RECENZJE

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXX / 2002, s. 157–160*

Paweł POLAK

REFLEKSJA NAD ROZWOJEM MATEMATYKI

J. Dadaczyński, *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*, Wyd. Biblos, Seria: Academica-OBI, Tarnów 2000, ss. 376.

Prezentowana książka jest już 49 tomem wydanym w serii podręcznikowych syntez „Academica-OBI". Przedstawia ona najistotniejsze dokonania filozofii matematyki. Omawiane opracowanie powstało w trakcie przygotowań do serii wykładów z filozofii matematyki, które zostały wygłoszone na Wydziale Filozofii PAT w Krakowie w latach 1996-98. Geneza książki ma widoczny wpływ na jej charakter. Przedstawia ona bowiem filozofię matematyki w formie jasnego i zwartego wykładu. Poszczególne części pracy, wyodrębniające kluczowe fazy rozwoju filozofii matematyki, ujęte zostały w rozdziały stanowiące autonomiczne całości, zakończone podsumowaniami. Umożliwia to w większości przypadków studiowanie wybranych faz rozwoju filozofii matematyki bez konieczności lektury całej książki.

Zasadnicze rozważania nad filozofią matematyki poprzedzone zostały rozważaniami wstępnymi, których celem jest systematyzacja pojęć i określenie zakresu badań. Szczególnie ważne, ze względu na dalsze rozważania, jest rozgraniczenie metamatematyki i filozofii matematyki oraz bliższe określenie zadań tej ostatniej.

Zagłębiając się w lekturę tej książki wybieramy się w pasjonującą podróż po dziejach idei matematycznych i towarzyszących im opracowań filozoficznych. Podróż ta rozpoczyna się około VI w. p.n.e. w starożytnej Grecji, gdzie po raz pierwszy matematyka potraktowana została jako nauka.

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

Prezentacja rozwoju historycznego matematyki i jej filozofii wiedzie nas od szkoły pitagorejskiej, poprzez koncepcje Platona i Arystotelesa do matematycznego systemu Eudoksosa. Uczony ten był „jednym z najwybitniejszych matematyków starożytności”(s. 83). Podsumowaniem i ukoronowaniem tego trzechsetletniego etapu rozwoju myśli matematycznej są „Elementy” Euklidesa.

Jerzy Dadaczyński prezentuje ten okres jako fazę, w której wyłonił się zestaw najważniejszych problemów matematycznych (i równocześnie filozoficznych), które miały wyznaczać kierunki rozwoju matematyki aż do początków XX wieku. Jako przykłady można podać problem znalezienia modelu liczb niewymiernych i problem nieskończoności. Jest to też okres, w którym antycypowano wiele ważnych twierdzeń i rozwiązań.

Przy okazji prezentacji programu szkoły pitagorejskiej zarysowuje się idea, którą proponuję potraktować jako klucz do odczytania tej książki. Jest to idea unifikacji matematyki. Spina ona niejako wszystkie części opracowania.

Pierwszą historycznie była próba arytmetyzacji geometrii pojęta przez pitagorejczyków. Odkrycie niewymierności ukazało, że „arytmetyka liczb wymiernych jest zbyt uboga, aby zarytmetyzować geometrię” (s. 37). Spowodowało to upadek programu pitagorejczyków. Autor analizuje przyczyny niepowodzenia programu i wskazuje na warunki formalne, których spełnienie dopiero w XIX w. pozwoliło w pełni zrealizować zamierzenia starożytnych Greków.

Długi okres rozwoju matematyki klasycznej znaczony jest napięciem pomiędzy próbami geometryzacji arytmetyki (w odpowiedzi na kryzys matematyki pitagorejskiej) a ponownymi próbami arytmetyzacji podjętymi przez Kartezjusza w XVII wieku, ostatecznie zaś zrealizowanymi dzięki badaniom K. Weierstrassa, G. Cantora, i R. Dedekinda w drugiej połowie XIX w. (por. s. 37). Arytmetyzacja geometrii nie zamknęła procesu unifikacji matematyki, ponieważ równocześnie rozwinął się zakres samej matematyki (np. powstanie teorii mnogości).

Kolejnym krokiem w dziejach unifikacji były próby sprowadzenia podstaw matematyki do logiki lub teorii mnogości. Przechodząc w ten sposób od Kartezjusza, poprzez Leibniza dochodzimy do wymienionych już matematyków XIX wieku, tworzących syntezę i unifikację matematyki „klasycznej”. Jest to historia borykania się i przełamywania trudności matematycznych i filozoficznych nakreślonych już u początków rozwoju matematyki. Nie darmo też matematyka do końca XIX wieku nazywana jest obecnie „klasyczną”.

