ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XIII / 1991, s. 23–27*

Roger PENROSE

PLATOŃSKA RZECZYWISTOŚĆ POJĘĆ MATEMATYCZNYCH?[1]

Jak „rzeczywiste” są obiekty świata matematyków? Zgodnie z jednym punktem widzenia wydaje się, że nie mogą one mieć w sobie nic rzeczywistego. Obiekty matematyczne są po prostu pojęciami; są one idealizacjami umysłu, wytworami matematyków, co prawda często stymulowanymi przez zjawiska przyrody i pozorny porządek różnych aspektów otaczającego nas świata, ale jednak tylko myślowymi idealizacjami. Czyż mogą one być czymś innym jak tylko zwykłymi, dowolnymi konstrukcjami ludzkiego umysłu? Równocześnie jednak jakaś głęboka rzeczywistość zdaje się owiewać pojęcia matematyczne, rzeczywistość wykraczająca daleko poza umysłowe deliberacje konkretnego matematyka. To tak, jakby myśl ludzka była prowadzona ku jakiejś zewnętrznej w stosunku do niej, wiecznej prawdzie — prawdzie, która odznacza się własną rzeczywistością i która tylko częściowo nam się objawia.

Zbiór Mandelbrota jest wymownym tego przykładem. Jego cudownie misterna struktura nie była wynalazkiem żadnego człowieka, nie była również dziełem żadnego zespołu matematyków. Sam Benoit Mandelbrot, polsko–amerykański matematyk (i protagonista teorii fraktali), który pierwszy badał ten zbiór, początkowo nie miał żadnego pojęcia o jego faktycznym skomplikowaniu, chociaż zdawał sobie sprawę, że wpadł na trop czegoś bardzo interesującego. Najpierw, gdy jego pierwsze rysunki komputerowe zaczęły się pojawiać, przypuszczał, że rozmyte struktury, ukazujące się jego oczom,

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1] Jest to ostatni paragraf 3–go rozdziału pt. „Mathematics and Reality” książki Rogera Penrose'a *The Emperior's New Mind — Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*, Oxford University Press, New York — Oxford 1989, ss. 94–98.

stanowią wynik złego funkcjonowania komputera![2] Dopiero później przekonał się, że struktury te rzeczywiście tam są, stanowiąc własność zbioru. Co więcej, skomplikowanych szczegółów struktury zbioru Mandelbrota nikt z nas nie może w pełni poznać, nie mogą one też zostać w całej pełni ujawnione przez żaden komputer. Świadczyłoby to o tym, że struktura ta nie jest częścią naszych umysłów, lecz posiada swoją własną rzeczywistość. Ilekroć jakiś matematyk lub komputer zdecyduje się poddać zbiór badaniom, odkryje jedynie przybliżenia zawsze *tej samej* fundamentalnej, matematycznej struktury. Jeśli pominąć fakt, że różnice w prędkości, w pojemności i w graficznych możliwościach komputerów mogą prowadzić do różnic w subtelności szczegółów i w prędkości, z jaką zostaną one ujawnione, to nie ma najmniejszego znaczenia, jaki komputer zostanie użyty do wykonania obliczeń (byle tylko nie był uszkodzony). Komputer spełnia tutaj zasadniczo taką samą rolę jaką w pracy fizyka doświadczalnego spełnia przyrząd eksperymentalny, przy pomocy którego bada on strukturę fizycznego świata. Zbiór Mandelbrota nie jest wynalazkiem ludzkiego umystu lecz odkryciem. Zbiór Mandelbrota, podobnie jak Mount Everest, po prostu *tam jest*!

W podobny sposób zbiór liczb zespolonych odznacza się pewnego rodzaju głęboką i bezczasową realnością, która wykracza poza umysłowe konstrukcje konkretnego matematyka. Początki odkrycia liczb zespolonych sięgają prac Gerolamo Cardano. Był on Włochem, żyjącym w latach od 1501 do 1576, z zawodu lekarzem, hazardzistą, stawiaczem horoskopów (kiedyś postawił horoskop Chrystusowi); w r. 1545 napisał on ważną i wpływową rozprawę na temat algebry pt. *Ars Magna*. W dziele tym podał on po raz pierwszy pełną postać rozwiązania (jako liczbę niewymierną, tzn. jako n–ty pierwiastek) ogólnego równania trzeciego stopnia[3]. Cardano zauważył jednak, że w pewnej klasie przypadków, które nazwał „nieredukowalnymi”, kiedy to równanie ma trzy rzeczywiste rozwiązania, musi się na pewnym etapie wyciągać *pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej*. Chociaż było to dla niego zaskoczeniem, Cardano zauważył, że jeżeli dopuści się taki pierwiastek, i *tylko wtedy* gdy się to zrobi, można otrzymać pełną odpowiedź (ostateczne rozwiązanie zawsze jest rzeczywiste). Później, w r. 1572, Rafael Bombellii w pracy zatytułowanej *l'Algebra* rozszerzył wynik Cardano i zapoczątkował systematyczne badanie algebry liczb zespolonych.

