UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Facultad de
Humanidades y
Ciencias
de la Educación

Demostraciones «tópicamente puras» en la práctica matemática:
un abordaje elucidatorio

Guillermo Nigro Puente

Maestría en Ciencias Humanas Opción Filosofía Contemporánea

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación
Universidad de la República

Montevideo - Uruguay
Marzo de 2020

Demostraciones «tópicamente puras» en la práctica matemática:
un abordaje elucidatorio

Autor: Guillermo Nigro Puente

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado Maestría en Ciencias Humanas, Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Ciencias Humanas, opción Filosofía Contemporánea.

Tutor de Tesis: Prof. Titular Dr. José Seoane

Montevideo - Uruguay

Marzo de 2020

Nigro Puente, Guillermo

Demostraciones «tópicamente puras» en la práctica matemática: un abordaje elucidatorio/ Guillermo Nigro Puente. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, 2020.

Tutor de Tesis: Prof. Titular Dr. José Seoane

Tesis de Maestría - Universidad de la República, Programa de Posgrado Maestría en Ciencias Humanas, opción Filosofía Contemporánea. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. 2020.

Texto de la Tesis: pp. 1 - 183.

Referencias bibliográficas: pp. 184 -198.

Palabras clave: Demostración Tópicamente Pura, Demostraciones Matemáticas, Elucidación, Conservación Tópica, Superioridad Epistémica.

I. Tutor de Tesis: Dr. Seoane, José. II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Ciencias Humanas. III. Demostraciones «tópicamente puras» en la práctica matemática: un abordaje elucidatorio.

A Luciana, por la cotidianidad robada. . .

Agradecimientos

La investigación que condujo a la elaboración de esta tesis representó para mí una etapa de formación sustantiva; debido a ello es que siempre resulta extremadamente difícil ser suficientemente justo con el reconocimiento de las personas que alentaron, apoyaron o contribuyeron a tal cosa. La razón es bien conocida: delimitar el conjunto de las influencias que producen un genuino aprendizaje es una tarea titánica incluso para los estudiosos del fenómeno. Si he de ser justo, entonces el agradecimiento primero es para mi entorno familiar por transmitirme el valor de la opinión bien argumentada, el cual es un valor fundamental para el estudio de la filosofía.

En cuanto a las personas que contribuyeron directamente a esta tesis, quisiera agradecer, en primer lugar, a José Seoane por aceptar ser mi orientador. En particular, quiero agradecer su experticia así como su habitual rigurosidad conceptual y metodológica. También quisiera agradecer su generosidad a la hora de compartir el conocimiento, así como su disponibilidad para escuchar de forma abierta e intelectualmente honesta mis ideas, dándome la oportunidad de defenderlas, aún siendo estas erróneas.

Esta investigación se nutrió sustantivamente de conversaciones informales mantenidas con Abel Lassalle Casanave, Eduardo Giovannini y José Ferreirós. Al primero, le agradezco una extensa conversación durante una tarde de Octubre de 2018, la cual me permitió pensar mejor la estructura de esta tesis. Al segundo, le agradezco las varias horas de conversación que mantuvimos durante el IV Meeting de la APMP en Salvador de Bahía, a partir de la cual mi conocimiento sobre aspectos históricos de la matemática del Siglo XIX se vio sustantivamente favorecido. Por ultimo, agradezco a Ferreirós por una breve conversación mantenida en el mismo congreso de la APMP, la cual avaló y alentó la idea (empleada en esta tesis), de que el análisis comparado de demostraciones es una línea de investigación legítima y original; así mismo, le agradezco la sugerencia de considerar la figura de Gauss a fin de introducir los dos usos fundamentales de «pura» que se presentan en el Capítulo 2.

El diálogo abierto y comprometido es una actividad indispensable para el «filosofar», por lo que contar con colegas o amistades que además de ser comprometidos y abiertos también son competentes, es un verdadero privilegio. Debido a ello, quiero dejar sentado un agradecimiento especial Washinton Morales, Matías Osta, Alejandro Chmiel y Horacio Lena, un *círculo posnihilista* de amigos e interlocutores sin cuyo apoyo difícilmente podría tener la madurez intelectual para llevar a cabo esta tesis.

Un agradecimiento institucional es también debido, por lo que agradezco a la Comisión Académica de Posgrado (CAP) por beneficiarme con una *Beca de Finalización* durante el año 2019.

En definitiva, con el apoyo recibido de todas estas personas parecería difícil que la presente tesis contenga errores, por lo que de haberlos, resulta evidente que corren exclusivamente por mi cuenta.

There is a temptation to think that, since the explicandum cannot be given in exact terms anyway, it does not matter much how we formulate the problem. But this would be quite wrong. On the contrary, since even in the best case we cannot reach full exactness, we must, in order to prevent the discussion of the problem from becoming entirely futile, do all we can to make at least practically clear what is meant as the explicandum.

Rudolf Carnap, *Logical Foundations of Probability*

Resumen

En esta tesis se presenta una investigación conceptual (elucidatoria) sobre la noción de *demostración tópicamente pura*, que es una instancia particular del problema de la pureza del método. A tales efectos, se parte del concepto de *elucidación* elaborado por José Seoane, a partir del cual distinguimos entre un concepto «pre-teórico» (inexacto pero valioso) y un concepto «teórico» (un modelo) de demostración tópicamente pura. Nuestra investigación se sitúa fundamentalmente en un plano pre-teórico, y los resultados más importantes de la misma son, por un lado, que las notas características fundamentales del concepto de pureza demostrativa son la *conservación tópica* (**CT**), y la *superioridad epistémica* (**SE**); por otro lado, es factible sostener que podemos tener al menos dos conceptos pre-teóricos de *demostración tópicamente pura*.

Palabras clave: Demostración Tópicamente Pura, Demostraciones Matemáticas, Elucidación, Conservación Tópica, Superioridad Epistémica.

Abstract

In this work a conceptual (elucidatory) investigation is presented on the notion of *topically pure proof*, which is a particular instance of the problem of the purity of method). For this purpose, the investigation is based on the concept of *elucidation* elaborated by José Seoane, from which we distinguish between a âpre-theoreticalâ concept (inaccurate but valuable), and a âtheoreticalâ concept (a model) of topically pure proof. Our research is fundamentally on a pre-theoretical level, and the most important results of it are, on the one hand, that the fundamental features of the concept of proof purity are *topical conservativness* (**TC**), and *epistemic superiority* (**ES**); on the other hand, it is feasible to argue that we can have at least two pre-theoretical concepts of topically pure proof.

Keywords: Topically Pure Proof, Mathematical Proof, Elucidation, Topical Conservativness, Epistemic Superiority.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

La investigación que se presenta en esta tesis intenta realizar una aproximación elucidatoria a la noción de «demostración tópicamente pura». A tales efectos, la tesis se divide en dos actos, uno dedicado a una reflexión situada en un plano que llamaremos «pre-teórico» (la cual ocupará la mayor parte de la tesis), y otro acto dedicado a una reflexión que llamaremos «teórica», donde expondremos y examinaremos brevemente un modelo de demostración pura (véase Sección 1.2). Sin embargo, a lo largo del proceso de elaboración de la misma nos hemos tropezado con una serie de cuestiones históricas, filosóficas y matemáticas asociadas con la noción de *pureza*, que no serán desarrolladas con el debido rigor y que formarán parte de un conjunto de sugerencias para futuras investigaciones, las cuales serán explicitadas en las conclusiones (Sección 7.2). No obstante, consideramos que ello no atenta contra la unidad de la tesis, la cual se comprenderá a la luz de del modo en que la misma se organiza (*Sección 1.4*)

1.1. Antecedentes y fundamentación: el enigma persistente de la pureza del método en matemáticas

La noción de *demostración pura* puede enmarcarse dentro de una inquietud más general acerca de la pureza del *método* en matemáticas. Decimos «inquietud» porque la noción de *pureza* –como un adjetivo de ciertos métodos– es, por un lado, una preocupación *persistente* en la historia de la práctica matemática, mientras que por otro lado, la noción de pureza del método ha recibido una *escasa* atención a la hora de ser el foco de intentos analíticos, en la literatura especializada, orientados a su comprensión. Esta doble característica de la noción de pureza es lo que la hace un «enigma persistente»; a este respecto, una observación incidental de Leon Hnekin y William A. Leonard permiten sintetizar esta doble característica:

> [m]athematicians certainly recognize that «interest», as well as «correctness», is an important attribute of a mathematical proposition or method, [...] A somewhat controversial criterion that is sometimes applied in evaluating a proof is «purity of method»; for instance, a theorem considered to belong to geometry ought to be proved, if possible, by «purely geometric methods,» according to some mathematicians –even though no one can explain exactly what this means[1].

En esta cita se sugieren ambas características, pues por un lado los matemáticos verían en la pureza (de las demostraciones, en este caso) algo «interesante» o valioso, pero a la vez resulta difícil explicar qué es lo que esto quiere decir.

Así pues, si pensamos en la *persistencia* del interés en la pureza de las demostraciones en particular, y del método en general, entonces podemos encontrar ya en la antigüedad griega un interés en la pureza (aunque no se emplee esta expresión). La observación más antigua a este respecto, quizás se encuentre en los *Segundos Analíticos* (I, 7), donde se introduce la *exclusión mutua de los géneros* como lo que parecería ser una característica de las demostraciones *científicas*; concretamente, Aristóteles dice que «no es posible demostrar pasando de un género [a otro], v.g.: [demostrar] lo geométrico por la aritmética»[2]. Aquí tanto aritmética como geometría son *géneros* que, según Aristóteles, no debe se invocados a la hora de demostrar –científicamente– un teorema que pertenece a uno de ellos.

---

[1][Henkin and Leonard (1978): 294].

[2]Traducción española en Aristóteles (1988). Véase la *Sección 5.3* para algunas referencias recientes sobre la prohibición de Aristóteles.

