айнщайновски с всеки външен, запазва само една, сякаш несъществена отлика: неговата относителна скорост е дефинитивно нула; той е по определение неподвижен спрямо себе си.

Наистина, от една страна, нулата е уникално число, от друга – тя е просто един елемент на множеството на реалните числа или на рационалните, споделящ съответно всички техни свойства. Очевидно, поради самата си основа принципът на относителността експлоатира тъкмо втория от така очертаните „подходи към нулата”. Следвайки непокътнати още заветите на Галилей и само видоизменяйки ги според новоустановени (постоянството на скоростта на светлината във вакуум) или отдавна известни, но пренебрегвани (равенството на „тежката” и „инерциалната маса”), Айнщайн продължава да смята еквивалентни неподвижността и движението. Може да се предположи или добави, че такава позиция е съвсем уместна само ако ограничим движенията до дифеоморфизми, т.е. с винаги еднозначно определена или определима крайна скорост.

Обратно, квантово-механичният автомат на Албърт пряко се противопоставя на това положение и естественото е да се предположи, че това се дължи на дискретния характер на квантовите морфизми. Изтъкнахме, че нулата, характеризираща по Айнщайн скоростта при неподвижност, е едно от реалните числа, но заедно с това уникална: тя е нулевият елемент на групата на събирането, една от двете групи, наред с тази на умножението, които характеризират полето на реалните или на рационалните числа.

Първият проблем с неподвижността при квантови морфизми идва от съотношението за неопределеност: тъй като скоростта е напълно определена (и това е дефинитивно валидно не само за неподвижна, но и за всяка инерциална отправна система), то пространствените координати са необходимо напълно неопределени. Обратно, да определим неподвижността чрез постоянство на пространствените координати: тогава скоростта на „абсолютно неподвижното тяло" е напълно неопределена. Съотношението за неопределеност изключва двете току-що дадени определения за неподвижност да бъдат заедно изпълнени: те са „допълнителни".

Ясно се вижда, че на едната времева скала – „бавната" или „собствено квантовата" – неподвижност няма и не може да има. С нея се прави избор на една определена квантова суперпозиция, „вълнова функция", но не и на една конкретна измерена стойност, която се установява от неподвижния уред: това са „бързите" времева скала или машина на Тюринг.

Спецификата на квантовия автомат, състоящ се все едно от две машини на Тюринг, изяснява – за разлика от класическия случай – защо вътрешната, „неподвижната" и външната позиция не са равнопоставени. Втората, бавната, собствено квантовата машина, служи като „репер" за определяне на вътрешно и външно: вече по отношение на нея. Така с чисто физически средства се оказва възможно да се въведе и „идентичност", и универсално „разпознаване на образи" (операторът за минимизиране като навсякъде дефинирана, т.е. общорекурсивна функция).

23. Субективност и интерсуебктивност формализирани

Сега ще покажем, че по този път може да се формализира не само иначе ревниво пазената от философите „субективност", но и „интерсубективността". За да поясним как, ще видоизменим леко „парадокса" като го заменим с „приятеля на недоверчивия Вигнер". Разликата е в това, че самият Вигнер също прави измерване и сравнява с полученото съобщение; естествено може да добавим, без да се внася съществено нов момент, че и Вигнер информира приятеля си за резултата от своето измерване. Очевидно, в общия случай Вигнер и неговият приятел ще получат различни резултати и ще се информират за тази разлика.

Това ясно показва, че на „квантовата сцена" е необходимо да се разграничава собствено (от вътрешен наблюдател) от чуждо знание (от външен наблюдател) още на фундаментално равнище. Наистина, измерената и съобщена стойност от приятеля (външното знание) не съвпада освен като изключение с измерената от „недоверчивия Вигнер" (вътрешното знание) и това е принципно положение, що се отнася до квантовия свят.

Все пак от философска гледна точка можем лесно да опишем ситуацията „интерсубективно”. Приятелят на Вигнер разпознава образ (интерсубективно знание) и съобщава чрез *класическа информация или дезинформация* разпознатия образ (своето субективно знание). Възможността образът да се разпознае е валидна и за самия Вигнер, но не и самият субективно разпознат образ, тъй като „субектът” вече е друг. Въпреки това, фактът, че този образ е разпознат именно *като такъв и такъв от приятеля* (респ. от Вигнер в реципрочния случай), е все пак универсално знание, необходимо за съхраняване на целостта и образуване на реалността. Заради това то е необходимо да бъде предадено (тъй като според разглеждането по принцип не може да бъде възпроизведено), но мигновено и по начин, който да изключва неговото изкривяване. Тъкмо за последното е необходим каналът на квантовата информация, а и самата тя.

И така възможността за знание, но не и *собственото* знание, може да се предаде от един субект на друг субект. Въпреки това другият субект винаги може да възстанови чуждото знание като собствено и в общия случай – различно. Собственото знание заедно с това винаги се предава на всяка система, която включва знаещия субект в качеството на подсистема, като квантова информация, която е нефалшифицируема, не може да се подмени с дезинформация.

Ако обобщим, в „интерсубективността” също може да различим две равнища, да ги наречем външно и вътрешно. Външната интерсубективност се състои в предаване на възможността да се разпознае образ от един субект към друг субект, външен спрямо първия, при което самото собствено знание на първия, макар и да може да се съобщи, е невалидно за втория, но той може да го възстанови в качеството именно на собствено, но вече за себе си, т.е. за втория субект. Самото съобщение също може да е невалидно, да е нарочна дезинформация или деформация в хода на предаването.

Вътрешната интерсубективност се състои в предаване на самия разпознат образ от подсистема (субект) към системата (йерархично висш субект), и то в качеството на разпознат тъкмо от този субект. Това знание е универсално (т.е. за самата система като цяло) валидно, но като такова: като частното знание на този субект. То играе фундаментална роля за запазване целостта на системата и за формиране на реалността, която произтича от последната. Именно поради това то е невъзможно да се фалшифицира по какъвто и да е начин, т.е. да се подмени или изкриви, или дори да се забави.

Имаме сега вече възможността, а именно от така скицираната метаматематико-информационна основа, да разграничим битие от знание. Знанието е винаги повторение, разпознаване на образ, който обаче е *необходимо предварително наличен*. В такъв случай самото запазване, и то изобщо, в т.ч. и физическите закони, и реалността се осъществяват чрез особен тип фундаментално знание, предхождащо и независимо от досега известното ни ни знание, т.е това, което епродуцирано от единствено познатия ни тип субект: човека, т.е. от нас самите. За неговото въвеждане са необходими структури като квантовия компютър, в качеството на какъвто можем да приемем също и самата вселена и от чиято работа възниква реалността. Фракталните структури, които изобилстват в природата и може би в историята, са основани на неограничено повторение на една изходна последователност, която може да се разглежда като случайна, са свидетелство за дейността му.

От нашата сегашна позиция аксиомата за редуцируемостта или за екстензионалността получават естествена интерпретация на основата на разграничението между външен и вътрешен наблюдател. Така може да се построи аналог на Ръселовата (разклонена) йерархия на типовете:

> *Има естествена йерархия сред тези измервания. Определена категория от измервания (измервания на А, например) пораждат знание само за външни системи. Втора категория (измервания на* $B^{(1)}$*, например) произвеждат знание не само за тази външна система, но също така за знанието на автомата за тази система. Може да си представим трета категория (измервания на* $B^{(2)}$*, да речем), която произвежда знание за външна система, знание на автомата за тази система и знание на автомата за* $B^{(1)}$*; и може да си представим още такива категории. Могат да се изпишат състояния, при които един автомат има точно знание за безкрайност от наблюдаеми, които всички, по конвенционалната дефиниция, са взаимно несъвместими …* (Albert 1987: 583).

И така комбинирането на измервания между различни категории нито има нужда да се забрани – ако възникне подобна мисъл, следвайки аналогията с различните решения, предлагани от Ръсел за връзките между типовете, за да се предпазим от парадокси или противоречия, – нито да се постулира някаква тяхна сводимост към некомбинирани измервания (аксиомата за редуцируемостта), нито еквивалентност на две измервания, ако всички техни резултати съвпадат (аксиомата за екстензионалността).

> *Оказва се, че правилата за комбиниране на измервания от това, от какви категории произхождат измерванията. Правилата за измервания (ако те следва да имат предсказващи стойности …) от* една и съща *категория са познатите правила за комутация (същите правила, тоест, които се прилагат до измервания на външни системи). Правилата за комбинирани измервания от* различни *категории, както видяхме са една друга и по-странна тема;* те *зависят, сред другите неща, от идентичността на измерителя* (Albert 1987: 583).

24. Марта, „приятелката на Албърт"

В друга публикация, книгата „Квантовата механика и опитът", Албърт леко видоизменя съображенията, свързани с „приятеля на Вигнер", обсъждайки как могат да се проверят две теории – неговата и на „приятелката му Марта" – за това, кога се случва „колапса" на вълновата функция. Според нашето разглеждане по-горе различните резултати на различни наблюдатели на една и съща вълнова функция се дължат на различните моменти, в които се случва. Тогава на пръв поглед влизаме в противоречие с резултатите за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика, тъй като моментът на измерването е сякаш такъв скрит параметър. Но веднага се натрапва, че той не принадлежи на измерваната система, а на наблюдателя и на системата от измерваната квантова система и *нейния* наблюдател, и следователно или изобщо не може да се разглежда като класическия скрит параметър, или последният трябва да се обобщи по подходящ начин, за да може да параметризира целостта, обхващаща изследвания квантов обект.

Албърт въвежда и описва състояние, което е в противоречие с „това, което знаем за себе си при непосредствена интроспекция":

> *Това е суперпозиция на едно състояние, в което Марта мисли, че стрелката сочи „твърдо" и друго състояние, в което Марта мисли, че стрелката сочи „меко" …*(Albert 1994: 78-79).

Да предположим, че има две теории за това, кога се случва колапса на вълновата функция в едно от две възможни свойства за дадено състояние: на Албърт – в даден момент; и на „неговата приятелка Марта”– в по късен момент:

> *И да предположим, че трябва да проверим тези две теории една срещу друга посредством експеримент* (Albert 1994: 84).

Албърт подробно анализира (Albert 1994: 76-92) този мислен експеримент, че за да се различат двете теории е необходимо да се въведе наблюдател и чрез това допълнителен времеви репер, който да позволи да се разграничат като предходен и следващ моментите на колапс на вълновата функция според двете различни теории. Но ако се стигне до реален експеримент, то „различните хипотези относно това точно къде и точно кога става колапса са от вида хипотези, които (за всички практически цели; или по-скоро, за всички *понастоящем* практически цели) не могат да бъдат емпирично разграничени една от друга” (Albert 1994: 76-92). Той смята, че е погрешно разбиране на ситуацията да се постави под въпрос дали има колапс, тъй като е налице резултатът от измерването. На това обаче естествено може да се възрази, че резултат от измерването може да има друга причина: не винаги и дори изобщо не колапс; както и че самата причинност отдавна е поставена под въпрос в квантовата механика.

За нас и в нашия контекст е интересно да поставим въпроса в какъв смисъл „се случва колапс” в светлината на по-ранните работи на самия Албърт – по-горе обсъждани, – според които самото наличие на (само-) рефлектиращ наблюдател (квантово-механичен автомат) променя резултата от непредсказуем (случаен) в предсказуем (необходим). Ролята на този наблюдател може да изпълнява както в случая Марта, така и в по-ранните цитирани работи – квантово-механичен автомат, разбира се, и приятелят на Вигнер, котката на Шрьодингер, а в крайна сметка – всеки измерващ уред за квантово-механичен експеримент:

И в сега обсъжданата негова работа Албърт ясно показва, че този наблюдател е критично необходим, за да могат да се различат двете теории: тази на Албърт от тази на Марта, като вземем предвид, че в граничен преход към безкрайност произволният по-късен момент, в който се извършва колапсът, ще се превърне в „никога”.

Ако нямаме такъв обективно включен наблюдател, разграничение чрез експеримент между двете теории не може да се извърши. И ако сме постулирали като принцип на познанието инвариантност на протичането на физическите процеси спрямо това дали са наблюдавани или не, или в един по-строг смисъл, дали една физическа система е затворена или отворена, единствен изход за нас остава неопределеността: в случая относно това, имало ли е колапс или не.

Резултатите на Албърт са използвани тъкмо в интересуващата ни насока от Юров, за да изследва „разбирането" на един Албъртов автомат:

> *Използвайки резултатите на Албърт, се аргументираме, че няма нужда от нова физика, за да се разбере гьоделизацията. Албъртовият квантов автомат може да „разбере" и една формална система и една Гьоделова пропозиция, която не може да се получи в рамките на тази система* (Yurov 2003: 1).

25. Квантовата механика като „новата физика за разума" по Пенроуз

Освен на резултатите на Албърт, макар и отчасти в критичен аспект Юров се позовава на концепцията на Пенроуз за необходимостта от нова физика за изкуствения интелект, при това тъкмо на основата на Гьоделовата непълнота: обсъждането на тъкмо този проблем е лайтмотив и в настоящата работа.

> *В своите две книги* [„Новият разум на царя" и „Сенките на разума"] *Пенроуз се аргументира, че имаме нужда от нова физика, за да разберем „разума". Решаващ пункт в неговия подход е Гьоделовата теорема и естествената способност на нашия разум да извърши Гьоделовата процедура, което ще бъде обозначавано като* гьоделизация*. Това, което Гьодел показва, е как да се мине отвъд всяка система от формални правила. И защото нашият разум може да го прави, то той самият не може да бъде „формална система", така че би трябвало да е непълен и имаме нужда от нова физика, която да включва разума ни* (Yurov 2003: 1).

Самият Юров коментира, след като я е формулирал по този начин, че „това е Пенроузова позиция, но аз не мисля така" , (Yurov 2003: 1). поради което се аргументира че „квантово-механичният автомат прави нещо, което може да се нарече гьоделизация" : (Yurov 2003: 1):

> *Решаващият момент ще бъде Албъртов подход към квантово-механичните автомати. Това което Албърт показва е, че „има известна комби-*

нация[11] *от факти, които по принцип могат да се предскажат от един (**квантово-механичен** – А.Y.) автомат* само относно себе си" *(*Албърт 1983: 251)*. Ще покажа, че можем да го интерпретираме като способност на квантовия автомат да гьоделизира, така че нямаме нужда от нова физика и „нов разум", за да разберем загадката на гьоделизацията* (Yurov 2003: 1).

Необходими са известни уточнения. Всъщност тезисът, че е необходима нова физика, за да разберем разума, е лайтмотивът и структурира книгата на Пенроуз „Сенките на разума" (Пенроуз 2005). В предходната му книга „Новият разум на царя" проблемът само е поставен в последната глава, озаглавена „Къде се намира физиката на разума?" (Penrose 1999: 523-581). За необходимост от нова физика все още не се говори експлицитно в нея. И двете книги имат по-скоро свободен изказ и се обсъждат по достатъчно популярен начин твърде широк обхват от факти, ще ги нарека „научни културогеми", за да се опише или създаде контекст, в който подобна идея, следователно в качеството на още една подобна, но нова „научна културогема" би се вписала органично, но *имплицитно*. Що се отнася обаче до „гьоделизацията", тя е дефинирана по същество строго, коментирана и обсъждано многократно в хода на книгата.

Пенроуз въвежда собствено „гьоделизацията" като безкрайна – и в някакъв обобщен смисъл, „итеративна" – процедура за въвеждане на неразрешими, но истинни твърдения в качеството на допълнителна аксиома и пораждане на нови неразрешими твърдения, и т.н., и т.н. (Penrose 1999: 142-143). Той се позовава на резултат на Феферман (1988), за да изкаже следното твърдение:

> *В действителност, твърде забележително,* всяка *истинна (но само универсално квантифицирана) пропозиция в аритметиката може да се получи чрез повторена процедура на 'гьоделизация' от този тип!* (Penrose 1999: 143).

В другата си книга „Сенките на разума" Пенроуз отново въвежда и обсъжда „гьоделизацията" (Пенроуз 2005: 168-189, 242, 580), но не добавя нищо съществено ново в съдържателен план.

---

[11] Цитатът на Юров е неточен (и всъщност граматически не съвсем правилен). Той пише „there are some combination of facts", докато в оригинала е "combinations": „there are some combinations of facts". Очевидно смисълът е по същество различен. В първия случай се твърди наличие на *поне* една комбинация (Юров), а във втория – на *повече от* една (Албърт).

„Гьоделизацията” наистина сякаш съдържа довод срещу самия фундамент на съвременната физика, а именно инвариантността на законите, доколкото имаме факти валидни само вътре в рамките на дадена процедура – това е процесът на развиваща се „гьоделизацията”, – но невалидни извън нея. С други думи, може да се открие противоречие между физическа система, подчинена на инвариантност на физическите закони, и „гьоделизираща” интелигентна система, при което нейната, да я наречем дори в един кантовски смисъл „способност за гьоделизация” трансцендентира не само Гьоделовата неразрешимост, но и инвариантността на физическите закони, ако бъдат разгледани в качеството на твърдения относно физическата система. Юров обаче показва (Yurov 2003), че всъщност квантовият автомат на Албърт е в състояние да извърши „гьоделизация”, но цената е тъкмо квантова неинвариантност на физическите факти, добре известната критична зависимост от наблюдателя в квантовата механика. Така, от една страна, нямаме нужда от Пенроузовата „нова физика за разума“, тъй като тя съществува – това е квантовата механика, – но от друга, квантовата механика необходимо трябва да притежава шокиращото свойство на неивариантност на физическите закони спрямо опозицията отсъствие – наличие на наблюдател, което я противопоставя на целия останал корпус на физическото знание и наистина трябва да я мислим като „нова” в смисъла на „все още всъщност недоразбрана”; или с думите на Юров:

> *Има две важни заключения. Първото говори „срещу Пенроуз”, докато второто говори за него.* Срещу. *Нямаме нужда от нова физика, за да разберем Гьоделизацията. Албъртовият квантов автомат може да „разбере” и е една формална система и една Гьоделова пропозиция, която може да се получи вътре в тази система.* За. *Ако Гьоделизацията е неалгоритмична процедура, то, най-малкото, можем да допуснем, че квантовата механика наистина съдържа „нещо неалгоритмично”* (Yurov 2003: 4).

Изводът на Юров е, че за един квантово-механичен автомат съществува състояние, в което той може да предскаже едновременно наблюдаема, съответстваща на гьоделово неразрешимо твърдение, и наблюдаема, съответстваща на достатъчно богатата аксиоматика, в чието термини се записва и спрямо която е неразрешимо. Той смята, че „може да го наречем „гьоделизация” в известен смисъл” (Yurov 2003: 4). Това не значи, че автоматът може да докаже неразрешимото твърдение, използвайки тази аксиоматика, а само че техните съответни наблюдаеми са съвместими, съвместно измерими. С други думи, автоматът може да „разбере" и неразрешимото твърдение, и аксиоматиката, в която то е неразрешимо. „Класическият автомат не може да направи това" (Yurov 2003: 4). За да го принудим да „разбере", трябва да се зареди по-мощна формална система. „Не това е случаят, когато боравим с квантов автомат" (Yurov 2003: 4). Освен това, тази „гьоделизация" може да се осъществи само за собствени състояния на автомата: „за да гьоделизира, той трябва да се намира, в свое *персонално състояние*" (Yurov 2003: 4). Ако те са външни за друг автомат, той не може да ги „разбере" в указания смисъл.

26. Теореми за свободната воля

Уместно е в тази връзка да се обърне внимание на „теоремата за свободната воля" (Conway, Kochen 2006; 2009), според която – в една по-философска интерпретация, предложена обаче от самите автори, –

> *ако ние хората имаме свободна воля, то и елементарните частици вече имат свой собствен дял от тази ценна стока* [commodity]. *По-точно, ако експериментаторът свободно избере посоките, в които да ориентира своя уред при определено измерване, тогава отговорът на частицата (за да бъдем педантични – отговорът на вселената близо до частицата) не е определен от цялата предишна история на вселената* (Conway, Kochen 2009: 226).

По същество аргументът е видоизменение на „парадокса" АПР, при което се приемат три аксиоми, фактически сродни съответно със: първата – с теоремата на Коушън и Шпекър (Kochen, Specker 1968); втората – с *постулиране* на квантови корелации; третата – с лоренцова инвариантност (или както е в първоначалния вариант от 2006 г. – с крайна скорост на предаване на информацията). Строго се извежда при тези условия факт, който може да се нарече „квантова корелация на свободния избор". Ако експериментаторът при микрообекта $\boldsymbol{B}$ свободно избира експеримента, то неговата свободна воля неминуемо корелира и се отразява в аналогично качество на микрообекта $\boldsymbol{A}$, който е отдалечен на произволно разстояние. Ако знанието е оприличимо на ограничаване на степените на свобода на модела по отношение на обекта, то „теоремата за свободната воля" огледално надарява модела с толкова степени на свобода, колкото притежава обектът. И ако в качеството на обект се разгледа самият експериментатор, то поведението на микрообекта $\boldsymbol{B}$ също

– поради двойното постулиране и на квантови корелации, и на лоренцова инвариантност – също се оказва свободно.

Както показва цитираната вече „теорема за свободната воля” (Conway, Kochen 2006; 2009) квантовата механика позволява буквално, а не само метафорично пренасяне на свойства както от микроскопично към макроскопично равнище (напр. от квантовата суперпозиция към „живата-и-мъртва котка), така и от макро- към микроравнище (от свободната воля на експериментатора към „тази” на микрообекта). Причината се корени в уникалната и изглежда, неизбежна епистемологична структура на квантовата механика, която е теория *за системата* макроуред – микрообект: тъкмо целостта на системата се оказва субстратът на този учудващ, а понякога и забавен пренос.

На пръв поглед няма никакво съмнение, че машината на Тюринг няма „свободна воля”, докато такава може да се предположи – в обсъдения смисъл – за „квантовия компютър” и в този пункт също така можем да разположим хипотези относно философската същност на интелекта, бил той човешки, изкуствен, или някакъв друг. Обаче концепцията за машината на Тюринг – макар и общоприета в качеството на математически модел на изчислителна машина и дори на изчисление изобщо – наймалкото се нуждае от редица съществени уточнения, на което обръща внимание Коупланд в редица свои работи. Не всички от тях обаче попадат в обсега на настоящето изследване. На първо място трябва да подчертаем следното:

> *Тюринговият действителен тезис, собствено т. нар. тезис на Чърч – Тюринг, че границите на това, което идеален човек математик може да изчисли, съвпадат с границите на това, което може да изчисли универсалната машина на Тюринг, е тезис, не извежда следствия относно това, което една* машина *може да изчисли.* (Copeland 1998E: 159).

Действително да се мисли, че като модел за изчисление трябва да служи човешката дейност от този тип, е неоправдано и по-скоро предразсъдък, естествен и безкритично приеман от хората:

> *Тези функции са плод на анализа на Тюринг на един идеализиран математик, работещ механично с молив и хартия. То е просто антропоморфизъм да се очаква тези функции да се достатъчни също така и за характеризиране поведението на останалата част от вселената* (Copeland 1998E: 159).

В своя работа, в която е съавтор (Copeland, Sylvan 1999), Коупланд дава редица становища на други учени и примери в подкрепа на тезата, че съществуват реални физически процеси, които не са изчислими с машина на Тюринг. Очевидно концепцията на квантовия компютър почива на подобна идея:

> *Естествено, решаващият въпрос е: има ли реални физически процеси, които могат да бъда използвани, за да свършат работата на Тюринговия „оракул"? Ако да, изчисляващи машини, които са забранени от тезиса погрешно известен като тезис на Чърч-Тюринг, може по принцип да се построят* (Copeland 1998E: 160).

Бихме могли и по-нататък да развием такъв подход. Тъй като изчислението е налице сякаш в два „ипостаса" – човешки и естествен, – то неговата същност може да прехвърли мост между физическите закони и интелекта (сигурен образец за който засега представлява само човекът). В качеството на релевантни за тази цел физически закони се представят по-скоро квантово-механичните, а не тези на класическата механика:

Още най-фундаменталните идеи за квант и за дуализъм на дискретно и континуално имплицират вече единство на дискретна, изчислителна и континуална, класически физическа страна: *механичното и изобщо физическото движение е изчисление и изчислението е физическо движение*!

Ако добавим друго необикновено философско тъждество на измерване и движение, разкрито от квантовата механика, се образува триада, своеобразен триъгълник от взаимни връзки между изчисление, измерване и движение, който минава отвъд обичайните разграничения между машина, субект и обект; а също така и между техника, човек и природа, едно по-задълбочено разглеждане на което би ни отвело към нестандартните подходи на Хайдегер и извън обхвата на настоящото изследване.

27. Изчисление по Коупланд и о-машината на Тюринг

На второ място бихме искали да подчертаем – и отново в тясна връзка с работите на Коупланд (напр. Copeland 2002: 291-297; 1998E: 156 и сл.; Copeland 1998S: 31-32; Copeland, Sylvan 1999; и др.), – че по същество квантовият компютър, най-малкото така както го въвежда Албърт, е в принципа си въведен още от Тюринг, в дисертацията, която прави в Принстън с Чърч през 1938 г. (Turing 1939) с модела на „о-машина”, използваща „оракул” (Turing 1939: 172-173):

> *Нека предположим, че сме снабдени с някакво неопределено средство за решаване на числово-теоретични проблеми; все едно нещо като оракул. По-нататък няма изобщо да навлизаме в природата на този оракул освен да кажем, че не може да бъде машина. С помощта на този оракул бихме могли да формираме нов вид машина (наричаме ги о-машини), притежаващи като един от своите фундаментални процеси този да решат един числово теоретичен проблем. По-точно тези машини следва да се държат така. Движенията на тези машини са определени както обикновено с таблица освен в случая на движение от определена вътрешна конфигурация о* (Turing 1939: 172-173).

Тогава машината се обръща към оракула, ако определена последователност от символи е добре дефинирана формула или изобщо формула, а оракулът съобщава на машината дали формулата описва разрешимо или неразрешимо твърдение. Очевидно е, че за разлика от класическата машина на Тюринг о-машината може да сметне дали ще спре (разбира се, единствено благодарение помощта на оракула). Всъщност квантово-механичният автомат на Албърт моделира о-машината и следователно твърдението на Тюринг, че оракулът „не може да бъде машина”, се отхвърля, доколкото Албъртовият автомат съдържа „оракул” като част от себе си. Ограничението, което налага Албърт, оракулът да прави предсказания само по отношение на системи, от които е част, не е съществено по отношение на о-машината.

Всъщност бихме могли да изменим функцията на оракула в термините на „гьоделизацията”, предложена от Пенроуз. При обръщане на машина към оракула, той – подобно на човешки интелект – ще казва дали формулата е истинна или не; с други думи – не само дали е неразрешима, но и ако е разрешима, ще я реши. Квантовият автомат на Албърт, поне според Юров (Yurov 2003: 4), не е в състояние да направи това, но той може да я „разбере”, заедно със и отделно о̀т разбирането на аксиоматиката, в чиито рамки тя е „неразбираема” в смисъла на неразрешима.

Също така бихме искали да подчертаем, че Тюринг въвежда о-машината именно в контекста на ординална логика, предложена от него „за да се избегнат доколкото е възможно ефектите от теоремата на Гьодел” (Turing 1939: 198):

> *Би трябвало да се отбележи, че нашите определения на пълнота се отнасят само до числово-теоретични теореми. Макар да би било възможно да се въведат формули, аналогични за ординална логика, които биха доказвали по-общи теореми от числово-теоретичните, ще открием, че (модифицираната) ни ординална логика никога няма да е пълна. … Ако нашият „оракул" ни казва, не дали произволно дадено числово-теоретично твърдение е истинно, а дали дадена формула е ординална формула, аргументът все още е в сила и откриваме, че има класове от проблеми, които не могат да бъдат решени чрез еднообразен процес даже с помощта на този оракул. Еквивалентно е да се каже, че няма ординална логика от предложения модифициран тип, която да е пълна по отношение на тези проблеми* (Turing 1939: 200).

Как става обаче така, че следвайки буквално Тюринг, о-машината не би могла да преодолее непълнотата, а само да я отмести на някое следващо, по-нататъшно равнище, докато с квантовия компютър се надяваме да го постигнем окончателно и безвъзвратно? Типът на отговора в термините на Албъртовия автомат е, че о-машината е непълна, доколкото се опитва да даде (невъзможния) отговор по отношение на външна система. Ако се остава винаги в рамките на *една* тоталност, мета-равнището е винаги допълнително и идемпотентно на равнището. Общата идея на концепцията може да се обсъди в малко по-различен контекст във връзка с Генценовото доказателство на пълнотата на аритметиката като идея за дуална пълнота (Пенчев 2009: 236-275).

28. Вътрешна и външна изчислимост

Следва да обърнем внимание на още няколко идеи, някои от които предложени още от Тюринг или негови съвременници: за напълно изменени тюрингови машини, напр. „неорганизираните" или вероятностните ("p-type") машини (Turing 1948, Copeland, Sylvan 1999), сред които се нарежда и споменатата вече о-машина; за ускорена тюрингова машина (Copeland 2002), чиято идея е предложена още от Ръсел, Блейк и Вайл (Copeland 2002: 282-284); най-сетне и особено идеята на самия Коупланд да се разграничат „външна и вътрешна изчислимост" (Copeland 1998E: 160-162; 2002: 294-297).

И машините от „B-type”, които се самоорганизират (Turing 1948: 422 и сл. [2004][12]), и тези от “P-type”, които попълват липсващата информация чрез случаен избор (Turing 1948: 425 и сл. [2004]) имат пряко отношение към квантовия компютър. Наистина всяко измерване на квантово-механична система, сред които попада и квантовият компютър, може да се тълкува като случайно попълване на липсващата информация на машина от втория тип, чрез което квантовата система се самоорганизира и може да се обсъжда и като първия тип. Така най-неочаквано квантовата система е възможно да се обсъжда в термините на невронна мрежа. Макар – бидейки важни – да споменаваме тези идеи, те остават по-скоро встрани от талвега на настоящото изложение, за разлика от идеята за ускорена Тюрингова машина:

> *Ускорените Тюрингови машини са Тюрингови машини от вид, способен да изпълнява задачи, които общоприето са смятани като невъзможни за Тюрингови машини. Например, те могат да определят дали десетичното представяне на π съдържа n последователни 7-ци, за всяко n; решават проблема със спиране на тюринговата машина; и разрешават предикатното смятане. Дали тогава ускорените Тюрингови машини не са логически невъзможни устройства. Аргументирам се, че не* (Copeland 2002: 281).

