NÃO-LINEARIDADES: DA DINÂMICA DO SIMPLES À DINÂMICA DO COMPLEXO

José Roberto Castilho PIQUEIRA[1]

■ RESUMO: Foram apresentados alguns conceitos relativos à utilização da Teoria dos Sistemas Dinâmicos em problemas de sistemas complexos. A apresentação destes conceitos centra-se no estabelecimento de duas dinâmicas: uma de curto termo e outra de longo termo, relacionando-as com os processos de organização dos sistemas.

■ PALAVRAS-CHAVE: Caos; sistemas dinâmicos; superposição; não-linearidades; bifurcação; irreversibilidade; complexidade.

O mundo científico produz, atualmente, aquilo que parece ser a busca de um novo paradigma universalista para a ciência. A descoberta de comportamentos caóticos, a formulação da Geometria fractal e a descrição de fenômenos auto-organizados apontam para a integração mais efetiva das ciências relativas aos níveis de organização superiores com as relativas aos níveis de organização inferiores.

A Sociologia e a Psicologia dos indivíduos e seus grupos, a Biologia das células, tecidos, órgãos, sistemas, indivíduos e populações integram-se, cada vez mais, à Física e à Química dos átomos e moléculas.

Essa integração, já sonhada por pensadores do porte de Laplace, Newton, Leibniz, Kant e muitos outros, esteve inviabilizada até finais do século XIX devido, principalmente, ao estilo de produzir a Física próprio daquela época. Fundamentada totalmente na Mecânica Clássica e embebida pelo determinismo, a Física, embora proporcionasse boas soluções para problemas de equacionamento de movimentos de corpos macroscópicos, falhava ao tentar modelar outros problemas.

Os níveis de organização superiores da Biologia, Psicologia e Sociologia resultavam da interação de uma grande quantidade de sistemas complexos interligados, com forte sensibilidade a perturbações e uma grande riqueza de comportamentos possíveis.

---

1. Departamento de Engenharia Eletrônica da Escola Politécnica – USP – 05508-900 – São Paulo – SP.

Não havia, portanto, como modelar esses problemas pela bem-comportada Mecânica, que não previa espaço para indeterminações ou comportamentos complicados.

Entretanto, dois fatos datados do final do século XIX e do início do século XX alteraram esse panorama: a formulação da Mecânica Quântica, responsável por uma tentativa de modelagem probabilística do mundo microscópico e a conjectura, feita por Poincaré, de que sistemas mecânicos modelados por equações determinísticas podem apresentar, devido às não-linearidades, comportamentos complicados e sensíveis às condições iniciais.

Este artigo trabalha com a segunda descoberta: o que são linearidades e não-linearidades; qual o impacto das não-linearidades no desenvolvimento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos; e como essa moderna Teoria está sendo aplicada a casos complexos.

Finalmente, uma visão crítica gerará uma sugestão de linha de trabalho pela conexão dos conceitos de Bifurcação e de Organização.

Sistemas dinâmicos

O conceito de Sistemas Dinâmicos é uma extensão natural do estudo dos movimentos na Mecânica Clássica, que apresenta o estado dos corpos em cada instante por meio de grandezas que são, essencialmente, posições e velocidades.

Essas variáveis se relacionam através das equações dadas pelas Leis de Newton. Quanto mais complexo o sistema, maior o número de grandezas e equações necessárias para descrevê-lo.

Generalizando, pode-se dizer que um Sistema Dinâmico é todo aquele cuja evolução temporal é descrita por um certo número de grandezas físicas relacionadas por equações provenientes de modelos.

Esse é um conceito amplo, aplicável a uma gama de problemas que vai desde sistemas físicos simples, como o pêndulo, exaustivamente estudados, até sistemas biológicos complexos, como uma rede de neurônios, proporcionando àqueles uma nova ferramenta de trabalho que, em alguns casos, já se mostrou útil e promissora.

Os Sistemas Dinâmicos assim definidos são ditos lineares quando as equações de seus modelos satisfazem o chamado Princípio da Superposição: o comportamento do sistema como um todo é refletido pela soma dos comportamentos de suas partes.

Assim, o efeito das variações produzidas em suas grandezas físicas, individualmente, equivale ao efeito que seria produzido pela soma dessas variações individuais no sistema global.

Sistemas Dinâmicos que podem ser considerados lineares têm grande importância em diversos ramos da Engenharia, têm sido exaustivamente estudados e sua teoria tem sido considerada fechada.

Nas ciências mais complexas, essa superposição é, evidentemente, pouco comum. A possibilidade de inclusão de não linearidades, indubitavelmente, torna extremamente atraente o uso de ferramentas de Sistemas Dinâmicos; quando isso ocorre, efeitos bastante interessantes acontecem, variando desde comportamentos descritíveis por oscilações auto-sustentadas isoladas até os chamados comportamentos caóticos, resultantes da extrema sensibilidade às condições iniciais, ligada às não-linearidades.