Ciertamente Aristóteles no es lo que consideraríamos un «matemático», pero este requisito de la exclusión de géneros parece encontrar eco en una observación metodológica realizada por Papus de Alejandría, cuando sostiene que es un «error» solucionar un problema geométrico de cierto «tipo» (*génos*), a través de curvas (medios) de otro tipo[3]. Así pues, de acuerdo con Papus, tantos los problemas geométricos como los medios para solucionarlos se dividen jerárquicamente[4] en tres tipos («géneros»): plano, sólidos y lineales; luego, según este principio metodológico que Sefrin-Weiss denomina «principio de homogeneidad»[5], sería un «error», tanto el pretender solucionar un problema sólido por medio de curvas planas, como solucionar un problema sólido por medio de curvas lineales.

Aquí hay, sin embargo, *dos* tipos de errores: por un lado, el error de *pretender* solucionar un problema de cierto tipo por medio de curvas más *simples* al género del problema; este tipo de error guarda relación con la *imposibilidad* de proveer una solución, como ocurre por ejemplo, con la pretensión de trisectar un ángulo por medio de curvas planas. Esto sería un *error*, en tanto tal cosa no sería de modo alguno una *solución*[6]. Por otro lado, el segundo tipo de error parecería consistir en el empleo de curvas más *complejas* que el género al que el problema pertenece, ta como según Papus ocurre con la trisección del ángulo por medio de la concoide (que en su clasificación es un curva lineal). Tal parece entonces, que el empleo de medios *excesivamente* complejos es un *error*[7]. Así pues, tanto el requisito de exclu-

[3][Sefrin-Weis (2010): 145]. Véase también Crippa (2014), Cuomo (2000).

[4]Esta jerarquía se ordena en virtud de la complejidad de la *generación* de las curvas planas (círculos y rectas), sólidas (secciones cónicas) y lineales (concoide, cuadrática, espiral, etc.).

[5][Sefrin-Weis (2010): 274].

[6]Papus no ofrece, en su tratamiento de la trisección del ángulo (*Col.* IV), una auténtica *demostración de imposibilidad* respecto a la posibilidad de realizar esta construcción con curvas planas. Para un tratamiento erudito de la inexistencia de lo que hoy denominamos «demostración de imposibilidad» en la geometría griega antigua, véase Crippa (2014). En la *Sección 4.1.3* volveremos a hacer referencia a esto.

[7]No parece ser una cuestión sencilla en qué consiste este segundo tipo de «error», pero al menos parece claro que una solución tal es, por decirlo de alguna manera, «lógicamente aceptable» como solución (a diferencia de una «solución» que emplee curvas más simples de las requeridas por el problema). Eventualmente podríamos decir que un error de este segundo tipo, podría entenderse como una falta de comprensión del problema –i.e. se trataría de un error en la *tipificación*, o *clasificación* del mismo; o también podría pensarse que el «principio de homogeneidad» exige que la solución

sión de Aristóteles, como el «principio de homogeneidad» de Papus son, podemos aventurar, los antecedentes más antiguos de la noción de pureza metodológica[8].

Así pues, si comparamos la cita de Henkin y Leonard con las observaciones de Aristóteles y Papus, podemos hacernos una idea de la *persistencia* del interés por la pureza del método en matemáticas. Sin embargo, y a pesar de la persistencia de esta inquietud, la misma parece ser aún un tanto enigmática (como se dice en la cita de Henkin y Leonard), pues incluso aunque en el mejor de los casos convengamos que, de algún modo, cierta demostración prueba «geométricamente un resultado geométrico», o demostremos «aritméticamente un resultado aritmético», aun cabe preguntarse ¿dónde radica el «interés» o el valor de tal demostración? O si se prefiere, ¿por qué es que tal cosa ha sido juzgada como *valiosa* por los matemáticos?

El «enigma» conceptual encerrado en el interés por la pureza es, por decirlo de alguna manera, doble: uno enigma nos interroga por el esclarecimiento de bajo qué condiciones una demostración es «pura»[9], mientras que el otro enigma refiere a cómo entender el *valor* de este tipo peculiar de demostración.

Con desigual énfasis, y de manera no siempre explícita, este doble enigma es lo que la reciente literatura ha intentado abordar. Podemos organizar la literatura que precede esta investigación, atendiendo a dos orientaciones bien diferenciadas (a las cuales se agregan algunos esfuerzos que combinan ambas). Una de las orientaciones es de naturaleza eminentemente *matemática*, o lógica, es decir, el estudio de la noción de pureza tiene –como pretensión– producir una caracterización *matemáticamente*

deba ser siempre la *más simple*. Cfr. Crippa (2014).

[8]No es un asunto menor el señalar la influencia que el «principio de homogeneidad» de Papus tuvo en el comienzo de la matemática moderna, y como simple ejemplo puede considerarse el empleo que Descartes hace del mismo en su *Geometría* [Descartes (1981): 351; A-T, VI, 457]. Así mismo tanto en Detlefsen (2008) como en Detlefsen and Arana (2011), pueden encontrarse una colección importante de referencias históricas donde se aprecia una preocupación matemáticamente relevante respecto a la pureza del método. En el Capítulo 2 intentaremos rastrear una noción de pureza en algunas discusiones de la matemática del Siglo XIX.

[9]O si se prefiere: ¿cómo se caracteriza la extensión de «pura»?

o lógicamente tratable de la misma. Dentro de esta orientación podemos ubicar la indagación de Andrew Arana[10] sobre la eventual caracterización de «demostración pura» como una demostración *analítica* (en el sentido que esta expresión adquiere en teoría de la prueba). Por otro lado, tenemos la indagación de Reinhard Kahle y Gabriele Pulcini [11], donde se ofrece una caracterización de «demostración pura» a partir de un uso sustantivo del concepto de *conjunto cerrado bajo operaciones* [12].

Una segunda orientación que puede hallarse en la literatura tiene un carácter claramente *filosófico*, o *histórico-filosófico*, dado que dichos esfuerzos se encuentran dentro de lo que suele denominarse «filosofía de la práctica matemática». Aquí podemos encontrar los trabajos de Arana, Michael Detlefsen, Paolo Mancosu, Michael Hallett así como Marco Panza y Giovanni Ferraro[13]. Decimos que estos trabajos están filosóficamente orientados, no sólo porque no pretenden proveer una caracterización matemáticamente tratable de «demostración pura», sino también porque en mayor o menor medida se advierte cierta preocupación por ofrecer un análisis del segundo enigma de la pureza, a saber, el *valor epistémico* de la pureza del método. Esta preocupación está ciertamente ausente dentro de la literatura matemáticamente orientada, puesto que el interés allí es *hacer* matemática[14]. Finalmente, podemos ubicar (con menos precisión) una tercera orientación en la literatura reciente, la cual se caracteriza por un esfuerzo combinado entre el empleo de herramientas lógico-matemáticas, por un lado, pero por otro, la existencia de cierta pretensión de esclarecer por medio de ellas aspectos de la práctica matemática. En esta orientación

[10] Arana (2009).

[11] Kahle and Pulcini (2017).

[12] Así mismo, quizás podría incluirse dentro de esta orientación el trabajo de Victor Pambuccian Pambuccian (2001), donde la indagación matemática de la pureza queda subsumida dentro del programa de *matemática regresiva*, impulsado originalmente por Harvey Friedman (1975). No obstante, no resulta del todo claro que la búsqueda de un conjunto lógicamente *minimal* de axiomas requeridos para demostrar un teorema sea, exactamente, la búsqueda de una demostración pura; pues, en el primer caso lo que se compara no es precisamente un teorema con su demostración, sino una sentencia con un conjunto de sentencias –i.e. el conjunto minimal. Véase a este respecto Arana (2008).

[13] Hallett (2008), Detlefsen and Arana (2011), Arana and Mancosu (2012), Ferraro and Panza (2012) y Detlefsen (2008).

[14] En la *Subsección 4.1.2* en el Capítulo 4, volveremos brevemente sobre esta diferencia de orientaciones.

podemos incluir nuevamente a Arana[15], así como a John Baldwin[16]

Esta investigación va a concentrarse en el análisis del «doble enigma» de la pureza, y tal análisis va a seguir una orientación filosófica. En razón de ello es que en la *Sección 1.2* explicitaremos brevemente la metodología que seguiremos, con especial atención a la orientación filosófica que perseguiremos.

1.2. Marco metodológico: ¿elucidación matemática o filosófica?

En el primer párrafo de este capítulo decíamos que nuestra pretensión era la de aproximarnos conceptualmente a la noción de «demostración tópicamente pura», pero ahora podemos aclarar que lo que intentaremos, es realizar una suerte de *crítica elucidatoria* de esta noción, la cual estará orientada a proveer una discusión *filosófica* de la noción de pureza[17]. El concepto de *análisis elucidatorio*, o *elucidación conceptual* suele ser entendido como una variante de la vieja idea de *método analítico*, y el mismo ha recibido tratamientos sustantivamente diferentes[18]. Debido a ello, lo que en esta sección se pretende explicitar son algunas nociones generales, las cuales oficiarán de marco orientador de la tarea analítica de los próximos capítulos, a la vez que justifican la organización de la tesis.

A tales efectos es que podemos servirnos de algunas ideas elaboradas por José Seoane[19], aunque no vayamos a explotar plenamente su modelo elucidatorio. Puntualmente nos referimos a su distinción entre conceptos *teóricos* y *pre-teóricos*, así

[15]Arana (2014), Arana (2017).

[16]Baldwin (2013), Baldwin (2018).

[17]En el primer párrafo también se advirtió acerca del carácter *incompleto* de esta tesis; dicha incompletud obedece, fundamentalmente, a la incompletud de la crítica. Esto quedará mejor entendido hacia el final del presente capítulo.

[18]Puede consultarse polémica seminal entre Thomas Moro Simpson (1975) y Alberto Coffa (1975) a este respecto.

[19]Seoane (2017).

como a lo que Seoane denomina *condición sustantiva* y *superioridad epistémica*.