Поради нашите намерения специално ще подчертаем разрешаването на *Entsheidungsproblem*-а относно предикатното смятане (Copeland 2002: 290-291).

За да се определи строго ускорена Тюрингова машина, следва да се уточни какво точно се разбира под резултатна изчислителна процедура: дали такава, която завършва с успех за краен брой стъпки или – за крайно време (Copeland 2002: 1981-1982). Доколкото Тюринг се позовава на човек, който завършва работа може да се приеме, че неявно се има предвид второто (пак там). Разбира се, в самия модел на машината, който той предлага: снабдена с лента с клетки, все пак е декларирана явно първата възможност.

Ако приемем, че машината завършва работа за крайно време, то тя може да осъществи краен брой операции (с постоянна скорост на изчислението за единица време) или безкраен – с ускорение, което обикновено се приема за постоянно заради простотата на изложението. Ако се върнем отново към модела на изчисляващ с

[12] Страниците са по изданието от 2004 г.

лист и молив човек, т.е. към отправната точка за Тюринг, разбира се, броят записи върху листа е краен, но не знаем нищо за вътрешната структура на един „запис" в качеството на изчислителна процедура, освен че завършва за крайно време: това обаче не изключва да съдържа безкраен брой елементарни двоични операции вътре в своите рамки. Следователно, по определение, ускорената Тюрингова машина ще завърши безкраен елементарен алгоритъм за крайно време.

В такъв случай тя, ако си я представим чрез модела на стандартната машина на Тюринг, ще изпитва на всеки такт (независимо дали напред или назад по лентата) постоянно „изчислително ускорение" по-голямо от единица. Дименсията на изчислителното ускорение е, честота и чрез константата на Планк по формулата на Айнщайн (Einstein 1905Ü: 143-144) можем да му съпоставим енергия (напр. можем да я тълкуваме така: нейният постоянен приток причинява изчислителното ускорение), а и маса (Einstein 1905I: 641). Тъй като обаче не става дума за ускорение в тримерното пространство, то ограничение от константата на скоростта на светлината във вакуум – няма. Описаният процес е физически възможен.

29. „Ахил и костенурката", „Стрелата" и „Лъжеца"

Нека сега си представим обикновена и ускорена машина на Тюринг как се състезават в решаване на една и съща задача и нека ускорената машина е започнала работа по-късно: с това възпроизведохме в термините на изчислителни процеси апорията „Ахил и костенурката". В ролята на Ахил е ускорената машина, а в тази на костенурката – обикновената. Заедно с това можем да онагледим следващата важна идея: за външна и вътрешна изчислимост. В термините на „вътрешната изчислимост" Ахил никога няма да догони костенурката (от позицията на костенурката); но точно обратното според „външната изчислимост" (от позицията на системата от Ахил и костенурката). Така от позицията на обикновената машина на Тюринг (в ролята на костенурката) не може да се изчисли дали ще завърши работа (кога Ахил ще я настигне). Аналогията би могла да се продължи и с *Entscheidungsproblem*-а: в достатъчно богати аксиоматични системи (включващи Пеанова аритметика) има неразрешими проблеми: „дали изобщо и кога Ахил ще надмине костенурката?".

Меродавната позиция обаче – следва дебело да подчертаем – е тази на системата „Ахил + костенурката", не просто тази на костенурката. Тъкмо всъщност и от ***непълнотата*** на последната възниква парадоксът. Можем най-малкото да предположим, че и Гьоделовата непълнота на система, съдържаща аритметиката, е аналогично илюзорна: абсолютизира се една частна позиция, да речем, тази на стандартната машина на Тюринг „в ролята на костенурката”. Всъщност обаче релевантното е да се добави ускорената машина „в ролята на Ахил” и да се разглежда системата от двете „в ролята на квантовия компютър”. Ето дословно как Коупланд въвежда понятията за външна и вътрешна вероятност:

> *Съществено е да се различава между двата смисъла, в които една функция може да се каже, че е изчислима в дадена машина, които ще разглеждам като* вътрешен *и* външен *смисъл, съответно. Функция е изчислима от машина във вътрешен смисъл точно в случая, когато машина може да поражда стойности от аргументите (за всички аргументи в областта), ‘спирайки’ веднъж, всяка стойност е била произведена, където това, което брои в качеството на ‘спиращото’, може да бъде определено в термините на черти, вътрешни за машината и без отнасяне към поведението на някакво устройство или система – напр. часовник, – което е външно за машината* (Copeland 1998E: 161).

Така Ахил никога не ще надбяга костенурката във вътрешен смисъл: образува се безкраен числов ред, който наистина е сходящ, но само като безкраен процес, поради което той не може никога да завърши в така определения вътрешен смисъл на изчислимост. Напротив:

> *Една функция е изчислима от машина във външен смисъл точно в случая, когато машината може да произвежда стойности от аргумента (за всички аргументи в областта), показвайки всяка стойност на едно предназначено място някакъв предварително определен брой моменти след като съответният аргумент е представен. Машината може да е или да не е спряла в интерналистки смисъл* (Copeland 1998E: 161-162).

Така Ахил надбягва костенурката във външния смисъл на изчислимост, който, разбира се, е релевантният (за реалността, ако е допустимо да се използва това понятие), чрез отнасяне към външен и за костенурката, и за Ахил часовник. Да отбележим нещо важно за нашето разглеждане: Ахил няма да надбяга костенурката и във вътрешния за него смисъл, тъй като аналогично също се образува безкраен сходящ ред. Системата “Ахил и костенурката” поражда външния смисъл на изчислимост само по отношение на своите части, но единствено в рамките на по-обхватна система, на която тя самата да е част. Външният спрямо частите ѝ смисъл, се превръща на свой ред във вътрешен. Ако обратно, процесът е завършил във вътрешен смисъл, той необходимо е завършил и във външен:

> *В някои случаи машина може да изчисли стойностите на функция и в двата смисъла, ако има такова n, че когато и да се представи един аргумент, машината 'спира', показвайки съответната стойност в рамките на n момента, като такова 'спиране' удовлетворява интерналисткото условие* (Copeland 1998E: 162).

Точно по същия начин Коупланд определя външна и вътрешна изчислимост в по-късна работа (Copeland 2002: 294-297), обосновавайки се по този начин, че безкраен изчислителен процес може да завърши за крайно време. Всъщност тази концепция добре обосновава и Албъртовия квантов компютър. Ако използваме неговите изчисления наблюдаемата „A" характеризира „костенурката" или вътрешната изчислимост, докато наблюдаемата „$B^{(1)}$" – системата „Ахил и костенурката", или външната изчислимост. Квантовият компютър неминуемо „надбягва" Тюринговата машина, но не и в термините на последната: т.е. не и при валидност на т. нар. тезис на Чърч-Тюринг.

Обсъжданият сега подход може лесно да се съпостави с проблема за скритите параметри в квантовата механика или този за гьоделовски тип неразрешимост на аксиоматика, „съдържаща" в известен смисъл аритметиката по един твърде забавен, но много поучителен начин: чрез съвместното разглеждане на апориите „Ахил и костенурката", „Стрелата" и „Лъжеца". Единството на последните два ще се обсъди по-нататък, а сега да съсредоточим внимание на първия, приемайки за дадено тяхното единно осмисляне.

Настина само трябва да заместим „Ахил" с „костенурката – стрела, която не е тук" (от „Стрелата") или – опосредствано чрез първия парадокс и на основата на вече извършеното обсъждане (пак там) – с „костенурката – невярно твърдение" (от „Лъжеца"). Така се откроява, че „Ахил и костенурката" преобразува в континуална дискретната структура на втората и третата апория: плавен преход вместо скок между две състояния, съответно, „стрелата тук" и „стрелата там", както и „'Аз лъжа' като обектно твърдение" и „'Аз лъжа' като мета-твърдение". От „вътрешната позиция на костенурката" („вътрешната изчислимост") дискретният преход не може да се случи. Обратно, доколкото имаме дискретни движения в квантовата механика, те изискват външната позиция на системата като цяло, холистичен подход, за да могат да бъдат описвани.

Би могло да се отбележи също така, че „Ахил и костенурката” и „Стрелата” нямат самореференциална структура, каквато има „Лъжецът”. Такава обаче неочаквано бива добавена при интерпретирането им – по-горе – в термините на квантовия компютър и тези на вътрешната и външната изчислимост.

Сега вече можем да съзрем контурите на по-обща структура, в която се оказва съпоставено едно и също нещо в качеството на тоталност, която не допуска своя външност, и в качеството на част от някаква напълно неопределена по-обща обхватност. Парадоксите се получават от съвместяването на двете отношения – необходимо саморефлексивното при тоталността и трансцендентиращото я в по-широката обхватност – на основата на предполагаемата самотъждественост на нещото, което служи като субстрат и отправна точка за съвместяването. В един собствено конкретен и научен план израз на същото е фактът, че квантово-механичният автомат Албърт може да предсказва само по отношение на себе си (Albert 1983: 251; Albert 1987: 281-282).

Бихме могли да се позовем на цяла група парадокси (парадокси със или без кавички) и фундаментални резултати, сред които попадат и интересуващите ни теореми за непълнотата, и нашият контекст, свързан с квантовия компютър и вероятно – с хиперизчислението. Те са описани по еднообразен математически начин посредством апарат от теорията на категориите (Lawvere 1969) или класически, посредством множества и функции (Yanofsky 2003). Може да говорим навярно вече за възникването на обща, и то математическа теория на парадоксите, основаваща се на точно дефиниран тип математически структури.

Що се отнася до философията, това е иновация с почетна давност, възхождаща към Хегеловата диалектика. В нашия контекст същността е доста своеобразна: едно и също нещо се оказва различно в зависимост от това дали се разглежда като цяло (извън контекст) или като част от някаква по-обща и съвсем неопределена същност (в някакъв, може би дори неизвестен контекст). Противоречие и съответно парадокси (без кавички) няма и тъкмо това позволява да бъдат фиксирани като класа интерпретации на аксиоматична математическа структура.

30. Случайност и повторение

Концепцията за квантовия компютър, която сега обсъждаме, може да се разгледа и от една по-скоро практическа позиция: ще добави ли той нещо към обхвата на изчислимите функции. Очевидно, нашият отговор е положителен. Той се състои в универсалното разпознаване на образи, тясно свързано с което е разпознаването на себе си, което на философски език би било възможно да се тълкува като самосъзнание. Като фон може да се изтъкне и наличието на противоположни мнения:

> *Що се отнася до хиперизчислението, заключението е следователно отрицателно: може да се очаква някакъв прогрес в производителността, но не в разширяване на множеството от ефективно изчислимите функции; това важи за всички теории на изчислението, доколкото те споделят някакъв булев фон и следователно са предмет на ефектите от логическата несъвместимост. В частност, ние се аргументирахме, че всички пътища за заобикаляне на проблема за спирането на Тюринговата машина вътре във физически модели репродуцират дихотомията между противоречивост и случайност и са следователно еднакво нецелесъобразни от изчислителна перспектива* (Cotogno 2003: 215).

Ще приведем още едно скептично становище от същия автор, заради различната му аргументация и заради непосредственото му отнасяне към квантовите алгоритми:

> *Идеята, че физиката може да открие суперкомпютри някъде в Природата забравя, че изчислителният аспект на всяка настояща физическа теория зависи неизбежно от клонове и детайли на алгебрата и анализа; всяка изчислителна мощ отвъд Тюрингова дефинируемост би трябвало вече да се съдържа в тях. Квантовите алгоритми могат да са съвсем различни от класическите, но те във всеки случай са формализирани в рамките на теориите на хилбертовите пространства и хамилтоновите оператори, които могат да се формализират и докажат коректно в ZFC или сравними теории* (Cotogno 2003: 215).

Видяхме, че квантовите алгоритми могат да се представят чрез „леко” видоизменение на машината на Тюринг като битовете в лентата се заменяха с кюбитове. Тъй като обаче всеки кюбит е безкрайно множество, то той може да кодира едно към едно всяко състояние на машината на Тюринг или всяка машина на Тюринг.

Настина те „могат да се формализират и докажат коректно в ZFC или сравними теории", но те експлоатират тъкмо характеристичното свойство, което прави приложими Гьоделовите теореми за непълнотата – множеството на естествените числа и по-точно, „цифрата на кюбита", която може да приеме безкрайно много различни стойности. При това положение изглежда необоримо, че поне един квантов алгоритъм е неразрешимо твърдение в ZFC или сравними теории и следователно в общия случай не са изводими на подобна основа:

> *Паралелът между резултата на Тюринг и резултата на Гьодел е очевиден: от една страна броят на неизчислимите числа е неограничен, а от друга, същото важи за броя на истинните, но недоказуеми аритметични твърдения* (Syropoulos 2008: 7).

Това впрочем прави съдържателна употребата на термина „хиперизчисление":

> *Терминът хиперизчисление, който е въведен в обръщение от Брайън Джек Коупланд и Даян Праудфут, характеризира всички концептуални изчисляващи устройства, които нарушават бариерата на Чърч – Тюринг* (Syropoulos 2008: 7).

Нашият възглед е напълно в съзвучие с изводите на автора, Сиропулос, а именно че хиперизчислението е разположено отвъд конструктивността. По този начин резултатите относно изчислимостта и разрешимостта в смисъла на Гьодел могат да се ограничат само в нейните рамки и да се преодолеят с нейното прекрачване:

> *Обаче е важно да се отбележи, че Гьоделовият резултат важи само за формализирани аксиоматични процедури, които са основани върху определено отначало и фиксирано множество от аксиоми и правила за преобразуване. По принцип това значи, че за всяко истинно, но „недоказуемо" аритметично твърдение може да се подходи с неформално доказателство. Например, може да се използва неконструктивен метод да се докаже валидността на дадено твърдение* (Syropoulos 2008: 7).

Изчислителните процедури в обобщен смисъл, които ангажират актуална безкрайност, са свързани с аксиомата за избора и универсална (в смисъла на общорекурсивна) функция за разпознаване на образи (интерпретирана като повторение на веднъж осъществен случаен избор). Тя включва и дефинируема субективност под формата на уникално разпознаване на себе и чрез това разграничаване на вътрешно и външно за една система. Така се дава един, и то може би изчерпващ пример за отместване парадигмата на изчислението, досега разбирано само като конструктивен, и то дори финитен процес:

> *Аналогично, неизчислимите числа биха могли да станат изчислими, ако се приложи един алтернативен метод на изчисление. Практически, това означава, че хиперизчислението предстои да отмести една парадигма, за да намери нови модели на изчисление, които позволяват да се изчисляват класически неизчислими числа* (Syropoulos 2008: 7-8).

Сега, т.е. тъкмо в контекста на така въведено и разбираното „хиперизчисление", бихме искали да уточним един много важен детайл: подходът на Гьодел за едновременна употреба на аксиомата за редуцируемостта и за екстензионалността, всъщност точно повтаря този на Ръсел от второто издание на *Principia*, на което собствено и се позовава. Така че евентуален упрек към него за непоследователност не е основателен:

Ако има такъв относно едновременната употреба на аксиомата за редуцируемостта и за екстензионалността, то той трябва да се отправи първо и на преди всичко към Ръсел и Уайтхед. Действително, аксиомата за редуцируемостта бива подложена на остра критика. Въпреки това Ръсел запазва – както малко по-надолу ще се убедим посредством цитати – *дословно* пасажите, в които въвежда аксиомата за редуцируемостта *и във второто издание*. Всъщност той никъде не изяснява тяхното съотношение експлицитно. Имплицитното е да се предположи, че са независими и непротиворечащи си помежду си.

Малко по-точно казано, те са аналогични, но се отнасят за различни неща: за съждения и за множества. Принципът на абстракцията, който в някакъв смисъл прехвърля мост между тях или дори въвежда изоморфизъм на съответните математически структури, обаче не присъства нито в първото, нито във второто издание. Ако ние, така да се каже на „собствен риск", го добавим в разсъжденията можем да видим следното:

Изглежда непротиворечието им не буди съмнение, ала по-горе видяхме, че те отчасти се препокриват, а отчасти самата аксиома за екстензионалността допуска двусмисленост относно множеството, което е елемент на себе си и така в едно от тълкуванията си изглежда напълно еквивалентна на аксиомата за редуцируемостта.

Това обаче не е подходът на Гьодел. За него е изключително важно да остане в независимо разглеждане на съждения и множества. Той обсъжда безкрайни множества (каквото е на естествените числа), но които кодират съждения. Безкрайни съждения за разлика от безкрайни множества не се въвеждат. Наистина какво би могло да твърди едно безкрайно съждение, освен нещо напълно неопределено, нещо като логически еквивалент на Шрьодингеровата котка: вярно-и-невярно твърдение?

Тогава и донякъде образно казано, между приложението на аксиомата за редуцируемостта, отнасяща се до (крайни по определение) съждения, и аксиомата за екстензионалността, *третираща освен това и безкрайни* множества, ще възникне една смътна зона на неразрешимост, чието съществуване и се удостоверява чрез теоремите за непълнотата. В най-едри щрихи можем да обрисуваме ситуацията така:

Крайните и само крайните съждения са разрешими и аксиомата за редуцируемостта ще ни гарантира, че всяко съждение може да се представи като крайно. Можем обаче да разгледаме безкрайно множество от съждения поради едно-еднозначното им кодиране с естествени числа. Наистина релацията за еквивалентност все още може да се обслужва от аксиомата за екстензионалността. Ако успеем да припишем съждение еквивалентно на безкрайно множество от съждения, то ще бъде неразрешимо. Е, добре, съждението, което твърди собствената си неразрешимост, е именно такова, тъй като крайните и само крайните съждения са разрешими. Ясно виждаме, че всеки парадокс – както и изрично подчертава самият Гьодел – ще адресира безкрайно множество от съждения по същата причина.

На шега казано, концепцията за квантовия компютър прочита аргумента на Гьодел обратно. Той се оказва довод от противното за невярност на предпоставката, а именно: не е вярно че крайните и само крайните съждения са разрешими. Наистина, взимаме безкрайно съждение, което „измерваме” в квантов смисъл или с други думи, благодарение на аксиомата за избора можем да изберем негов краен елемент. Разрешимостта на последния ще установим като разрешимост на безкрайното твърдение. Да, той е избран случайно, но това не е проблем за разрешимостта поради въведената универсална (общорекурсивна) функция за разпознаване на образ и която вече ще гарантира необходимата, но *едва оттук нататък* еквивалентност на разрешимостта на безкрайното съждение.

Резюмирано, обратният прочит срещу този на Гьодел е: да, ако нямаше квантови компютри, щеше да има неразрешими твърдения. Но тъй като квантови компютри има, неразрешими твърдения няма: в най-лошия случай, *случайното им разрешаване ще се установи и закрепи посредством универсалното разпознаване на образи като разрешение*.

Полезно е най-малкото да намекнем възможността за семиотична перспектива: в тясна връзка с концепцията за формално дефиниране на знанието като повторение и различието в неговата предаваемост чрез квантова или класическа информация. Трябва да подчертаем, че квантовата информация като тип научно-холистичен светоглед извежда знанието и семиотиката от сферата на човешкото или от философската антропология дори в широк смисъл, тъй като ги открива в самите основи на мирозданието, в начина, по който светът è и по който се образува реалността. На някой това би могло да се привиди като примитивно и наивно антропоморфизиране. Би трябвало обаче да се подходи обратно: ако на човешко разположение са се оказали – сякаш „дарени", „паднали от небето" – знанието и означаването, то следва да се търси тяхната естествена основа извън него: тоест в самия начин, по който е устроен светът.

Освен към философията и онтологията, семиотиката – тук вече разбрана като частната наука за знака – има непосредствено отношение към логиката и математиката. Към логиката се отнася посредством концепцията за (краен) синтаксис и (безкрайна) семантика, като изходната точка – „люлката", която естествено напуска с развитието си, – нейното първоначално разбиране за себе си, са тъкмо синтактични. С теоремите за непълнотата се изясняват връзките и ограниченията, които ѝ налага семантиката, възможността за безкрайно означаване, самата тя означена и въведена чрез множеството на естествените числа. В известен смисъл отношението ѝ към математиката е още по-непосредствено. Ако например за физиката и другите естествени науки обектите на изследване съществуват преди означаването, това не е напълно валидно или без съществени уговорки за математиката. Наистина платонизмът в смисъла на едно от направленията във философия на математиката постулира съществуването на обектите на математиката по същия, почти по същия или дори по превъзхождащ начин, но от същия тип както в останалите науки, както във всекидневния и в цялостния човешки опит. В скоби може да отбележим свидетелствата за вида платонизъм на Гьодел (напр. Parsons 2010), който обаче Феферман окачествява като прилаган крайно предпазливо (Feferman 2003: 96).

Конвенционализмът застава на противоположната позиция в това отношение: означаването на математическите обекти има напълно или в съществена степен конвенционален характер, а оттук – и самата математика и знанието, което тя дава. Несъмнените ѝ хилядолетни успехи в практическо приложение се обясняват чрез усъвършенстване на конвенциите, които стават все по-прагматично адекватни и удобни: така конвенционализмът плавно преминава в емпиризъм и фигуративно казано „от другата страна” съединява математиката с останалите науки.

Както многократно, в различни аспекти и с множество примери се изтъква по протежение на изследването, защитаваната тук философско-математическа позиция е от питагорейски тип. Тя съответства на набелязването на знанието и на означаването в самото битие, в начина, по който светът ѐ, посредством инструменти и подходи от квантовата информация.

Тъкмо така ще погледнем и на връзките между математика и семиотика. По-конкретно трябва да изясним възможността и степента на това, означаването да се формализира и въведе вътрешно за математиката посредством универсална функция за разпознаване на образи. Целта е да отъждествим или „разпознаем” външния спрямо математиката неин обект – такъв, разбира се, би бил неприемлив за всяка една питагорейска гледна точка – ***изцяло*** *чрез съвкупност от уникално определени означения*. Как помага за това квантовата информация и каква е връзката с аксиомите за редуцируемостта и екстензионалността?

А да добавим още едно усложнение: нека допуснем, че самото разпознаване на образи, бидейки повторение, е случайно. Образът веднъж бива разпознаван, но друг път – не, а в условията, при които това се случва, не може да се разпознае закономерност, и то по принцип. Възможно ли е това?

Достатъчно е самият акт на повторение да е случаен. Нека илюстрираме с последователност от нули и единици: навсякъде където се случат две нули или две единици една след друга, ще говорим за „разпознаване”. Още по-нагледно може си представим две паралелни ленти, в които съпоставяме съответните нули и единици от две едноименни клетки и където имаме съвпадение на нули или съвпадение на единици, ще дефинираме разпознаване, а като цяло разпознаването на образ ще е случайно.

31. Случайно знание, „приятелят на недоверчивия Вигнер” и „недоверчивите приятели” на Вигнер

Но може ли изобщо подобна ситуация да се окачестви като разпознаване на образ, получените случайни съвпадения – като знание, макар и от особен вид, „случайно знание”?

Нека си послужим с още една илюстрация, която ще заемем от шумотевицата около „студения ядрен синтез”, като на нейна и негова основа ще пресъздадем идеализирана познавателна ситуация, своеобразен мислен епистемологичен експеримент. Тъй като явленията около ядрения синтез, бил той и студен, са от квантов порядък, можем да предположим някакъв тип изначална случайност, за която отсъстват по принцип каквито да и било скрити параметри. При обичайните квантови експерименти, какъвто е и добре възпроизводимият и изучен „горещ термоядрен синтез”, варират самите величини на квантовата система. Самата макроскопична установка, в която се случват изследваните събития, се държи, разбира се, съвсем класически.

Нека сега обаче възстановим изходната предпоставка, чрез която Албърт въведе своя квантово-механичен автомат: разказите от типа на „Шрьодингеровата котка” или „приятеля на Вигнер” са валидно описание на света. Тяхната същност е, че макроскопичните предмети на ежедневния опит допускат освен класическото и квантово описание. Прилагайки това към експерименталната установка, предназначена да установи явления на студен ядрен синтез, то – подобно на многострадалната котка – тя ще се намира в суперпозицията „потвърден-и-отхвърлен студен ядрен синтез”, която за различните наблюдатели ще се редуцира до едно от двете – *и то дебело подчертано, в общия случай* ***различно*** – състояние. Така се възпроизвежда многократно една познавателна ситуация, която описахме, като “приятеля на недоверчивия Вигнер” под формата „недоверчивите приятели на Вигнер”.

Пренесено към този случай, разглеждането на Албърт би показало, че някакъв процент от приятелите ще потвърдят, а някакъв – ще отхвърлят студения ядрен синтез на основа на своите наблюдения. Подобно на Шрьодингеровата котка, това ще бъде една максимално хиперболизирана ситуация, тук вече използвана за илюстрация на производната суперпозиция на знанието за квантова система (тук макроскопична система, която приемаме, че се държи като квантова). На това – че от суперпозицията на състоянията на квантова система следва също така и суперпозиция на знанието за квантовата система – ни обръщат внимание впрочем още Шрьодингер (Schrödinger 1935: 827) в контекста на своята „котка" и Вигнер чрез небезизвестния си „приятел" (Wigner 1967: 171-172). В този случай ще говорим за случайно знание, случайно разпознаване на образи и нашият проблем е дали знанието за квантова система е в общия случай именно такова.

За да изясним ситуацията чрез нашия метод на различни времеви скали, ще трябва да добавим трета, „супербърза" времева скала или „свръхускорена" машина на Тюринг, така че когато тя има стойност, да речем, единица, позволява „случването на знание" между първите две, а в другия го забранява. Очевидно можем да образуваме „сложно" разпознаване на образи и този процес може неограничено да се продължи като се използва операторът за суперпозиция (или заместване) и първоначално описаната по-горе функция на простото универсално (за всяка стойност на аргумента определено) разпознаване на образи.

Случайно знание обаче ще имаме в този рекурсивен процес на все по-сложно разпознаване на образи тъкмо там, където той е спрял (в момента) или е завършил. Естествен въпрос, който може да се постави, е дали съществуват абсолютни граници в разпознаването на образ и оттук – случайно знание, което завинаги ще остане такова. Така се очертава проблемна област, която само ще маркираме, за да не се отклоним твърде от проблема за знака в очертаната перспектива, охарактеризирана като питагорейска.

32. Способност на квантовия компютър за универсално разпознаване на образи

Ако даден субект 1 („субект" – в очертания формализиран смисъл, положен от разглеждането на Албърт) разпознае образ X, то той може да го нарече "X_1" и тъкмо тази *познавателна ситуация* ще обозначаваме с понятието „знак" или значене. Сега трябва да уточним нейната същност с оглед на формализирането му: една частнорекурсивна функция, състояща се само от оператора за минимизиране, валидизирана за областта от аргументи, достъпна на дадения субект, се полага като общорекурсивна. На тази основа се обосновава хипотезата, че друг субект 2 съобразно своята и в общия случай различна дефиниционна област също така ще разпознае X, макар и иначе, поради което ще му присвои името "X_2". Тъй като функцията е положена като общорекурсивна, се предполага, че всеки субект ще разпознае образа. Всъщност обаче може да е налице ограничена област – да я наречем област на валидната интерсубективност или на колективен субект, – само в която даден образ е разпознаваем.

Чрез знака на X с X_1, субект 1, предлага на всеки друг субект, напр. за определеност – на субект 2, да разпознае на свой ред X чрез знак за него с X_2, предавайки обаче класическа информация, която – вече многократно подчертахме – съдържа възможността за дезинформация. Така знакът може да се формализира чрез една функция на универсално разпознаване на образ и на различни подмножества на дефиниционната област или „субекти", които са верифицирали нейното разпознаване, но като *различна* частнорекурсивна функция: „различна" таи в себе си една двусмисленост: тя може да е *различна по дефиниционна област*, но и *като различен рекурсивен алгоритъм*, който съпоставя стойности на аргументите.

Особено място заема хипотезата, че дадената частнорекурсивна функция на разпознаване на образ е общорекурсивна. От една страна, тя формализира понятието за реалност на този конкретен образ и служи за обосноваване на това *изобщо да има смисъл* предаването на класическото съобщение от субект 1 към субект 2. От друга обаче и с оглед понятието за знак тя изобщо не е необходима: всъщност можем да се ограничим с полагането на клас на еквивалентност за *ограничено* множество частнорекурсивни функции или иначе казано да разпознаем образ от образи: едно и също знание в различни проявления в различните субекти. Тогава бихме могли да изкажем и една метахипотеза за това, че двата начина са еквивалентни. Тъкмо тази метахипотеза се има предвид като формален израз на нашето питагорейство. Забележете, че дефиниционните области за различните субекти могат да се препокриват и следователно, съответните функции за разпознаване на образ да се тълкуват като „сдвоени" в този смисъл.

V. МАТЕМАТИКАТА НА РЕАЛНОСТТА:

ХИЛБЕРТОВА СРЕЩУ ГЬОДЕЛОВА МАТЕМАТИКА

33. Аксиомите за редуцируемостта и екстензионалността, тълкувани семиотично

На такава основа можем „семиотично” да осмислим също така и аксиомите за редуцируемостта и за екстензионалността като двете страни на нашата метахипотеза; *редуцируемост*: всяко универсално разпознаване на образ (общорекурсивна функция) може да се сведе до частно разпознаване на образ от даден субект (частнорекурсивна функция) в описания формализиран смисъл; *екстензионалност*: частните разпознавания на даден образ (частнорекурсивна функция) образуват клас на еквивалентност или могат самите те да бъдат разпознати като образ от образи. Тогава съвкупността от *всички* такива частни разпознавания ще образуват общорекурсивна функция или с други думи ще са разпознаваеми като универсални образи.