Não-linearidades em Sistemas Dinâmicos

Impulsionada pela Mecânica Celeste, Mecânica dos Fluidos e pela perspectiva de aplicação em Biologia, Psicologia, Sociologia e Economia, a Teoria dos Sistemas Dinâmicos não-lineares teve grande desenvolvimento.

A grande dificuldade na obtenção de soluções explícitas de equações com não-linearidades colocou matemáticos e físicos no caminho das chamadas Teorias Qualitativas de Sistemas Dinâmicos.

Esse enfoque consiste em procurar obter visualizações globais de famílias de soluções das equações que descrevem o sistema e como as variações de seus parâmetros constitutivos alteram tais famílias.

Ilustra-se tal fato tomando-se como base o chamado modelo de Lotka-Volterra, desenvolvido originalmente para estudar problemas de competição entre espécies em um dado sistema ecológico (Engel, 1987).

No início, o modelo foi utilizado para o estudo de duas espécies, e foi, posteriormente, generalizado para várias delas (Schaffer & Kot, 1986); algumas consideradas presas e outras predadoras, em um dado sistema ecológico com uma certa quantidade de alimento disponível.

Aqui foram consideradas uma população de predadores, representada por X_1, e duas de presas, representadas por X_2 e X_3. Os predadores alimentam-se das presas e estas da reserva de alimentos disponível.

As populações X_1, X_2 e X_3 e suas taxas de variação $\dot{X}_1$, $\dot{X}_2$ e $\dot{X}_3$ podem ser descritas, de acordo com o modelo, pelas equações:

$$
\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= r_1X_1 + a_{12}X_1X_2 + a_{13}X_1X_3 \\
\dot{X}_2 &= r_2X_2 + a_{21}X_1X_2 + a_{23}X_2X_3 \\
\dot{X}_3 &= r_3X_3 + a_{31}X_1X_3 + a_{32}X_2X_3
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Os parâmetros r_1, r_2 e r_3 representam proporcionalidades entre a taxa de aumento de população de cada uma das espécies e seus valores instantâneos.

Os parâmetros a_{12} e a_{13} são números positivos, indicam como os predadores são alimentados pelas presas das populações X_2 e X_3, respectivamente.

As populações de presas X_2 e X_3 diminuem ao serem consumidas pelos predadores e esse fato aparece evidenciado pelos números negativos, representados pelos parâmetros a_{21} e a_{31}.

Além disso, a competição pelos alimentos entre populações de presas X_2 e X_3 é dada pelos parâmetros negativos a_{23} e a_{32}, completando o modelo.

As equações dadas em (1) são difíceis de serem resolvidas e soluções explícitas, em função do tempo, têm a sua obtenção inviabilizada.

Por isso, opta-se por traçar curvas relativas às relações entre X_1, X_2 e X_3 possíveis, permitindo uma visão global das soluções e relacionando-as com os parâmetros do sistema.

Assim, nas equações (1), fixando-se r_1, r_2, r_3, a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{31} e a_{32} iguais a 1, ao variar a_{13} continuamente observa-se a sensibilidade a parâmetros do modelo.

As equações (1) reduzem-se a:

$$
\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= X_1 + X_1X_2 + a_{13}X_1X_3 \\
\dot{X}_2 &= -X_1 - X_1X_2 - X_2X_3 \qquad (2) \\
\dot{X}_3 &= -X_3 - X_1X_3 - X_2X_3
\end{aligned}
$$

cuja simulação em computador resulta nos diagramas da Figura 1, com cada uma das coordenadas representando uma população.

Tais diagramas evidenciam a forte dependência das soluções em relação ao parâmetro a_{13}. A figura "a" corresponde a uma oscilação auto-sustentada que evolui para trajétoria caótica (figura "e"), quando da variação de a_{13}.

Essa evolução se dá através de duplicações sucessivas de períodos que aparecem nas figuras "b" (período 2), "c" (período 4) e "d" (período 8). As duplicações de períodos são chamadas bifurcações sucessivas e seu estudo, do ponto de vista temático, está bastante sistematizado para sistemas de poucas variáveis (até três) e poucos parâmetros (até dois).

A riqueza de comportamento e a possibilidade de soluções com grande sensibilidade à condição inicial (caos), acima exemplificada, atraíram biólogos, psicólogos, sociólogos e economistas para o uso da Teoria de Bifurcações em Sistemas Dinâmicos, aplicada a problemas complexos, e muito se tem produzido nessa linha.