Omówiona została również filozofia matematyki I. Kanta, z uwydatnieniem tych elementów, które miały znaczący wpływ na dwudziestowieczne kierunki w filozofii matematyki, takie jak formalizm i intuicjonizm.

Prace nad unifikacją matematyki klasycznej doprowadziły do drugiego wielkiego kryzysu w historii matematyki (po pierwszym kryzysie w szkole pitagorejskiej). Chodzi o odkrycie antynomii teoriomnogościowych po sprowadzeniu matematyki do teorii mnogości.

Dalszy rozwój matematyki i filozofii matematyki przedstawiony jest pod kątem rozwiązania kryzysu, który zaistniał w podstawach matematyki. Tak powstają rozwiązania na gruncie logicyzmu: aksjomat nieskończoności wprowadzony przez B. Russella i A.N. Whiteheada, aksjomatyki Zermelo-Fraenkla-Skolema oraz von Neumanna-Bernaysa-Gödla. Powstaje również formalistyczny program Hilberta, którego celem było udowodnienie niesprzeczności całej matematyki w oparciu o dowód niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych. Zaprezentowane zostały również zmiany w tym programie po ogłoszeniu twierdzeń Gödla. Ostatnim prezentowanym stanowiskiem jest intuicjonizm stworzony przez L. Brouwera. Jest to swoista odpowiedź na kryzys w podstawach matematyki, postulująca znaczące zubożenie matematyki przez ograniczenie się tylko do skończonych metod konstrukcyjnych.

Wymienione powyżej etapy rozwoju matematyki stanowią dla autora bazę do przybliżania problemów stających przed filozofią matematyki. Służą one również prezentowaniu konkretnych rozwiązań na gruncie danej filozofii matematyki.

W ten sposób interesująca podróż poprzez dzieje filozofii matematyki i samej matematyki doprowadza czytelnika do lat trzydziestych dwudziestego wieku. Jest to granica niniejszego opracowania. Jak zauważa autor po tym okresie „zasadniczo zmienił się charakter filozofii matematyki" (s. 376). Burzliwy rozwój matematyki, pogłębiając dodatkowo specjalizację poszczególnych jej dziedzin tak, że „żaden z naukowców nie jest w stanie objąć całości współczesnych dokonań tej dyscypliny" (s. 376). W ten sposób Jerzy Dadaczyński uzasadnia wybór momentu, do którego doprowadza swoją refleksję nad matematyką.

Warte zauważenia jest również, że autor już w samych początkach matematyki, traktowanej jako nauka, dostrzega jej powiązania z filozofią. Współoddziaływanie na siebie matematyki i filozofii jest wątkiem, który przewija się w całej książce. Autor dostrzega wpływ matematycznej metody dedukcyjnej na myślenie filozoficzne. Przykładem jest tu system Parmenidesa (s. 26). Oddziaływanie w przeciwnym kierunku jest najwyraźniej zauważalne przy przedstawianiu rozwiązania problemu nieskończoności oraz przy prezentacji intuicjonizmu, gdzie kilkakrotnie z naciskiem podkreślony został fakt, że „powstanie matematyki intuicjonistycznej jest klasycznym przykładem na to, jak wielki wpływ może mieć wyznawana filozofia na powstanie i rozwój nauk szczegółowych" (s. 358).

Godne uwagi jest to, że książka zawiera przystępnie wprowadzone modele matematyczne (np. liczb wymiernych i rzeczywistych) oraz aksjomatyki (np. aksjomatyka Peano liczb nautralnych), które zachowując matematyczną ścisłość są omówione bardzo przejrzyście. Na uwagę zasługuje też zamieszczony opisowy szkic twierdzenia Gödla (przytoczony za E. Naglem i J.R. Newmanem). Mogę stwierdzić, że wiele trudnych matematycznych zagadnień wprowadzonych zostało bardzo prosto, acz bez banalizacji. Mam jednakże świadomość, że dla wielu czytelników (niematematyków) ów formalizam matematyczny stanowić może trudną do przekroczenia barierę. W badaniach dotyczących filozofii matematyki nie da się jednak abstrahować od samej matematyki.

Filozofia matematyki niesie zatem zarówno trudności, jakie pociąga za sobą zrozumienie matematyki, ale równocześnie całe piękno, które niejako dziedziczy po dziedzinie, którą się zajmuje. Matematyka jest bowiem wyjątkową dziedziną ludzkiej działalności. Myślę, że lektura książki Jerzego Dadaczyńskiego dobrze potwierdza tą tezę. Już chociażby to, stanowi mocny argument skłaniający do tego, by sięgnąć po tę pozycję.

Paweł Polak