Тогава се оказва, че въведената от Ръсел и Уайтхед и възприета от Гьодел едновременна употреба на двете аксиоми въвежда тъкмо формализирания вариант на защитавания тук тип питагорейски възгледи. Тогава се изяснява също така и платоническият вариант, неявно възприет от Гьодел, за разграничаване от всяко питагорейство: непълнотата е на всяко крайно човешко математическо построение по отношение истинната математическа действителност, символизирана от безкрайност, оставаща завинаги недостижима. Обратно, концепцията за квантовия компютър не споделя гьоделовския тип платонизъм: тя си е питагорейска в чист вид и не поставя каквато и да било граница между човешката и „самата” математика.

На тази основа да осмислим критиката към аксиомата за редуцируемостта: има неозначими (еднакво) неща (напр. безкрайността, неопределеността, квантовата суперпозиция): дори в този случай на по-слаба интерсубективност математиката все още може да функционира (в областта на крайността, определеността, измереното). Ако обаче възприемем такава позиция, трябва да изоставим самообосноваването на математиката като химера и да се самограничим в Гьоделова математика. Напротив, нейната еманципация или онтологично доминиране изискват не просто отхвърляне на неозначимите неща и в частност признаване, въвеждане и широко използване на безкрайността като неин обект, а включване на самото означаване в нейните граници, което е начин битието да се схване математически, по талвега на питагорейския завет. Тогава математиката превъзхожда природните науки тъкмо с концепцията за безкрайността, до която последните се „докопват" едва чрез кохерентността в квантовата механика: една дисциплина, която – въпреки почетната си стогодишна история и шеметен низ от блестящи успехи – продължава да е „бяла врана" или по-точно, „черната овца" сред останалите природни науки поради множеството принципни отлики.

Нека се позовем – именно в такава интерпретация – на няколко авторитетни критични становища относно аксиомата за редуцируемостта:

> *Теорията на Ръсел и Уайтхед на обоснованията е общо логическо изследване с широк спектър. Но обосноваването, което тя осигурява за математиката, почива, първо върху аксиомата за безкрайността и после върху това, което се нарича аксиома за редуцируемостта: тези и двете аксиоми са чисто конвенционални допускания, които не са подкрепени от доказателство за непротиворечивост; те са допускания, чиято валидност фактически остава съмнителна и които, във всеки случай, моята теория не изисква* (Hilbert 1927: 473).

Действително, с оглед едно финитно обосноваване на математиката можем да се ограничим – както видяхме току-що – до минимално необходимото, а именно до частнорекурсивни функции. Ако сме изключили аксиомата за редуцируемостта и за екстензионалността изглежда невъзможно да се докажат теореми за непълнота от типа на Гьоделовите. Проблемът е обаче, че такава „сигурна", напълно „застрахована" математика не обхваща цели области от математиката, основани на „съмнителната" безкрайност, а в нашия контекст – на универсално разпознаване на образи; във философски план – на концепции за реалност или за математическа реалност.

> *Всяко смислено математическо твърдение притежава конструктивно съдържание, което може да бъде успешно анализирано чрез подходящи принципи на рекурсията и униформизацията. Според този тезис конструктивното обосноваване няма същностно ограничение* (Luckhardt 1973: 5).

Вероятно това е така, но едва ли „конструктивното съдържание" изчерпва всяко математическо твърдение: нерядко остава нещо, почерпено от метафизическата или метаматематическа концепция за безкрайност, което – според нашето разбиране – е начинът тя да включи вътре в своите рамки проблема за реалността. Може един от най-простите начини за такова включване е тъкмо аксиомата за редуцируемостта, както и за екстензионалността:

> *При Ръсел цялата математика и теория на множествата изглежда почива на проблематичната във висша степен „аксиома за редуцируемостта …* (Neumann 1925: 395).

В нашия контекст нейната проблематичност се тълкува като твърде рискованото твърдение, че безкрайността е сводима до крайност, цялото – до своите части: така се изхвърля например всичко изучавано от квантовата информация. Въпреки това тя е първата крачка за признаване на неизбежната за математиката безкрайност и на реалността като вътрешно-математически проблем, както и възможно най-простият опит за третирането им изцяло в термините и методите на крайността. Що се отнася до изчислението, то се ограничава до частнорекурсивните функции, изключвайки по принцип възможността да се обсъжда връзката с проблема за реалността, т.е. – с универсалното разпознаване на образ, както може да се формализира предиката „реален”, отнесена до образ – с общорекурсивните функции. Както посочва Скулем с това се „спестява” известна трудност, но единствено чрез *неудовлетворително постулиране* на нейната заобиколимост:

> *Но трудността е, че трябва да образуваме някои множества, чието съществуване зависи от* всички *множества. Тогава имаме това, което се нарича* непредикативна дефиниция*. Пуанкаре критикува този вид дефиниция и го разглежда като реалната логическа слабост на теорията на множествата. В системата на Ръсел и Уайтхед този момент е бил взет формално предвид, а именно в теорията на това, което те наричат логическите типове, но те също просто се задоволяват със заобикаляне на трудността чрез въвеждане на условие,* аксиомата за редуцируемостта*. Действително, тази аксиома постановява, че непредикативните условия ще бъдат изпълнени. Няма доказателство за това; освен това, доколкото засега може да се види, такова доказателство трябва да е невъзможно от гледната точка на Ръсел и Уайтхед, както и от тази на Цермело* (Skolem 1922: 297[13]).

[13] Страницата е цитирана по: From Frege to Gödel (ed. J. van Heijenoort). Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.

Отговорът на Скулем за тази невъзможност е тъкмо въвеждане на областта на несобствени интерпретации или „относителността на понятието за множество”, която се обсъжда в неговия доклад. Сега за нас е твърде интересно и важно да разграничим подходите на Ръсел и Уайтхед, в който включваме и този на Гьодел, от една страна, от този на Скулем, от друга. И аксиомата за редуцируемостта с тази за екстензионалността, и подходът на Скулем третират в тесен план проблема за отношението на множество към „не-множество”, понеже такова като последното се въвежда от възхождащото към Цермело (Zermelo 1908) и може би палиативно „лечение” на математика и в частност, теорията на множествата от парадокси. Заедно с това те могат да се тълкуват и по-широко, и то не непременно нестрого, като полагане на определен тип концепция за отношението на модел и (евентуално само математическа) реалност *вътре в самата математика*. В скоби ще отбележим, че и в двата случая аксиомата за избора се предполага валидна.

Каква е същността на подхода на Ръсел и Уайтхед от тази гледна точка? Всяко математическо твърдение може да се сведе до твърдение за множества (редуцируемост) или широко обобщено: всяко нещо от света има математически модел. Няма твърдение за множества, което да не е математическо (екстензионалност), или широко: няма модел, който да не се отнася до нещо от света. А Скулем? Не съществува начин да се отличи твърдение за множества от друго, т.е. те са принципно еквивалентни (относителност), или широко: моделът и математическата реалност са неотличими.

Ясно се вижда, че при нашия стил на тълкуване и двата подхода зазвучават питагорейски. Все пак предпочитанието е в полза на Скулем, заради следното обстоятелство: от неговия подход непосредствено следва относителност на дискретните и дифеоморфизмите (по-подробно: Пенчев 2011: 132 и сл.), което е в съзвучие с основополагащия принцип на квантовата механика: с вълново-корпускулярния дуализъм. Към това обаче трябва да добавим, че от разглеждането на Албърт следва, че вътрешната позиция, съответстваща на множеството или собствената интерпретация, позволява именно да се разграничи *собствено* от несобственото, и то чрез едно превъзхождащо знание *за себе си*. Тогава следва и неравнопоставеност на двете аксиоми: аксиомата за редуцируемостта е в изцяло сила, докато за аксиомата за екстензионалност следва да се ограничи областта на приложение. Защо? Две еквиекстензионални множества могат да се различават по своята интензия, която може да се представи като различна степен на сдвояване помежду или с допълнението на множество, неговата околност. Отсъствието на ортогоналност в логически план ще се отрази на закона за изключеното трето. Дори тогава аксиомата за редуцируемостта остава валидна в следния смисъл: на всяко множество могат еднозначно (забележете, че едно-еднозначно съответствие не се изисква) да се съпоставят неговите елементи.

По такъв начин интуицията на плеяда велики математици, започвайки още от Кантор и без, разбира се, да пропуснем групата „Бурбаки", че математиката трябва да се обоснове върху концепцията за множество и за актуална безкрайност, а не върху аритметиката или финитистка, а и конструктивистка основа, получава решаваща подкрепа от напълно неочаквана посока: от съображения, произтичащи от квантовата механика и информация.

34. Аксиомата за редуцируемостта в първото и във второто издание на *Principia*

Можем да добавим още едно обстоятелство, на което обръща внимание Винер: аксиомите за редуцируемостта в първото издание са две:

> *Две аксиоми , известни като аксиомите на редуцируемостта са изложени на страница 174 от първия том на Principia mathematica на Уайтхед и Ръсел. Едната от тях, *12.1 е съществена за тълкуване на тъждествеността, описанията, класовете и отношенията; другата *12.11 е включена само в теорията на отношенията … Тя твърди, че ако е дадена някаква пропозиционална функция ϕ на два променливи индивида, има друга пропозиционална функция на два променливи индивида, която не включва явни променливи и имаща същата истинна стойност както ϕ за същите аргументи* (Wiener 1914: 224).

Това остава непроменено и във второто издание (Whitehead, Russell 1927: 167). Ще се опитаме с едно изречение да изясним обхвата и връзката на тези две аксиоми за редуцируемостта. Общият случай е всъщност втората, докато първата е частният случай, ако една от двете променливи е константа. Такъв подход би бил в съзвучие с Ръсел, който подчертава първичността на отношенията в логиката. На нейна основа лесно могат да се построят обобщения с произволен брой относими. Новото, което тя добавя в сравнение с едномерния случай, е, че относимите или произволен брой аргументи на функцията могат да се разглеждат еквивалентно като независими, тъй като могат да се заменят с такива. С други думи, свеждането на множество до неговите елементи, няма да се ограничи от едновременното разглеждане на повече от едно множество.

Нека сега дословно приведем пасажите, в които Ръсел и Уайтхед въвеждат аксиомата или аксиомите за редуцируемост с вече съвсем кратки коментари, поради подробното предварително обсъждане:

> *Ако математиката следва да бъде възможна, то е абсолютно необходимо … , че би трябвало да имаме някакъв метод за правене на твърдения, които ще бъдат обичайно еквивалент на това, което имаме предвид, когато (неточно) говорим за „всички свойства на x". („Свойство на x" може да се дефинира като пропозиционална функция, удовлетворявана от x.) Оттук трябва да намерим, ако е възможно, някакъв метод за редуциране реда на една пропозиционална функция без въздействие върху истинността или неистинността на стойностите ѝ* (Whitehead, Russell 1910: 173).

По-нататък Ръсел и Уайтхед въвеждат аксиомата за редуцируемостта, като първоначално се позовават на „класовете", а след това изясняват, че те могат да се „спестят" като това, за което се въвеждат, се съдържа в аксиомата за редуцируемостта без нужда от явно или косвено позоваване на тях:

> *Изглежда това е, което здравият разум допуска с допускането за класове. Ако е дадена някаква пропозиционална функция ψx, от какъвто и да е ред, това се приема да е еквивалентно, за всички стойности на x, на твърдението с форма „x принадлежи на класа α ". Сега допускайки, че има такава цялост като класа α, това твърдение е от първи ред, тъй като няма намек за променлива. Наистина, нейното единствено практическо предимство пред първоначалното твърдение ψx е, че това твърдение е от първи ред. Няма никакво предимство в допускането, че реално има такива неща като класове и противоречието относно класовете, които не са членове на себе си показва, че ако има класове, те трябва да са нещо съвършено различно от индивиди. Сякаш изглежда, че единствената цел, на която служат класовете, и главната причина, която ги прави лингвистично удобни, е, че те осигуряват метод за редуциране реда на една пропозиционална функция. Следователно не ще допускаме нищо от това, което може да изглежда, че се включва в общоприетото разбиране за класове,*

освен че всяка пропозиционална функция е еквивалентна, за всички свои стойности, на някаква предикативна функция на същия аргумент или аргументи (Whitehead, Russell 1910: 173-174).

И по-нататък следва подробното обяснение, както и въвеждането на термина, като ще подчертаем, че той бива наречен аксиома за класовете или аксиома за редуцируемостта:

Това допускане по отношение на функции следва да се направи какъвто и да е типът на техните аргументи. Нека fu *да е функция от някакъв ред на аргумент* u*, който сам може да е или индивид или функция от всякакъв ред. Ако f е матрица, пишем функцията във формата f!u ; в такъв случай наричаме f* предикативна *функция. Следователно една предикативна функция на индивиди е функция от първи ред ; и за по-висши типове аргументи предикативните функции заемат мястото, което функциите от първи ред заемат по отношение на индивидите. Допускаме тогава, че всяка функция на една променлива е еквивалент за всички свои стойности на някаква предикативна функция от същия аргумент. Това допускане изглежда да е същността на обичайното допускане за класове; във всеки случай то удържа толкова от класовете, колкото имаме при всяка употреба и достатъчно малко, за да се избегнат противоречията, които по-нестрого допускане за класовете е склонно да повлече. Ще наричаме това допускане* аксиома за класовете *или* аксиома за редуцируемостта (Whitehead, Russell 1910: 174).

Веднага след това се въвежда вариантът за отношения, на който обръща внимание Винер:

Аналогично ще допускаме, че всяка функция на две променливи е еквивалентна, за всички свои стойности, на предикативна функция на тези променливи, т.е. на една матрица. Това допускане е това, което изглежда се има предвид, когато се казва, че всяко твърдение относно две променливи дефинира отношение между тях. Ние ще наричаме това допускане аксиома за отношенията *или (като предишната аксиома)* аксиома за редуцируемостта (Whitehead, Russell 1910: 174).

Всичко цитирано от първото издание на *Principia* във връзка с аксиомата за редуцируемостта и за смисъла, употребата и разумния обем на понятието клас е дословно повторено във второто издание (Whitehead, Russell 1927: 166-167). Следователно въпреки критиките на аксиомата за редуцируемостта след излизане на първото издание, възгледите на Ръсел и Уайтхед са останали непроменени по отношение на самата нея, но може би не по отношение на обхвата на нейното приложение, който е максимално стеснен, чрез въвеждането на аксиомата за екстензионалността.

Можем да приемем становището на Такеути за съотношението на първоначалната концепцията за разклонена йерархия на типовете и аксиомата за редуцируемостта:

> *Уайтхед и Ръсел се опитаха да построят класическия анализ чрез използване на разклонената йерархия. Те не можаха да направят това и въведоха аксиомата за редуцируемостта, твърдяща че всяко множество от по-висш разклонен тип е вече сред множествата на първия разклонен тип. Но въвеждането на аксиомата за редуцируемостта променя значението на разклонената йерархия и първоначалната идея за разклонена йерархия пропада* (Takeuti 2003: 18).

Нуждаем се от вникване в какво точно се състои това „пропадане" или „промяна за значението" на разклонената йерархия:

Идеята на теорията на типовете е *да се забрани* – като разклонената теория на типовете смекчава забраната само до един и същи клон, – докато аксиомата за редуцируемостта се въвежда, за *да подмени* разглеждането на висши типове. В крайна сметка обаче ефективна разлика няма: и в двата случая висши типове не се разглеждат, а е различно единствено основанието за това: в първия случай – забрана; във втория – сводимост. Забраната имплицира изначална и опасна за логическото здраве на математическите теории *несводимост* на висшите типове към нисшите. Тъкмо затова и в крайна сметка този ход довежда до това, във второто издание да се включи аксиомата за екстензионалността.

Всъщност в нашия контекст най-плодотворна би била първоначалната концепция за типовете, но не поради това, че приемаме нейните забрани, а защото тя тематизира много важното за нас съвместно разглеждане на различни типове, включително и по един клон. Всъщност аксиомата за редуцируемостта дава възможно най-простото решение на този проблем, но заедно с това и *го снема от обсъждане*.

Време е отново да съотнесем нашия подход с перспективата за непосредствено обсъждане на т. нар. теореми за непълнотата на Гьодел. Тъй като съдържанието – както и множество интерпретации с различна степен на отдалечаване и различно количество допълнителни допускания – на двете теореми на Гьодел е добре известно, нека отложим разглеждането на оригиналните текстове още малко, а да продължим с вече намекната „дуалистично питагорейска” философска перспектива, чиято пряка насоченост е по-скоро към квантовата информация и към поставянето ѝ в собствено онтологични рамки.

Най-общата скица на подхода е следната: освен на първата теорема на Гьодел за непълнотата, да обърнем внимание и на теоремата на Мартин Льоб (1955) за връзката между наличие на гьоделов номер и това, че твърдението следва от собствената си доказуемост; също така и скицата на доказателството на теоремата на Герхард Генцен (Gentzen 1938: 26), показваща, че при по-слаби[14] изходни предпоставки аритметичните системи могат да бъдат пълни и следователно да съдържат доказателство за собствената си непротиворечивост на основата на единството на двата главни подхода за ординален анализ на формални теории (Buchholz 1997). Философското тълкуване ще се стреми да покаже, че дуалните (в един точен и формализируем смисъл) аритметични системи могат да бъдат пълни и че монистичните аритметични системи са необходимо непълни, което ще представлява и конкретната интерпретационна рамка, в която ще се поставят Гьоделовите теореми за непълнотата.

В по-големи и вече собствено логически детайли, следва да се уточни при какви условия доказуемостта от себе си е равносилна на твърдението, че това твърдение следва от себе си. В резултат, изводимостта би могла вече да се разглежда като свойство на определен клас твърдения, без оглед на една или друга аксиоматика, в която те са изводими или неизводими; с други думи, да се ограничи (или обобщи, в зависимост от гледната точка) обсъждането до твърденията, изводими или неизводими във *всяка* аксиоматика. Така може да се построи мост за интерпретиране на теоремата на Коушън – Шпекър (Kochen, Specker 1968: 70), която макар и логическа по характер се отнася до отсъствието на „скрити параметри” в квантовата механика,

[14] А не при по-силни предпоставки, каквото е разпространеното недоразумение.

в термините на теоремите на Гьодел за непълнотата: налице е скрито противоречие, което чрез теоремата на Коушън – Шпекър се експлицира, между наличието на определена истинностна стойност на едно твърдение (вярно/ невярно) и неговата „неконтекстуалност”, т.е. независимост от „контекста” на определена аксиоматика[15]. С други думи, двете предпоставки на една вече логически интерпретирана теория на „скритите параметри”, са „допълнителни”: или истинностната стойност на всяко едно твърдение е определена, но заедно с това контекстуално обусловена, или обратно, истинностната стойност на едно твърдение е контекстуално независима (от всяка една аксиоматика, т.е. явява се свойство на това твърдение, а не отношение спрямо дадена аксиоматика), но заедно с това е неопределена: фигуративно казано, представлява произволна суперпозиция на двете „ортогонални” състояния – истинно и неистинно. По подобие на Шрьодингеровата котка (Schrödinger 1935: 812) – при това

[15] В тази връзка е уместно да се спомене семантичната концепция за истината на Тарски, според която „*понятието за истина никога не съвпада с това за доказуемост*, понеже всички доказуеми твърдения са истинни, но има истинни твърдения които не са доказуеми” (Tarski 1944: 354). Следва да се има предвид, че тя представлява по-скоро металогическа и философска позиция, макар и съзвучна с т. нар първа теорема за непълнотата на Гьодел и чрез нея и по-опосредствано – с т. нар. втора теорема за непълнотата и с теоремата за пълнотата. От скицираното в настоящото изложение би трябвало да приемем, че това е неразрешимо, и то собствено философско твърдение, от което и произтича неговата неразрешимост (за разлика напр. от сродната т. нар. първа теорема за непълнотата, чиято неразрешимост има логически произход, бидейки и формализируема). Начинът на пренебрегване на въпроса за самореференциалността на т.нар. първа теорема от страна на Гьодел изглежда сходен със същността на концепцията на Тарски за истината, още повече, че самият той я въвежда също и с оглед изолиране на антиномии от типа на Лъжеца (Tarski 1944: 347-348). Така или иначе остава проблемът, че Гьодел веднъж прилага формализиран довод, основан и по собствените му думи на антиномии от типа на Лъжеца, следователно в собствено логически контекст, но заедно с това пропуска аналогично прилагане на метаравнище, неявно споделяйки концепцията на Тарски за истината (тогава – 1931 г. – последната още не е съществувала или поне не е била експлицирана и публикувана). Обратно, ако приемем формализируемостта – сложен или неразрешим проблем – на концепцията на Тарски или на алтернативна на нея при условията на т. нар. първа теорема за непълнотата, би могло да се обсъжда в собствено логически план самореференциалността или несамореференциалността на последната. Въпросите за връзката на теоремата на Гьодел с концепцията на Тарски за истината са в основата на подхода предложен от Смулян (Smullyan 1982), същността на връзката е положена още в първи параграф на първа глава (Smullyan 1982: 5-9). Може да се добави и следното наблюдение за отношението на Гьодел към понятието за истина: „От всичко това можем да заключим, че понятието за истина в аритметиката беше за Гьодел определено обективно понятие и че той беше достигнал до неопределимостта на това понятие в аритметиката през 1931 г. От друга страна, той не го твърдеше това като резултат (макар да направи така по-късно и независимо от Тарски в 1933 г.) и той взе мерки да отстрани понятието за истина в основните резултати от 1931 г. Това повдига редица въпроси, първият от които: Защо?“ (Dawson 2003: 106).

не е просто аналогия, а морфизъм, – твърдението „само по себе", т.е. преди да сме го „измерили" в даден контекст, формализиран чрез фиксирана аксиоматика, е „вярно-и-невярно" (както тя е „жива-и-мъртва").

35. Подходът на Генцен, аксиомата за фундираността и аксиомата за избора

Подходът на Герхард Генцен (Gentzen 1936) ще ни помогне да разкрием същностната връзка между аксиомата за фундираността и монистичното разглеждане. Съществува ли такова безкрайно множество, чието множество от подмножества да съвпада с него? И при крайните множества – като такова например може да се обсъжда празното множество или съдържащото един елемент – това е въпрос на конвенция, на дефиниция на множество от подмножества: дали съдържа $\mathbf{2^{N}}$ или $\mathbf{2^{N}} - \mathbf{1}$ елементи, където $\boldsymbol{N}$ е кардиналното число (броят) на елементите на изходното множество. В качеството на „единично" безкрайно множество се разглежда такова с мощността на естествените числа. Сега аксиомата за фундираността, която забранява „бездънните" множества, се оказва еднакво валидна за крайните и безкрайните множества и представлява своеобразна основа както за стандартната, така и за трансфинитната индукция. Но трансфинитната индукция, а по подобие на нея и стандартната, може да се обоснове и без помощта на аксиомата за фундираността – в една все пак не напълно еквивалентна форма, – при което тя може да се прилага както към обичайните „фундирани", така и към нестандартни „бездънни" множества. В тази формулировка, индуктивният извод е валиден $\forall \boldsymbol{n}$, ако е валиден (2) за $\boldsymbol{N}$, (1) за $\forall \boldsymbol{n} < \boldsymbol{N}$ и (3), ако от (1) следва (2).

Аксиомата за фундираността трябва да се разграничава от добрата наредба, тясно свързана или произтичаща от аксиомата за избора.

Теоремата на Генцен (Gentzen 1936: 555) в оригиналната си формулировка приема аксиомата за фундираността и трансфинитна „единица", чрез която да се обоснове втората, трансфинитна индукция, аналогична на първата, финитна. Трансфинитно разширена, една аритметична система може да бъде пълна и да съдържа доказателство за собствената си непротиворечивост. Така построена, аритметичната система е очевидно „дуална", тъй като трансфинитните разглеждания са допълнителни (в смисъла на едновременно невъзможни) със стандартните аритметични, понеже заставайки на едната позиция, независимо коя, другата „се слива" до една единствена стойност: било то „$\mathbf{0}$", или „∞".

Тази ситуация със сливане на дуалното разглеждане до неразличимост, заставайки на една от двете допълнителни позиции, всъщност е твърде поучителна, защото позволява да се осмисли и впоследствие обобщи положението в теорията на относителността (да говорим в качеството на най-прост пример за специалната теория на относителността): втората същност, светлинната, т.е. на обекти без маса на покой, от гледната точка на притежаващите, маса се „свива" до една единствена скорост, „c" и се преобразува в изотропна повърхност, всички разстояния върху която по определение са нулеви, следователно изотропната повърхност може да се тълкува като „повърхност-точка" (Minkowski 1909: § III [8]).

Но ако преминем към формулировка на трансфинитната индукция без помощта на аксиомата за фундираността (независимо дали тя бъде запазена, заменена с отрицание или пренебрегната) по описания по-горе начин, може да се построи дуална аритметична система – и следователно възможно съдържаща доказателство за собствената си непротиворечивост вътре в себе си – само върху целите числа, но освен естествените: и нулата, и отрицателните числа. При това ще съществуват твърдения и с отрицателен (еквивалентно трансфинитен) гьоделов номер, какъвто по определен начин ще може да се приписва на неразрешимите твърдения. Така ще се появи взаимна неразрешимост, произтичаща от Гьоделовата неразрешимост, в пряка връзка с едновременно неразрешимите твърдения, в рамките на подхода на фон Нойман за „квантова" логика на проекционните оператори в хилбертово пространство (Neumann 1932: 130-134).

36. Ψ-функцията като число в обобщена бройна система

Съотношението за неопределеност – все едно чрез „логаритмуване" – при такива дуални системи, базирани на цели числа, преминава от мултипликативен в адитивен вид:

$$\boldsymbol{\Delta x \Delta p \geq h \xrightarrow{\text{преминава в}} ln\Delta x + ln\Delta p \geq ln\, h}$$

На това място все още няма да се обсъждат условията за възможност на такъв преход, както и на обратния; същественото от философска гледна точка, аксиомата за фундираността, вече се спомена. Бадиу е този, който подчертава не просто нейното философското значение, а това, че тя е „метаонтологична теза на онтологията" (Badiou 1988: 208):

> *Според тази аксиома, винаги съществува в съществуващо множествено-едно представено чрез него множествено, такова че то е на ръба на пустотата относно първоначалното множествено* (Badiou 1988: 208).

Следователно според тази аксиома, тълкувана като „метаонтологична" теза, преходът от 'нищо' към 'нещо', респ. от 'небитие' към 'битие', е винаги дискретен: скок от пустотата през ръба на нещото в него самото.

Понятието и особено количествената величина на информацията (Kolmogorov 1965) изисква (интегрална) сума от произведения на числа и логаритми, следователно и съвместното съществуване на мултипликативни и адитивни дуални аритметични системи, като първите имат смисъл на стойности или цифри в бройна система, а вторите – на разреди или степени на основата на бройната система.

Вече е налице достатъчен фундамент за това, най-малкото да може да се изкаже хипотезата, че $\boldsymbol{\Psi}$-функцията представлява стойност на число в ***дуална*** *бройна система*, чиято аритметика е и (1) необходимо или (2) възможно пълна (трябва или може да съдържа доказателство за собствената си непротиворечивост в себе си). Засега може да се постави само като въпрос разликата и условията на (1) и (2), поради това, че релевантните понятия все още не са въведени.

37. Теоремата на Мартин Льоб за пропозицията, твърдяща доказуемостта си

Да преминем към теоремата на Мартин Хуго Льоб (Löb: 1955).

Тя може да се изкаже под формата на импликация, а именно:

От това (1), че от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, то *следва* (2), че от твърдението за неговата доказуемост следва самото то.

Обратното твърдение, че от (2) *следва* (1) обикновено не се формулира като теорема, не защото е невярно, а защото се счита за тривиално.

Налице е следователно равнозначност на (1) и (2):

Ако от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, то цялата тази импликация е равнозначна на импликацията, че от собствената доказуемост на твърдението следва самото то.

Теоремата е доказана, за да се реши като следствие задача, поставена от Леон Хенкин три години преди това в същото списание (Henkin 1952: 160). Ако $\boldsymbol{\Sigma}$ е коя да е стандартна формална система, адекватна за рекурсивната теория на числата, може да се построи формула (имаща цялото число q като свой гьоделов номер), която изразява пропозицията, че формулата с гьоделов номер q е доказуема в Σ. Дали тази формула е доказуема, или независима в Σ?

Буквално Мартин Льоб е записал – след като в бележка под линия отбелязва, че в първоначалния вариант теоремата е формулирана непосредствено като решение на задачата на Хенкин, а тази формулировка е по препоръка на рецензента – своята теорема така:

> Теорема: *Ако* $\mathfrak{S}$ *е произволна формула, такава че* $\mathfrak{B}(\{\mathfrak{S}\}) \rightarrow \mathfrak{S}$ *е теорема, то* $\mathfrak{S}$ *е теорема* (Löb 1955: 116).

Непосредствено под нея е формулирано като следствие решението на задачата на Хенкин, а именно: *твърдението според нейното условие е теорема* (не е независимо твърдение в Σ).

Нерядко теоремата се обсъжда като ход на мисълта, провокиран от този в първата теорема на Гьодел за непълнотата: вместо твърдение, твърдящо собствената си недоказуемост (своеобразен аналог на Лъжеца от парадокса за него: Gödel 1931: 1975), да се разгледа твърдение, което – обратно – твърди собствената си доказуемост.

Друга формулировка на теоремата на Льоб е::

> *Еквивалентни са (1') и (2'):*
>
> *(1') От това, че от теория, съдържаща аритметиката на Пеано, следва Гьоделов номер за дадено твърдение, следва самото твърдение.*
>
> *(2') От теория, съдържаща аритметиката на Пеано, следва самото твърдение* (Сморинский 1983: 33).

Следователно необходимо и достатъчно условие дадено твърдение да е доказуемо в дадена теория, която, поради това че съдържа аритметиката на Пеано, позволява да му се определи Гьоделов номер, е самият този Гьоделов номер.

От философска гледна точка особен интерес представляват свойствата „коректност" (всичко доказуемо е истинно) и „пълнота" (всичко истинно е доказуемо: за всяко твърдение е доказуемо или то, или неговото отрицание) на теорията (Сморинский 1983: 32).