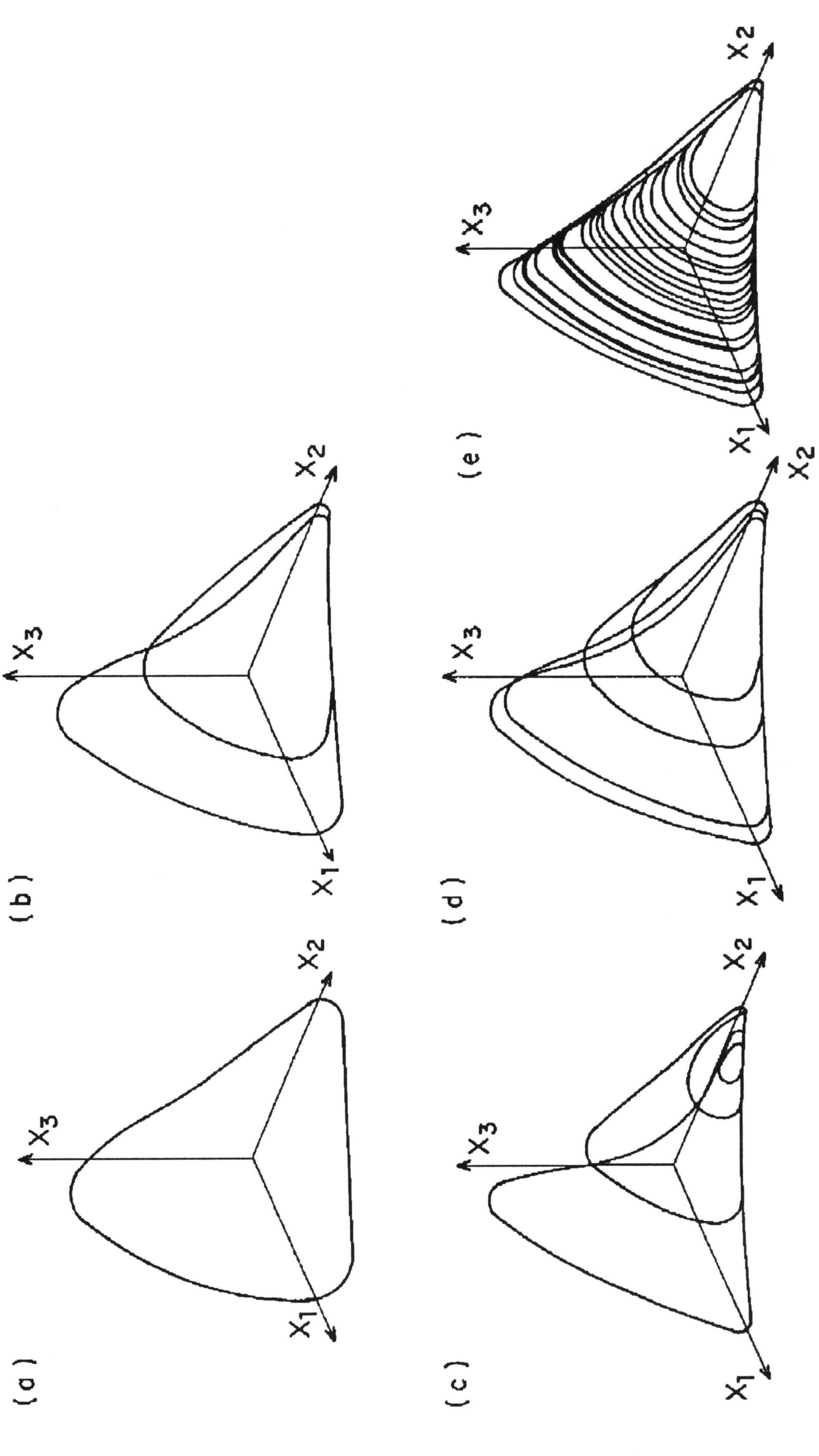

FIGURA 1 – Simulações do modelo de Lotka-Volterra.

Atualmente assim se faz a aplicação da Teoria de Sistemas Dinâmicos aos processos relativos a Química, Biologia, Psicologia, Sociologia e Economia.

As revistas científicas contêm um sem-número de artigos, todos muito semelhantes. Um problema complexo, um modelo simplificado e uma simulação em computador variando parâmetros em busca de bifurcações sucessivas. Embora esse enfoque seja interessante e tenha gerado alguns resultados importantes, suas limitações são óbvias:

i) Sistemas efetivamente complexos são estudados como superposição de recordes simples, o que, dadas as não-linearidades intrínsecas, compromete o entendimento correto do problema.

ii) As questões dinâmicas relativas a sistemas complexos, em geral, envolvem processos que ocorrem em escalas temporais bastante diferentes.