Empecemos con el par «teórico/pre-teórico». Esta es una distinción fundamental para un modelo elucidatorio porque en el corazón del concepto de elucidación está la idea de que la misma es una *relación* (o un proceso), en el cual hay un concepto que es el objeto del análisis elucidatorio –i.e. el *elucidandum*, y otro concepto, el cual vendría a «reemplazar» al primero cuando la relación elucidatoria es satisfecha (o el proceso tiene éxito); a este último Seoane le denomina –siguiendo a Simpson– *elucidatum*. Así pues el par «teórico/pre-teórico» identifican a los conceptos protagónicos de la relación de elucidación: el concepto pre-teórico vendría a identificar el *elucidandum*, mientras que el concepto teórico vendría a identificar el *elucidatum*. Así pues, esta distinción juega un rol metodológico relevante en esta investigación, y esto se debe a que en los capítulos siguientes intentaremos identificar un concepto pre-teórico de *demostración pura*; y así mismo, también identificaremos un concepto teórico de *demostración pura*. Por lo tanto, el tratamiento de la noción de demostración tópicamente pura será un tratamiento elucidatório, donde primero identificaremos el concepto pre-teórico y luego, presentaremos un modelo de demostración pura, el cual tendrá el rol metodológico de ser el *elucidatum*.

Por otro lado, si la la elucidación es una relación entre conceptos pre-teórico y teórico, entonces deberá de haber un conjunto de condiciones cuya satisfacción es una condición para sostener que el concepto teórico «elucida» al concepto pre-teórico. Seoane introduce a tales efectos las ya mencionadas *condición sustantiva* y *superioridad epistémica*. En cuanto a esté último, Seoane[20] dice que, es una condición del *elucidatum* (o concepto teórico) el poder ser reconocido como «epistémicamente superior» al concepto pre-teórico[21]; *grosso modo* esta superioridad epistémica puede ser entendida a la luz de cierto estándar (históricamente reconocible), de *rigor*[22].

[20]*Íbid*: 1407.

[21]Nótese que el interés en los procesos elucidatorios no es independiente de esta característica del concepto teórico, pues de esta forma es que resulta fructífero reemplazar, en la práctica, al concepto pre-teórico por el concepto teórico.

[22]En la filosofía de la matemática más extendida durante el Siglo XX, el estándar de rigor estuvo

De esta manera, el modelo a ser presentado en el Capítulo 6, será considerado (en esta investigación) como proveedor de un concepto de «demostración tópicamente pura», epistémicamente superior a la noción pre-teórica de pureza demostrativa[23].

Finalmente tenemos la *condición sustantiva*. Seoane caracteriza esta condición como aquella en la que el concepto teórico «hace justicia» a un «núcleo valioso» presente en el concepto pre-teórico[24]. Así pues, la satisfacción de esta condición requeriría *identificar* el «núcleo valioso» en el concepto pre-teórico, y así mismo, *evaluar* que el concepto teórico preserva este núcleo. No obstante, así formulada la condición resulta ser extremadamente vaga (metafórica, podría decirse), y su interpretación particular podría dar lugar a diferentes modelos elucidatorios. Así por ejemplo, podríamos entender que el núcleo valioso consiste en ciertos *usos relevantes* del concepto pre-teórico, siendo estos usos (y no otros) los que el concepto teórico «preserva»: así mismo, «preserva» aquí podría querer decir que el concepto teórico tiene la misma *extensión* que –los usos seleccionados– del concepto pre-teórico[25]. Otros modelos elucidatorios podrían destacar, además de una relación extensional entre los conceptos teóricos y pre-teóricos, también una relación *intensional*; así mismo, podemos tener modelos que identifiquen de otra manera el «núcleo valioso».

Así pues, en esta investigación –decíamos– intentaremos identificar un concepto de pre-teórico y teórico de *demostración pura*, y además intentaremos identificar una cierta *condición sustantiva* presente en el concepto pre-teórico, a saber, lo que llamaremos *conservación tópica* y *superioridad epistémica*. Ahora bien, hay un as-

fuertemente asociado al carácter formal (fundamentalmente sintáctico) de las teorías matemáticas; por esta razón, es que resulta más conveniente –según Seoane– emplear el par «teórico/pre-teórico», en vez del par «pre-formal/formal», pues así se evita restringir la relación elucidatoria únicamente a la matemática del Siglo XX.

[23]No obstante, es precisa realizar desde ya una aclaración terminológica. A lo largo de la tesis, y muy especialmente en el Capítulo 5, emplearemos la expresión «superioridad epistémica», para hacer referencia a una característica del concepto *pre-teórico* de pureza demostrativa, y no para hacer referencia al concepto *teórico* de demostración pura. De aquí en adelante, emplearemos entonces la expresión «superioridad epistémica» en el primer sentido, excepto explícita aclaración.

[24]*Íbid.*:1407

[25]De acuerdo con Coffa (*íbid.*), podríamos asociar una interpretación así de la *condición sustantiva* con el modelo elucidatio de Quine Quine (2013).

pecto del concepto de elucidación de Seoane del que tomaremos particular distancia, pues su propuesta de elucidación está originalmente orientada hacia el estudio de procesos elucidatorios propios de las *matemáticas*[26]. En tal sentido, el concepto pre-teórico debe ser matemáticamente interesante, pero a su vez el concepto teórico tiene la exigencia particular de ser *matemáticamente tratable*. En la sección anterior se clasificó la literatura especializada en la pureza en dos orientaciones fundamentales, matemática y filosófica, a la vez que se aclaro la orientación que iba a seguir nuestra investigación (la filosófica); en virtud de esta elección es que, si bien el concepto pre-teórico de *demostración pura* va a ser presentado como un concepto *matemáticamente interesante*[27], nos vamos a exigir del concepto teórico (a presentarse en el Capítulo 6) que sea matemáticamente tratable.

En definitiva, desde un punto de vista metodológica, esta investigación va a proceder al modo de un análisis elucidatorio del concepto de *demostración pura* (aunque no se trata de una elucidación *matemática*), identificando un concepto pre-teórico y un concepto teórico (epistémicamente superior en el sentido que Seoane le atribuye a esta expresión), a la vez que se asociará el concepto pre-teórico con ciertas características (*conservación tópica* y *superioridad epistémica*), las cuales oficiarán de *condición sustantiva*.

1.3. El problema

En la *Sección 1.1* nos referimos al problema de las demostraciones puras como un *doble enigma*: cuáles son las condiciones para que una demostración sea «pura» –i.e. la extensión de este predicado, y en qué puede residir el «valor» peculiar de una demostración pura. Ambos enigmas constituyen pues el problema que esta investigación aborda; o dicho con más precisión: nuestro problema consiste en este doble enigma de la noción de pre-teórica de *demostración pura*, mientras que nuestro

[26]De ahí que Seoane caracterice la elucidación como «elucidación matemática».

[27]Esto mismo ya se sugirió en la *Sección 1.1*.

objetivo es el de *realizar un análisis elucidatorio de la noción de* demostración pura.

Tal como venimos apenas sugiriendo en las secciones anteriores, este enigma en torno a la pureza de las demostraciones en particular, y de la pureza del método en general, es un enigma que tiene un carácter persistente en la práctica matemática, aunque su teorización filosófica es un fenómeno puntualmente reciente. Y es pues, la teorización en clave «elucidatoria» de la noción de demostración pura, el objetivo general de la presente investigación. A tales efectos es que la *identificación* de algo así como la «condición sustantiva» de una noción pre-teórica de *demostración pura*, va a ser de mucha relevancia en los capítulos que se presentan a continuación; pues así es como podremos capturar una noción «pre-teórica» de *demostración pura*. Entonces, un objetivo específico importante es la identificación de una plausible condición sustantiva, siendo el doble enigma una guía para ello; puntualmente, las características de *conservación tópica* y *superioridad epistémica* son un reflejo de las dos aristas del enigma, y ambas cosas podrían , a su vez, conformar el núcleo valioso de un concepto pre-teórico de *demostración pura*. Así pues, la identificación de un putativo núcleo valioso es una cuestión que ocupará la mayor parte de la tesis.

Otro objetivo específico de esta investigación, es señalar un posible *modelo* para el concepto pre-teórico ya identificado. Dicho modelo no es una creación nuestra, sino que fue sugerido por Michael Detlefsen y Andrew Arana[28], y a dicho modelo haremos referencia como el *Modelo Pragmático*. Así pues, el objetivo es introducir este modelo como un candidato posible a la hora de *elucidar* la noción de pureza demostrativa.

El tercer objetivo específico es *sugerir* algunos aspectos relevantes a la hora de *evaluar* la capacidad del modelo para dar cuenta de la práctica matemática relevante, –i.e aquella relacionada con la «inquietud» por la pureza del método. Es importante aclarar por qué decimos «sugerir» (y solamente sugerir); la razón

[28]Detlefsen and Arana (2011).

básicamente estriba en lo que se dijo en el primer párrafo de esta tesis: que la misma presenta una investigación *incompleta*. En absoluto este objetivo consiste en proveer una evaluación del *Modelo Pragmático*, sino que sólo se pretende señalar algunos aspecto de dicho modelo que parecen ser indicadores particularmente sensibles, a la hora de determinar la potencia del modelo. Básicamente: las condiciones para su *aplicación*, así como su *interpretación* de la condición sustantiva ya señalada.

1.4. Organización de la tesis

En virtud de lo dicho en las dos secciones anteriores, la investigación va a estructurarse a modo de dos «actos» y una «escena final»: dentro del primer acto, el cual abarca los capítulos 2 - 5, procuraremos introducir una noción pre-teórica de «demostración tópicamente pura». La característica más general de la misma, más específicamente, lo que identificaremos como la «condición sustantiva», consistirá en las relaciones de *consevración tópica* (**CT**) y *superioridad epistémica* (**SE**).

En el Capítulo 2, se sostendrá que en ciertas discusiones, en el contexto de la aritmetización del análisis, o la distinción entre «método sintético» y «método analítico» en geometría, puede reconocerse un *uso* de la expresión «pura» cargada de un sentido *metodológico*, el cual se operacionaliza como una *restricción tópica de los medios* (o recursos metodológicos). Esta restricción, veremos, se aplica en relación a diversos *fines*, tales como definir conceptos, demostrar teoremas, o construir teorías matemáticas; en este sentido, la noción de «demostración tópicamente pura» se presenta como una instancia de una inquietud más general: la inquietud por la pureza del método. Así pues, cuando los «medios» o «recursos metodológicos» están al servicio de la *demostración* de un teorema, entonces la inquietud por la pureza del método deviene en la inquietud por la pureza de las demostraciones.