Нека разгледаме теоремата на Льоб за една коректна и пълна теория. За нея би било валидно:

От това (1”), че от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, тогава и само тогава (2”), когато от твърдението за неговата истинност следва самото то.

Но ако твърдението за истинността на едно твърдение $\boldsymbol{P}$ е еквивалентно на самото твърдение: $\boldsymbol{P} \leftrightarrow \{\boldsymbol{P}\ \text{е истинно}\}$, то в случая на коректна и пълна теория би било валидно:

Наличието на Гьоделов номер е еквивалентно на това, че дадено твърдение следва от себе си.

38. Редундантната концепция на Рамзи за истината

„$\boldsymbol{P} \leftrightarrow \{\boldsymbol{P}\ \text{е истинно}\}$” е по същество една метаматематическа хипотеза; тя има прекалено общ характер, за да бъде обсъждана в качеството на аксиома. По-скоро заслужава название „концепция за истината” и това е т. нар. редундантна концепция за истината, обикновено приписвана на Франк Рамзи: поредният отишъл си твърде рано математик (1903-1930).

В контекста на една негова, малко по-ранна работа „Истина и вероятност” (Ramsey 1978: 58-100), т. нар. редундантна концепция за истината може да бъде тълкувана[16] като приписване вероятност единица на дадено твърдение в смисъла на пълна достоверност или убеденост в него.

Нека се обърнем за интерпретация към квантовата механика. Според използвания тук класически подход на фон Нойман налице са хипермаксимални оператори, които са физически величини (Neumann 1932: 170), и проекционни оператори, които са съждения относно тези физически величини (Neumann 1932: 130-134) и могат да приемат стойности „$\mathbf{0}$” и „$\mathbf{1}$”. Освен това $\|\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q})\|^{2}$ е вероятността микрообектът $\boldsymbol{Z}$ с тази вълнова функция да се окаже в състояние $\boldsymbol{q}$. Нека при тези предпоставки обсъдим проекционния оператор – да го означим със $\boldsymbol{Z}$, – който съответства на съждението „Микрообектът $\boldsymbol{Z}$ е в състояние $\boldsymbol{q}$”. Пред нас се откриват две възможности. Едната е да отъждествим $\boldsymbol{Z}$, с която да е *пълна* съвкупност от едновременно измерими величини, и тогава $\boldsymbol{Z}$ съществува и приема стойност $\mathbf{1}$ – вярно, $\mathbf{0}$ – невярно. Другата

[16] Привеждан като редундантна концепция за истината, възгледът на Рамзи съществено се обеднява: за неговите пренебрегвани аспекти може да се прочете в работата „Рамзи за истината и истината за Рамзи” (Le Morvan 2004).

е да отъждествим $\boldsymbol{Z}$ със съвкупността от всички, макар и *неедновременно* измерими величини и тогава $\boldsymbol{Z}$ не съществува.

Ще покажем, че в последна сметка в първия случай е приета аксиомата за избора, а във втория – не. В първия случай можем да останем в рамките на хипотезата за скритите параметри по един особен начин, който да я примирява с положенията и експериментите на квантовата механика, и на причинността в смисъла на фон Нойман, докато във втория случай бихме постулирали като най-изначална случайността и следващата оттук интерпретация на квантовата механика бихме могли да наречем радикално Копенхагенска[17] в смисъл, че се явява краен вариант на последната.

Основа за сравнението на метаравнище за двете интерпретации може да бъде концепцията на Рамзи за истината, като при тази предпоставка би се оказало, че нещата в края на краищата опират до сравняването на субективна и обективна вероятност (Ramsey 1978: 59; 2001: 188) и съответните им „истини" в смисъла на Рамзи (Ramsey 1978: 58-100).

Ако приемем съществуването на оператора $\boldsymbol{Z}$ по начина, по който е дефиниран да получава стойност или „$\mathbf{1}$", или „$\mathbf{0}$", то разпределението на вероятността $\boldsymbol{P}$: $\boldsymbol{q} \xrightarrow{\boldsymbol{P}} \|\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q})\|^2$ е статистика на елементарните събития, всяко от които представлява прилагане на проекционния оператор $\boldsymbol{Z}$ към вълновата функция на квантовия обект $\boldsymbol{Z}$. В този случай в качеството на скрит параметър можем да разгледаме времето. До противоречие с квантовата механика не се достига, тъй като този скрит параметър е невъзпроизводим. Не е възможно да повторим измерването, за който и да е момент $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_0}$ просто поради това че той е отминал, а времето е необратимо.

39. Обща основа за парадокса на Лъжеца и на Стрелата

Пред нас се открива една твърде особена връзка между парадокса на Лъжеца, този на Стрелата и сентенцията, приписвана на Хераклит: „Не можеш два пъти да влезеш в една река":

Времето и оттук, физическата величина на времето, забранява самореференциалното прилагане, оттук и парадоксите, свързани с последното, следователно и каквато и да било неразрешимост, на следното основание:

„Аз лъжа" не може да се отнесе за миналия момент, в който е изказано, затова самореференциалната употреба е забранена.

[17] Разбира се, и самият термин „Копенхагенска интерпретация" се нуждае от редица уточнения (напр. Jammer 1974: 85-251).

„Стрелата не е тук” не може да се отнесе към настоящия момент, вече отминал, в който е изказано твърдението, т.е. пак не се допуска самореференциалната употреба.

Чрез времето в качеството на аргумент за всяка функция на физическа величина се постулира, че тя може да се нареди добре[18] и с това също както аксиомата за избора, така и всеобща валидност на принципа на причинността. Ако се приеме следният уточнен вариант на аксиомата за избора, че безкраен избор може да се направи, но не може да се повтори, респ. че всяко множество може да се нареди добре, но не и втори път по същия начин, то подходите на Айнщайн и на Бор към квантовата механика се оказват примирени по следния начин:

В квантовата механика съществува скрит параметър, който определя причинно дисперсията на физическите величини статистически. Това съществуване може обаче да се твърди единствено на основата на аксиомата за избора и следователно този параметър не може да се посочи, респ. не може да се построи (не е конструктивен). Много деликатен в логическо (а и в онтологическо) отношение е въпросът дали като такъв не може да се приеме физическата величина на времето.

За да го обсъдим, да се върнем към това, че предпоставка за разглеждането на вероятностното разпределение $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q})$ в качеството на статистика, използвайки проекционния оператор $\boldsymbol{Z}$, е съществуването на последния. На свой ред това изискваше обектът $\boldsymbol{Z}$ да бъде отъждествен с пълната съвкупност от едновременно измерими физически величини. За нас сега остава въпросът какво да правим, ако обектът $\boldsymbol{Z}$ (нека сега го означим със $\boldsymbol{Z}'$) се отъждестви с дуалната съвкупност от едновременно измерими величини и следователно с коя да е друга, различна съвкупност едновременно измерими величини. За да продължат да бъдат примирени подходите на Айнщайн и на Бор към квантовата механика (Пенчев 2009: 34-50), е необходимо: $\boldsymbol{Z} \neq \boldsymbol{Z}'$. Един начин, вече предложен и експлоатиран в настоящата работа, е да се интерпретира последната нетъждественост чрез двойно време, да речем на квантовия обект и на уреда, което да приема в общия случай напр. комплексни стойности. Такъв подход е тясно свързан с посоченото уточнение на аксиомата за избора, което

[18] Става дума фактически за прилагане на две сходни и в съществените аксиоматики еквивалентни позиции, а също така и с аксиомата за избора: ‘всяко множество може да се нареди добре’ (Rubin, Rubin 1985: 12) и ‘винаги съществува декартово произведение между две множества’ (Rubin, Rubin 1985: 8).

нататък също така ще бъде означавано като аксиома за неповторимия избор, или просто „неповторим избор”, респ. в другия случай – „повторим избор”.

Ситуацията „$Z \neq Z'$ “ обаче може да се тълкува и на основата на повторимия избор като тогава би се избягнала или пропуснала възможността явленията на сдвояване да се отъждествяват с гравитационните, бидейки иначе обединявани и разграничени съответно в квантовия и в макроскопичния свят.

Най-прецизното, което може да се каже, относно твърдението, че физическата величина на времето е (единственият) „скрит параметър” в квантовата механика, е, че то е неразрешимо, но приемането на едната или другата алтернативна хипотеза в качеството на аксиома води до принципно различни теории, които *засега* са експериментално непроверими (най-малкото заради това, че още не са формулирани експлицитно). Неразрешим е също така проблемът, как да се разбира „засега”: само по отношение на човешкото познание или по отношение на самото състояние на нещата (зависещо от действията ни в настоящия или бъдещи моменти, т.е. от нашия избор). Току-що формулираната позиция не е задължително да се осмисля в термините на интуиционизма и неговата логика.

Нека сега, постепенно приближавайки се към подхода на Рамзи към истината, да приемем за неразрешими всички твърдения, които не са едновременно разрешими с дадените и за разрешими всички, които са едновременно разрешими с дадените. Обиграният в „козните” на самореференциалността читател, предполагам, вече е „настръхнал” от такова определение за неразрешимост: „неразрешими са всички твърдения, които не са едновременно разрешими с дадените”; навярно тогава биха съществували твърдения, за които няма да може да се каже дали са разрешими или неразрешими, т.е. самото твърдение за неразрешимост не е (винаги) разрешимо.

Рамзи пише:

> *Но преди да продължим по-нататък с анализа на съждението е необходимо да кажем нещо относно истината и лъжата* [falsehood]*, за да покажем, че няма отделен проблем за истината, а само лингвистична среда* [middle]*. Истина и лъжа са приписани първично на пропозициите. Пропозициите, на които те са приписани, могат да бъдат или експлицитно дадени или описани. Да предположим сега, че е експлицитно дадена; тогава е очевидно, че ‘Истина е, че Цезар е убит’, не значи повече отколкото, че Цезар е убит, и ‘Лъжа е, че Цезар е убит’ значи, че Цезар не е убит. Има фрази, които използваме за подчерта-*

ване или по стилистични причини, или за да посочим позицията, заемана от твърдението в нашия аргумент. Така също можем да кажем, „Факт е, че той е убит" или „Че той е убит, е обратно на факта" (Ramsey 1978: 44).

И малко по-нататък:

Когато се въведат всички форми на пропозиция, анализът е по-сложен, но не е съществено различен; и е ясно, че проблемът не е що се отнася до природата на истината и лъжата, а що се отнася до природата на съждението или твърдението… (Ramsey 1978: 45).

В работата на Рамзи „Истина и вероятност" (1928) „теорията на вероятността е взета като клон на логиката, логиката на частичната убеденост и незаключителния аргумент" (Ramsey 1978: 59). За целта той въвежда „Степени на убеденост" (68-86), показва различни начини за тяхното измерване като непрекъсната физическа величина и предлага аксиоматика. По-нататък разграничава логика на непротиворечивостта, относно която е валидна неговата концепция за истината, която не случайно бива наречена впоследствие редундантна концепция за истината, тъй като предикатът 'истинен' (респ. 'неистинен') е просто излишен (не добавя нищо в повече), от *логика на истината*, която отъждествява с индуктивната логика: на всяко съждение може да се припише степен на убеденост в интервала на крайните стойности между 'истина' и 'лъжа'. Чрез противопоставянето между т. нар. субективна и обективна вероятност концепцията на Рамзи се описва в едри щрихи така:

Първата е предмет на логиката и чрез понятието „степени на убеденост" може да се придаде съществен смисъл на това за истина, докато втората – на физиката и статистиката.

Наистина общата разлика на мненията между статистиците, които в по-голямата си част приемат честотната теория на вероятността, и логиците, които най-вече я отхвърлят, се отнася вероятно до това, че двете школи обсъждат реално различни неща и че думата 'вероятност' е използвана от логиците в един смисъл, а от статистиците в друг (Ramsey 1978: 59).

Направеното малко по-горе разглеждане, от една страна, и отъждествяването на „логиката на истината" с индуктивната логика от Рамзи, от друга, ни позволява едновременно да разграничим и обединим „логическото" и „статистическото" понятие за вероятност чрез дискусията около физическата величина на времето, в т.ч. и в квантовата механика. Към нейния „портрет" бихме могли да добавим следния щрих:

На основата на Скулемова относителност (Пенчев 2009: 318 и сл.) (при валидност на аксиомата за избора) между канторовските видове безкрайност и дори между крайно и безкрайно, физическата (непълната) и математическата (пълната) индукция могат да се отъждествят чрез следното съответствие $\boldsymbol{V}$: при предпоставките за валидност за 'начално число $\overset{V}{\leftrightarrow}$ момент от време' и за 'функцията наследник $\overset{V}{\leftrightarrow}$ причинна връзка' на дадено твърдение следва неговата истинност за 'всички числа, по-големи или равни на началното $\overset{V}{\leftrightarrow}$ началният и всички следващи моменти от време'. Обратно, начинът и степента на отхвърляне на причинната връзка в квантовата механика заедно с валидност на аксиомата за избора, която гарантира съществуването на '$\boldsymbol{V}$', биха въздействали – което е в подкрепа на нашето т. нар. дуалистично питагорейство – на може би най-продуктивната в пеановската аритметика аксиома, тази за пълната (математическата) индукция.

Да се върнем отново към теоремата на Льоб за една коректна и пълна теория, за която би било валидно, че от това (1"), че от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, следва тогава и само тогава (2"), когато от твърдението за неговата истинност следва самото то.

Съществува ли обаче коректна и пълна теория? Според теоремата на Гьодел, не и ако „съдържа" аритметиката на Пеано, смисълът на което е, че за доказуемите в нея твърдения съществува гьоделова номерация и тя е взаимно-еднозначна: за всяко доказуемо твърдение точно един Гьоделов номер.

Нека отбележим нещо много важно: първо, за *хипотетичната коректна и пълна теория* щеше да е в сила, че всички твърдения, които следват от себе си, са доказуеми. Обратно, твърденията, които не следват от себе си, няма да бъдат доказуеми *в нея*.

Малко по-нататък, чрез теоремата (1936) на Герхард Генцен ще покажем по начин[19], достатъчен, за да бъде включена трансфинитната индукция в нея, можем

[19] По този начин условията на първата Гьоделова теорема за непълнотата се обезсилват, тъй като изискването да съдържа аритметиката на Пеано в действителност е много силно и ненужно: не се изисква като нейно условие. То се използва като общоприет (и неточен) прост израз вместо твърде сложните за описание, но много по-слаби условия. *Условието,*

да получим лелеяната, досега хипотетична *коректна и пълна теория*, относно която ще е валидно, че всички твърдения, които следват от себе си, ще бъдат доказуеми в нея. Може да се предположи, че твърденията, които не са доказуеми в нея са логически допълнителни в смисъла на фон Нойман с доказуемите в нея; тоест, съждение за валидност на недоказуемите твърдения не може да се твърди заедно със съждение за валидността на доказуемите твърдения.

Нека отбележим още нещо много важно: второ, нека за тази коректна и пълна теория да допуснем, че не е пълна, например озадачени от факта, че сме получили теория, която не се включва в условията на първата теорема на Гьодел за непълнотата не като е отстранена, а като е *добавена* аксиома към аксиоматиката на Пеано (а именно в случая – за трансфинитната индукция); тоест, че твърденията, които не следват от себе си, всъщност следват от себе си и също така са доказуеми, но ако се добавят допълнителни, неизвестни, да ги наречем с подчертан намек *скрити* аксиоми. С други думи, да разгледаме наличието на недоказуеми твърдения в тази – за нас вече само привидно – коректна и пълна теория като свидетелство за нейната непълнота (без да поставяме под въпрос нейната коректност).

По този начин ще се опитаме да възпроизведем и пренесем несъгласията и съмненията на Айнщайн относно квантовата механика на един логически език. Понататък с помощта на теоремата на Коушън-Шпекър (Kochen, Specker 1968: 70) ще покажем, че ако „скритите аксиоми” са независими от предполагаемо непълната теория, те не могат да следват от себе си, или с други думи, да имат определена истинностна стойност. Също и обратно, ако те следват от себе си, непременно са зависими от набедената за непълна теория. Следователно съществува доказателство от противното, че теорията е пълна.

Сморински (1983: 34) в друг, макар и косвено свързан с настоящия контекст, отбелязва, че теоремата на Льоб представлява обобщение на теоремата за непълнотата. На пръв поглед изглежда това да не е така: тя е само паралелна; докато теоремата за непълнотата визира твърдения, които не са доказуеми, то теоремата на

което всъщност „се атакува”, т.е. реално се отслабва с добавянето на трансфинитната индукция е да съществува *взаимно еднозначно* съответствие между доказуемите твърдения и техния Гьоделов номер. Много грубо казано, сега за всяко твърдение съществуват поне два Гьоделови номера: един финитен и един трансфинитен, чрез което теоремата престава да бъде в сила за този случай, тъй като той не влиза и не се поддава на включване в рамките на нейните условия. Разбира се, това е само необходимо, но не и достатъчно условие за валидността на теоремата на Герхард Генцен, каквото обаче също е налице.

Льоб – такива, които са доказуеми. Тя обаче е обобщение в смисъл, че е валидна както за твърдения в непълни аритметични системи (в съответствие с първата теорема на Гьодел за непълнотата), така и за пълни аритметични системи (в съответствие с теоремата на Генцен и други подобни).

40. Подход към проблема за пълнотата на Пеановата аритметика

В рамките на нашите интереси въпросът за пълнотата на аритметиката (например с аксиоматиката на Пеано) има подчинена роля по отношение на въпроса за пълнотата на квантовата механика, от който собствено покълва и израства дисциплината „квантова информация". Въпреки това обаче е налице специфична концепция за пълнотата в аритметиката, която съответства и произтича в известна степен от опровергаването, включително и експериментално, на предложената от Айнщайн хипотеза за непълнотата на квантовата механика. Между другото можем да отбележим следното:

> *Нито Айнщайн, нито Гьодел (обратно на преобладаващото мнение във физическата общност по онова време) смятаха квантовата теория да е част от окончателното обзавеждане на физиката* (Wang 1996: 38).

Такъв подход към евентуална пълнота на Пеановата аритметика се основава на няколко изходни положения:

1. От четирите типа „неподвижни точки" на предиката, представляващ Гьоделовия номер, т.е. от четирите възможни типа пропозиции, твърдящи или отхвърлящи собствената си доказуемост, наричани самореференциални, само споменатите вече изречения на Хенкин – като следствие от теоремата на Льоб – са доказуеми и следователно разрешими. Именно тяхното обсъждане следва да се постави в основата на пълнотата на аритметиката.

2. Следва да се търси доказателство за пълнота не на самата Пеанова аритметика, защото: а) това е изключено от втората теорема на Гьодел за непълнота; б) евентуално доказателство на пълнотата на аритметиката с помощта на някаква метатеория не решава големия въпрос, предположен от Хилберт относно аритметиката, за самообосноваващата се и в този смисъл окончателна или изначална теория.

3. Подходът на квантовата механика подсказва аритметиката на Пеано да се допълни с неин дуален двойник, при което обаче да се изключи едновременното разглеждане на двете чрез едно „аритметично" съотношение за неопределеност. В

качеството на такава изглежда най-естествена кандидатурата на трансфинитната аритметика. Крайното и безкрайното са очевидно допълнителни: всички крайни числа се израждат до едно единствено – „$\mathbf{0}$” – от „гледна точка” на трансфинитните числа и операциите с тях; аналогично трансфинитните се израждат до символа „∞” от „гледната точка” на естествените числа.

4. Ако непълнотата се обсъжда като разлика между синтактичната и семантичната пълнота, то изглежда философски обосновано и интуитивно ясно, защо семантично релевантните твърдения, за които „не достига” „Гьоделов синтаксис”, са именно относно *актуалната безкрайност*, с други думи, които са твърдения – или те, или техните отрицания са теореми – от една трансфинитна аритметика. Най-прочутите примери, обсъждани още от Гьодел (Gödel: 1940) – аксиомата за избора и обобщената континуум-хипотеза – явно се отнасят към актуалната безкрайност. Грубо казано, истинните твърдения относно актуалната безкрайност, не могат да получат Гьоделов номер в резултат на операции в една финитна аритметика и остават „неразрешими”.

5. Макар и проблемите със самообосноваването на математиката да се експлицират – а според някои: и да възникват – в резултат на широкото и непрецизно навлизане на актуалната безкрайност посредством Канторовата теория на множествата, понятието за число лесно се дефинира посредством нея[20] и така идеята за актуална безкрайност, се оказва вече косвено включена в аритметиката.

6. Съществува прост начин да се получи трансфинитният „дуален” двойник на Пеановата аритметика, а именно като се добави аксиомата за трансфинитната индукция (макар и двойник, в редица отношения подлежащ на усъвършенстване).

7. Налице е теоремата на Генцен (1936) – известна и обсъждана също така и от Гьодел (Gödel 1938: 107-111; Tait 2010) – и която коректно извежда пълнотата и

[20] А именно като класа от крайни множества, чието кардинално число по определение съвпада с числото $\boldsymbol{n}$, подлежащо на дефиниране. Обаче същото число във всяка една пеановска аритметика се дефинира чрез броене, т.е. чрез $\boldsymbol{n}$ (респ. $\boldsymbol{n-1}$) пъти прилагане на операцията наследник по отношение на първия елемент. В аксиоматиката Цермело-Френкел ‘естествено число’ може да се дефинира и по двата начина; вторият е видоизменен: отъждествяване на $\boldsymbol{n}$-тия ($\boldsymbol{n-1}$-ия) член в редицата, постулирана чрез аксиомата за безкрайността, с поредното естествено число. Обратно: ако ни е необходимо кардиналните и ординалните числа да не са взаимообвързани, съответно – преброените части да не са обвързани с целостта на своята съвкупност строго едно-еднозначно, трябва в една или друга степен да ревизираме тази аксиоматика.

непротиворечивостта, т.е. консистентността на Пеановата аритметика, а на основата на последната – нейната консистентност.

Ако се върнем към Гьоделовата гледна точка, то въвеждането на актуална безкрайност в аритметичната система е „противоречиво" и това е цената, на която – в пълно съгласие с първата теорема за непълнотата – е получена пълнота, с други думи, по недопустим начин.

41. Теоремата на Генцен и принципът на трансфинитната индукция

Преминавайки към теоремата на Герхард Генцен и съответно вече към неговата позиция, трябва да се изтъкне, че използваното от мен позоваване на актуалната безкрайност е нерелевантно, тъй като той определя себе си като конструктивист и дори като финитист:

> *Ако трябва да изразим същността на конструктивисткия възглед като колкото е възможно по-общ принцип, бихме го формулирали както следва: „Нещо* безкрайно *не трябва никога да се разглежда като* завършено, *а само като нещо* ставащо, *което може да се изгражда конструктивно все по-нататък и по-нататък* (Gentzen 1969: 225).

На практика и технически това означава отказ не от понятието за безкрайност, а от това за актуално безкрайно множество и оперирането с такова. От друга страна обаче, по този начин се имплицира и дори неявно се обосновава принципът на трансфинитна индукция.

> *Тази индукция не е нищо повече от разширение на правилото за пълна индукция от естествените числа към трансфинитните ординални числа. Пълната индукция може, както е добре известно, да бъде формулирана както следва. Ако една пропозиция е в сила за числото $\mathbf{1}$ и ако е доказано, че от нейната валидност за всички числа, предшестващи числото $\boldsymbol{n}$, следва нейната валидност за $\boldsymbol{n}$, тогава пропозицията е в сила за всички естествени числа. Ако тук заместим 'естествено число' с 'трансфинитно число', получаваме правилото за трансфинитна индукция. Можем лесно да се убедим в коректността на това правило за първоначалните сегменти на трансфинитна числова последователност. Да предположим, че пропозицията важи за числото $\mathbf{1}$ и е било доказано понататък, че ако пропозицията е в сила за всички числа, предшестващи определено ординално число, то тя е в сила за това ординално число. После се ар-*

гументираме така. Пропозицията е в сила за числото $\mathbf{1}$*, оттук следователно за числото* $\mathbf{2}$*, оттук следователно за* $\mathbf{3}$ *и т.н., оттук за всички естествени числа. Следователно тя е в сила за числото* $\boldsymbol{\omega}$*, точно защото е в сила за всички негови предшественици. По същата причина е в сила за числото* $\boldsymbol{\omega}+\mathbf{1}$*, оттук следователно за* $\boldsymbol{\omega}+\mathbf{2}$*, и т.н., най-накрая* $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{2}$*; и съответно, показваме нейната валидност по-нататък за* $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{3}$*,* $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{4}$ *и т.н., най-накрая следователно за* $\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}$*. Продължавайки по този начин, можем да се убедим във валидността на правилото за трансфинитна индукция чрез изкачване стъпка по стъпка в последователността от трансфинитни ординални числа. Колкото числата стават по-големи, по общо признание ситуацията започва да изглежда доста усложнена, но принципът винаги остава същият* (Gentzen 1969: 231).

Този дълъг цитат си заслужаваше, тъй като адресира почти всички основни моменти на нашето разглеждане:

1. Първо: твърде трудно е да се приеме, че принципът на трансфинитна индукция не използва „срамежливо" и неявно понятието за актуална безкрайност, както впрочем още този за пълната индукция. В противен случай, как можем да твърдим, че една пропозиция е в сила *за всички* естествени числа[21]. По-нататък, как

[21] Собствената позиция на Герхард Генцен е противоположна. Експлицитно тя е изложена по следния начин: „В елементарната теория на числата се натъкваме на безкрайността в най-простата ѝ форма, а именно под формата на безкрайната последователност от естествени числа. Според актуалистк台 интерпретация, можем да разглеждаме тази последователност като завършена безкрайна тоталност, докато конструктивиската интерпретация ни позволява да кажем единствено това: можем да напредваме в числовата последователност и винаги да построяваме нови числа, но не трябва да говорим за завършена тоталност. Такава пропозиция, като всички естествени числа имат свойството $\mathfrak{B}$, например, има във всеки от случаите донякъде различен смисъл. Според актуалистката интерпретация тя значи: свойството $\mathfrak{B}$ важи за всяко число, което може да бъде някак отделено от пълната тоталност числа. Според конструктивистката интерпретация можем да кажем единствено това: независимо колко далеч сме напреднали в образуването на нови числа, свойството $\mathfrak{B}$ продължава да е в сила за тези нови числа. На практика, тази разлика в интерпретацията тук, обаче, е несъществена. Една пропозиция относно всички естествени числа е законно доказана чрез пълна индукция, и този извод изглежда да е в хармония също така и с конструктивистката интерпретация; тъй като пълната индукция се основава преди всичко на идеята за *напредването* ни в числовата последователност" (Gentzen 1969: 225). Изглежда вън от всякакво съмнение, че за целите, които си поставяме в настоящата работа, трябва да се облегнем на актуалистката интерпретация. За да разгледаме безкрайността като дуална на крайността, неминуемо трябва да приемем съществуването ѝ на собствено основание наред с крайността. Към това може да се прибави и собствено съществуване за целостта, от каквото изглежда съществуването на безкрайността може да се изведе. На безкрайността и на целостта може да се гледа като на

можем да преминем към числото $\boldsymbol{\omega}$ освен като неявно се обосноваваме чрез множеството от *всички* негови предшественици. И съмненията ще продължат при всеки преход от подобен род.

2. Все пак можем да внесем определена яснота, ако разграничим обратими от необратими преходи и заявим, че всички преходи от типа на визираните в т. 1 са само в процес на ставане и поради това са винаги обратими. Напротив преходът към броя елементи на едно крайно множество, който може да се разглежда като завършен, е необратим. Такова тълкуване е съвсем приемливо от гледна точка на квантовата информация и възможно плодотворно във връзка с теорията на квантовия компютър. Действително, всяка измерена физическа величина е крайно число, процесът на измерване е необратим, а терминът „потенциално", „обратимо" относно нейното „съществуване" добре характеризира главното в $\boldsymbol{\Psi}$-функцията.

3. Принципът на трансфинитната индукция разглежда крайното и безкрайното напълно еднообразно, като аксиомите на Пеано се обобщават по един – бих го нарекъл многозначително – *самореференциален* начин. Наистина, лесно можем да получим ординалните числа от аксиомите на Пеано, като заменим първия елемент – „$\mathbf{1}$" в оригиналната формулировка или „$\mathbf{0}$" в повечето съвременни – с цялата Пеанова аритметика. Тогава, за да преминем към „$\mathbf{2}$" (респ. „$\mathbf{1}$"), обаче в качеството ѝ на следващата единица, т.е. към следващия първи елемент, обичайно означаван като първото трансфинитно число $\boldsymbol{\omega}$, трябва да пробягаме цялата изходна Пеанова аритметика с нейния обичаен първи елемент. За да получим първи елемент $\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}$, трябва да повторим операцията на самореференциално заместване. Ако приложим $\boldsymbol{\omega}$ пъти самата операция на самореференциално заместване, ще получим поредния качествено нов първи елемент, в случая – $\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\omega}}$. Означавайки като операция $\boldsymbol{\Omega}$ прилагането $\boldsymbol{\omega}$ пъти на самата операция по самореференциално заместване на единицата и оставим на интуицията на читателя да продължи до евентуалния смисъл на $\boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{\Omega}}$, ние все пак ще достигнем до „дъно" при пропадането в тази на пръв поглед „лоша" безкрайност, гарантирано от съществуването на ординала $\boldsymbol{\varepsilon_0}$, такъв че $\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \boldsymbol{\varepsilon_0}$, с други думи $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ може да се определи като граница (Gentzen 1938: 38-39; 1969: 278).

единичен обект, но не се ли прави това и когато се присвоява единичният символ **ω** на безкрайно ординално число?

По друг начин ординалът ε_0 може да се дефинира като най-малкия ординал, който изисква ω символи в своята канторова нормална форма, за която става дума малко по-долу.