Exemplificando, o estudo do ciclo vigília-sono de uma pessoa de uma certa idade pode ser feito por meio da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, pois envolve apenas o estudo de um processo diário ao longo de algumas semanas de observação. Entretanto, o estabelecimento do mecanismo de formação desse ciclo ao longo da vida da mesma pessoa é um problema que requer mais cuidado, levando em conta o estabelecimento de processos neurológicos com grande número de variáveis, com dinâmica própria e com escala de tempo de meses, anos ou até mesmo décadas.

Mais complicado ainda seria considerar o processo da ontogênese do ciclo vigília-sono dentro do processo evolutivo da espécie humana. Nesse caso as escalas temporais seriam séculos, dezenas de séculos ou eras.

Parece, portanto, ser impossível sonhar com uma contribuição efetiva da Teoria de Sistemas Dinâmicos como agente transformador das ciências complexas sem pensar em corrigir ou atenuar os dois pontos citados.

Para considerar a irreversibilidade e a complexidade, marcas inquestionáveis dos sistemas complexos, talvez fosse possível enfocar os problemas dinâmicos de sua organização pela definição de parâmetros estatísticos, utilizando-se da Entropia Termodinâmica (Coveney & Highfield, 1990) e da Entropia Informacional (Shannon & Weaver, 1971).

Dado o sistema formado e considerando sua entropia estável, sua dinâmica pode então ser estudada através das bifurcações. Isto é, a proposta é dividir, em princípio, os problemas complexos em dois:

i) O primeiro, relativo à evolução da formação do sistema complexo através de variáveis estatisticamente definidas sobre o espaço das grandezas físicas.

ii) O segundo, relativo à evolução do sistema formado através das famílias de soluções possíveis sobre o espaço das grandezas físicas.

Um pouco de formalismo

Com a finalidade de esclarecer melhor as idéias até aqui desenvolvidas, apresentam-se algumas noções ligeiramente formalizadas, cujo detalhamento encontra-se em trabalho mais específico (Piqueira, 1992).

A partir deste momento, as grandezas físicas necessárias para caracterizar um sistema dinâmico serão denominadas variáveis de estado. Os diagramas representados na Figura 1, contendo todas as curvas de soluções possíveis da dinâmica do sistema modelado, denominar-se-ão retratos de estado do sistema.

Sobre um certo volume de um retrato de estado de um sistema define-se medida entrópica (E) para os diversos volumes do espaço de estados. Essa é uma observação ao longo de intervalos de tempo longos, e o fato dessa medida estar variando implica organização do sistema.

Essa dinâmica da medida entrópica (E) é a chamada *dinâmica lenta* do sistema. Sua estabilização em patamares constantes constitui a chamada *organização primária* do sistema.

Uma vez organizado primariamente, o sistema tem uma *dinâmica rápida* de evolução, se suas variáveis de estado eventualmente atingirem situações de equilíbrio, quando é então considerado *organizado secundariamente*.

O diagrama da Figura 2 resume as idéias aqui expostas, ficando claro que a organização secundária aparece somente se a primária a tiver precedido.

FIGURA 2 – As idéias de organização.

Conclusão

Este artigo tratou da apresentação de sugestões para tentativas de formalização de problemas relacionados com sistemas complexos, provenientes de diversas ciências.

A combinação de conceitos originários da Termodinâmica Estatística com conceitos originários da Mecânica Clássica talvez proporcione novas maneiras de desenvolver conexões entre a Física e as demais ciências relacionadas aos níveis de organização superiores.

PIQUEIRA, J. R. C. Non-linearities: from the dynamics of the simple to the dynamics of the complex. *Trans/Form/Ação*, São Paulo, v. 17, p. 143-150, 1994.

■ *ABSTRACT: Some concepts related to the utilization of Dynamical Systems Theory on complex systems problems are presented. Using these concepts, we suggest that two dynamics can be established: a short-term one and a long-term one, and both of them are connected to the system's organization processes.*

■ *KEYWORDS: Chaos; dynamical systems; superposition; non-linearities; bifurcation; irreversibility; complexity.*

Referências bibliográficas

1 COVENEY, P., HIGHFIELD, R. *The arrow of time*. New York: Ballantine Books, 1990.
2 ENGEL, A. B. *Elementos de biomatemática*. In: Secretaria General de la Organización de los Estados Americanos. Los Alamos, USA, 1978.
3 PIQUEIRA, J. R. C. *Estabilidade estrutural e auto-organização*. São Paulo: IEA/USP,1992.
4 POINCARÉ, H. *La méthode nouvelle de la mécanique céleste*. New York: Douver, 1957.
5 SCHAFFER, W. M., KOT, M. Differential systems in ecology and epidemiology. In: *Chaos*. Princenton: Arun V. Holden; New Jersey: University Press, 1986.
6 SHANNON, C., WEAVER, W. *The mathematical theory of communication*. Illinois: University of Illinois Press, 1971.