Por otro lado, en el Capítulo 3 intentaremos sugerir cómo podemos aplicar el predicado «pura» a demostraciones. La clave para esta aplicación consistirá en que podemos emplear la noción de pureza para clasificar, o comparar demostraciones matemáticas de un mismo resultado. En tal sentido, sostendremos que el estudio de la pureza demostrativa puede entenderse como un capítulo dentro de una investigación más general: el análisis comparado de demostraciones.

En los capítulos 4 y 5 intentaremos identificar dos características sobresalientes de la noción intuitiva de «demostración tópicamente pura»: *conservación tópica* y *superioridad epistémica*. Así pues, podemos esperar como resultado de este primer acto, la construcción de un noción intuitiva de «demostración tópicamente pura».

El segundo acto de esta investigación consiste en un único capítulo (Capítulo 6), el cual consiste en la presentación de lo que daremos en llamar *Modelo Pragmático* de solución pura para un problema matemático, y cuya autoría –decíamos–, pertenece a Michael Detlefsen y Andrew Arana. El cometido de dicho capítulo, es sugerir cómo el *Modelo Pragmático* puede emplearse como *elucidatum* de la noción intuitiva de «demostración tópicamente pura», aún cuando el modelo tiene de por sí un alcance más general (pues concierne a «soluciones» y no solamente a «demostraciones»). Así pues, como explicaremos en la *Sección 6.1*, podemos leer en «clave elucidatoria» el trabajo de Detlefsen y Arana como si se tratase de la elucidación de un concepto pre-teórico de demostración tópicamente pura, de tal modo que el *Modelo Pragmático* sea pertinente para nuestro problema. de forma tal que.

Por último, en el Capítulo 7 expondremos las conclusiones de esta investigación, y señalaremos algunas cuestiones que quedan abiertas a partir de lo indagado hasta aquí. Dicho señalamiento atañe a una eventual *evaluación elucidatoria* del *Modelo Pragmático*.

Capítulo 2

Algunos usos de «pura» en matemáticas

En este capítulo introduciremos el sentido en el que entenderemos la expresión «pura» a lo largo de esta tesis. A tales efectos, intentaremos señalar algunos *usos* de la expresión en ciertos contextos matemáticos, para decantarnos por uno de ellos, a saber, el uso que le da a «pura» un sentido *metodológico*. Puntualmente, identificaremos un uso de la expresión «pura» en el contexto de la distinción entre *matemática pura* y *matemática aplicada* (*Sección 2.1*); así mismo, también plantearemos un uso vinculado con la clasificación de teorías o disciplinas *dentro* de las matemáticas, y en tal sentido, podría hablarse aquí de un uso «disciplinar» de la expresión «pura» (secciones *2.2* y *2.3*). Este último uso es más importante para nosotros que el primero, debido a que, en nuestra opinión, podría sugerirse que hay una cierto «desplazamiento» de este uso hacia un uso más claramente *metodológico*, que es el más relevante para nuestra investigación. Finalmente, haremos más explícito este sentido metodológico de la expresión «pura» en la *Sección 2.4*, con miras a ofrecer una primera aproximación a cómo general al modo en que entenderemos «pura».

Nuestra opción de concentrarnos en un uso metodológico no desconoce, sin embargo, la existencia –incluso la relevancia– de los demás usos (ni siquiera sostendremos que estos tres usos sean *todos* los usos relevantes). Por el contrario, en nuestra opinión, estos usos –aunque distintos–, no están necesariamente divorciados uno del otro; esto quedará –se espera– bastante en evidencia respecto al uso metodológico y «disciplinar»[1], pero a pesar de que no ahondaremos mayormente en la distinción entre matemática «pura» y «aplicada», no pretendemos sostener –ni sugerir– que este último sea completamente ajeno a los otros. No obstante, consideramos que el mismo está, en principio, más alejado del uso metodológico en relación al uso disciplinar.

Empecemos nuestra indagación observando la expresión «pura» tal como la hemos venido usando hasta ahora. Desde un punto de vista gramatical, la expresión «demostración tópicamente pura» sugiere que «pura» (o «tópicamente pura») parece fungir como un predicado que discrimina o clasifica demostraciones matemáticas, es decir, un predicado aplicable a demostraciones. Así pues, si «pura» es un predicado que selecciona demostraciones, entonces lo más natural sería empezar por indagar qué características revisten aquellas demostraciones a las que se aplicaría este predicado. Sin embargo, la experiencia recogida a lo largo de la investigación, que culmina en la elaboración de esta tesis, sugiere que es más conveniente empezar por una caracterización general del predicado «pura». La razón es que este predicado, como se espera mostrar en este capítulo, no tiene historicamente, restringida su aplicación al ámbito de las *demostraciones*, sino que también puede encontrárselo aplicado a definiciones de conceptos, investigaciones sobre fundamentos de teorías matemáticas, así como a ciertos recursos metodológicos (sistemas coordenadas en geometría, por ejemplo) cuya finalidad no se agota (ni está motivada por) la demostración de teoremas. Por esta razón es que el presente capítulo trata sobre el predicado «pura», mientras que la discusión sobre la noción de «demostración» se pospone hasta el Capítulo 3.

La sugerencia más importante de este primer capítulo es que «pura», en el

[1] Sobre el final del presente capítulo retomaremos estos usos. Véase también la *Sección 5.3*.

sentido que adquirirá en esta investigación, es una noción *metodológica*, la cual puede operacionalizarse como una *restricción en los recursos empleables para diversos fines matemáticos*, como demostrar un teorema, proveer una definición, etc.; y donde al mismo tiempo, la condición que guía la restricción de los medios tiene una naturaleza *tópica*. Así pues, para sintetizar este carácter metodológico de «pura» emplearemos a tales efectos la expresión «restricción tópica de los medios». No obstante, «tópica» es una expresión que también va a requerir una explicación detallada[2], pero por lo pronto, puede decirse que las restricciones tópicas dependen de la teoría a la que pertenezca el teorema, es decir, las restricciones no son las mismas si se trata de un teorema geométrico, o de un teorema aritmético, por ejemplo. Por esta razón, en lo sucesivo «pureza» será entendida (salvo explicita aclaración) como «pureza tópica».

2.1. La distinción «pura/aplicada»

Un sentido usual en el que la expresión «pura» se emplea en matemáticas es contrastándola con la expresión «aplicada», es decir, en el contexto de la distinción entre «matemática pura» y «matemática aplicada». En ocasiones se puede presentar esta diferencia, en virtud de identificar qué conceptos o teorías matemáticas tienen, en determinado momento, una aplicación *fuera* de la misma[3]. Siguiendo a Kline[4], podríamos hablar de dos «actitudes», más que de distintas áreas de la disciplina: la actitud de *usar* la matemática y la de estudiarla (o practicarla) por ella misma[5].
Este contraste o distinción entre matemática pura y aplicada, se yergue podríamos decir, sobre la *imagen*[6] de que la matemática es una disciplina *autónoma* del resto de

[2]Véase el Capítulo 4.

[3]Un ejemplo rápido es el de la teoría de números: antes del desarrollo de la criptografía, esta área de la matemática no encontraba un *uso* o *aplicación* concreta. Así pues, *antes* del desarrollo de la criptografía la teoría de números pertenecía exclusivamente a la matemática «pura», pero luego de descubierta esta aplicación, pasaría a poder ser considerada también matemática «aplicada».

[4][Kline (1982): 278-9].

[5]El carácter ampliamente difunfdido de esta distinción, puede apreciarse por ejemplo, en las entradas de Wikipedia «Pure Mathematics» y «Applied Mathematics».

[6]Véase la introducción a Bottazini and Dalmedico (2013), donde se introduce una distinción entre *cuerpo* e *imagen* del conocimiento. Un cuerpo de conocimiento relevante para cierta disciplina

«las ciencias»; siendo pues en tal sentido, que la matemática «pura» sería matemática *simpliciter*, mientras que la matemática «aplicada» sería el uso de la matemática en otras disciplinas. Este carácter autónomo es un elemento importante dentro de lo que Gray denomina «modernismo matemático», el cual resume del siguiente modo:

> As mathematics advanced in the late nineteenth and early twentieth centuries, mathematicians fashioned for themselves a new image of the subject: autonomous, abstract,largely axiomatic, and unconstrained by applications even to physics[7].

Así presentada, la autonomía de la matemática puede ser reivindicada desde más de una trinchera filosófica[8], así por ejemplo, desde un punto de vista *platónico* la autonomía puede explicarse en virtud de sostener que las verdades matemáticas refieren a cierto tipo de *entidades* (estructuras, conjuntos, funciones, etc.), las cuales tienen una naturaleza «abstracta» –i.e. no espacio-temporales, o «causalmente inertes», etc.. En tal sentido, la matemática es «autónoma» en virtud de no estar restringida por el «mundo empírico» propio de «las ciencias». Así mismo, desde una óptica *formalista* (radical), la matemática es un «juego simbólico» autónomo de cualquier significado externo al sistema formal[9]. En un contexto como este entonces, quizás el problema filosófico[10] más acuciante aquí en relación al par «pura/aplicada», sea el problema de explicar el éxito de la aplicación de la matemática a otras disciplinas. Un *locus* clásico a este respecto son las famosas palabras del Premio Nobel Eugene Wigner (profesor de matemáticas y física de la Universidad de Princeton) durante una exposición en 1960:

> The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we

---

o aquellos practicantes de la misma con las herramientas y habilidades de las que se dispone (en cierto momento), mientras que la imagen que se tiene de una disciplina está influenciada por factores más generales. A este respecto, elementos filosóficos pueden intervenir aquí, así como factores institucionales, sociológicos y orientaciones pedagógicas, donde las últimas contribuyen a delinear una imagen de la disciplina para las nuevas generaciones.

[7][Gray (2008): 305]

[8]Para un panorama sobre distintas concepciones filosóficas de la matemática, en relación con su aplicabilidad, puede consultarse Steiner (2009), Aguirre et al. (2016).

[9]Esta actitud puede encontrarse particularmente en von Neumann (1925): 395.

[10]Cfr. Steiner (2009): Cap. 1.

> neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning[11].