Примерът със „самореференциалното влагане на Пеановата аритметика в своята единица" е твърде поучителен и в друго отношение. Очевидно така строим множества в нарушение на аксиомата за фундирането. Все пак обаче, въпреки че сме си разрешили безкрайното влагане на елементи, едно „много по-дълбоко дъно" на безкрайното влагане някак си съществува, гарантирано от ординала ε_0. Така се разкрива една същност на аксиомата за фундирането, която насочва – може би произволно – експанзията на безкрайността „навън". Естествен тогава е въпросът дали експанзията на безкрайността „навън", чрез аксиомата (в зависимост от аксиоматиката, възможно – теоремата) за винаги съществуването на множеството от подмножества на дадено множество, от една страна, и от друга, „навътре" – аритметично демонстрирано чрез „самореференциалното влагане на единицата" или теоретико-множествено формулирано чрез една огледална аксиома за винаги съществуването на множество, такова че неговото множество от подмножества съвпада с предварително зададено множество – са еквивалентни, както и сходният проблем за безкрайност от смесена форма: „навън" и „навътре".

4. Еднообразната трактовка на крайното и безкрайното в принципа за трансфинитна индукция означава също така, от една страна, винаги еднообразно броене – няма разлика между функцията „наследник" в Пеановата аритметика и аналогичната при трансфинитната индукция, – а от друга, както изрично подчертава и Генцен, в принципа на индукцията: пълна, „финитна" или „трансфинитна". Ако в граничен преход преминем към едно континуално „броене", то ще получим физическата величина „време", с което донякъде озадачаващо като форма твърдение на Паули, че времето е само число (Pauli 1980: 63), се разкрива в нов, много по-дълбок смисъл.

В тази връзка, според така нареченото четвърто съотношение за неопределеност, а именно между минималната неопределеност при измерване на енергия $\Delta \boldsymbol{E}$ и минималната неопределеност при измерване на време $\Delta \boldsymbol{t}$, се оказваме отново в странната ситуация или да го пренебрегнем повече или по-малко елегантно, повече или по-малко експлицитно, или да приемем валидност на закона за запазване на импулса и фиксирайки абсолютната едновременност $\Delta \boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$ на събития в $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, да предположим произволна квантово-механична флуктуация на съвкупната енергия на системата – $\boldsymbol{E}$, каквато фактически суспендира закона за запазване на енергията.

Както заявява Паули, времето в квантовата механика е само число (Pauli 1980: 63) и за разлика от всички други измерими величини на него не му съответства оператор в хилбертовото пространство. Това произтича от особеното положение на спрегнатата му величина – енергията, чийто оператор комутира и следователно е едновременно измерим с всяка друга (в общия случай – некомутиращи помежду си и значи, непосредствено съвместно неизмерими).

В бележка под линия Паули пише:

> *В по-старата литература по квантова механика, ние, често откриваме операторното уравнение*
>
> $$\boldsymbol{H}t - t\boldsymbol{H} = \frac{h}{i}I,$$
>
> *което възниква от* ($\frac{\hbar}{i}\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{HF} - \boldsymbol{FH}$) *формално чрез заместване на* $\boldsymbol{F}$ *с* t*. Обаче изобщо не е възможно да се построи Ермитов оператор (напр. като функция на* p *и* q*), който да удовлетворява това уравнение. Това е така, защото от съотношенията за комутиране, написани по-горе, следва, че* $\boldsymbol{H}$ *притежава непрекъснато всички собствени стойности от* $-\infty$ *до* $-\infty$*, докато, от друга страна, могат да присъстват дискретни стойности на* $\boldsymbol{H}$*.* Ние, следователно, заключаваме, че въвеждането на оператор t е базисно забранено и времето t трябва необходимо да се разглежда като обикновено число ("c-число") в квантовата механика (Pauli 1980: 63)[22].

Преди да преминем към коментар на изключително важната идея, която се съдържа по силата на нейното отрицание в приведения цитат от Паули, трябва да изясним използваните означения: $\boldsymbol{H}$ е хамилтонианът на системата, операторът на енергия, t – времето, h – константата на Планк ($\hbar = \mathrm{h}/2\pi$), i – имагинерната единица, F – самоспрегнатият оператор на произволна физическа величина, често отъждествяван със самата нея. $\dot{\boldsymbol{F}}$ е нейната първата производна по времето, която се оказва специално за времето, че е идентичният оператор I. p и q са каноничните

[22] Паули цитира работата „Фазови и ъглови променливи“ в квантовата механика (Carruthers, Nieto 1968). Според тези автори обаче „остава да се даде едно определено разглеждане на неопределеността на енергия и време. В частност всички времеви оператори досега (25-28) изглежда да са неопределени математически“ (Carruthers, Nieto 1968: 412).

спрегнати координати в конфигурационното пространство, напр. скорости и позиции. Паули въвежда термините „с-числа" и „q-числа" като първите са обикновени числа, докато вторите са стойности на оператори в общия случай. Най сетне комутационните съотношения, които се цитират (Pauli 1980: 37), са следните:

$$\boldsymbol{p_k q_l} - \boldsymbol{q_l p_k} = \delta_{lk}\frac{\hbar}{i},\ \delta_{lk} = \begin{cases} 1 \text{ за } l = k \\ 0 \text{ за } l \neq k \end{cases}$$

$$\boldsymbol{p_k p_l} - \boldsymbol{p_l p_k} = 0,$$

$$\boldsymbol{q_k q_l} - \boldsymbol{q_l q_k} = 0.$$

Те показват, че (единствено) каноничните спрегнати координати в конфигурационното пространство за един и същи обект от системата не комутират. Тогава обаче законите за запазване – например чрез прочутия мислен експеримент на Айнщайн, Подолски и Розен (Einstein, Podolsky, Rosen 1935) – пораждат противоречие, тъй като позволяват косвено едновременно определяне на некомутиращи и както по-нататък показва Паули – едновременно неизмерими величини (Pauli 1980: 132-133).

Това е вторият начин, по който Паули отхвърля операторния характер на времето, т.е. подобието с всички останали физически величини, запазвайки му статута на обикновено число („с-число")[23]. Първият е когато отстоява закона за запазване на енергията срещу Бор и сподвижници (Bohr, Kramers, Slater 1924) и в крайна сметка предсказва неутриното (Pauli 1930, 1961).

Нека се опитаме да вникнем в тези два начина и особено в тяхното единство. Първият се отнася до противоречието между закона за запазване на енергията и четвъртото съотношение за неопределеност. Наистина, за да се запазва енергията, трябва да е фиксирана, а тогава времето е напълно неопределено.

Вторият довод, който току-що цитирахме, изключва операторния характер на времето чрез аргумент от противното. Ако се допусне такъв характер, от него следва, че енергията трябва да има непрекъснати стойности, докато експериментално са наблюдавани (напр. енергетичните нива на електроните в атома) дискретни позволени стойности, с други думи – дискретен спектър. Но нашият общ патос е тъкмо за обобщаване на Айнщайновата обща ковариантност (Einstein 1918: 241) и за дискрет-

---

[23] Своеобразна ирония на историята е обсъждането на оператор на времето в широкия контекст на философските възгледи на Паули (Primas 2000: 181-203).

ни морфизми. Наистина, ако се приеме относителност на непрекъснатия и на дискретен спектър на енергиите (а такава относителност може да се обоснове по начина, по който Скулем обосновава относителността на понятието за множество), от отрицанието на заключението на довода на Паули следва отрицание на предпоставката: забраната за оператор на времето.

Но сега пред нас изпъква една по-трудна, но собствено по-философска задача: как да интерпретираме, какъв е физическият смисъл на този, да речем само възможен, оператор на времето? Всъщност той е очевиден, но отчайващ: имаме не едно, универсално време, а множество от времена, едва чието математическо очакване ще даде общо, универсално време, в общия случай съвсем различно от тези индивидуални времена.

Да започнем интерпретирането на оператора на времето с въпроса, как да мислим тези индивидуални времена, времена на какво са те? Една възможна скица на отговора е, че са времената на части на системата. Ако системата е адитивна, времената съвпадат и можем да говорим за едно универсално време. Същността на картината не се променя дори и ако преминем към „паралелните светове" от многосветовата интерпретация на квантовата механика, в които – ако и доколкото не взаимодействат – протича едно и също и следователно универсално време.

Колкото по-голяма е степента на сдвояване между частите, следователно, колкото по-значим е факторът „цялостност на системата", мярката за което е неадитивността на частите, то толкова относителната скорост на протичане на самото време в едната част спрямо другата, ще е по-голяма. От това ще следва свръхсветлинно, дискретно (представимо като непрекъснато разпределение на случайната величина местоположение след дискретния скок) и в крайна сметка видимо като гравитационно взаимодействие между частите, еквивалентно на каквото и да потенциално силово поле. Отново и в този случай картината няма да се промени, ако мислим всяка една от взаимодействащите части в качеството на паралелен свят от многосветовата интерпретация.

Тогава операторът на времето, който – видяхме – необходимо изисква обобщена относителност на непрекъснати и дискретни морфизми, ще съответства на разделението на системата на сдвоени части и в крайна сметка – на гравитационното взаимодействие.

Да се върнем сега към „първото неприемане" на времето от Паули в качеството на оператор, но вече в тясна връзка с току-що обсъденото като „второ", т.е. поради необходимата относителност на дискретно и континуално, което той тълкува като противоречие и оттук – като неадекватност на предпоставката за оператор на времето, от която се извежда. Ако приемем, че енергията е определена точно – каквото би следвало да е изискването на закона за запазване на енергията, а това според теоремата на Еми Ньотер (Noether 1918: 238-239) означава инвариантност на групата на транслациите по оста на времето – всяка част е определена точно и има само едно общо универсално време. Т. нар. четвърто съотношение за неопределеност обаче ще изисква пълна (т.е. от минус до плюс безкрайност за времето) неопределеност. Фактически то се премахва и получаваме следния тип картина на представянето: несдвоени части в универсално време с добавена гравитация, която да представи при избрания тип картина ефектите от множествеността на времето, респ. от сдвояването между частите. Доколкото сдвояването е винаги подадитивно, то и антигравитация не се наблюдава.

Как в рамките на така интерпретирания стандартен подход да осмислим валидността на четвъртото съотношение и изискваната от него пълна неопределеност на физическата величина на времето?

Ще изброим три тясно свързани възможности, за да очертаем полето на отговора: време няма. Първата възможност е по-скоро философска – вечността. Втората ни предлага пространството на Минковски, тълкувано не като математическа абстракция, а като реалност (Petkov 2005 121-153). И третата е такава, която преобразува пространството на Минковски в Хилбертовото пространство на квантовата механика. Следователно общото условие на тази триединна възможност е запазването на енергията и в крайна сметка – тъждествеността на нещата. Видяхме, че този тип картина включва няколко, и то тясно и прецизно съгласувани компонента: гравитация, вечност, универсално време, запазване на енергията, тъждественост. Опитваме се да вникнем все едно отвън в този стандартен подход, обикновено и почти винаги приеман за самата реалност, за да изясним, че той е само една възможност, определен начин да се опише положението на нещата и така да разчистим пътя за друг тип описание, почиващо на цялостността, сдвояването на частите на системата, множественост на времената и в крайна сметка – оператор и за времето в квантовата механика.

С броенето, аналогично на неговия физически двойник времето, е спрегнато фундаменталното свойство на индукцията, която – също като оператора, съответстващ на величината на енергията при прехода от квантов обект към макроскопичния уред – определя какво означава „тъждествено” при трансфинитния преход. Заедно с това обаче, едно в този смисъл „тъждествено” свойство не може да се разглежда заедно финитно и трансфинитно: заставайки на една от тези две гледни точки, другата губи определеност. С това „дуално питагорейско” обсъждане на ‘времето–броене’ и ‘енергията–индукция’ – вече се намеква за фундаментално онтологичния характер на някои свойства на математическия формализъм на квантовата механика, например дуалността (теоремата на Рис за хилбертови пространства: Riesz 1907).

5. Ако се използва канторовата нормална форма за представяне на ординалните числа $\boldsymbol{\alpha}$, а именно:

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{1}^{k} \boldsymbol{\omega}^{\beta_i} . \boldsymbol{c_i} \ ,$$

където $\boldsymbol{c_i}$ са естествени числа, а $\boldsymbol{\beta_i}$ са ординални числа, става очевидно че множеството трансфинитни преходи могат да се сведат до един единствен – този при първия трансфинитен преход към $\boldsymbol{\omega}$, след това повтарян чрез еднообразно прилагане на Пеановата аритметика до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$. Откроява се дуалният характер на аритметичната система, използвана от Генцен, чиито противоположни и дуални същности, „Ин” и „Ян”, са естествените числа и трансфинитните ординали. Между еднообразното броене и в двете дуални области е разположен трансфинитният преход, аналогичен на дискретен скок в непрекъснатостта при физичния, континуален двойник. Принципът на индукцията, еднакво валиден и за двете части, ги свързва.

6. Канторовата нормална форма може да се разгледа и като своеобразна бройна система с основа $\boldsymbol{\omega}$. По-горе, по подобен начин беше представена $\boldsymbol{\Psi}$-функцията: като число, представено в бройна система с основа безкрайност, обаче с комплексни „цифри” и също така безкрайна „основа” от вида $\boldsymbol{e^{i\omega}}$. Чрез последното безкрайността на монотонно нарастващото броене е преобразувана в безкрайното повтаряне или разгъване на вълнови процес. В тази връзка е уместно да обърнем внимание на теоремата на Рис – Фишер, поставяща знак на равенство между интегрируемостта (изискваща крайност) на една функция и сходимостта на нейното Фурие представяне (като вълнови процеси с дискретно нарастваща честота), с други думи, донякъде афористично казано, *крайността е свойство, което може да бъде пренесено в безкрайността* под формата на сходимост на

Фурие-представянето (в граничен преход: вълновите процеси с по-голяма честота, имат по-малка амплитуда). С цялото това разглеждане трансфинитните ординали, или по-общо казано – безкрайността, се съпоставят с вълновите процеси, вълново-корпускулярният дуализъм на квантовата механика се тълкува чрез и интерпретира в дуализма на крайно и безкрайно.

Другата отлика е, че при прехода от канторовата нормална форма към $\boldsymbol{\Psi}$-функцията, и двете в качеството им на числа в бройна система с основа безкрайност, и при „цифрите", и при „основата" се осъществява комплексна континуализация, т.е. преход от множеството на естествените числа към континуума на комплексните числа. На валидността до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ (т.е. на по-малкия от изброим брой членове в Канторовата нормална форма) съответства изброим базис за хилбертовото пространство на $\boldsymbol{\Psi}$-функциите[24] . Остава открит въпросът доколко посочените отлики са съществени относно проблема за пълнотата (респ. непълнотата).

7. Ако въз основа на разглеждането в предната точка (6) започнем да мислим за трансфинитните ординали като за квантови обекти, то те биха съответствали на мегафизическите обекти спрямо измервателните макроскопични уреди на човека. Вече можем да свържем поставения в т. 3 въпрос за еквивалентността (или нейните условия) между безкрайност „навън" (съответстваща на мегаобектите) и безкрайност „навътре" (микрообектите). Идеята за подобна еквивалентност или поне подобност на разглеждането се промъква чрез употребата на „квантов обект", както по отношение на 'микро-обектите', така и по отношение на 'мега-обектите'. Съществен прецедент ни дават не само философски разглеждания (като например това на Николай от Куза), но и *обратната пропорционалност* на актуално безкрайно малките и актуално безкрайно големите величини в нестандартния анализ.

42. Стратегия за дуално обосноваване на пълнотата

Като връзка с последващото изложение и цитати да обърнем внимание и на една особена стратегия към въпроса за пълнотата в аритметиката, вдъхновена от квантовата механика. Става дума за дуално взаимно обосноваване на аритметиката на Пеано и аритметичната система на Генцен, включваща трансфинитна индукция, по-общо казано, за дуално взаимно обосноваване на крайното и безкрайното, всяко от които само по себе си е „непълно" и чрез тази своя непълнота предполага и

[24] Оттук може да се насочим към сепарабелност на хилбертовото пространство в качеството му на Хаусдорфово.

изисква противоположното. От системата на Генцен в качеството на метатеория аритметиката на Пеано е пълна и непротиворечива, както и обратното, в качеството на метатеория аритметиката на Пеано обосновава трансфинитната индукция до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ както пълнотата и непротиворечивостта на системата на Генцен. Вместо йерархичен и безкраен, изключващ окончателното обосноваване преход към метаравнище, равнището и метаравнището са просто дуални, идемпотентни, всяко встъпва в качеството на метаравнище (респ. на негово обектно равнище) по отношение на другото. Така „лошата" безкрайност на обосноваването се избягва и се заменя с дуално обосноваване. Равнището и метаравнището са в отношение на допълнителност, не едновременно изцяло дадени, всяко едно от тях разкрива едно и също състояние на нещата, но в различен аспект.

Такава концепция може да бъде продължена и към философията изобщо, доколкото тя е възможно да се разглежда като метаравнище на обсъждане по отношение на онова, ***на*** което се явява философия: с други думи, напр. във „философия на физиката" ‛философия’ и ‛физика’ могат да се разглеждат като допълнителни, един подход служещ като методология на настоящата работа.

43. Трите равнища на математиката по Генцен

Бих искал тъкмо в тази връзка да спомена идеята на Генцен за трите равнища на математиката според три йерархични типа безкрайност:

> *Първо ще дам* класификация на математиката *в три отчетливи равнища според степента, в която понятието за „безкрайно" се използва в различните клонове на математиката. Първото и най-ниско равнище се представя от елементарната теория на числата, т.е. теорията на числата, която не използва техники от анализа. Безкрайното се случва тук в най-простата си форма. Въвежда се безкрайна последователност от обекти, в този случай естествените числа. Няколко други клона на математиката са логически еквивалентни на елементарната теория на числата, а именно всички онези теории, чиито обекти могат да се поставят в съответствие едно-към-едно с естествените числа и които следователно са изброими* (Gentzen 1969: 223).

Обсъждането на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията следва да отнесем към второто равнище, както се скицира от Генцен. С разглеждането в настоящата глава се установява известен паралелизъм между първото и второ равнище:

Второто равнище на математиката се представя от анализа. *Доколкото се разглежда приложението на понятието за безкрайност, същностно новата черта тук е, че сега индивидуалните обекти на теорията могат сами да бъдат безкрайни множества. Реалните числа, т.е. обектите на анализа, са преди всичко дефинирани като безкрайни множества, като правило – за безкрайни последователности от рационални числа* (Gentzen 1969: 223-224).

Трансфинитна индукция до ε_0, както впрочем и изброимо безкрайномерното хилбертовото пространство от Ψ-функции, следва да се разположи между второто и третото равнище. То включва безкрайни множества от безкрайни множества, и то дори безкраен брой пъти и т.н., но това не е всяка мислима безкрайност, тъй като тя е ограничена съответно до ε_0 и до изброим базис на хилбертовото пространство:

С третото равнище на приложение на понятието за безкрайност, най-накрая, се сблъскваме в общата теория на множествата. Тук се допускат като обекти не само естествените числа и други можещи да се опишат като крайни количества, както първото равнище, също и безкрайни множества от тях, както второто равнище, но в добавка безкрайни множества от безкрайни множества и отново множества от такива множества и т.н., в пределно мислимата общност (Gentzen 1969: 224).

44. Въпросът за математика и физика отвъд пълнотата

Изложената концепция на Генцен за трите равнища на безкрайност в математиката, която има по-скоро философски характер, за нас е важна, тъй като задава гледна точка, от която може да се постави съвсем нов въпрос: не този за някакъв нов вид непълнота, макар че и така може да се интерпретира, а *за математиката* – а при нашия питагорейски подход, разбира се, – *и за физиката отвъд пълнотата*. Използвайки необичайната стратегия на дуално обосноваване, показваме, че финитната аритметика на Пеано до ω заедно с трансфинитната на Генцен до ε_0 взаимно се обосновават като всяка от двете встъпва в качеството на метатеория по отношение на другата.

Въвеждането на такава пълнота беше вдъхновено от квантовата механика, при която пълнотата може да се обсъжда като доказана и експериментално проверена за модели с изброимо-мерно хилбертово пространство.

Поне според съвременните ни знания и разбиране, а и в светлината на непоколебимите ограничения, налагани от теоремите на Гьодел за пълнотата, „по-силна пълнота" от дуалната едва ли е възможна. Можем да останем в сигурното пространство до ε_0 или съответно до хилбертово пространство с изброим базис и да се наслаждаваме на уюта в реално пълни математически и физически теории. Отсъства логически мотив за крачката отвъд. Но въпреки това такава може да се направи по силата на човешкото любопитство и вечна неудовлетвореност.

Всъщност тя е направена още от Айнщайн (заедно с Подолски и Розен) през 1935 г. в стремежа му да демонстрира формалната непълнота на квантовата механика. Квантовата механика формално не е непълна, напротив – както видяхме – тя може да встъпи в качеството на *образец на пълна теория* и да индуцира решаването на аналогични проблеми по обосноваването на математиката. Но тя може да се разгледа непълна в един друг смисъл, а именно да се премине отвъд единственото, универсално и окончателно хилбертово пространство с изброим базис на квантовата механика към две и повече хилбертови пространства, неминуемо изисквани от математическите модели, използвани за изучаване на явленията, обект на квантовата информация. В метаматематиката на това съответства крачката отвъд ε_0.

На нея сме принудени не от несъвършенство на теорията: тя е наш доброволен избор. Подобна смелост веднага се отплаща и чрез самата дисциплина квантова информация, нейните приложения и зашеметяващи перспективи и чрез концепцията за „дуално питагорейство", обсъждана в настоящата книга, разкриваща много по-дълбоко единство на физика и математика. Отвъд ε_0 заставаме на гледната точка, от която те вече могат да се разберат като два ипостаса на обща същност.

Може да се постави въпросът за по-нататъшни точки в безкрайността, аналогични или представляващи ε_0 . Може би по-нататък следват много по-големи и дълбоки обединения, може – напротив – точката ε_0 да е уникална.

Да разгледаме също така и въпроса за типа пълнота, наречена тук дуална, по отношение на аритметиката, в светлината на спора между актуалистката и конструктивистката интерпретация на безкрайността, защитавана от Генцен:

> *Ситуацията е различна в случая на* екзистенциални пропозиции. *Пропозицията 'съществува естествено число със свойството $\mathfrak{B}$' казва, според актуалистката интерпретация: 'Някъде в пълната тоталност от естествени числа се случва такова число'. Според конструктивистката интерпретация, такова твър-*

дение е, разбира се, без смисъл. Но това не значи, че при тази интерпретация екзистенциалните пропозиции трябва да бъдат отхвърлени напълно. Ако определено число $\mathfrak{n}$, *за което свойството* $\mathfrak{B}$ *е в сила, може да бъде действително посочено, тогава при тази интерпретация може да се говори за съществуването на такова число; в действителност, екзистенциалната пропозиция сега вече не се отнася до безкрайната тоталност от числа; преди всичко би било достатъчно да се говори само за числата от* 1 *до* $\mathfrak{n}$. *Доказателствата за съществуване, които наистина се случват на практика, са наистина най-вече такива, че действително може да се даде пример. Обаче, доказателства са също така възможни, когато случаят не е този, а именно косвени доказателства за съществуване. Допуска се, че няма число, за което свойството* $\mathfrak{B}$ *важи. Ако това допускане води до противоречие, от всичко това се извежда, че число, за което свойството* $\mathfrak{B}$ *е в сила, съществува. Може тогава да се случи, че ефективна процедура за действително пораждане на такова число е напълно недостижима. Според конструктивистката гледна точка такова доказателство, трябва да бъде следователно отхвърлено* (Gentzen 1969: 226).

Как би трябвало да се решава въпросът за косвените доказателства за съществуване при „дуална пълнота”? Принципът на изключеното трето, на който се основават косвените доказателства за съществуване, се допуска както при финитни, така и при трансфинитни обекти. Не се допуска обаче едновременното му прилагане в пропозиции, отнасящи се едновременно и до финитни, и до трансфинитни обекти. Може да се обобщи: косвени доказателства за съществуване, основавани на принципа за изключеното трето, се допускат като в теорията, така и в метатеорията. Не се допуска обаче в пропозиции, когато те се оказват едновременно приложени.

Въпросът за пълнотата и прилагането на косвени доказателства за съществуване са взаимно неустановими твърдения в смисъла на фон Нойман. Само доколкото нито аритметиката на Пеано, нито трансфинитната аритметика на Генцен поотделно могат да се разглеждат като пълни теории, само дотолкова тези доказателства могат да се прилагат. Разгледани заедно, те се оказват дуално пълни, но такива доказателства вече не могат да се прилагат.

В една друга своя публикация (Gentzen 1938: 19-42; 1969: 252-286) представя „нова версия на доказателството за консистентност”, при „което главното ударение ще бъде поставено върху развитието на *фундаменталните идеи* и върху това да се направи всяка единична стъпка на доказателството толкова *прозрачна*, колкото е възможно” (Gentzen 1938: 19). Параграф 2 е „Скица на доказателството за консистентност”:

> *Следва да се покаже, че всеки извод е консистентен; това може да се перифразира, като се каже, че няма извод с празен краен секвент: тъй като от едно противоречие,* $\rightarrow\mathfrak{A}$ *и* $\rightarrow\neg\mathfrak{A}$*, можем първо да изведем секвентите* $\rightarrow\neg\mathfrak{A}$ *и* $\neg\mathfrak{A}\rightarrow$ *и от тях, чрез съкращаване, празен секвент. (Обратно, от празния секвент може да се изведе всеки произволен секвент чрез 'съкращения')* (Gentzen 1938: 26).

В основата на схемата на доказателство е принципът на математическата индукция, тук по необходимост обобщен до този на трансфинитната индукция:

> *Има смисъл да започнем доказателството на консистентността на прости изводи, после на по-сложни, използвайки консистентността на по-простите изводи и така нататък. Следователно постъпваме индуктивно. По-нататък не е невъзможно повторението на процедурата да изисква проверката на вече* безкрайна *последователност от изводи преди да може да се захванем с по-сложен клас; например, първо изводите, състоящи се само от един секвент, после всички изводи, състоящи се от два секвента и т.н. Това в действителност значи, че прилагаме* 'трансфинитна индукция'. *На практика моделът на този анализ е, разбира се, значително по-усложнен от случая на дадения пример* (Gentzen 1938: 26).

Доказателството се извършва на три етапа. Основата на първия етап е стъпаловидното редуциране стъпка по стъпка на по-сложен към непосредствено попростия извод :

> *1. Консистентността на произволен извод се свежда до консистентността на всички 'по-прости' изводи. Това се прави чрез дефиниране на – еднозначна* – стъпка на редукция *за произволни 'противоречиви изводи', т.е. изводи с* празен секвент като краен секвент; *тази стъпка преобразува такъв извод в 'по-прост' извод със същия краен секвент* (Gentzen 1938: 26).

Много съществено е, че на всеки извод вече може да се съпостави, трансфинитно ординално число. Това прави невъзможен „диагоналния довод” на Гьодел, който ще бъде обсъден по-нататък:

> 2. *После се съпоставя* трансфинитно ординално число *с всеки извод и се показва, че в стъпката на редукция разглежданият противоречив извод се превръща в извод* с по-малко ординално число. *По този начин досега само хлабаво определеното понятие за извод получава своя точен смисъл: колкото е по-голямо* ординалното число *на един извод, толкова е по-голяма* ‛сложността’ *в контекста на доказателството за консистентност* (Gentzen 1938: 26).

Следва да обърнем внимание на особения смисъл, който влага Генцен в термина „финитност” по отношение на трансфинитната индукция. Според принципа на математическата индукция въпросът дали дадено произволно естествено число $\mathfrak{n}$ притежава свойството $\mathfrak{U}$ може да се реши за краен брой стъпки. Според нейното обобщение като трансфинитна, същото се отнася и за произволно трансфинитно число $\mathfrak{n}$:

> *3. От това консистентността на всички изводи тогава очевидно следва от ‛трансфинитната индукция’. Извеждането на трансфинитната индукция, което, първо, е доста ‛дискутируемо’ извеждане, не може да бъде предположено в доказателството за консистентност, нито доказано, както в теория на множествата. Това извеждане изисква по-скоро отделно обосноваване посредством недискутируеми ‛конструктивни’ форми на извод* (Gentzen 1938: 26).

45. Трансфинитност и финитизъм

Самият Генцен изтъква, че неговото доказателство се основава изключително на валидността на трансфинитната индукция, като според неговата привързаност е изключително важно тя да се обоснове „финитно”:

> *Трансфинитната индукция заема специално положение в доказателството за консистентност. Докато всички други форми на извод са от доста елементарен вид, от гледната точка да бъдат ‛финитистки’ – това важи колкото за новото, толкова и за старото доказателство – това не може да се твърди за трансфинитната индукция. Тук имаме следователно* задача от различен вид: *не просто изискваме* да докажем *трансфинитната индукция – това не е особе-*

> *но трудно и е възможно по-различни начини, – но по-скоро да я докажем на* финитистка *база, т.е. да установим ясно, че тя е форма на извод, която е в хармония с принципите на* конструктивистката интерпретация *на безкрайността; едно начинание, което не е вече* чисто математическо, *но което независимо от това е част от доказателството за консистентност* (Gentzen 1938: 44; 1969: 285-286).

Доказателството на трансфинитната индукция се основава на пълната индукция (Gentzen 1969: 192-193). Ключова е ролята на конструктивността, т.е. на допускането, че преходът към първия трансфинитен ординал $\boldsymbol{\omega}$ и всеки последващ аналогичен „трансординален" преход съвпада с прехода от типа от $\boldsymbol{n}$ към $\boldsymbol{n+1}$. Оттук следва и:

> Заключение: *Посредством теоремата за трансфинитната индукция* финитността на процедурата на редукция *за произволни изводи сега следва веднага. Ако финитността на процедурата на редукция е била вече доказана за всички изводи, чието ординално число е по-малко от дадено число* $\boldsymbol{\beta}$*, то също така е в сила за всеки извод с ординалното число* $\boldsymbol{\beta}$*; тъй като за* единична *редуктивна стъпка последният извод се преобразува в извод с* по-малко *ординално число или извод в редуцирана форма. (Ако изводът вече е в редуцирана форма, тогава няма какво повече да се доказва.) Следователно свойството крайност на редукционната процедура се извежда от тоталността на изводите с ординално число* по-малко *от* $\boldsymbol{\beta}$ *към изводите с ординално число* $\boldsymbol{\beta}$*; по теоремата за трансфинитната индукция това свойство следователно е в сила за* всички *изводи с* произволни *ординални числа. Това* завършва *доказателството на доказателството за консистентност* (Gentzen 1969: 193).