[2] Por. B. B. Mandelbrot, *Fractals and the Rebirth of Iteration Theory*, w: *The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamicl Systems*, red.: H.–O. Peitgen, P. H. Richter, Springer Verlag, Berlin 1986, ss. 151–60.

[3] Wykorzystując częściowo wcześniejsze prace Scipione del Ferro i Tartalii.

O ile z początku mogło się zdawać, że wprowadzenie pierwiastków kwadratowych z liczb ujemnych było tylko sztuczką — matematycznym chwytem do uzyskiwania określonych celów — o tyle później stało się jasnym, że obiekty te pozwalają uzyskać znacznie więcej niż to, do czego je pierwotnie wykorzystywano. Jak zaznaczyłem wyżej, chociaż pierwotnym celem wprowadzenia liczb zespolonych było bezkarne otrzymywanie pierwiastków kwadratowych (z liczb ujemnych), dzięki tym liczbom uzyskujemy jako bonus możliwość obliczania jakichkolwiek pierwiastków, czyli rozwiązywania dowolnych równań algebraicznych. Znajdujemy następnie wiele innych magicznych własności, jakie liczby zespolone posiadają — własności, których istnienia przedtem nie podejrzewaliśmy. Własności te po prostu tam są. Nie zostały one tam włożone ani przez Cardano czy Bombellego, ani przez Wallisa, Coatesa, Eulera, Wessela czy Gaussa, bez względu na niewątpliwą przenikliwość spojrzenia tych lub innych wielkich matematyków; magia znajdowała się w strukturze, którą oni tylko stopniowo odkrywali. Gdy Cardano wprowadził liczby zespolone, nie mógł nawet podejrzewać wielu magicznych własności, jakie z nich wynikają; własności te kryją się pod różnymi nazwami, jak na przykład wyrażenie całkowe Cauchy'ego, twierdzenie Riemanna o odwzorowaniu czy własność rozszerzenia Levy'ego. Te, i wiele innych godnych podziwu faktów, wynikają wprost z natury liczb (bez najmniejszej ich modyfikacji), które Cardano po raz pierwszy napotkał około 1539 r.

Czy matematyka jest wymysłem, czy odkryciem? Czy gdy matematycy dochodzą do swoich wyników, produkują tylko wymyślne konstrukcje umysłowe, nie mające żadnego aktualnego istnienia, ale odznaczające się taką mocą i elegancją, że są w stanie zwieść nawet swoich twórców, tak by uwierzyli, iż ich własne umysłowe konstrukcje są „rzeczywiste"? Czy też matematycy istotnie odkrywają prawdy, które rzeczywiście już „tam" są — prawdy, których istnienie jest całkowicie niezależne od działalności matematyków? Myślę, że już teraz jest całkowicie jasnym dla Czytelnika, iż wyznaję ten drugi pogląd, przynajmniej odnośnie takich struktur jak liczby zespolone czy zbiór Mandelbrota.

A jednak, być może, sprawa nie przedstawia się aż tak prosto. Jak już powiedziałem są w matematyce rzeczy, na określenie których termin „odkrycie" jest znacznie bardziej stosowny niż określenie „wynalazek"; świadczą o tym przytoczone przykłady. W tych przypadkach znacznie więcej uzyskujemy ze struktur niż do nich początkowo włożyliśmy. Można by przyjąć pogląd, że w takich przypadkach matematycy potykają się o „dzieła Boże" (*works of God*). Jednakże istnieją również i inne przypadki, kiedy to matematyczne struktury nie odznaczają się tak zniewalającą wyjątkowością. Ma to miejsce na przykład wówczas, gdy w środku dowodu jakiegoś twierdzenia matematyk — dla osiągnięcia pewnego szczególnego celu — uważa za stosowne wprowadzić jakąś wymyśloną przez siebie, i daleką od jedyności, konstrukcję. W takich wypadkach jest mało prawdopodobne, by z konstrukcji udało się uzyskać coś więcej niż pierwotnie zostało do niej włożone; słowo „wynalazek” wydaje się tu bardziej na miejscu niż wyraz „odkrycie”. Tego rodzaju konstrukcje są „dziełem człowieka” (*works of man*). Zgodnie z tym poglądem, prawdziwe odkrycia matematyczne, ogólnie rzecz biorąc, winny być traktowane jako większe osiągnięcia niż matematyczne wynalazki.