En su calidad de «milagro», la aplicación exitosa deviene un fenómeno falto de explicación (que es la tesis general de Wigner). Este carácter milagroso, a su vez, parece ser un producto propio de la imagen «modernista» de la matemática –en el sentido de Gray– como disciplina autónoma, y a este respecto Ferreirós[12] incluso alienta el abandono del par «pura/aplicada» como categoría historiográfica así como problema filosófico, al menos si el par es entendido de esta manera –i.e. en un sentido «modernista». El punto aquí es que el sentido que adquiere «pura» en la distinción «pura/aplicada», no parece tener un aspecto *metodológico* asociado, pues no introduce de por sí una restricción de los medios empleables para definir conceptos, o demostrar teoremas, por ejemplo. En virtud de ello, la expresión «pura» en el contexto del par «pura/aplicada», no reviste mayor interés para la presente investigación. Por lo tanto, en lo sucesivo no se va a considerar «pura» en este sentido.

2.2. La distinción «pura/mixta» en la aritmetización del análisis

La distinción «pura/aplicada» se diferencia de la distinción «pura/mixta» en virtud de que en el contexto de la segunda, la matemática no es estrictamente autónoma respecto a «las ciencias», pues en tal escenario la matemática es la ciencia de las *magnitudes*[13]. Las magnitudes se encuentran a lo largo y ancho de la naturaleza (como en las *distancias*, en los *tamaños*, etc.)[14] , por lo que en una perspectiva así

[11] Wigner (1990). Cfr. [Carnap (1975): 101].

[12] Cfr. [Ferreirós (2015): §8.7].

[13] Ver Euler (1796): §4; Ferreirós (2010). Una perspectiva así de la matemática es pre-moderna en el sentido de Gray.

[14] Es decir, las magnitudes lo son respecto *de algo*.

la matemática apunta indefectiblemente hacia el mundo real[15]. Si tenemos presente el par «pura/mixta» (en el contexto de la aritmetización del análisis durante el Siglo XIX), podemos localizar un uso doble de la expresión «pura» (o un «desplazamiento» entre uno y otro uso), a saber, por un lado «pura» se emplea para designar ciertas áreas o teorías particulares, y por otro, «pura» también se emplea en un sentido metodológico. Para poder apreciar este uso doble, conviene introducir la distinción entre «matemática pura» y «matemática mixta». Los siguientes pasajes de Gauss permiten ilustrar esto; el primero es una carta a Olbers de abril de 1817:

> I come more and more to the conviction, that the necessity of our [Euclidean] geometry cannot be proven, at least not by human understanding nor for human understanding. Perhaps in another life we come to different insights into the essence of space, that are now impossible for us to reach. Until then, we should not put geometry on the same rank with arithmetic, which stands purely *a priori*, but say with mechanics.

Así mismo, en una carta dirigida a Friedrich Wilhelm Bessel de abril de 1830, Gauss dice

> According to my most intimate conviction, the theory of space has a completely different position with regards to our knowledge a priori, than the pure theory of magnitudes. Our knowledge of the former lacks completely that absolute conviction of its necessity (and therefore of its absolute truth) which is characteristic of the latter. We must humbly acknowledge that, whereas number is just a product of our minds, space also has a reality outside our minds, whose laws we cannot prescribe *a priori*[16].

Siguiendo la lectura de Ferreirós[17], dos aspectos de estas palabras de Gauss interesan destacar aquí: según Gauss el fundamento (origen) de la aritmética es categóricamente distinto al fundamento de la geometría; por otro lado, «pura» y «mixta» parecen *clasificar* a ciertas áreas de la matemática en virtud de su fundamento. Así pues, «mixta» refiere a aquella parte de la matemática con un tipo de conocimiento

[15][Ferreirós (2010): 728].
[16]Ambos pasajes son citados en [Ferreirós (2007): 209-10].
[17]*Íbid.*

que, al menos parcialmente, tiene orígenes *empíricos*; puntualmente Gauss coloca en esta categoría a la geometría y a la mecánica[18]. La matemática «pura» es aquella parcela de la disciplina cuyo conocimiento tiene un origen completamente *a priori*, o si se prefiere, son «puramente *a priori*»; ésta incluye no sólo a la aritmética sino a la «teoría pura de las magnitudes» –i.e. el sistema de números complejos en sus diversos aspectos (aritmético, algebraico, topológico y analítico)[19]. A este uso de «pura» que hace Gauss es el que denominaremos «disciplinar».

Esta diferencia plantea entonces, una distinción en cuanto al *fundamento* (en el sentido de *origen*) de ambos tipos de teorías matemáticas. Ahora bien, esta *imagen* que plantea Gauss es un conjunto de *creencias* acerca de las matemáticas, pero no se trata de creencias matemáticamente verificadas; en otras palabras, esta distinción entre matemática pura y matemática mixta no es un hecho matemático, sino una creencia[20]. Lo que aquí nos interesa es cómo esta imagen induce a un tratamiento diferenciado en la investigación de los fundamentos de la geometría por un lado, y la aritmética por otro, siendo en ocasión de tal empresa indagadora un lugar de particular interés para que «pura» admita un carácter *metodológico*. El siguiente es el punto que nos interesa destacar: a partir de la distinción «pura/mixta», la cual distingue distintas áreas de las matemáticas por su fundamento, podemos extraer de ella una noción de pureza *metodológicamente* valiosa. Volviendo a la metáfora del párrafo inicial de este capítulo, podemos decir que, al amparo de esta imagen de las matemáticas podemos advertir en ocasiones (puntualmente en el contexto de la aritmetización del análisis[21]), un desplazamiento de un uso disciplinar de «pura» –que

[18]Como se observa claramente, en este contexto la mecánica no es precisamente una «ciencia empírica» que hace uso de la matemática, es decir, no se trata de una disciplina categóricamente no matemática.

[19]No está de más destacar el carácter fuertemente *filosófico* de la distinción de Gauss, puesto que él está distinguiendo entre aritmética y geometría en virtud, fundamentalmente, de la facultad que le da *origen* al conocimiento que cada una provee (de hecho la expresión *Metafísica de la matemática* es empleada por Gauss para referirse a la investigación en fundamentos de matemática). Teniendo en cuenta el concepto de *imagen* de Bottazzoni y Dalmedico ya referido, puede observarse en las palabras de Gauss una imagen de las matemáticas permeada por conceptos filosóficos, como la distinción entre conocimiento *a priori* y *a posteriori*.

[20]Cfr. [Ferreirós (2015): 183].

[21]Con esto no pretendemos sugerir que es la influencia de Gauss la que se queremos rastrear

es el uso sobresaliente en Gauss–, hacia un uso *metodológico*. Este «desplazamiento» ocurre, en nuestra opinión, cuando la(s) disciplina(s) que «pura» designa fungen como criterio para *restringir los medios* empleables para ciertos fines matemáticos; precisamente son los medios (conceptos, representaciones, metodologías, etc.) que pertenecen, o se encuentran dentro de los límites de las disciplinas que «pura» designa, los idóneos para las finalidad matemática que se persigue. Es en virtud del rol que tienen las disciplinas matemáticas «puras» en la restricción metodológica, que la misma sea de naturaleza *tópica*.

Indaguemos un poco en esta cuestión. El término «aritmetización» suele designar de forma genérica a varios programas orientados a proveer fundamentos no geométricos del análisis, u otras disciplinas matemáticas. Estos programas incluyeron las construcciones del continuo de los números reales a partir de (conjuntos infinitos, o secuencias de) números racionales, así como la clarificación de las nociones de *función*, *límite*, etc.[22]. Caracterizado así, el período de aritmetización puede entenderse como una serie de programas orientados por un requisito de «pureza», entendiendo aquí por «pureza» la exclusión de nociones geométricas en la clarificación (o el «análisis») de nociones como las de *límite*, o *número complejo*, etc.. Esta exclusión de nociones geométricas, ya introducida como parte de la descripción de la aritmetización, puede verse pues como un requisito metodológico «purista». Aquí, «metodológico» obedece a que se advierte cierta *prescripción* en la práctica matemática identificada con la aritmetización, más precisamente, una *restricción* sobre los medios empleables para llevar a cabo el programa; por otro lado, «pura» aquí debe entenderse básicamente «matemática pura», –i.e. «aritmética» en un sentido amplio.

aquí, aunque ciertamente una influencia tal puede rastrearse claramente en lo referente a período de aritmetización del análisis, tal como lo muestran numerosas investigaciones, como por ejemplo Dugac (1973), Jahnke and Otte (1981), Petri and Schappacher (2007), Boniface (2002) y Dugac (2003). Nuestro propósito más bien, consiste en sugerir que una diferencia entre aritmética y geometría, como la que ilustra las palabras de Gauss plantean un escenario donde la noción de «pureza» deviene metodológicamente relevante en la práctica matemática.

[22]Petri and Schappacher (2007): 343.

Considérese brevemente estas palabras de Weierstrass de 1873 en una carta dirigida a Paul du Bois Reymond:

> [h]owever, for analysis we need a purely arithmetical foundation which has already been given by Gauss. Even though the geometric presentation of the complex quantities is an essential tool for their investigation, we must not use it here because analysis has to be kept clean of geometry[23].

Estas palabras de Weierstrass sugieren lo que se ha venido sosteniendo en los párrafos anteriores. Concentrémonos en la expresión «puramente aritmético». La observación de Weierstrass atañe a la investigación en los fundamentos del análisis, y a este respecto afirma que el análisis necesita de un fundamento «puramente aritmético». Así pues, si bien la *representación* geométrica es un recurso (o «herramienta») valioso para la investigación, la misma «no debe», en la medida de lo posible al menos, usarse al momento de investigar acerca de los fundamentos del análisis. Dicho de otra manera, la representación geométrica de los números complejos –i.e. el plano complejo, debe o conviene que sea *excluida* de los fundamentos del análisis tal como señaló Gauss (según puntualiza Weierstrass). A esto es a lo que parece apuntar Weierstras cuando dice que el fundamento del análisis es «puramente aritmético» –i.e. que *sólo* deben emplearse conceptos de la aritmética.