46. От позиция на „дуалистичното питагорейство"

За нас, от гледната точка на защитаваното „дуалистично питагорейство", е особено важно да проследим връзката на трансфинитната индукция с т. нар. колапс на вълновата функция, при което се реализира със строго определена вероятност една случайно избрана стойност. При схемата на доказателството за консистентност на Генцен е съществено, че всеки извод ще „колапсира", но не е необходим и вероятностен характер за подобен „колапс". Терминът и скритата метафоричност на термина „колапс" съответстват на неговата идея за финитност. Обратно, неограниченото удържане на кохерентно суперпозиционно съдържание щеше да бъде свидетелство (каквото като правило не се наблюдава, макар да съществуват изключения) за нефинитния характер на трансфинитната индукция.

Доказателство на трансфинитната индукция се съдържа в § 15.4 на предходната работа на Генцен относно доказателството за консистентност на аритметиката: „Консистентността на чистата теория на числата” (Gentzen 1969: 132-213). В нея той описва замисъла на работата си така:

> *От най-голяма значимост в този пункт е следната теорема от теорията на доказателствата, доказана от К. Гьодел: 'Не е възможно да се докаже консистентността на формално дадена (ограничена) теория, която съдържа елементарната теория на числата (нито даже самата елементарна теория на числата) чрез средствата на пълната съвкупност от техники, присъщи на теорията, която се разглежда (при положение, че теорията е реално консистентна)'. От това следва, че консистентността на елементарната теория на числата, например, не може да се установи чрез част от методите за доказателство, използвани в елементарната теория на числата, нито наистина чрез всички тези методи. … Остава напълно разумно, че консистентността на елементарната теория на числата може в действителност да се верифицира чрез средствата на техники, които отчасти не принадлежат към елементарната теория на числата, но които независимо от това могат да се разглеждат като по-надеждни, отколкото несъмнените компоненти на елементарната теория на числата* (Gentzen 1969: 138-139).

Следователно същността на замисъла на Генцен е да изясни *какво още* трябва да се прибави към аритметиката на Пеано, така че новополучената система да е „пълна и непротиворечива”, т.е. с използвания тук обобщаващ термин – „консистентна”. Както многократно вече се изтъква това „още” е трансфинитната индукция, която изглежда обаче има финитен характер *не по-малко* от обичайната пълна, или математическа индукция. По този начин теоремите на Гьодел за непълнота се заобикалят, без ни най-малко да се поставя под съмнение тяхната валидност. Така трансфинитността се оказва необходимото и възможно, достатъчно условие за консистентност на една аритметична система.

47. Функцията „наследник” и функцията „цялост”

При това обаче по конструктивистки маниер трансфинитността може да се разбира подчертано аритметично, т.е. чрез функцията „наследник” (добавяне на единица към предходното число) и за разлика от т. нар. актуалистки начин на обсъждане в теория на множествата, където тя се предицира на някои множества. Самото понятие за множество въвежда вместо функцията „наследник” една сходна, но много по-обща функция, която ще си позволя да нарека функция „цялост”, постулираща съществуването и „конструктивно” съпоставяща нейната цялост на всяка нецялост (‘съвкупност’, ‘множество’, механичен сбор от отделни, ясно различими и следователно броими неща), при това забележете, че това последно изображение, което нарекохме „цялост”, е взаимно еднозначно, точно както функцията „наследник”.

Например „аксиомата за безкрайността” е превод на теоретико-множествен език на Пеановата аксиома за винаги съществуване на функция „наследник”:

$$\varnothing, \qquad \{\varnothing\}, \qquad \{\{\varnothing\}\}, \qquad \{\{\{\varnothing\}\}\}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{0}, \qquad \mathbf{1}, \qquad \mathbf{2}, \qquad \mathbf{3}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В първата редица, точен превод на втората, с $\varnothing$ е означено празното множество, а с $\{\ldots\}$ – функцията, която нарекохме „цялост”. Докато интуитивният смисъл на втората редица е ясен и напълно приемлив, а именно към всяко естествено число (към които, според съвременната трактовка, е добавена и нулата) може да се прибави единица, то първата, теоретико-множествената по-скоро шокира: нищо, целостта на нищото, целостта на целостта на нищото и т.н., тъй като идеята за цялост на нищото изглежда абсурдна. Всъщност обаче фактическото основание да се въведе първата редица е втората.

Съпоставянето на функциите „цялост” и „наследник”, освен като илюстрация, имаше също така за цел да подскаже идеята за вероятност чрез съпоставяне на множество (цялост) и число: от множеството се избира един елемент, при което то „колапсира” или се редуцира до него с вероятност равна на отношението на „броя” (кардиналното число, мярата) на класа на еквивалентност, зададен от този елемент към „броя” (кардиналното число, мярата) на цялото множество. При това обаче като фон остава, че и аритметиката, и теория на множествата са еднакво фундаментални, доколкото функциите „наследник" и „цялост" са несводими една към друга и поради това тяхното отношение има дълбок съдържателен смисъл, представим чрез интуициите за избор и за вероятност.

Като конструктивист Генцен се придържа строго към аритметичния подход. В заключителните параграфи (по-специално 16.2) на своята работа описва постигнато от него, сравнено с теоремите на Гьодел за непълнотата, по следния начин:

> *За да проверим степента, до която доказателството за консистентност* съвпада с теоремата на Гьодел (2.32) *би трябвало първо* да съпоставим естествени числа *с обектите от теория на доказателствата (формули, изводи и т.н.), съответстващи на начина, по който това е направено в статията на Гьодел, цитирана в бележка под линия 3, и би трябвало също така да въведем изискваните функции и предикати за тези обекти като функции и предикати за съответните естествени числа. Тогава доказателството за консистентност става доказателство с естествените числа като обекти. За да получим формално ограничен формализъм, би трябвало да ограничим възможностите за дефиниция, осигурени за горното, до определени схеми; те лесно могат да бъдат избрани достатъчно общи, за да позволят дефиниция на всички функции и предикати, изисквани в теория на доказателствата; ср. например версията на Гьодел* (Gentzen 1969: 197).

Резултатът, получен от Генцен, е в хармония с теоремите за непълнота на Гьодел, тъкмо поради принципа на трансфинитната индукция, добавен от първия. Преминавайки към един по-свободен и философски начин на изразяване, можем да кажем, че може да се постави знак за съответствие, ако не и за равенство между непълнота и крайност, от една страна, или между пълнота и безкрайност (дуално „включваща" крайността), от друга:

> *Формите на извод* – продължава Генцен – *в доказателството за консистентност тогава не са други от онези представени в нашата формализация на теорията на числата; единствено доказателството за крайността* (15.4) *пак заема специално положение. Невъзможно е да се види как последното доказателство може да се изведе с техники от елементарната теория на числата. По*

тази причина доказателството за консистентност е в хармония с теоремата на Гьодел (Gentzen 1969: 197).

Малко по-надолу Генцен привежда две твърдения, за съжаление оставяйки ги без доказателство, тъй като такова – по неговите думи – би го отвело далеч от темата на неговата статия. Първото от тях изяснява, че принципът на трансфинитна индукция при доказателството за консистентност на елементарната аритметика е необходим единствено за извеждане на пълната индукция:

> 1. *Ако извеждането на* пълната индукция *се пропусне от формализираната елементарна теория на числата, тогава доказателството за консистентност може да се формулира без съществена промяна по такъв начин, че – след извеждане на споменатото пренасяне в доказателство относно естествени числа – техниките от елементарната теория на числата* (включително *пълната индукция*) *са достатъчни* (Gentzen 1969: 197).

От друга страна, в аритметичната система на Генцен принципът на трансфинитна индукция беше обоснован или доказан чрез принципа на пълната индукция. Така Пеановата и Генценовата аритметика споделят едно общо, съвпадащо в двата случая ядро и два дуални взаимно извеждащи се принципа, съответно на пълната и на трансфинитната индукция.

От формално-логическа гледна точка, положението не е просто: ако двете системи бъдат непосредствено обединени, то двата принципа биха образували порочен кръг. Тогава теоремата на Гьодел за непълнотата по отношение на тази обединена аритметика, би била тривиално валидна, поради това, че наличието на порочен кръг може да скрива противоречие и тъкмо то да е нежелано високата цена за подобна „пълнота”. Именно за да се избегне кръговостта, въвеждането на дуалност, която обаче впрочем може да се обоснове и по други пътища, е неизбежно: двете предпоставки принадлежат на теория и метатеория и това предпазва от едновременното им разглеждане.

48. Идея за дуална непротиворечивост

Каква е логическата стойност на подобно „измъкване”? То не е тривиално или винаги възможно при наличие на „порочен кръг”. Ако беше така, то щеше да се обезсмисли. Всяко от двете кръгови твърдения, които обаче, забележете, не са взаимно изключващи се, (1) образува с корпуса от останалите твърдения непротиворечива система; (2) всяка една от двете, така образувана непротиворечива система може да послужи като метатеория за доказване пълнотата и непротиворечивостта на другата. В този случай може да се говори за *дуална непротиворечивост*. Найсетне тази ситуация допуска дълбоко съдържателна интерпретация в термините на квантовата механика. Хилбертовото пространство, в което се построява математическият ѝ модел, следва да се отнесе към второто равнище в математиката, по цитираната класификация на Генцен, където се разглеждат „безкрайности от безкрайности" и за което използва термина „анализ":

> 2. *Доказателството за консистентност на цялото на елементарната теория на числата, пренесено в теория с естествените числа като обекти, може да се осъществи с техники от* анализа (Gentzen 1969: 197).

Така второто от двете споменати твърдения на Генцен, оставени без доказателство, ни насочва към следното. Елементарната аритметика може да се обоснове дуално с теорията на хилбертовото пространство. От *тази* гледна точка последната е изоморфна на аритметиката на Генцен. В собствено философската област това ни навежда към един втори, в квантовата механика физически дискутируем и косвено наблюдаем ипостас на безкрайността – кохерентността. С други думи, синкретичната неразличимост на безкрайно различни състояния, намиращи се обаче в кохерентна суперпозиция, ни предлага физически модел на безкрайността по един диференциран начин, а именно като областта на трансфинитното (на свой ред делящо се на две подобласти от ординала $\boldsymbol{\varepsilon_0}$). Цялото последно разсъждение е от изключителна важност и за философията, и за теорията на квантовия компютър; както ще видим по-нататък: *квантовият компютър изчислява* ***трансфинитно***! Следователно с машината на Тюринг квантовият компютър без сдвояване (и първата, и вторият по-скоро в качеството им на математически модели) образува дуална, взаимно обосноваваща се двойка. В частност квантов компютър със сдвояване изчислява отвъд $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ [25]. Независимо от това, че квантовият компютър изчислява транс- или дори супер-финитно според съвременните разбирания, които биха могли да се подложат на ревизия или да се обобщят, резултатът от неговите изчисления трябва да се представи финитно, т.е. да се редуцира чрез измерване.

[25] Като синоним на термина „отвъд $\boldsymbol{\varepsilon_0}$" (който се разбира „$\geq \boldsymbol{\varepsilon_0}$") нататък ще се използва „суперфинитно", по аналогия с термина „трансфинитно" за областта „$\geq \boldsymbol{\omega}$".

49. Суперфинитна индукция и и недоказуемостта на трансфинитна индукция до ε_0

> *Невъзможността да се докаже трансфинитната индукция чак до ординалното число $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ с елементарни техники от теория на числата може да се изведе пряко от следните два факта:*
>
> *1. Теоремата на Гьодел: консистентността на елементарната теория на числата не може да се докаже с техники от тази теория.*
>
> *2. Консистентността на елементарната теория на числата е била доказана чрез прилагане на трансфинитна индукция до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$, заедно с изключително елементарни техники от теория на числата* (Gentzen 1969: 287).

Предмет на същата негова работа е

> *пряко доказателство на недоказуемостта на трансфинитната индукция чак до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ в елементарната теория на числата* (Gentzen 1969: 287)[26].

Какво е философското значение на подобно „пряко доказателство”? Недоказуемостта на суперфинитната индукция не е логически еквивалентна на непълнотата на аритметиката в смисъла на Гьодел. От втората не следва първата: недоказуемостта на суперфинитната индукция в Пеановата аритметика има и други възможни основания. Също така видяхме, че към суперфинитната крачка, съответстваща на явленията на сдвояване, не ни тласка, някаква предполагаема логическа непълнота, аналогична на непълнотата на квантовата механика в смисъла на Айнщайн, Подолски и Розен. В такъв случай можем да предположим, че прякото доказателство за недоказуемост на суперфинитната индукция, предложено от Генцен, е възможно да съдържа указание за логическа принуда към подобна стъпка. Но ако суперфинитната индукция е както недоказуема, така и неопровержима, то не свидетелства ли това, че и системата на Генцен е в някакъв смисъл непълна? Такова впрочем изглежда да е неговото становище:

[26] „В добавка процедурата ще направи възможно да се покаже, че още по-ограничени форми на трансфинитна индукция до числа *под* $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ не са доказуеми в определени подсистеми на формализма на теория на числата” (Gentzen 1969: 287).

Бихме могли да мислим, че включвайки трансфинитна индукция до ε_0 *в елементарната теория на числата като нова форма на извод, непълнотата не би могла да се преодолее. Освен това аналогична непълнота после несъмнено възниква по отношение на една по-висша трансфинитна индукция и т.н.* (Gentzen 1969: 308).

50. Дуалност на крайно и безкрайно

Нашето становище обаче е по-различно, вменявайки това негово заключение по-скоро на ограниченията, налагани от конструктивисткия, а още повече от финитисткия подход, към който се стреми да се придържа Генцен. Не може да се оспори, че *взета сама за себе си* аритметиката на Генцен (т.е. с добавена или изведена трансфинитна индукция) е също така непълна както и обичайната финитна, тази на Пеано. Така да се каже, *априорното* отхвърляне на безкрайността сама по себе си, с други думи – на актуалната безкрайност, изключва от полезрението *възможността за разглеждане на 'крайност' и 'безкрайност' като допълнителни, но* ***равностойни*** *начала на аритметиката*. По Генцен 'безкрайността' не е ипостас, не е дори епифеномен, т.е. зависимо огледално изображение, тя е просто и само продължение на 'крайността', една разширена крайност. Именно поради това се извежда на основата на пълната индукция и може да се покаже на такъв фундамент същностно финитисткият ѝ характер, който при нашия възглед би следвал от една *собствено математическа* теория на измерването, чиято същност би била редукция на безкрайното към крайното, на безкрайното от по-висш към такова от по-низш порядък.

Ако областта на безкрайното е *втора* област, наред с тази на крайното и между двете има пропаст, която – ако се разгледат като непрекъснати – би изглеждала като дискретна пауза, то трансфинитната индукция следва да се постулира самостоятелно, или най-малкото, заедно с други Пеанови аксиоми да следва от удвояването или огледалното изображение на крайността. Има ли някаква несиметрия между крайно и безкрайно в последния случай? Ако говорим за „удвояване", напълно равнопоставяме крайност и безкрайност, ако употребяваме „огледално изображение", откриваме поле за „доксографична" конфронтация по въпроса: кое от двете е „оригиналът" и кое „копието"?

Същността на прякото доказателство на Генцен, дадена в заключението (Gentzen 1969: 306) е, че при индукция до произволни големи крайни числа (следователно, по-малки от ω) можем да изведем трансфинитна индукция до ординали строго по-малки от ε_0.

51. Аритметика на Генцен

Следва да уточним смисъла, който трябва да влагаме в „аритметиката на Генцен", „системата на Генцен":

1. В тесен смисъл тя се получава, с думите на Генцен,

> *включвайки трансфинитна индукция до ε_0 в елементарната теория на числата като нова форма на извод* (Gentzen 1969: 308).

При това се разглеждат обикновени крайни числа, но не и трансфинитни, а единствено трансфинитна индукция в качеството на финитистка процедура. Тъкмо така разбрана, в нея възможно винаги възниква непълнота, колкото и по-висша трансфинитна индукция да се добавя и използва.

2. Широко, или несобствено тълкуване, към което заявихме вече привързаност: трансфинитните ординали могат и следва да се определят като строго определени количества, т.е. и като актуално безкрайни, напълно еднакво с обичайните крайни числа, достъпни „сами по себе си" пряко, а не само чрез конструктивна процедура на все по-нататъшно броене.

Също като Генцен и конструктивизма изобщо, но и в духа на споменаваното „дуалистично питагорейство" споделяме загриженост за „реинтерпретирането" (с неговия термин) на математическите резултати, особено тези касаещи, безкрайността. Една собствено „математическа теория на измерването", изясняваща редукцията от безкрайни към крайни величини, както и на безкрайни от по-висш към такива от по-низш порядък, следва да обобщи трансфинитните индукции. При това конструктивисткото „броене" може навярно напълно да се изостави.

При така скициран подход, продължавайки пълната индукцията точно до ω, ще достигнем в обосноваване на трансфинитната индукция до ε_0, и т.н. Трансфинитните в актуален смисъл числа се „реинтерпретират" като емпирично измерими сдвоени състояния или пък като кохерентни макроскопични състояния. Придобили сигурен начин за достъп до тях, напълно независим от конструктивисткото „броене", за което остава статут на спомагателен механизъм за достъп, не повече от това да е в някои случаи по-удобен, можем дори да се освободим от него при необходимост. Напълно достатъчна е аксиомата за избора[27], която гарантира добрата наредба във всяко множество, смисълът на която в настоящия контекст е, че може вторично, именно на този фундамент, да се възстанови броенето за неговите елементи винаги, щом тя е в сила.

> *От друга страна, известно е, че трансфинитна индукция чак до произволен ординал под* ε_0 *е доказуема в елементарната теория на числата. В § 2 ще покажа как такива доказателства* се формализират *във формализма на теория на числата* (Gentzen 1969: 287).

В заключение да повторим собственото твърдение на Генцен, за да подчертаем разликата от тълкуванията, които му дадохме непосредствено по-горе:

Трансфинитната индукция до ε_0 и по-високи ординални числа не е доказуема в елементарната теория на числата. *От друга страна е в сила …: трансфинитната индукция до всеки ординал* под ε_0 *е доказуема в елементарната теория на числата* (Gentzen 1969: 306).

52. „Възможността за примиряване на различните гледни точки"

Специално внимание бихме искали да обърнем на аргумента на Генцен, че „актуалистката математика идеализира, например, понятието за съществуване" (Gentzen 1938: 17; 1969: 248). Вече се спомена, че практически разлика между конструктивизма и „актуализма" се наблюдава при доказателствата за съществуване, първият отхвърля косвените такива при безкрайни множества.

Пасажът, който следва, обаче ще се цитира, тъй като в него е добавен аргументът, „че тази интерпретация съответства повече на позицията на физѝка" (Gentzen 1938: 17; 1969: 249):

> *Едно число* съществува, *ако неговото съществуване може да се докаже посредством доказателство, в което логическите дедукции са приложени до* завършени безкрайни *тоталности в същата форма, в която те са валидни за крайни тоталности; напълно както ако тези безкрайни тоталности бяха актуално настоящи величини. По този начин понятието за съществуване следователно наследява предимствата и недостатъците на един идеален елемент*. Предимството *е, преди всичко, че се постига значителното опростяване и елеган-*

[27] Както вече споменахме и по-нататък също ще видим, аксиомата за избора придобива нова тежест – заради детайлизирана формулировка.

тност на теорията – тъй като интуиционистките доказателства за съществуване са, както се спомена, най-вече много усложнени и страдат от неприятни изключения, – недостатъкът *обаче е, че това идеално понятие за съществуване вече не е приложимо в същата степен към физическата реалност, както, например, конструктивисткото понятие за съществуване* (Gentzen 1938: 17; 1969: 248).

Цитираният абзац е в § 4, който е заключителен за статията „Настоящото състояние на изследванията по обосноваване на математика" (Gentzen 1938: 1-181969: 234-251) и носи знаменателното название „Възможността за примиряване на различните гледни точки" (Gentzen 1938: 16-18; 1969: 247-251).

Сега бихме искали да обърнем внимание на един тип доводи. Както се спомена, в светлината на настоящото разглеждане се открива връзка между редукцията на извод със съответстващо трансфинитно ординално число в доказателството за непротиворечивост и редукцията на вълновия пакет в процеса на измерване в квантовата механика. Доказателството за непротиворечивост е сродно на твърдението за несъществуване на „живата-и-мъртва котка" на Шрьодингер, т.е. на отсъствието на макрообекти в състояние на кохерентна суперпозиция на ортогонални, с други думи, взаимно-изключващи се състояния. Последното твърдение обаче не е вярно (напр. Blatter 2000), макар по-скоро под формата на изключение, а видяхме също така, че Албърт извежда квантово-механичния автомат тъкмо от макроскопични кохерентни състояния, визирани в квантови „парадокси". По-нататък, той се очаква също да извърши доказателство за непротиворечивост, което обаче не е изключено да е еквивалентно на собственото му несъществуване. Парадокс ли е това? Ако не – кое изходно невярно предположение ни доведе в него?

Причината за това е, че Генцен следва Гьодел, като доказателството за непротиворечивост, което дава, разрешава гьоделовата пропозиция, твърдяща собствената си недоказуемост. Ето защо съответният квантов компютър, който би дал това доказателство за непротиворечивост, чрез това доказва собственото си несъществуване.

Да очертаем възможните изходи:

1. Това е доказателство, че също и квантовият компютър не може да докаже консистентност на аритметично кодирана система (т.е. да опровергае т. нар. първа теорема за непълнотата). Той може да сметне дали ще спре и от евентуална пълнота

следва, че ще може да се изчисли спирането. Но от това не следва пълнота. Той дори може да разбере неразрешима пропозиция в смисъла на Юров, но от това пак не следва пълнота.

2. Начинът на интерпретиране на Генценовото трансфинитно доказателство в термините на квантовия компютър е некоректно. Той може да изчисли хенкинова, но не и гьоделова пропозиция. От друга страна, генценовото трансфинитно изчисление я разрешава, следователно е по-богато от квантов компютър. Следва ли обаче от това, че той няма да успее да докаже консистентността на аритметично кодирана система? Не следва, тъй като може да докаже *всички* доказуеми твърдения. Следователно, ако той я докаже, тя е такова. Ако не – тя е невярно твърдение. Това не е противоречие, тъй като – както се опитваме да покажем в хода на цялото изследване – т. нар. първа теорема за непълнотата удовлетворява собствените си условия и нейната валидност (доказателството на Гьодел) влече нейната неразрешимост. Така генценовото трансфинитно изчисление е по-богато от квантов компютър тъкмо най-малкото с разрешената непротиворечивост, ако и когато теоремата е валидна, но заедно с това квантовият компютър е в състояние също да я разреши, ако и когато теоремата не е валидна.

Ситуацията напомня и всъщност произтича от факта, че безкрайно множество се кодира винаги от свое същинско подмножество, ако и само ако е приложена аксиомата за избора по силата на парадокса на Скулем. Как? Подреждаме добре двете множества, т.е. ги номерираме. Всеки елемент от множеството се кодира едно-еднозначно от елемента на същинското негово подмножество със същия номер.

Така дори квантовият компютър да е същинско подмножество на генценовото изчисление, бидейки безкраен, той е в състояние да го кодира при валидна аксиома за избора. Твърдението, твърдящо собствената си недоказуемост, респ. самата теорема, не принадлежи на множеството твърдения, изчислими от квантовия компютър, но е кодируема чрез тях. Квантовият компютър се основава на аксиомата за избора и ние вече видяхме конкретния механизъм на фундаменталното ѝ значение за неговата работа чрез „разпознаването на образ", обсъдено доста по-напред.

53. Математика и физическа реалност по Генцен

В контекста на статията на Генцен за сближаване на математика и физика следва да се подчертае, че позицията на дуалното питагорейство в конкретния случай е по-близка до тази на конструктивизма, но, така да се каже, с „обратен знак". Сближаване на математиката с практическите процедури по нейното прилагане тук се изисква от стремежа на питагорейството да погълне фактическото съществуване като особена форма на числовост (респ. математическа структурираност). Доколкото теорията и метатеорията, макар и дуални, се включват във всеобемаща, доказано пълна (тавтологично) тоталност, процесът на интерпретация, явяващ се изображение на втората в първата, е част от същата тази тоталност и подлежи на тълкуване и обяснение, при това, забележете, вътрешно математическо. При такъв подход съществува гледна точка, от която може да се постави знак за равенство между предполагаемата финитност на трансфинитната индукция (независимо от „подозрителното име" с израза на Генцен) и измеримостта на една квантово-механична величина. При това фактът на такова измерване се приема за математическо доказателство, не по силата на един вероятно изглеждащ неприемлив в очите на мнозина математици емпиричен подход към математиката, все едно като към опитна наука, по подобие на физиката, а – *обратното,* – поради всеобемащо питагорейство, което включва измерването в качеството на доказателствена процедура със собствено математически характер. По такъв, донякъде парадоксален и неочакван начин можем да се присъединим към патоса на Генцен:

> *Сега възниква въпросът: каква полза от елегантните корпуси знание и особено* прости *теореми, ако те не са приложими към физическата реалност в буквалния им смисъл? Не би ли било за предпочитане в този случай да се възприеме процедура, която е* по-трудоемка *и която получава* по-сложни *резултати, но която има предимството да прави тези резултати непосредствено значими в реалността? Отговорът лежи в успеха на първата процедура. Отново да разгледаме пример от геометрията. Великите постижения на математиката в напредъка на физическото познание произхождат тъкмо от този метод на* идеализиране *на това, което е физически дадено, следователно на* опростяване *на неговото изследване. Във всяко приложение на общите резултати до реалността, специалният им статус, дължащ се на идеализацията трябва, разбира се, да се има предвид и да се извърши една съответна* реинтерпретация. *Тъкмо тук* приложната *математика има своя област на дейност* (Gentzen 1938: 17; 1969: 249).

54. Рефлексия на отправната точка към теоремите на Гьодел

Време е да преминем към самите теореми на Гьодел. Те са интерпретирани изключително много, според мен най-вече затова, защото твърде специализираният начин на тяхната оригинална формулировка скрива или предпазва истинското им съдържание и значение. В резултат, всеки един от техните десетки хиляди „разказвачи" и тълкуватели малко или повече ги преиначава и пригажда към контекста на собственото разглеждане. Не бих бил в състояние и аз да избегна тази създала се традиция, водеща до митологизиране на теоремите и до граничещо с профанизирането им опростяване, до разширяване и обобщаване на техния обхват до почти пълна неопределеност.

Това, което обаче е по силите ми, е да се опитам да рефлектирам изходните си предпоставки, с които се насочвам към тях. До голяма степен те вече неявно са зададени чрез предшестващото разглеждане:

1. В контекста на обосноваване на математиката се обсъждат шансовете на едно неопитагорейство на основата на философията на квантовата информация, обозначавано като „дуалистично питагорейство". Неговите „Ин" и „Ян" могат да се тълкуват и като дуални крайност и безкрайност.

2. Така теоремите за непълнота се предполага, че могат да бъдат включени в контекста на „дуална пълнота", при която всяка една от две теории встъпва в качеството на метатеория, за да обоснове на своята основа пълнотата и непротиворечивостта на другата, при това всяка една от тях сама чрез себе си остава непълна в смисъла на Гьодел в опита си да се самообоснове.

3. Водеща нишка е образецът на пълнота от нов тип, зададен и отстояван от квантовата механика в почти вековна епична битка и в наше време прераснал и дал плодотворни резултати в нова физическа дисциплина: квантовата информация, толкова тясно свързана с квантовата механика, че вече сякаш се налага обобщаващият термин „квантова механика и информация".

4. За да може да се следва тази нишка, се строи по-скоро метаматематически модел на аритметиката в хилбертовото пространство като математически формализъм на квантовата механика. Безкрайността се тълкува като кохерентност и по-точно като кохерентна суперпозиция.

5. Съществува стремеж непълнотата в смисъла на Гьодел да се изтълкува като невъзможност да се построи пълен модел на безкрайността в крайността или по-

общо на една дуална система в монистична, в т.ч. и в заедно дадената съвкупност от двете ѝ начала.

55. Скицата на Гьодел на първата теорема за непълнотата

Отправна точка в текста на Гьодел (1931) ще бъде скицата на доказателството, която той предлага в увода на своята работа (Gödel 1931: 146-151), отделни бележки относно конструктивността на доказателството на основните теореми (Gödel 1931: 189-190; Gödel 1986: 176-178, 177-179; Gödel 1931: 197; 1986: 194, 195), както и нейният контекст, зададен от предшестващата работа (Gödel 1930) относно пълнотата на логически системи. Защо в системи, съдържащи аритметиката на Пеано, за разлика от логическите системи, пълнотата и непротиворечивостта се оказват допълнителни? Дали източникът на подобна непълнота, впрочем и за теоретико-множествените, семантични и пр. парадокси, не е необходимостта, за да е налице „пълнота", да се включат метатвърдения по отношение на – в общия случай – безкрайни множества, и поради това неявно разглеждащи ги като актуални цялости? Можем ли да построим съдържателна интерпретация *в термини от физиката* на теоретико-множествени и особено на семантичните парадокси, които по мнението на различни автори, в това число и на самия Гьодел, третирани подходящо, фундират доказателствата за непълнотата? Макар че няма да наречем тези и аналогични въпроси реторични, те все пак навеждат по посока на определен тип отговори, които в качеството на хипотези могат да залегнат в последващото изложение.

Самият Гьодел изтъква:

> *Аналогията на този извод с антиномията на Ришар бие на очи; също и с „Лъжеца"*[28] *се намира в близко родство, тъй като неразрешимото твърдение* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}); \boldsymbol{q}]$ *означава тъкмо че* $\boldsymbol{q}$ *принадлежи на* $\boldsymbol{K}$*, т.е., според* (1)*, че [R(q); q] не е доказуемо. Следователно пред нас имаме твърдение, което твърди своята собствена недоказуемост (Gödel 1931: 175; 1986: 148, 149).*

Редно е специално внимание да се обърне на първата бележка под линия в цитирания пасаж, твърдяща че *всяка* (!) епистемологична антиномия може да се положи в основата на доказателството.