Takie wartościowanie nie jest drastycznie różne od wartościowań występujących w sztuce lub w technice. Wielkie dzieła sztuki są rzeczywiście „bliżej Boga” niż dzieła przeciętne. Wśród artystów panuje dość rozpowszechnione przekonanie, że za pośrednictwem swoich największych dzieł objawiają oni prawdy wieczne, posiadające jakiś rodzaj uprzedniego, eterycznego istnienia[4], podczas gdy ich dzieła mniejszego kalibru odznaczają się większym stopniem dowolności i noszą cechy bardziej śmiertelnych konstrukcji. Podobnie w technice, innowacje charakteryzujące się piękną oszczędnością środków, kiedy to wiele osiąga się dzięki zastosowaniu jakiejś prostej, nieoczekiwanej idei, słusznie zasługiwałyby na określenie odkrycia raczej niż wynalazku.

Zwróciwszy na to wszystko uwagę, nie mogę jednak powstrzymać odczucia, że gdy idzie o matematykę, racje skłaniające do przekonania o pewnego rodzaju eterycznym, ale wiecznym, istnieniu — przynajmniej w stosunku do głębszych pojęć matematycznych — są znacznie mocniejsze niż w innych przypadkach. Tego rodzaju matematyczne idee odznaczają się zmuszającą jedynością i powszechnością, która wydaje się być zupełnie innego porządku niż wszystko to, czego można oczekiwać w sztuce lub technice. Pogląd głoszący, że pojęcia matematyczne mogłyby istnieć w takim bezczasowym, eterycznym sensie, był zaproponowany w starożytności (ok. r. 360 przed Chr.) przez wielkiego greckiego filozofa, Platona. Dlatego też często jest on określany mianem matematycznego platonizmu. Pogląd ten będzie odgrywał ważną rolę w naszych dalszych rozważaniach.

W pierwszym rozdziale poddałem dość obszernej analizie silną zasadę sztucznej inteligencji, która zakłada, że zjawiska mentalne są realizowane

[4]Jak to wyraził wybitny pisarz argentyński, Jorge Luis Borges: „[...] sławny poeta jest w mniejszym stopniu wynalazcą niż odkrywcą [...]”.

przez matematyczną ideę algorytmu[5]. W rozdziale drugim zwróciłem uwagę na fakt, że idea algorytmu jest rzeczywiście głębokim i „danym przez Boga" (*God given*) pojęciem. W niniejszym rozdziale przytoczyłem racje przemawiające za tym, że tego rodzaju „dane przez Boga" matematyczne idee muszą odznaczać się pewnego rodzaju bezczasowym istnieniem, niezależnym od nas samych. Czy pogląd ten nie przemawia na rzecz silnej zasady sztucznej inteligencji, przewidując możliwość pewnego typu eterycznego istnienia dla zjawisk mentalnych? Prawdopodobnie tak; w dalszym ciągu będę snuć rozważania popierające podobny pogląd, ale jeżeli nawet zjawiska mentalne można wyjaśnić w taki sposób, nie wierzę, by dało się to zrobić przy pomocy pojęcia algorytmu. Do tego celu potrzeba czegoś znacznie bardziej subtelnego. Fakt, że prawdy algorytmiczne stanowią bardzo wąską i ograniczoną część matematyki będzie stanowić ważny aspekt dalszych dyskusji. Rozpoczniemy, w następnym rozdziale, od ukazania przynajmniej pewnych aspektów rozległości i subtelności niealgorytmicznej matematyki[6].

Tłum. M. Heller

[5]Silna zasada sztucznej inteligencji w sformułowaniu Penrose'a stwierdza, że „pewnego rodzaju umysłowe własności należy przypisać logicznemu funkcjonowaniu jakiegokolwiek rachującego urządzenia, nawet najprostszemu mechanizmowi, takiemu jak termostat" (s. 17). Zasada ta wiąże się z przekonaniem, że czynności umysłowe sprowadzają się do wykonywania ciągu dobrze określonych operacji, czyli do wykonywania pewnego rodzaju algorytmu. (Przyp. tłumacza).

[6]Następny rozdział nosi tytuł „Prawda, dowód i wgląd" (*Truth, proof, and insight*) i jest poświęcony omówieniu twierdzenie Gödla oraz jego filozoficznych implikacji.