Así mismo, «puramente aritmético» remite inmediatamente a aquella parcela de las matemáticas denominada «matemática pura», de acuerdo con la distinción «pura/mixta» observada en Gauss –i.e. aritmética en un sentido amplio. Un último aspecto a tener en cuenta para interpretar estas palabras de Weierstrass es que en el trasfondo de sus observaciones está la cuestión del *rigor* en el Análisis. A este respecto la representación geométrica resulta defectuosa para, por ejemplo, diferenciar entre los conceptos de *continuidad* y *diferencialidad* de una función (tal como el propio trabajo de Weierstrass sobre las «funciones monstruo», lo atestigua ejemplarmente). Así pues, la exclusión de la representación geométrica es una operacionalización de una aspiración de rigor *adecuado* para la búsqueda de un

[23] Citado en [Petri and Schappacher (2007): 352].

fundamento sólido para el Análisis.

¿Puede leerse «pura» aquí en clave metodológica con las características de restricción tópica sugeridas al principio del capítulo? Veamos, en **primer** lugar, cabe destacar el carácter eminentemente metodológico de la expresión «pura» en este contexto, pues en éste, la misma se asocia con un requisito que condiciona la puesta en práctica de la investigación sobre los fundamentos del análisis. El plano complejo (representación geométrica) es un *medio* taxativamente desaconsejado por Weierstrass, cuando la finalidad de la investigación consiste en hallar un fundamento sólido para el análisis; luego, por tratarse de una prescripción sobre los *medios* empleables en la investigación matemática, podemos decir que «pura», además de emplearse en un sentido disciplinar (para designar básicamente a la aritmética), también se observa un sentido metodológico, el cual se emplea para clasificar ciertos medios (como el plano complejo) para la realización del mencionado fin matemático. Así pues, aquí parece haber un desplazamiento de un uso disciplinar a uno metodológico de la expresión «pura». Este desplazamiento no debe sorprendernos, si tenemos presente que la finalidad aquí es el hallazgo de un fundamento para el análisis, pues tal búsqueda (en el contexto de la aritmetización) es indisociable de la pretensión de *rigorizar* esta área de las matemáticas. Luego, el uso metodológico de «pura» parece ser una manera de operacionalizar la pretensión de introducir rigor en los fundamentos de ciertas teorías de las matemáticas[24].

En **segundo** lugar, este requisito de mantener los fundamentos del análisis dentro del ámbito de la aritmética, tiene como contra prestación la *exclusión* de nociones geométricas; esto es, para que la investigación sobre fundamentos del análisis sea «puramente aritmética», la misma debe *restringir los medios* empleados al ámbito

[24]Con esto no se pretende decir que la exclusión de nociones geométricas agote la noción de rigor matemático. El punto a destacar en las palabras de Weierstrass es que la puesta en práctica del rigor matemático, en la investigación sobre fundamentos del análisis, se manifiesta como una restricción en los recursos a emplear a la hora de representar números complejos. Dicha *restricción* se expresa negativamente, esto es, como la exclusión de la representación geométrica.

de la aritmética (matemática «pura»), y en tal sentido, excluir de ella a la geometría (matemática «mixta»). La íntima relación entre aritmetización y rigor matemático nos permite pensar con naturalidad, una motivación para entender el uso metodológico de «pura» como una restricción de los medios, pues una restricción tal ofrece un mayor *control* sobre los recursos empleados[25]. Entonces, esta restricción de los medios puede entenderse perfectamente como la introducción del rigor en la investigación matemática sobre fundamentos del análisis; puntualmente, en la observación de Weierstrass, diríamos que la representación geométrica no respeta la restricción purista (y por ello es que debe ser dejada de lado).

En **tercer** lugar, puede advertirse un carácter netamente *tópico* del requisito metodológico de pureza (aritmética), pues dicho requisito tiene valor para, o se presenta como circunscrito a, la investigación sobre fundamentos de cierta área particular de la matemática (el análisis). El punto aquí es que este requisito metodológico aparece fuertemente identificado con el interés en fundamentar (o rigorizar) áreas *específicas* de la matemática, la «matemática pura», y así mismo, la exclusión se aplica a un área también específica de la matemática, la «matemática mixta». Este requisito metodológico (la exclusión de nociones geométricas), no se plantea aquí en principio, como una prescripción *general* sobre los fundamentos de cualquier área de la matemática, sino acerca de la matemática denominada «pura». En otras palabras, es del *análisis* (o aritmética en un sentido amplio) que se deben excluir las nociones geométricas, y no de cualquier teoría matemática. En efecto: por un lado, la exclusión opera sobre ciertas teorías específicas de las matemáticas, –i.e. la geometría; por otro lado, la exclusión tiene valor para unas áreas o teorías específicas de las matemáticas –i.e. el análisis. Nótese pues, que en este carácter tópico de la restricción metodológica, podemos observar claramente las huellas del uso disciplinar de «pura» en su uso metodológico: la restricción de los medios *depende* de la teoría o área matemática cuyo fundamento interesa hallar. Por lo tanto, la representación geométrica es excluida de la investigación *porque* el fundamento del análisis debe

[25]A este respecto puede verse [Dugac (1973): 118-140].

buscarse en la aritmética. «Pura» entonces, por un lado designa un área de las matemáticas (aritmética, análisis), pero al mismo tiempo, tiene un carácter metodológico en tanto que es la matemática pura misma la que provee el criterio para restringir los medios a emplearse en la investigación. Es pues en este sentido, que la restricción es, a nuestro juicio, una restricción *tópica*. En otras palabras, «pura» se emplea para discriminar (o restringir) el tipo de recursos (conceptos, representaciones) a emplear en la investigación fundamental, del área de las matemáticas que «pura» designa. En definitiva, la restricción es tópica porque la misma está definida –y vale para–, una teoría o área particular de las matemáticas.

En definitiva, puede apreciarse en la observación de Weierstrass el tipo de «desplazamiento» que sugerimos en la página 20, entre un uso «disciplinar» y «metodológico» del predicado «pura»: de un uso disciplinar (por medio del cual se clasifica una constelación de disciplinas matemáticas), se pasa a un uso metodológico cuando la(s) disciplina(s) devienen en el criterio por medio del cual opera una restricción de los medios empleables para un fin matemático; siendo en virtud de fungir la disciplina como un criterio para seleccionar (restringir) los medios, que sostenemos la naturaleza tópica de la restricción. En tal sentido, es el uso metodológico de «pura» se operacionaliza como una *restricción tópica de los medios*.

Ahora bien, es importante tener presente que esta restricción opera en el contexto de una finalidad matemática específica, a saber, la investigación en torno a los *fundamentos del análisis*. En tal sentido, ocurre que el uso metodológico de «pura» vendría a tener un dominio de aplicación más amplio que el de las demostraciones matemáticas. Por ejemplo, si las nociones más básicas del análisis, podríamos decir sucintamente, deben ser nociones aritméticas, entonces un uso metodológico de «pura» también afectaría a las *definiciones* de *número complejo*, *límite*, o *número irracional*, así como la caracterización de sus operaciones, restringiendo los medios admisibles en los *definenda*. Y a este respecto es que, en un ensayo de 1876 Dedekind introduce, en una llamada a pie de página, tres exigencias para una definición de *número irracional*, la primera de las cuales es la que interesa destacar:

> Como primera exigencia reconozco que la aritmética debe mantenerse exenta de elementos extraños, y por esa razón rechazo la definición según la cual el número sería la razón entre dos magnitudes de la misma especie; por el contrario, la definición o la creación de número irracional debe estar fundada únicamente sobre fenómenos que se puedan ya constatar claramente en el dominio $\boldsymbol{R}$[26].

La preocupación metodológica de Dedekind en este pasaje es bastante evidente, y en particular cabe destacar que aquí la preocupación versa acerca de cómo definir o crear los números irracionales. Así pues, esta exigencia refiere particularmente a la definición de número irracional, donde la misma «debe mantenerse exenta de elementos extraños». Aquí los elementos «extraños» a los que apunta Dedekind son las *magnitudes*, esto es, Dedekind está preocupado por desembarazar la noción de número de la de magnitud[27].

Parece factible decir que estas palabras de Dedekind pueden parafrasearse diciendo: la definición de número irracional debe ser «puramente aritmética». Esta exigencia para la definición tiene todo el aspecto de la restricción tópica, pues es en virtud de no introducir nada extraño en la aritmética que Dedekind excluye la noción de magnitud. Esto es, la definición debe estar fundada sobre propiedades «ya constatadas» en $\boldsymbol{R}$, o si se prefiere, propiedades «internas» al dominio numérico donde pertenecen los números irracionales. Así pues, podemos encontrar un requisito metodológico de restricción tópica asociado –en principio– a la *definición*.

Consideraciones análogas parecen ocurrir con Frege en el siguiente pasaje, con la diferencia de que Frege vincula sin mediar palabra la investigación sobre números complejos con demostraciones «puramente aritméticas».

> Even in pre-scientific times, because of the needs of everyday life, positive whole numbers as well as fractional numbers had come to be

[26]Dedekind (1876); citado por Ferreirós en [Dedekind (2014): 48].

[27]La caracterización de *número* como «aquello mediante lo cual se explica la magnitud de alguna cosa» se debe a Simon Stevin (1548 - 1620). Véase [Dedekind (2014): 16], [Ferreirós (2015): 228 - 229].

> recognized. Irrational as well as negative numbers were also accepted, albeit with some reluctance ?and it was with even greater reluctance that complex numbers were finally introduced. The overcoming of this reluctance was facilitated by geometrical interpretations; but with these, something *foreign* was introduced into arithmetic. Inevitably there arose the desire of once again extruding these geometrical aspects. It appeared contrary to all reason that purely arithmetical theorems should rest on geometrical axioms; and it was inevitable that proofs which apparently established such dependence should seem to obscure the true state of affairs. The task of deriving what was arithmetical by purely arithmetical means, i.e. purely logically, could not be put off[28].

Frege apunta su crítica contra el empleo de la representación geométrica de los números culpándola de facilitar una actitud reluctante ante la aceptación de números no naturales (enteros positivos); este empleo de la representación geométrica Frege lo califica de «ajeno»[29] en relación con la aritmética, y esto alienta el interés por excluir estas representaciones. En este punto parece ocioso insistir en el carácter tópico de la restricción metodológica, análoga al de los pasajes anteriormente citados. Sin embargo, inmediatamente a continuación Frege agrega que es contrario a la razón que los teoremas «puramente aritméticos» dependan de axiomas geométricos, pues según él, la dependencia de los primeros para con los segundos «oscurece el verdadero estado de la cuestión». Así pues, la tarea de derivar los teoremas aritméticos por medios puramente aritméticos no debe ser regateada. Naturalmente, debido a que Frege es logicista, las demostraciones aritméticas son en último término demostraciones *lógicas*.