[28] Може да се използва изобщо всяка епистемологична антиномия за такъв вид доказателство за неразрешимост. [Всички бележки под линия от цитат са от автора на цитата, в случая – Курт Гьодел, освен ако изрично не е посочено друго.]

56. Включване на антиномично твърдение в доказателство: цената

В тази връзка би следвало да се разгледат няколко тясно свързани въпроса:

1. Каква е цената, която следва да заплати едно доказателство, подобно на скицираното, в случай че включи в качеството на необходим – или в този смисъл се основава също и на – довод от такъв специален тип?

2. Валидно ли е самореференциално разсъждение, което би дало положителен отговор за приложимостта на теоремите на Гьодел по отношение на собственото им съдържание?

3. Какъв е гьоделовият номер на неговите теореми: краен или безкраен?

4. Конструктивни ли са неговите доказателства, както той експлицитно твърди (Gödel 1931: 189-190; Gödel 1931: 176-178, 177-179; Gödel 1931: 197; 1986: 194, 195)?

5. Действително ли т. нар. теореми на Гьодел за непълнотата са теореми, т.е. разрешими твърдения? Или поради самореференциалната приложимост на теоремите на Гьодел се оказва, че от тяхната валидност (разрешимост), следва собствената им неразрешимост (невалидност).

6. Очевидно обаче – и поради самото доказателство на Гьодел – обратното твърдение, т.е. за тяхната невалидност (неразрешимост) е невярно. Следва ли от това, че и самите теореми на Гьодел са неразрешими твърдения?

7. Ако на последния поставен въпрос се даде положителен отговор, то какъв е истинностният, или по-общо фомулирано, логическият и онтологическият статут на твърденията за непълнота на системи, съдържащи аритметиката на Пеано?

8. Може ли дуален подход да намери изход от ситуацията и дали такъв подход не може сам да се разглежда в този смисъл като следствие от неразрешимостта на проблема за пълнотата?

Добре известна е теоремата, че от формална система, която съдържа противоречие, следват както верни, така и неверни твърдения, т.е. грубо казано, „може да се изведе всичко”. Аналогично може да се постави въпросът, дали съществува общ закон, във философски план, или подобен извод, в логически, който да визира статута на формална система, съдържаща довод от такъв специален тип, а именно самореференциален и свързан с един или друг парадокс.

Нека като илюстрация си послужим с парадокса на Лъжеца, изключително прост и нагледен, а освен това изрично цитиран и перифразиран от самия Курт

Гьодел по отношение на обосноваващия довод на неговото доказателство. Проблемът при Лъжеца е, че когато казва „Аз лъжа", той казва истината, но ако казва истината, значи не лъже и следователно не казва истината и т.н. Изглежда интуитивно вярно, че ако в дадена логическа верига от изводи се включи, твърдение от този тип, то цялата фигура на доказателството ще придобие същия характер.

По думите на Гьодел в случая, който той обсъжда, „имаме твърдение, което твърди своята собствена недоказуемост". В резултат на използването на този довод съвършено коректно следва изводът, че съществуват недоказуеми твърдения, при съблюдаване на определени условия, както най-общо може да се резюмира Гьоделовият аргумент за непълнотата.

57. Проблемът със самореференциално прилагане на теоремата

Парадокс при „Лъжеца" се получава едва при самореферециалното прилагане на неговия извод по отношение на самия него, тъй като изпълнява своите собствени предпоставки. Дали при Гьоделовия аргумент възможността за аналогично самореференциално прилагане, водеща до парадокс, е *наистина* отстранена? *Тоест, дали самата теорема на Гьодел за неразрешимост не удовлетворява своите собствени условия, в резултат на което самата тя да се явява неразрешимо твърдение?*

Да приемем, че е така. Какво се получава? Тъй като съществуването на неразрешими твърдения самò е неразрешимо твърдение, то ние *бихме били свободни да приемем както теоремата на Гьодел така и нейното отрицание в качеството на* ***аксиома***. Самото доказателство на Гьодел остава валидно, но в качеството на доказателство за непротиворечивост на – вече! – *аксиомата за непълнотата* със системата на *Principia*. Би трябвало обаче да съществува също така доказателство и за независимост, като с предходните разсъждения вече се набелязват неговите контури.

58. Идея за „негьоделова", т.е. „хилбертова математика"

Да приемем, че е валидно отрицанието на аксиомата за непълнотата. Тогава попадаме в не-Гьоделова математика, която е справедливо да бъде наречена Хилбертова, в чест на предложената от последния програма за формално самообосноваване на математиката. В нея „няма да съществуват неразрешими твърдения". Но смисълът на това, че „няма да съществуват неразрешими твърдения", подлежи на уточнение.

За да го онагледим, може да помогне аналогията с понятието „успоредни прави" при прехода от евклидова към неевклидова геометрия: и по-специално, към хиперболичната геометрия на Лобачевски и сферичната – на Риман. Според прочутия пети постулат на Евклид (в кратка, съвременна формулировка) през точка извън дадена права минава точно една права успоредна на нея. В геометрията на Лобачевски през точка извън дадена права минават неопределено много прави, които не я пресичат, като понятието „успоредна" придобива нов смисъл, а именно на двете „най-близки" спрямо дадената прави, които не я пресичат. В геометрията на Риман всеки две прави ('права' е всяка голяма окръжност) необходимо се пресичат и понятието „успоредни прави" остава безсъдържателно и не се използва.

Както в евклидовата геометрия понятието „успоредни прави" е изключително съдържателно и полезно, така и „неразрешими твърдения" – в Гьоделовата математика. Както в геометрията на Риман „няма успоредни прави", така и в предположената по-горе Хилбертова математика „няма неразрешими твърдения". Заедно с това има смисъл, както ще видим по-нататък, в Хилбертовата математиката да се включи и една дуална област, аналогична на геометрията на Лобачевски, в която да е валидно: „всички или неопределено много твърдения са неразрешими". Така както понятието за „пресичане на прави" помага да се изясни какъв смисъл да се влага съответно в отсъствието и в наличието на успоредни прави, така в нашия случай ще използваме понятието следване от себе си на едно твърдение.

Понятие за неразрешимост (следователно в т.ч и за абсолютна) вече беше обсъждано по-горе във връзка с теоремата на Мартин Льоб. Така Хилбертовата математика, при която по постулат няма да има неразрешими твърдения, т.е. за всяко твърдение е изводимо, че или то, или неговото отрицание е изводимо, се разбира така: в нея, за всяко твърдение, което следва от себе си, е валидно, че или то, или неговото отрицание е изводимо. Обратно, от това, че не е вярно, че дадено твърдение е изводимо, следва, че даденото твърдение не следва от себе си, т.е. то принадлежи на дуалната област, за която по-горе се каза, че е валидно: „всички твърдения са неразрешими".

Модел на „логиката на Хилбертовата математика" може да се построи в духа на квантовата логика от типа на фонНоймановата, спомената по-горе, напр. с помощта на „взаимно неустановимите твърдения": когато твърденията от едната от двете дуални области имат определени истинностни стойности, тези от другата, нямат такива. В първия случай казваме, че твърденията следват от себе си, а в другия, че не следват от себе си, или по друг начин казано, че не са тъждествени на себе си.

Ако сравним с Гьоделовата математика, то там всички твърдения имат определени истинностни стойности и съществуват неразрешими твърдения. В Хилбертовата математика някои (фигуративно казано, „половината") твърдения нямат определени истинностни стойности, но неразрешими твърдения няма. В резултат на това подмножеството на всички разрешими твърдения би била пълно и непротиворечиво.

59. ω-непротиворечивостта

Нека преминем към въпроса дали е валидно самореференциалното разсъждение, което дава положителен отговор за приложимостта на теоремите на Гьодел по отношение на собственото им съдържание? В термините на теорема VI (Gödel 1931: 187; 1986: 172, 173) от изложението на Гьодел (обичайно наричана първа теорема на Гьодел за непълнотата), въпросът следва да се постави така:

Дали доказателството на Гьодел може да се формализира като „$\boldsymbol{\omega}$-консистентен клас от ФОРМУЛИ"? Или казано с малко повече свобода на езика, дали доказателството на Гьодел съдържа в себе си аритметиката на Пеано, което, за да бъде изпълнено, е достатъчно да съдържа нейните аксиоми.

Една теория е „$\boldsymbol{\omega}$-консистентен клас от ФОРМУЛИ", ако и само ако: 1) съществува взаимно еднозначно съответствие $\boldsymbol{\omega}$ между част от тази теория и естествените числа и техните свойства; 2) по-точно това означава, че не съществува свойство $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n})$, и то за нито естествено число $\boldsymbol{n}$, такова че то да е валидно за естествените числа, но да не е валидно при интерпретацията му в термините на теорията посредством взаимно еднозначното съответствие $\boldsymbol{\omega}$. В скицата на доказателството Гьодел, която вече започнахме да обсъждаме, пише:

> *За метаматематическите разглеждания е естествено безразлично, какви обекти са взети като първични знаци и се решаваме на това да използваме естествените числа като такива [29]. Съответно на това, една формула тогава е крайна последователност от естествени числа [30] и фигурата на едно доказателство – крайна редица от крайни редици естествени числа. Метаматематическите понятия (твърдения) чрез това стават понятия (твърдения) относно*

[29] Тоест, изобразяваме първичните знаци по едно-еднозначен начин върху естествени числа.
[30] Тоест, разполагане на отрязък от числова редица с естествени числа. (Числата наистина не могат да се доведат до пространствено подреждане.)

> *естествени числа, респ. редици от такива*[31] *и оттук (поне отчасти) изразими в символите на самата система PM. В частност може да се покаже, че понятията „формула", „фигура на доказателство", „доказуема формула" са дефинируеми вътре в системата PM, т.е. можем, напр., да посочим формула* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$ *от PM с една свободна променлива* $\boldsymbol{v}$ *(от типа на числова последователност)*[32]*, така че* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$*, интерпретирана съдържателно да означава:* $\boldsymbol{v}$ *е доказуема формула* (Gödel 1931: 174; 1986: 146, 147).

Какво следва от този подход относно $\boldsymbol{\omega}$-консистентността на самото доказателство на Гьодел в качеството му на „$\boldsymbol{\omega}$-консистентен клас от ФОРМУЛИ"? Ако изобщо съществува такъв клас от формули, то той ще превърне доказателството на Гьодел в $\boldsymbol{\omega}$-консистентно, тъй като ще се окаже част от него. Също така и изводът на самата теорема – по силата на нейната валидност – веднага се прилага и към самата нея. Тъй като от теоремата, разгледана в качеството на теория, формализирана като „$\boldsymbol{\omega}$-консистентен клас от ФОРМУЛИ" следва единствено нейното заключение, то в резултат на прилагането ѝ към самата себе си, следва, че както самото заключение, така и неговото отрицание са недоказуеми. Тоест обобщено, от доказуемостта на самата теорема и валидността на нейната самоприложимост следва нейната недоказуемост. Обратно, да приемем, че е вярно отрицанието на теоремата: тогава следва, че теоремата е доказуема и поради това, в крайна сметка валидна. От приведеното разсъждение следва, че включването на парадоксален довод от типа на парадокса на Ришар или на Лъжеца в самото обосноваване на доказателството на теоремата за непълнотата не може да остане без последствия за самата теорема: тя придобива същия характер на недоказуемо твърдение.

За да проследим отчетливо философските следствия от това състояние на нещата, нека отново използваме илюстрацията с парадокса на Лъжеца, тъй като тя запазва всички съществени черти, необходими за разглеждането на въпроса. При обичайна употреба в езика твърдението „Аз лъжа" имплицира обект на лъжата, от който обаче, напълно естествено, т.е. по общоприето подразбиране, се изключва

[31] С други думи: гореописаната процедура поражда изоморфен образ на системата PM в областта на аритметиката, и всички метаматематически разсъждения могат еднакво добре да се проведат в този изоморфен образ. Това става в следващата скица на доказателството, т.е. под „формула", „твърдение", „променлива" и т.н. *трябва винаги да разбираме съответните предмети от изоморфния образ*.

[32] Би било много лесно (само малко обременително) да се изпише тази формула фактически.

самореференциално използване по отношение на самото твърдение. В парадокса на Лъжеца отсъствието на нормално подразбирания от контекста *друг* обект на лъжата, изключен чрез изваждането от какъвто и да било контекст, принуждава в качеството на контекст да се разгледа самото твърдение, което чрез това се слива с огледалния си образ на метаравнище: единственият възможен обект на лъжата при тази насилствено и разбира се, изкуствено, нарочно измислена употреба остава самото твърдение, пораждайки необходимата за появата на парадокса самореференциалност.

60. Метаматематическото изключване на самореференциално прилагане на първата теорема за непълнотата

Гьодел изрично пише:

> *От забележката, че* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *твърди своята собствена недоказуемост, следва веднага, че* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *е истинно, понеже* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *е наистина недоказуемо (понеже е неразрешимо). Неразрешимото в системата PM твърдение следователно все пак се разрешава чрез метаматематическо съображение. Точният анализ на това странно обстоятелство води до поразителни резултати по отношение на доказателството за непротиворечивост на формална система, които ще бъдат по-детайлно разработени в Раздел 4 (Твърдение XI)* (Gödel 1931: 176; 1986: 150,151).

Въпросното Твърдение или Теорема XI е всъщност т. нар. втора на Гьодел за непълнотата, която в най-едри щрихи твърди, че самата аритметика на Пеано (еквивалентна на нея или включваща я) съдържа доказателство за собствената непротиворечивост тогава и само тогава, когато е противоречива.

Да подчертаем следната връзка: Гьодел изрично поставя в началото на току-що приведения цитат от него основополагащото т.нар. първа теорема за непълнотата твърдение, твърдящо собствената си недоказуемост, в контекста на ***не****саморефлексивна* употреба, която съответства при обсъдената малко по-горе илюстрация чрез парадокса на Лъжеца на обичайната употреба на изречението „Аз лъжа” в някакъв имплицитен контекст. По такъв начин той напълно извежда от обсъждане самореференциалната употреба на т. нар. първа теорема на Гьодел за непълнотата.

По-горе обаче показахме, че това е възможно, оставяйки я сама за себе си извън всякакъв контекст, с който да се съотнесе. Това стана под лозунга тя да бъде разгледана не в качеството на теорема, по какъвто начин се имплицира контекст, а като завършена теория. С това повторихме по същество процедурата, чрез която обичайно употребяваното в контекст твърдение „Аз лъжа" се извежда от него, чрез което се принуждава да се отнесе към себе си, да стане самореференциално. Също така показахме, че т. нар. първа теорема за непълнотата не съдържа никакви непреодолими логически пречки за самореференциална употреба, както впрочем такива не съдържа и самият парадокс на Лъжеца.

Ако и само ако самореференциалната употреба на т. нар. първа теорема за непълнотата бъде изключена чрез външни и следователно произволни съображения, наречени от Гьодел „метаматематически", съответстващи на интуитивната употреба на твърдението „Аз лъжа", но противоречащи на начина на самореференциална употреба на аналогично твърдение в хода на самото доказателство, ***тогава и само тогава*** е валидна т. нар. втора теорема за непълнотата.

Ако включим на обичайни основания за последователност, и толкова повече – за логическа прецизност и коректност също и самореференциалната употреба на т. нар. първа теорема за непълнотата, то тогава т. нар. втора теорема за непълнотата е недоказуема, което обаче следва тъкмо от недоказуемостта и на т. нар. първа теорема за непълнотата, тъй като нейната валидност след самореференциална употреба влече нейната собствена недоказуемост.

От приведеното разсъждение и експлицитните цитати би трябвало вече да е ясно, че логик от ранга на Гьодел не може да не си е давал сметка за особения статут на т. нар. първа теорема за непълнотата, поради това че самореференциалната ѝ употреба, от която следва нейната недоказуемост, е изключена по метаматематически съображения. С други думи, изглежда твърде невероятно да не е разбирал, че тя е аксиома и едва след приемането ѝ (заедно с отхвърляне на нейното отрицание по външни спрямо математиката съображения) следва непълнотата на Пеановата аритметика, визирана в т. нар. втора теорема за непълнотата и оттук зачеркването като невъзможна на програмата за самообосноваване на математиката на Хилберт.

61. Реалибитация за Хилбертовата програма

Какво е тогава истинското положение на нещата? От валидността на т. нар. първа теорема за непълнотата следва неосъществимостта на Хилбертовата програма, но заедно с това е необходимо да се въведе външно съображение, което да забрани самореференциалната ѝ употреба. Следователно то има характер на аксиома, и при това последната е необходимо в тясна връзка с т. нар. първа теорема за непълнотата, възможно дори при определени подходи логически еквивалентно с нея.

Ако тази аксиома не бъде добавена (което е различно от това да се приеме нейното отрицание в качеството на аксиома), тогава поради самореференциалната употреба на теоремата, от нейната валидност следва нейната недоказуемост. Тогава т. нар. втора теорема за непълнота не може да се изведе, най-малкото по пътя, следван от Гьодел.

Тогава проличава изключително деликатното и интересно съотношение на т. нар. първа и втора теорема за непълнотата. Неговите последствия вече бяха обрисувани по-горе. Може да говорим за два алтернативни типа математики: Гьоделова математика и Хилбертова математика според това дали математиката не може (Гьоделовата) или може (Хилбертовата) да се самообоснове. Според досега общоприетото разбиране на резултата на Гьодел математиката не може да се самообоснове, но това се доказва с *вътрешно*-математически средства.

Един по-прецизен анализ, чиято скица се опитахме да започнем по-горе, обаче показва, че с изцяло вътрешно-математически средства не може да се докаже нито че математиката може да се самообоснове, *нито че математиката* ***не*** *може да се самообоснове*. С други думи, това е едно неразрешимо твърдение, чиято неразрешимост непосредствено следва от неразрешимостта на т. нар. първа теорема за непълнотата. Неразрешимостта на последната следва от валидността на последната след самореференциално прилагане.

Тогава в рамките на собствено математическо разглеждане ние сме свободни да положим в качеството на аксиома самообосноваването на математиката, и то – тъкмо според програмата на Хилберт – на основата на аритметиката. В този случай е валидно отрицанието на т. нар. втора теорема за непълнотата: аритметиката на Пеано е пълна в смисъл, че съдържа доказателство за собствената непротиворечивост и заедно с това е непротиворечива. От тук веднага следва, че е валидно и отрицанието на първата теорема за непълнота, т.е. от теория, съдържаща аритметиката, не може да се изведе неразрешимо твърдение. Нещо повече, в този случай формулировката на т. нар. първа теорема за непълнотата придобива изглед, аналогичен на т. нар. втора теорема: твърдение, визирано в нея, е разрешимо тогава и само тогава, когато е неразрешимо, поради което трябва да се приеме, че не съществува.

Що се отнася до това: валидно ли е прилагането на т. нар. първа теорема за непълнотата към самата нея, може да се добави още: самият Гьодел изтъква, че неговият

> *метод на доказателство очевидно може да се приложи към всяка формална система, която, първо, съдържателно тълкувана, има на свое разположение достатъчно средства за изразяване, за да дефинира понятията, появяващи се в горното разсъждение (в частност, понятието „доказуема формула") и в която, второ, всяка доказуема формула е истинна също и съдържателно* (Gödel 1931: 175-176 1986: 150, 151).

В последващото изложение замества „втората от току-що приведените предпоставки с чисто формална и далеч по-слаба" (пак там), а по същество именно – че всяка доказуема формула се интерпретира в истинно съждение относно целите числа (т. нар. $\boldsymbol{\omega}$-непротиворечивост).

62. За гьоделовия номер на първата теорема за непълнотата

Въпросът за самореференциалното приложение на т. нар. първа теорема за непълнотата ни отвежда и към третия поставен въпрос: какъв е нейният Гьоделов номер? Основните проблеми тук са два. Първо, съществува ли явна забрана да се присъедини Гьоделов номер на т. нар. първа теорема за непълнотата? Второ, кои символи участват в записа на формулата ѝ: символ за множеството от всички естествени числа или самите символи на естествените числа?

Отговорът на първия въпрос е отрицателен. Не съществува забрана да се присъедини Гьоделов номер на т. нар. първа теорема за непълнотата. Това следва от факта, че такъв се приписва на всяко твърдение от „формалната система $\boldsymbol{P}$, за която искаме да докажем съществуването на неразрешими твърдения" (Gödel 1931: 176; 1986: 150, 151) и от дефинитивното описание на такава формална система $\boldsymbol{P}$ (Gödel 1931: 176-177; 1986: 150-152, 151-153), според което т. нар. първа теорема за пълнотата, разгледана в качеството на формална система в съответствие със съображенията, изложени по-горе, изпълнява изискванията за такава формална система.

Отговорът на втория въпрос е, че се изброяват в качеството на символи всички естествени числа и това следва от описания (Gödel 1931: 178-179; 1986: 156, 157) начин, по който се построява взаимно еднозначно съответствие между първичните знаци на формалната система $\boldsymbol{P}$.

От тези две съображения следва, че Гьоделовият номер †, който би трябвало да се присъедини на самата т. нар. първа теорема за непълнотата, е $† = \prod_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^{\boldsymbol{n}_i}$, където $\boldsymbol{p}_i$ са простите числа, подредени по нарастваща големина, а $\boldsymbol{n}_i$ са естествените числа, които кодират чрез едно-еднозначното съответствие първичните знаци от формалната система $\boldsymbol{P}$. Очевидно този номер ще бъде безкраен и няма да е уникален, тъй като и на отрицанието на т. нар. първа теорема за непълнотата ще бъде приписан същия (!?) безкраен номер. За всеки краен гьоделов номер можем да възстановим еднозначно оригиналната формула, обаче за самата Гьоделова теорема, поради това че номерът ѝ е безкраен, се присъединяват поне две формули: самата тя и нейното отрицание и по него е невъзможно да бъде възстановена еднозначно. Поради това доказателството му не може да се приеме за конструктивно, тъй като съществува поне едно твърдение, а именно самата т. нар. първа теорема за непълнотата, по чийто номер † не може да се възстанови еднозначно самото твърдение. Що се отнася до т. нар. втора теорема за непълнотата, то тя не е конструктивна по силата на това, че е недоказуема. В нашия контекст следва да се постави също така следният проблем: валидно ли е твърдението $† < \boldsymbol{\varepsilon_0}$.

63. Хилбертова и Гьоделова математика: Коя е математиката на реалния свят?

Тъй като вече скицирахме отговорите на въпроси 5, 6 и 7, да преминем към отговора на въпрос 8. Може ли дуален подход да намери изход от ситуацията и дали такъв подход не може сам да се разглежда в този смисъл като следствие от неразрешимостта на проблема за пълнотата? Очевидно тук по-скоро трябва да се премине към философски тип отговор. Оформя се дуализмът: или Хилбертова самообосноваваща се математика, или Гьоделовата математика на непълнотата. Двата подхода са еднакво валидни, но несъвместими. Както вътре в Хилбертовата, така и вътре в Гьоделовата математика имаме съответно или две дуални области, в която или всички твърдения са разрешими, или нито едно твърдение не е разрешимо, от една страна, или от друга, съществуват както разрешими, така и неразрешими твърдения, при което принадлежността към единия или другия клас трябва да се решава конкретно за всяко отделно твърдение. Очевидно е също така, че едно неразрешимо твърдение може да се разглежда като две дуални, еднакво валидни, но несъвместими твърдения, с други думи, като кохерентната суперпозиция „да-и-не твърдение", както и че една кохерентна суперпозиция, да речем, прословутият и вече разгледан пример с Шрьодингеровата „жива-и-мъртва котка", може да се тълкува като неразрешимо твърдение, чието разрешаване се извършва чрез необходимо външната процедура на измерването (наблюдението).

Квантовата механика и информация ни предлага интерпретативния ключ, чрез който можем да осмислим и да си изясним от философска гледна точка съотношението между Хилбертовата и Гьоделовата математика. Последната съответства по-точно на онтологично-епистемологичния изход, намерен от квантовата механика и информация, за специфични, но аналогични напрежения и това ни позволява да говорим за особен стил на мислене, характерен за епохата, но непроизтичащ необходимо от самото състояние на нещата, чието дуално осмисляне е и тъкмо Хилбертовата самообосноваваща се математика.

Затова обаче има и по-дълбоки *историко*-философски и може би дори историко-*онтологични* основания. С еднакви основания можем да говорим за две взаимно трансцедентни, но свързани и поне отчасти огледални, „рефлексивни" области (които и да са те, напр. крайно и безкрайно, субект и обект и пр.) или за една единствена интегрална област, в която двете начала се проникват взаимно, в общия случай във всеки обект, без това да изключва самостоятелното съществуване на двете начала, обаче само в качеството на гранични частни случаи, крайните точки на един всеобхватен континуум между тях.

В историята на духа по-скоро първоначалният, „класическият" вариант, който се реализира, е първият, докато т. нар. *Принстънски дух* характеризира развитието на специфичните конфликти в него и прехода към втория подход, всъщност еднакво възможен според състоянието на нещата.

За да си изясним съотношението между контекста на откритието, зададен чрез т. нар. теорема за пълнотата на Гьодел, и неговото съдържание, съответстващ на т. нар. първа и втора теорема за непълнотата, нека сега отново се насочим към общия план и замисъла на доказателството, така както са изложени от Гьодел:

Ще скицираме, преди да навлезем в детайли, първо главната идея на доказателството, естествено, без да предявяваме претенция за точност. Форму-

лите на една формална система (тук се ограничаваме до системата PM[33]*) са, отвън разгледани, крайни последователности от основни знаци (променливи, логически константи и скоби или, съответно, точки за разделяте) и лесно може точно да се прецизира,* кои *редици от основни знаци са смислени формули и кои не са*[34]*. Аналогично, доказателствата, от формална гледна точка, не са нищо друго освен крайни последователности от формули (с определени свойства, които могат да се посочат)* (Gödel 1931: 174; 1986: 146, 147).

Тук бихме искали да подчертаем два момента относно формулите, които биват разглеждани, а именно: че са множества с *краен* брой елементи и че са последователности, т.е. елементите им са *номерирани еднозначно* и тук – както и в разгледаното по-горе доказателство на Генцен – на всяка формула съответства ординал. Както вече видяхме, с това възниква проблем със самата т. нар. първа теорема за непълнота, разгледана в качеството на формула: тя трябва да съдържа безкраен брой елементи, тъй като необходимо включва подмножество с безкраен брой елементи, а именно естествените числа. След като тя не е формула (можем да приемем ограничението до системата PM) единствената възможност, която остава, е да я тълкуваме като теория и с това да продължим по пътя към самореференциалното ѝ приложение. От друга страна, може да се предположи, че нейният ординал в качеството ѝ на формула, нека го означим с †, е по-малък от ε_0: $† < \varepsilon_0$.

Следователно може да се издигне хипотезата, че макар т. нар. първа теорема за непълнотата – след обосноваването на нейното самореференциално прилагане – се оказва недоказуема като следствие от собствената ѝ валидност, тя все пак е доказуема посредством трансфинитна индукция, т.е. в системата, използвана в качеството на метатеория в доказателството на Генцен.

64. Проблем с „първичните знаци”

Едно друго съображение е тясно свързано с контекста на обсъжданото доказателство както в творчеството на Гьодел, така и при стандартното ѝ изложение, а именно във връзката с т. нар. теоремата на Гьодел за пълнотата, представляваща основен резултат в неговата дисертация. Нейното доказателство е публикувано в

[33] Системата на „Принципи на математиката” от Ръсел и Уайтхед. – Бел. моя: В.П.
[34] Разбираме тук и в следващото под „формула от PM” винаги формула, написана без съкращения (т.е. без използване на дефиниции). Дефинициите служат винаги само за по-кратък начин за запис и са следователно по принцип ненужни.

1930 г. – годината, предшестваща публикацията „За формално неразрешими пропозиции на *Principia mathematica* и родствени системи I" (1931). За нас в тази връзка са особено съществени два въпроса:

1. По какво в основата си се различават условията, описващи една математическа система, в т. нар. теорема за пълнотата и в първата теорема за непълнотата, така че на такава разлика да може да се вмени ролята на „причина", т.е. на достатъчно и може би необходимо условие за появата на „непълнота"?

2. На коя аксиома в теория на множествата съответства тази съществена разлика?

За изясняване смисъла на първия въпрос много помага т. нар теорема за компактността:

> *За да бъде изброимо безкрайна система от формули изпълнима* [erfüllbar], *е необходимо и достатъчно всяка нейна крайна система да е изпълнима* (твърдение 10: Gödel 1931: 358; Gödel 1986: 118, 119).

Един възможен, често срещан, но *неверен* отговор на първия поставен въпрос е следният: докато в т. нар. теорема за пълнотата става дума за краен брой „първични знаци", съставящи евентуално безкраен брой формули, то т. нар. първа теорема за непълнотата се отнася до формули, съставяни с помощта на безкраен брой първични знаци, сред които със сигурност, твърди тя, може да се открие такава, която се явява неразрешимо твърдение.

Необходимо условие за дадения отговор и други аналогични или дори еквивалентни твърдения от същия тип е абсолютна разлика между първичен знак и формула, на което в теорията на множествата съответства такава между елемент и множество, а в елементарната аритметика, аксиоматизирана по Пеано – аналогична между число и неговия наследник, респ. между число и неговия предходник. За никое $\boldsymbol{n}$ не е вярно, че $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n+1}$ съвпадат. При крайни както кардинални, така и ординални числа това е безусловно вярно. Но всъщност това е фундаменталната и основополагаща разлика между безкрайните ординали и кардинали: докато първите запазват това свойство, като се оказва в основата на изискването за 'конструктивност' и дори за 'финитност', то не е вече валидно за безкрайните кардинали.