Al inicio de este capítulo se aclaro que la noción de demostración y su relación con la pureza iba a posponerse para el segundo capítulo, y que la razón de ello era que «pura» –como noción metodológica– podía encontrársela aplicada no sólo a demostraciones. En efecto, los tres pasajes citados difieren en matiz a este respecto: Dedekind menciona la *definición*, Frege la *demostración*, mientras que la observación de Weierstrass es mucho más general, pues refiere a la búsqueda de un

[28][Frege (1885):116 - 117]. Énfasis añadido.

[29]Tanto «ajeno» como «extraño» son expresiones sobre las que se volverá en la siguiente sección.

fundamento.

Sin embargo aquí no debe exagerarse la distinción de énfasis o matiz que se está sugiriendo, pues sin ir más lejos, la investigación fundacional (en el caso de la aritmétización del análisis, u otros) involucra tanto a definiciones como a demostraciones. Incluso podría decirse, al menos para los autores citados, que el interés de proveer un fundamento «puramente aritmético» del análisis se derrama en forma de ciertas condiciones «puristas» –i.e. condiciones de restricción tópica, sobre definiciones y demostraciones. El punto entonces, es señalar que «pura» en tanto noción metodológica parece aplicarse a distintas *prácticas* (si cabe la expresión), tales como definir y demostrar, por ejemplo. Así pues, y en un espíritu completamente especulativo, podría pensarse que si «pura» tiene en efecto un rol metodológico en la investigación fundacional, y un resultado esperado de este tipo de investigación es una teoría, entonces ¿también diremos que la pureza es metodológicamente valiosa en la construcción de teorías? Expresado de otra manera: ¿podemos hablar de «demostraciones puras», «definiciones puras», «teorías puras», e incluso aumentar la lista de cosas a las que se les aplica el predicado «pura»? Así pues, en virtud de la evidencia sugerida en los pasajes citados, tampoco sería prudente, de ante mano y artificialmente, restringir a las demostraciones el dominio del predicado «pura», si es que «pura» es una noción *metodológica*, pues las cuestiones metodológicas exceden el dominio de las demostraciones[30].

Hasta el momento hemos señalado que la restricción tópica de excluir las nociones geométricas (o las magnitudes), era completamente deudora del hecho de que «pura» designase un área específica de la matemática (análisis, aritmética), en el

[30]Que las cuestiones metodológicas exceden el ámbito de las demostraciones queda claro, incluso si nos concentramos en la relación de restricción tópica, desde el momento que las mismas permean las definiciones, o la elaboración de teorías. Sin embargo, puede sugerirse que las demostraciones son un *locus* particularmente interesante en comparación con, por ejemplo, las definiciones. Una razón podría ser la siguiente: no parece ser evidente que la restricción tópica aplicada a una definición, se conserve automáticamente a las demostraciones en donde la definición figure. El análisis de Lagrange en Ferraro and Panza (2012), puede encontrarse un ejemplo: por un lado Lagrange introduce una definición «puramente analítica» de *magnitud*, pero a la vez, en sus argumentos, suele emplear la propiedad de continuidad de los números reales, cosa que escapa a su definición analítica de magnitud.

contexto de la consecución de un programa de fundamentos que cae dentro de lo que suele denominarse «aritmetización». Podemos resumir el punto fundamental de la presente sección del siguiente modo: se advierte la presencia de una prescripción metodológica caracterizada como una restricción tópica de los medios, donde este carácter tópico obedece a que la misma es dependiente de ciertas teorías o áreas de las matemáticas.

2.3. «Geometría pura» y métodos analíticos

También es factible encontrar actitudes u observaciones metodológicas más o menos análogas a las ya señalas, pero en el ámbito de la geometría del Siglo XIX. En problemas y discusiones relativas a la distinción entre «método analítico» y «método sintético», podemos encontrar una noción de pureza sugerente para esta investigación. La pretensión aquí no es abordar sin más esta distinción, sino sólo puntualizar como en ocasiones la prioridad dada al método sintético (en detrimento del método analítico) se fundamenta en la convicción de que la herramienta analítica es «ajena» a la esencia de las propiedades geométricas.

En su obra *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (1925) Klein describe de forma general ambos métodos a la vez que identifica ciertas posturas «puristas» según cuál de ellos se pondere por encima del otro; el siguiente pasaje es extenso pero vale la pena citarlo íntegramente:

> Synthetic geometry is that which studies figures as such, without recourse to formulas, whereas analytic geometry consistently makes use of such formulas as can be written down after the adoption of an appropriate system of coordinates. Rightly understood, there exists only a difference of gradation between these two kinds of geometry, according as one gives more prominence to the figures or to the formulas. Analytic geometry which dispenses entirely with geometric representation can hardly be called geometry; synthetic geometry does not get very far unless it makes use of a suitable language of formulas to give precise expression to its results. Our procedure, in this course, has been to recognize this, for we used formulas from the start and we then inquired into their geometric meaning. In mathematics, however, as everywhere

> else, men are inclined to form parties, so that there arose schools of pure synthesists and schools of pure analysts, who placed chief emphasis upon absolute «purity of method», and who were thus more one-sided than the nature of the subject demanded[31].

Como puede apreciarse rápidamente, la distinción es eminentemente metodológica; *grosso modo*, la metodología sintética apoya el razonamientos y demostraciones en la *construcción de objetos geométricos* (figuras) a partir de reglas, postulados y los tipos de objetos básicos con los que trata (puntos, líneas y planos). En conexión con la construcción de objetos geométricos es que la expresión «postulado» adquiere un sentido propio: los postulados autorizan a realizar ciertas *acciones*[32]. Piénsese en los postulados del caso de geometría sintética por antonomasia: los *Elementos* de Euclides; el Postulado I.3, por ejemplo, autoriza a construir un círculo, dado un punto y distancia (radio). Así mismo, una *teoría* geométrica presentada según el método sintético se yergue *exclusivamente* sobre conceptos (y propiedades) geométricos, independientemente del álgebra y el continuo numérico[33].

Por otro lado, una aproximación analítica a la geometría consiste en emplear algún método de coordenadas. Este método consiste básicamente en asociar a cada punto geométrico en el plano o en el espacio un par o una terna ordenada de números, respectivamente, para de ésta manera poder *representar* figuras geométricas por medio de ecuaciones de diverso grado (dependiendo de la figura). Así pues, mediante la representación ecuacional podemos resolver problemas geométricos (o demostrar teoremas) a partir de la manipulación algebraica de estas ecuaciones, en lugar de realizar construcciones[34]

[31][Klein (1945): 55].

[32]A menudo también se asocia el método sintético con una presentación axiomática de la geometría. Ver Lassalle Casanave and Panza (2015).

[33][Giovannini (2015): 26].

[34]Esto último es una diferencia crucial entre ambos métodos, tal es así que una descripción usual del método analítico consiste en decir que las «construcciones geométricas» se eliminan por medio de un sistema de coordenadas. Lacroix en su *Traité de calcul*, por ejemplo, dice:

> «*In carefully avoiding all geometric constructions, I would have the reader realize that there exists a way of looking at geometry which one might call analytic geometry, and which consists in deducing the properties of extension from the smallest possible number of principles by purely analytic methods, as Lagrange has done in his me-*

Así pues, como sugiere Klein es el empleo o la prescindencia del recurso de coordenadas lo que suele tomarse como criterio a la hora de distinguir entre uno y otro método en geometría. Nótese que según Klein, no hay una diferencia categórica o matemáticamente sustantiva entre una u otra aproximación; dicho de otra manera: la diferencia de aproximación no es una diferencia en la teoría, pues bien podemos hacer geometría euclideana sintética o analíticamente. No obstante acota que el empleo exclusivo de las coordenadas (de fórmulas) «difícilmente pueda ser llamada geometría», mientras que la exclusión de las coordenadas no conduce la investigación muy lejos. Klein menciona «escuelas puristas» las cuales emplean *excluyentemente* uno u otro método, a la vez que su propio abordaje es complementario o «mixto», si se prefiere[35].

Podemos ilustrar rápidamente la diferencia entre ambos métodos con un *problema* sencillo: la construcción de la altura *h* de un triángulo *ABC*, cuya base *c* y lados *a*, *b*, están dados en magnitud[36]. La construcción geométrica («sintética») de *h* (véase Fig. 1.1)es extremadamente sencilla: trazamos un segmento *AB* igual a *c*, luego trazamos dos círculos, uno con centro en *A* y radio *b*, y otro con centro en *B* y radio *a*; estos círculos se intersectan en *C* y *C'*. Luego trazamos el segmento *CC'*, el cual intersecta *AB* (prolongando si fuera necesario), en el punto *D*; $h = CD$ es la altura requerida. Por otro lado, si queremos *computar h*, dados *a*, *b* y *c* como números, entonces podemos emplear la fórmula de Herón, calculando primero $s = \frac{a+b+c}{2}$, para luego calcular *h* por medio de la fórmula

$$h = 2\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c}$$

Podemos apreciar rápidamente ciertas diferencias entre ambas maneras de ob-

chanics with regard to the properties of equilibrium and movement; [Lacroix (1797)], citado en [Boyer (2004): 211].»

[35]No es ocioso aclarar que Klein adopta, digamos, una actitud «gradualista» o «mixta», respecto a los métodos analíticos y sintéticos. Tomando sus palabras, diríamos que tomar partido por alguna de las «escuelas puristas», es igualmente desaconsejado por él. Lo que particularmente nos interesa, es la objeción a la escuela «puramente analítica», a saber, la geometría analítica, con su completa exclusión de la representación *geométrica*, «difícilmente pueda llamarse geometría».

[36]Bos (2001): 131 - 132.