Що се отнася до теорията на множествата от изначална важност е аксиомата за фундирането: ако допуснем, че не е валидна, то съществува множество, за което разликата между елемент и множество, остава винаги относителна; обратно, ако бъде приета, наличието на „дъно” предполага, че винаги съществуват елементи, които по принцип не могат да бъдат множества.

По един парадоксален начин обаче, ролята на такова „дъно” изпълнява празното множество, $\emptyset$, т.е. множеството, което няма елементи. В елементарната аритметика, такъв елемент е първото естествено число, за каквото в повечето съвременни трактовки – поради съображението да бъде включен и неутралният елемент на събирането – се приема нулата, т.е. онзи брой, когато няма какво да се брои. Обсъждането на необходимостта от тази парадоксалност на празното множество или на началното число ще оставим засега настрана.

Както вече видяхме, че е възможно, ако се приеме за пълна, такава система, която съдържа безкраен брой „първични знаци” (т.е. такава, която може да се кодира чрез естествените числа), то това веднага изисква суспендиране на аксиомата за фундирането, съответно и най-нагледно – въвеждането на отрицателните числа в качеството на естествени; или с други думи: заличаване на каквато и да е разлика между символ и формула, между елемент и множество; фигуративно казано, една „всеобща ковариантност”, „пълна относителност” в първичната логика, теорията на множествата и аритметиката.

65. Позицията на „дуалистичното питагорейство”

Подсказаната чрез последната фраза връзка между векторни и тензорни пространства, типове от които, обслужващи чудесно не само специалната и общата теория на относителността, но и квантовата механика и информация, от една страна, и първична логика, теория на множествата и елементарна аритметика, от друга, може би на пръв поглед изглежда съвсем изкуствена, „метафорична”, дори може би некоректна, всъщност обаче отдавна е въдворена в употреба чрез теоремата за компактността и доказаната ѝ еквивалентност в редица съществени аксиоматики със сега обсъжданата теорема за пълнотата. Този подход е в основата на теорията на категориите, в която се изучават изображенията („функтори”) от една в друга между различни структури („категории”, които в случая са три: булеви алгебри, топологически и векторни пространства).

От голяма важност са две теореми на Стоун: чрез едната от тях на всяка булева алгебра (на свой ред изоморфна на обичайното пропозиционално смятане) еднозначно се съпоставя компактно напълно несвързано хаусдорфово пространство (наричано още пространство на Стоун[35]) и чрез това някакъв базис както на топологично, така и на векторно пространство. Оттук по теоремата на Тихонов, че произведението от компактни пространства е компактно, следва теоремата за компактността и тясно свързаната или еквивалентна на нея теорема за пълнотата. Другата теорема на Стоун в тясна връзка с първата установява еднозначно съответствие между самоспрегнатите оператори в хилбертово пространство (обхващащи и т. нар. хипермаксимални оператори, на свой ред еднозначно свързани с физическите величини в квантовата механика) и еднопараметричните семейства от унитарни оператори в него. Теорията на категориите позволява да се очертават фундаментални структури, за които обичайни математически структури, често изучавани в отдалечени клонове на математиката, се явяват не повече от различни модели на една и съща такава фундаментална структура.

Теорията на категориите има предимството пред теорията на множествата, че се доближава до физическия възглед за света, състоящ се от неща и техните движения: от обекти и морфизми. Все пак бихме могли да положим своеобразно равенство „по тоталност” на множеството от всички множества и на категорията от всички категории. Така все едно ще разделим множествата на два типа: на множества от обекти и на множества от морфизми. Всъщност теорията на категориите тогава ще постави въпроса за разделяне на тоталността на две. От логическа гледна точка това е проблемът със закона за изключеното трето относно безкрайни множества, в тясна връзка със закона за непротиворечието.

Теоремата на Коушън и Шпекър дава отрицателен отговор, необходимото условие за който е наличието на дискретни морфизми, а само едно достатъчно условие е тяхната некомутативност. Аксиомата за избора дава обаче положителен отговор. Кой обаче е въпросът?

Може ли тоталността и всяка нейна част впоследствие да се раздели на две свои части? Очевидно наличието на множества от типа на множеството от всички множества, които не принадлежат на себе си, са, които биха създали проблеми, респ. такива, чието характеристично твърдение е неразрешимо по т.нар. първа

[35] Точките в пространството на Стоун са ултрафилтрите на булевата алгебра. Оттук може да се построи непосредствена връзка и с актуално безкрайно малките в нестандартния анализ на Робинсън, както и тяхното представяне чрез компактните оператори в хилбертово пространство, предложено от Ален Кон (Connes 1995).

теорема за непълнотата на Гьодел. Те биха обяснили интуитивно отрицателния отговор, който дава теоремата на Коушън и Шпекър.

А положителният отговор на аксиомата за избора? Да си представим такава процедура: трябва да разделим множествата на такива, които принадлежат на себе си и на такива, които не принадлежат на себе си. Да приемем, че разделянето на две части е осъществено и по аксиомата за избора взимаме по един елемент първо от едното множество, после от другото, като взетите елементи се махат и процедурата се повтаря до изчерпване, чиято възможност е гарантирано от самата аксиома. Така и в двете множества ще осъществим добра наредба. При „нормалните" множества проблеми не възникват. Достигаме обаче до множеството от всички множества, които не принадлежат на себе си. Що да стори аксиомата за избора? Никакъв проблем: ще го зачисли в множеството, чийто ред е дошъл, или с други думи – случайно. Следователно, по принцип аксиомата за избора е аксиома за неповторимия избор, на места осъществяван случайно. Аксиомата за избора ще представи тоталността като един безкраен стринг, състоящ се константи – да речем ‘нула’, ако множеството принадлежи на себе си, и ‘единица’ в обратния случай – и променливи, които могат да бъдат фиксирани случайно.

Дали обаче това е пълният отговор? По Колмогоров и особено по Мартин-Льоф двата избора на една променлива могат да се различат по това, че единият е по-сложен в следния смисъл: тоталният безкраен стринг с него е по-сложен, отколкото с неговата алтернатива. Така можем да фиксираме безкрайния стринг на тоталността да бъде максимално сложният. Следователно, тоталният избор (т.е. представянето на тоталността като безкраен стринг с помощта на аксиомата за избора) е едновременно случаен (състоящ се константи и променливи) и детерминиран (състоящ се само от константи). Чрез втория случай се определя понятието за квантов алгоритъм, а чрез него и за квантов компютър, като заедно с това посочва в какво точно се различава от машина на Тюринг.

За да си изясним защо даденият и характеризиран като често срещан отговор на първия въпрос по-горе е неверен, следва да се навлезе в подробности в доста необикновената логическа връзка между т. нар. теорема за пълнотата и двете теореми за непълнотата в светлината на вече направените по-горе разсъждения относно самореференциалната приложимост и оттук неразрешимост на т. нар. първа теорема за непълнота.

Поразителното е, че всъщност и Гьодел винаги го е твърдял, но по един доста необичаен, логически прецизен, но твърде софистициран начин.

В доказателството на т. нар. теорема за пълнотата никъде не се твърди, че то е конструктивно, за разлика от цитираните места в публикацията (1931) относно т. нар. теореми за непълнотата. В наше време не се оспорва, че то не е конструктивно в точно определена степен, а именно в степента, в която не е конструктивна „лемата за ултрафилтрите”[36], по-слаба форма на аксиомата за избора. Освен това никъде не се твърди и следователно, никъде не се използва, че броят на „първичните знаци” – вкл. и според цитираното описание, дадено им в публикацията относно т. нар. теореми за непълнотата – е краен. При безкраен брой „първични знаци” могат да бъдат изпълнени едновременно и теоремата за пълнота и т. нар. първа теорема за непълнотата (след самореференциалното ѝ прилагане, което я превръща в неразрешимо твърдение), но не може да бъде изпълнена т. нар. втора теорема за непълнотата. Обратно, ако са изпълнени т. нар. първата и втората теорема за непълнотата, не може да е изпълнена т. нар. теорема за пълнотата.

Докато връзката между т. нар. първа и втора теорема за непълнотата се преекспонира, поради очевидно натрапващото се тяхно единство в рамките на една публикация, то еквивалентната по логическа значимост връзка между т. нар. теорема за пълнотата и т. нар. първа теорема за непълнотата се скрива в сянката на пролома между двете публикации, между т. нар. първа и втора теорема за непълнотата и оттук и чрез оглушаването от грохота от предизвиканото от нея предполагаемо срутване на Хилбертовата програма за самообосноваване на математиката.

Бихме обърнали внимание и на една неспомената доесга възможност за съотношение между Хилбертовата и Гьоделовата математика, а именно че тяхното сечение не е непременно празно, при което биха били валидни, както т. нар. теорема за пълнота, така *и двете* т. нар. теореми за непълнота. С други думи, не може да се изключи съществуването на аксиоматики, необходимо съдържащи брой първични знаци, който не е краен, които заедно с това удовлетворяват едновременно т. нар. теорема за пълнотата и първа теорема за непълнотата. Най-прост наглед за такава ситуация може да се даде посредством интуиционисткото суспендиране на правилото за изключеното трето при безкрайни множества. За целта просто трябва да изк-

[36] Според нея, не съществува филтър в множество, който да не се съдържа в някой ултрафилтър в това множество.

лючим аксиомата за фундирането, т.е. не да я заместим с нейното отрицание, а да я премахнем: с това „по интуиционистки” оставяме висящ въпроса, съществува ли множество, което няма „дъно” (= няма крайно „дъно”). С други думи, трябва да оставим без какъвто и да било отговор въпроса съществуват ли първични знаци[37], които заедно с това са формули; елементи, които не могат да бъдат множества; или ординали, които съвпадат със своя наследник. Този отказ от отговор изглежда свързан и с отказ от алтернативата: или потенциална, или актуална безкрайност, както и с приемане на хипотезата, че валидността на самореференциално прилагане на едно твърдение трябва да се решава винаги конкретно и често необходимо по съображения, външни за формализма, в който се съдържа.

Подобно русло, напомнящо прагматизма, на пръв поглед изглежда напълно чуждо на питагорейството, докато не си спомним, че обсъжданият тук негов вариант включва също така и една теория на измерването като редукция на трансфинитното или кохерентното към финитното, и то в качеството на собствено, т.е. вътрешно математическа.

Да проследим от набелязаната философска гледна точка, която си позволихме да наречем дуално или дуалистично питагорейство, как в скицата на доказателство, предложена от Гьодел, се построява неразрешимото твърдение:

> *Формула от PM с точно една свободна променлива, и то от типа на естествените числа (клас от класове), наричаме* знак на класове[38]*. Знака на класове си [го] мислим някак подреден в последователност*[39]*, означаваме $\boldsymbol{n}$-тия с $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n})$ и забелязваме, че понятието „знаци на класове”, както и подреждащото отношение $\boldsymbol{R}$ може да се дефинира в системата PM. Нека $\boldsymbol{\alpha}$ е кой да знак на класове; със $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{n}]$ да означим онази формула, която съответства на знака на класове $\boldsymbol{\alpha}$ чрез това, че свободната променлива е заместена със знака за естественото число $\boldsymbol{n}$. И тройното отношение $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{y}; \boldsymbol{z}]$ се доказва като дефини-*

[37] За съжаление много интересната връзка с философското направление на феноменологията, разглеждаща феномените като знаци на самите себе си или по определението на Хайдегер, „показващи сами себе си в себе си”, няма да има възможност да се проследи в настоящото изследване.

[38] Klassenzeichen, в английския превод „class sign”: срещащият се понякога на български превод „клас знаци” е неправилен и изопачава смисъла.

[39] Например, по нарастваща сума на членовете и при еднаква сума лексикографски.

руемо в PM. Сега ще дефинираме клас $\boldsymbol{K}$ *от естествени числа по следния начин:*

(1) $$\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{K} \equiv \overline{\boldsymbol{Bew}}\,[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}); \boldsymbol{n}]$$

(където $\mathbf{Bew}\ \boldsymbol{x}$ *означава:* $\boldsymbol{x}$ *е доказуема формула)*[40]*. Тъй като понятията, които се срещат в определящия израз, заедно с това са дефинируеми в PM, така и понятието* $\boldsymbol{K}$*, съставено от тях, т.е., има знак на класове* $\boldsymbol{S}$*, така че формулата* $[\boldsymbol{S};\ \boldsymbol{n}]$*, съдържателно тълкувана, означава, че естественото число* $\mathbf{n}$ *принадлежи на* $\boldsymbol{K}$ [41]*.* $\boldsymbol{S}$ *е като знак на класове идентичен с едно определено* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})$*, т.е. е в сила*

$$\boldsymbol{S} \;=\; \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})$$

за определено естествено число $\boldsymbol{q}$*. Сега показваме, че твърдението* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *е неразрешимо в PM* [42]*. Тъй като предположеното твърдение* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *би било доказуемо, то би било също и истинно, т.е. обаче според горното* $\mathbf{q}$ *щеше да принадлежи на* $\boldsymbol{K}$*, т.е. според (1),* $\overline{\mathbf{Bew}}\,[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}); \boldsymbol{n}]$ *би било в сила, в противоречие с допускането. Ако, обратно, отрицанието на* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *беше доказуемо, то щеше* $\overline{\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{K}}$*, тоест* $\mathbf{Bew}\,[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}); \boldsymbol{n}]$ *би било в сила.* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *би било доказуемо едновременно със своето отрицание, което отново е невъзможно* (Gödel 1931: 174-175; 1986: 146-148; 147-149).

С други думи, неразрешимото твърдение, което построява Гьодел, е, че за всяко едно число може да се реши проблемът *дали то принадлежи на множеството от всички числа, за които това* (а именно поставеното в курсив в същото това изречение) *твърдение не е вярно*. Това ни позволява да оценим постигнатото от Гьодел – имайки предвид и цитираната вече негова бележка под линия 14 (Gödel 1931: 175; 1986: 148, 149):

Може да се използва изобщо всяка епистемологична антиномия за едно доказателство за неразрешимост от такъв вид –

---

[40] С чертата отгоре е означено отрицание.

[41] Не представлява отново никаква трудност да се запише формулата **S** фактически.

[42] Забележете, че „$[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$" (или, което значи същото, „$[\boldsymbol{S};\ \boldsymbol{q}]$") е просто *метаматематическо описание* на неразрешимото твърдение. Но веднага щом формулата $\boldsymbol{S}$ е получена, можем естествено да определим и числото $\boldsymbol{q}$ и чрез това реално да запишем самото неразрешимо твърдение.

по следния начин: построен е *обобщаващ* модел в аритметиката на Пеано вероятно[43] на всички самореференциални семантични и теоретико-множествени твърдения, водещи до парадокс. Както вече изказахме хипотезата, включването на твърдение от такъв тип в доказателство има твърде висока цена, аналогична, макар и не чак толкова висока, на включването на противоречиво твърдение в едно доказателство. Тази цена е, че *доказаното по такъв начин твърдение придобива самото то неразрешим характер*, при това напълно достатъчно е, щото последното твърдение (а именно поставеното в курсив) да не е опровержимо, т.е. може да бъде както доказуемо, така и неразрешимо.

Вече видяхме, че Гьодел не напуска така очертаната прецизна логическа схема, но същевременно тя се оказва съзнателно или несъзнателно реторично оформена. В резултат на това мнозина нейни тълкуватели са се оказвали подведени по интенциите на нейната реторика и в неведение за логическата ѝ цялост.

[43] Тук „вероятно" е добавено, за да не обсъждаме възможността настоящето твърдение също така да се окаже или от него непосредствено да следва неразрешимо твърдение.

ЛИТЕРАТУРА

Albert, D. 1983 "On quantum-mechanical automata," *Physics Letters A*, 98(5-6): 249-252.

Albert, D. 1987 "A Quantum-Mechanical Automation," *Philosophy of Science*, 54(4): 577-585.

Albert, D. 1994 *Quantum Mechanics and Experience*, Cambridge, Mass. – London: Harvard University Press.

Albert, D. 2003 *Time and Chance*, Cambridge, Mass. – London: Harvard University Press.

Badiou, A. 1988 *L'être et l'événement*, Paris: Seuil.

Bell, J. 1964 "On the Einstein – Podolsky – Rosen paradox," *Physics* (New York), 1(3): 195-200.

Bell, J. 1966 "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics," *Reviews of Modern Physics*, 38(3): 447-452.

Berkelhammer, J. 2003 "From Reducibility to Extensionality: The two editions of *Principia Mathematica*," https://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/Students/berkelhammer.pdf (accessed on 11.09.2015).

Blatter, G. 2000 "Schrödinger's cat is now fat," *Nature*, 406(6791): 25-26.

Bohr, N., H. Kramers, J. Slater. 1924 "Über die Quantentheorie der Strahlung," *Zeitschrift der Physik*. 24(1): 69-87.

Buchholz, W. 1997 "Explaining Gentzen's Consistency Proof within Infinitary Proof Theory," in: *Computational Logic and Proof Theory* (eds. G. Gotlob, A. Leitsch, D. Mundici), Berlin – Heidelberg: Springer, 4-17.

Carruthers, P., M. Nieto. 1968 "Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics," *Review of Modern Physics*, 40(2): 411-440.

Chaitin, G. 1982 "Gödel's theorem and information," *International Journal of Theoretical Physics*, 21(12): 941-954.

Chaitin, G. 2007 "Is incompleteness a serious problem?" in: G. Chaitin, *Thinking about Gödel and Turing: Essays on Complexity, 1970-2007*. London, etc.: World Scientific, 299-302.

Church, A. 1976 "Comparison on Russell's resolution of the semantical antinomies with that of Tarski," *The Journal of Symbolic Logic*, 41(4): 747-760.

Conway, J., S. Kochen. 2006 "The Free Will Theorem," *Foundations of Physics*, 36(10): 1441-1473.

Conway, J., S. Kochen. 2009 "The Strong Free Will Theorem," *Notices of the American Mathematical Society*, 56(2): 226-232.

Copeland, B. J. 1998 "Even Turing Machine Can Compute Uncomputable Functions," in: *Unconventional Models of computation* (eds. C. Calude, J. Casti, M. Dinneen), Singapore – New York: Springer, 150-164.

Copeland, B. J. 1998 "Super Turing-Machines," *Complexity* (Special issue on models of computation), 4(1): 30-32.

Copeland, B. J. 2002 "Accelerating Turing Machines," *Minds and Machines*, 12(2): 281-300.

Copeland, B. J., R. Sylvan. 1999 “Beyond the Universal Turing Machine,” *Australasian Journal of Philosophy*, 77(1): 46-66.

Cotogno, P. 2003 “Hypercomputation and the Physical Church-Turing Thesis,” *British Journal for the Philosophy of Science*, 54(2): 181-223.

Dawson, J. 2003 “The Reception of Gödel’s Incompleteness Theorem,” in: *Gödel’s Theorem in Focus* (ed. S. Shanker), London – New York: Routledge, Taylor & Francis, 74-95.

Deutsch, D. 1985 “Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer,” *Proceedings of the Royal Society of London A*. 400(1818): 97-117.

Deutsch, D. 1985 “Quantum Theory as a Universal Physical Theory,” *International Journal of Theoretical Physics*, 24(1): 1-41.

Einstein, A. 1905 “Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?” *Annalen der Physik*, 18(13): 639–641.

Einstein, A. 1905 “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt,” *Annalen der Physik*, 17(6): 132–148.

Einstein, A. 1918 “Prinziplelles zur allgemeinen Relativitätstheorie,” *Annnalen der Physik*, 55(4): 241-244.

Einstein, A., B. Podolsky, N. Rosen. 1935 “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” *Physical Review*, 47(10): 777-780.

Feferman, S. 2003 “Kurt Gödel: Conviction and Caution,” in: *Gödel’s Theorem in Focus* (ed. S. Shanker), London – New York: Routledge, Taylor & Francis, 96-114.

Fitch, F. 1938 “The consistency of the ramified *Principia*,” *The Journal of Symbolic Logic*, 3(4): 140-149.

Franzén, T. 2005 *Gödel’s Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, Wellesley, Mass.: A.K.Peters.

Gentzen, G. 1936 “Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie,” *Mathematische Annalen*, 112(1): 493-565.

Gentzen, G. 1938 “Die gegenwärtige Lage in der mathematishen Grundlagenforshung,” *Forshungen zur Logic und zur Grundlegung der exacten Wissenshaften*, Neue Folge, Heft 4. Leipzig: Hirzel, 5-18.

Gentzen, G. 1938 “Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie,” *Forshungen zur Logic und zur Grundlegung der exacten Wissenshaften*, Neue Folge, Heft 4. Leipzig: Hirzel, 19-44.

Gödel, K. 1930 “Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls,” *Monatshefte der Mathematik und Physik,* 37(1): 349-360.

Gödel, K. 1931 “Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I,” *Monatshefte der Mathematik und Physik*, 38(1): 173-198.

Gödel, K. 1938 “Vortrag bei Zilsel,” in: K. Gödel, *Collected Works*. Vol. III. *Unpublished Essays and Lectures*, Oxford: University Press, New York: Clarendon Press – Oxford, 1995, 86-113.

Gödel, K. 1940 *Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton: University Press.

Hilbert, D. 1927 "The foundations of mathematics," in: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic*, 1879−1931 (ed. J. van Heijenoort), Cambridge., Mass.: Harvard, 1967, 464-479.

Jammer, M. 1974 *The Philosophy of Quantum Mechanics: The Interpretations of QN in historical perspective*, New York: Willey.

Kanamori, A. 2010 "Gödel and set theory," in: *Kurt Gödel. Essays for His Centennial* (eds. S. Feferman, C. Parsons, S. Simpson), Cambridge: University Press, 145-180.

Kochen, S., E. Specker. 1968 "The Problem of Hidden Variables in Qunatum Mechanics," *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17(1): 59-87.

Koellner, P. 2010 "On the question of absolute undecidability," in: *Kurt Gödel. Essays for His Centennial* (eds. S. Feferman, C. Parsons, S. Simpson), Cambridge: University Press, 189-225.

Lafitte, G. 2008 "Gödel Incompleteness Theorem," *Journées Automates Cellulaires* (Uzès, France), 74-89.

Lawvere, F. W. 1969 "Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories," in: *Category Theory, Homology Theory and their Applications II* (eds. A. Dold, B. Eckmann, Volume 92 of the series *Lecture Notes in Mathematics*), Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 134-145.

Le Morvan, P. 2004 "Ramsey on Truth and Truth on Ramsey," *British Journal for the History of Philosophy*, 12(4): 705–718.

Löb, M. 1955 "Solution of a problem of Leon Henkin," *The Journal of Symbolic Logic,* 20(2): 115-118.

Luckhardt, H. 1973 *Extensional Gödel Functional Interpretation: A Consitency Proof of Classical Analysis*, Berlin – Heidelberg – New York: Springer.

Minkowski, H. 1909 *Raum and Zeit* (Vortrag, gehalten auf der 80. Naturforsherversamlung zu Köln am 21. September 1908), Leipzig und Berlin: B.G. Teubner.

Mostowski, A. 1952 *Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic: An Exposition of the Theory of Kurt Gödel*, Amsterdam: North-Holland.

Nagel, E., J. Newman. 2001 *Gödel's Proof*, New York – London: New York University Press.

Neumann, J. 1925 "An axiomatization of set theory," in: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical* Logic, 1879−1931 (ed. J. van Heijenoort), Cambridge., Mass.: Harvard, 1967, 293-413.

Neumann, J. 1932 *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin: Verlag von Julius Springer.

Noether, E. 1918 "Invariante Variationsprobleme," *Nachrichten den Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematische-physikalische Klasse*, 235-257.

Parsons, C. 2010 "Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought," in: *Kurt Gödel. Essays for His Centennial* (eds. S. Feferman, C. Parsons, S. Simpson), Cambridge – New York: University Press.

Pauli, W. 1930 "The letter of the 4th of December 1930," http://microboone-docdb.fnal.gov/cgi-bin/RetrieveFile?docid=953;filename=pauli%20letter1930.pdf accessed on 10.09.2015)

Pauli, W. 1961 “Zur älteren und neueren Geschichte des Neutrinos,” in: W. Pauli. *Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie* (ed. V. F. Weissllcopf). Braunschweig: Vieweg, 156-180.

Pauli, W. 1980 *General Principles of Quantum Mechanics*, Berlin – Neidelberg – New York: Springer.

Penrose, R. 1999 *The Emperor's New Mind*, Oxford: University Press.

Petkov, V. 2005 *Relativity and the Nature of Spacetime*, Berlin – Heidelberg – New York: Springer.

Primas, H. 2000 “Complemetarity of Mind and Matter,” in: *Recasting Reality. Wolfgang Pauli's Philosophical Ideas and Contemporary Science* (eds. H. Atmanspacher, H. Primas), Berlin – Heidelberg: Springer, 171-209.

Ramsey, F. 1978 *Foundations. Essays in Philosophy, Logic, Mathematic and Economics*, London and Henley: Routledge & Kegan Paul.

Ramsey, F. 2001 *Foundations of mathematics and other logical essays (ed. R. Braithwaite)*, London: Routledge.

Riesz, F. 1907 “Sur une espèce de géométrie analytiques des systèmes de fonctions sommables,” *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (Paris), 144(6): 1409–1411.

Rosser, J. B. 1936 “Extensions of some theorems of Gödel and Church,” *Journal of Symbolic Logic*, 1(3): 87-91.

Roggers, H. 1958 “Gödel Numberings of Partial Recursive Functions,” *The Journal of Symbolic Logic*, 23(3): 331-341.

Rubin, H., J. Rubin. 1985 *Equivalents of the Axiom of Choice, II*, Amstredam – New York – Oxford: North-Holland.

Russell, B. 1908 “Mathematical Logic as Based on the Theory of Types,” *American Journal of Mathematics*, 30(3): 222-262.

Schrödinger, E. 1935 “Die gegenwärtige situation in der Quantenmechanik,” *Die Naturwissenschaften*, 23(48): 807-812; 23(49): 823-828; 23(50): 844-849.

Shepherdson, J. 1960 “Representability of recursively enumerable sets in formal theories,” *Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforshung*. 5(3-4): 119-127.

Skolem, T. 1922 “Some remarks on axiomatized set theory,” in: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical* Logic, 1879–1931 (ed. J. van Heijenoort), Cambridge., Mass.: Harvard, 1967, 290-301.

Smith, P. 2007 *An Introduction to Gödel's Theorem*, Cambridge: University Press.

Smullyan, R. 1992 *Gödel's Incompleteness Theorems*, New York – Oxford: Oxford University Press.

Syropoulos, A. 2008 *Hypercomputation: computing beyond the Church-Turing barrier*, New York: Springer.

Tait, W. 2010 “Gödel's reformulation of Gentzen's first consistency proof for arithmetic: The no-counterexample interpretation,” in: *Kurt Gödel. Essays for His Centennial* (eds. S. Feferman, C. Parsons, S. Simpson), Cambridge: University Press, 74-87.

Takeuti, G. 2003 *Memoirs of a Proof Theorist: Gödel and other Logicians* (trans. M. Yasugi, N. Passell), River Edge (N. J.) – London – Singapore – Hong Kong: World Scientific.

Tarski, A. 1944 "The Semantical Concept of Truth and the Foundations of Semantics," *Philosophy and Phenomenological Research*, 4(3): 341-375.

Timpson, C. 2004 "Quantum computers: the Church-Turing Hypothesis Versus the Turing Principle," in: *Alan Turing: life and legacy of a great thinker* (eds. C. Teuscher, D. Hofstadter), Berlin – New York: Springer, 213-240.

Turing, A. 1937 "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem," *Proceedings of London Mathematical Society*, series 2, 42(1): 230-265.

Turing, A. 1939 "Systems of Logic Based on Ordinals," *Proceedings of the London Mathematical Society*, series 2, 45(1): 161-228.

Turing, A. 1948 "Inteligent Machinery, a Heretical Theory," in *Philosophia Mathematica*, 4(3): (1996): 256-260.

Wang, H. 1996 *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, Cambridge, Mass.: MIT Press.

Whitehead, A., B. Russell. 1910. *Principia Mathematica*. Vol. 1. Cambridge: University Press (first edition).

Whitehead, A., B. Russell. 1927. *Principia Mathematica*. Vol. 1. Cambridge: University Press (second edition).

Wiener, N. 1914 "A simplification of the logic of relations," in: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical* Logic, 1879–1931 (ed. J. van Heijenoort), Cambridge., Mass.: Harvard, 1967, 224-227.

Wigner, E. 1967 "Remarks on the Mind-Body Question," in: E. Wigner. *Symmetries and Reflections*. Bloomington: Indiana University Press, 171-184.

Yanofski, N. 2003 "A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompletenss and Fixed Points," arXiv:math/0305282.

Yourgrau, P. 2005 *A World without Time: The Forgotten Legacy of Gödel and Enstein*, New York: Basic Books.

Yurov, A. 2003 "The Gödelizing Quantum-Mechanical Automata," arXiv:quant-ph/0301004.

Zermelo, E. 1908 "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I," *Mathematische Annalen*, 65(2): 261-281.

Люцканов, Р. 2008. *Теоремата за непълнотата: контексти на интерпретация*. С.: Изток – Запад.

Пенроуз, Р. 2005 *Тени разума. В поисках науки о сознании*р Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований**.**

Пенчев, В. 2007 "Принципът на най-малкото действие и неговите обобщения" *Философски алтернативи*, 4: 110-125.

Пенчев, В. 2009 *Философия на квантовата информация. Айнщайн и Гьодел*, С.: ИФИ-БАН.

Пенчев, В. 2011 "Парадоксът на Скулем и квантовата информация. Относителност на пълнота по Гьодел," *Философски алтернативи*, 2: 131-147.

Сморинский, К. 1983 "Теоремы о неполноте," в: *Справочая книга по математической логике. Часть IV. Теория доказательств и конструктивная математика*, Москва: „Наука": 9-56.

Васил Пенчев

ОТВЪД МАШИНАТА НА ТЮРИНГ

КВАНТОВИЯТ КОМПЮТЪР

Рецензенти:
Проф. д.м.н. Огнян Кунчев
Доц. д-р Любен Иванов

Българска. Първо. Формат 60x84/16
Печатни коли 11.5

Издателство „Изток – Запад“
ISBN 978-619-152-155-5