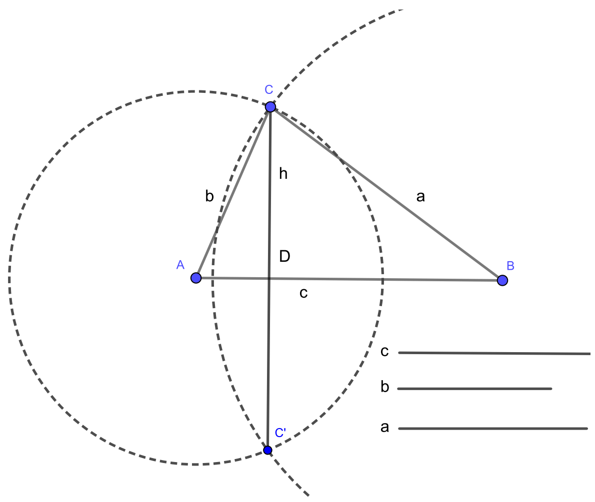


Figura 2.1: Construcción «sintética» de la altura de un triángulo con sus lados dados en magnitud.

tener la altura del triángulo, haciendo énfasis en lo siguiente: el procedimiento analítico consiste fundamentalmente en la manipulación algebraica de fórmulas, mientras que el procedimiento sintético apela a la construcción de figuras geométricas. En otras palabras, por un lado tenemos un discurso sobre fórmulas y su propiedades (y transformaciones) algebraicas, donde no encontramos una referencia directa a los objetos geométricos, en todo caso lo que ocurre es que éstos son *subrogados*[37]; mientras que por otro lado, tenemos un discurso que hace referencia *directamente* a los objetos geométricos (*altura del triángulo*, etc.). Teniendo esto en cuenta, conviene tener presente la brevísima evaluación que Klein hace respecto a la «pureza sintética» y la «pureza analítica». Respecto a esta última, es decir, respecto a la aproximación metodológica que elimina la *construcción* de objetos geométricos, Klein dice que «difícilmente pueda ser llamada geometría». Esta evaluación de Klein no forma parte de su propia idiosincrasia sino que es parte de una tendencia (o incluso tradición) en el modo de entender la relación entre álgebra y geometría,

[37]Respecto a la función subrogatoria de la representación analítica *qua* simbólica véase Lassalle Casanave (2012)

donde la primera es un *medio* para la indagación en lo segundo[38]. En efecto: un recurso o herramienta para el estudio de los objetos geométricos y sus propiedades, esto es, el álgebra no es geometría pero puede ser empleada fructíferamente para la investigación geométrica[39].

Este carácter subrogatorio del método analítico –i.e. de la representación analítica de objetos geométricos, parece estar en el centro de la objeción al uso (o abuso) de los métodos analíticos. Así por ejemplo, en su *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie* de 1837 Michel Floréal Chasles presenta una historia de los métodos geométricos, con especial énfasis en el método de polares recíprocos en geometría proyectiva, así como el concepto de razón cruzada . En el §23 de *Tercera Época*, y en ocasión de comparar el «análisis de los antiguos» y de los modernos de las secciones cónicas (en la figura de De La Hire), Chasles dice

> Si l'on demande la raison de la fécondité de cette propriété des coniques, on dira , en Géométrie analytique, que c'est parce qu'elle n'est autre que l'équation même de la courbe, et que dès-lors il n'est point étonnant que cette propriété se prête à toutes les transformations que l'on ferait subir à cette équation. Mais en Géométrie pure, il faut remonter à une raison plus directe , et prise de la nature seule de la chose, et non empruntée d'un système de coordonnées auxiliaire et artificiel; et l'on reconnaît alors que cette raison est que la relation en question exprime une propriété de six points pris sur une conique. Mais ces six points

[38]Cfr. [Boyer (2004): 212].

[39]Estas diferencias de procedimiento entre método analítico y método sintético, también poseen un aspecto *epistémico*, pues podríamos decir (para el ejemplo presentado), que el cálculo analítico es bastante más complejo que la construcción sintética, pues el mismo involucra la extracción de raíces, varias multiplicaciones y divisiones, mientras que la construcción sintética difícilmente requiera de explicación o demostración; en otras palabras: la manipulación algebraica de las fórmulas resulta bastante menos *evidente* que la construcción sintética. Así mismo, el método analítico tiene la ventaja reiteradamente constatada de proveer procedimientos más *generales*, (los cuales permiten establecer resultados de un modo más económico que los métodos sintéticos), e incluso de permitir establecer resultados que no están al alcance del método sintético (véase Chemla (2016) y Crippa (2014), por ejemplo). Las relaciones entre álgebra (o aritmética) y geometría tienen una larga historia que no empieza con las figuras de Fermat y Descartes, aunque ciertamente este último ocupa un lugar privilegiado en esa historia. No es el propósito de este capítulo el hacer justicia a esa rica historia, ni siquiera en lo específicamente relativo a la pureza del método; sin embargo cabe aclarar que una diferencia tal entre ambas aproximaciones, es uno de los aspectos de la crítica de Newton al programa de fundamentos de la geometría de Descartes, a saber, los métodos analíticos no deben emplearse en la *demostración* de teoremas, pues las mismas deben ser sintéticas. Cfr. Bos (1984), [Guicciardini (2009):§§4 - 5].

> n'ont pas entre eux toute la généralité de position possible ; quatre de ces points sont deux à deux sur deux droites parallèles[40].

Aquí encontramos en lugar de la expresión «puramente aritmético», la expresión «geometría pura». Aquí Chasles está priorizando una aproximación «pura» de la geometría, la cual se contrasta como una aproximación *analítica* –i.e. a través de un sistema de coordenadas. Así pues, en «geometría pura» el empleo de coordenadas es «auxiliar» y «artificial», pues (en geometría «pura») debemos tomar solamente la «naturaleza de la cosa», la *propiedad* expresada por una relación entre puntos. Así pues, la geometría «pura» aquí aparece como una *alternativa* al empleo de métodos analíticos, puesto que por un lado, en la geometría «pura» tenemos una aproximación más «directa» a la «naturaleza de la cosa» (la relación entre puntos, en el pasaje citado), mientras que por otro (en la aproximación analítica), lo que tenemos es una herramienta (el método de coordenadas) que introduce un artificio mediador en la geometría «pura» ¿Pero qué quiere decir «pura» aquí? Es factible asociar «geometría pura» con aproximación *sintética* a la geometría (como también sugiere Klein con la etiqueta «escuela sintética pura»), precisamente en contraste con el empleo de métodos analíticos[41]. Asociar pues «geometría pura» con «método sintético» (en contraposición con «método analítico»), da a entender claramente que la pureza aquí tiene un carácter eminentemente metodológico. Así mismo, lo que aquí se identifica como «ajeno», o artificioso es el empleo de la herramienta analítica; ¿pero se trata de una restricción *tópica*? Que Chasles distinga entre la «naturaleza de la cosa» (la relación entre puntos, digamos) y la herramienta analítica, sugiere que es precisamente esta naturaleza –i.e. la propiedad de la sección cónica, la que *no exige* de por sí que sea expresada por medio de una ecuación (allende las ventajas de su uso); así pues, el tópico aquí es la *propiedad geométrica* en cuestión.

Así mismo, en un pasaje de sus «Diarios científicos», David Hilbert defiende una aproximación sintética a la geometría en virtud de invocar una «pureza del método»

[40][Chasles (1989): 119].
[41]Ver [Kline (1999): 1104]; [Giovannini (2015): 1.3].

análoga a la de Chasles y en consonancia con la descripción de Klein.

> La geometría no va tan profundo como el análisis. Si uno se dedica a la geometría, entonces ésta debe ser sintética. [Pues], ¿Qué tiene que ver la superficie o la curva observada con la ecuación $f(x, y, z) = 0$? El análisis es un instrumento ajeno a la esencia de la geometría, que por lo tanto debe ser evitado, si queremos erigir o fundar la geometría como edificio[42].

Nuevamente vemos aquí que la representación analítica es algo «ajeno a la esencia de la geometría»; ahora bien, Hilbert agrega algo en este pasaje muy relevante: la razón para evitar la representación analítica en la caracterización misma del objeto geométrico es la *finalidad* de «erigir o fundar la geometría como edificio». Siguiendo la lectura de Giovannini[43] , este pasaje anticipa una suerte de *principio* o *requisito metodológico* que será central en su abordaje axiomático de la geometría: en la construcción de una fundamentación axiomática –i.e. de un sistema axiomático de la geometría, es importante que ésta sea desarrollada de un modo *autónomo* de conceptos tomados de otras disciplinas como el análisis, el álgebra e incluso la mecánica[44]. Así pues, si como Hilbert (y Gauss), entendemos que la geometría y la aritmética tienen *distintos orígenes* –i.e.son epistemológicamente autónomas, entonces la construcción de un fundamento autónomo para la geometría, implicaría construir el «edificio de la geometría» de una manera *autónomo* de la aritmética (o de la noción de *número*). Luego, podríamos decir que una teoría (fundamento) autónoma sería una *teoría pura*[45].

Respecto a dominio del predicado «pura», en los pasajes de Chasles y Hilbert podemos observar que se hace referencia a la caracterización (definición) de *objetos geométricos* –i.e. secciones cónicas, curvas, superficies; pero también a la construcción de *teorías* (axiomáticas) en el caso de Hilbert . Sin embargo, y dado que

[42]Citado en [Giovannini (2015): 36].

[43]*Íbid*.

[44][Giovannini (2015): Cap. 6] da cuenta de cómo la preocupación de Hilbert por erigir un *fundamento* para la geometría independientemente de la noción de *número*.

[45]Cfr. [Giovannini (2015): Cap. 1]. En la *Sección 5.3*, retomaremos la relación entre autonomía y pureza en relación con el *valor* de la pureza.

«método sintético» hacer referencia a una manera de abordar el estudio de la geometría *in toto*, entonces no es de extrañar que las prácticas involucradas en la práctica de la geometría (construir teorías, definir conceptos, demostrar teoremas, resolver problemas, clasificar curvas, introducir coordenadas, etc.) puedan ser susceptibles de clasificarse de acuerdo al predicado «pura», si es que por esto se entiende básicamente «método sintético». Dicho de otra manera: si se sigue el método sintético, tendríamos teorías, demostraciones, etc., «puras» o «puramente geométricas», mientras que si se sigue el método analítico, no serían «puras». Todas estas actividades o prácticas pueden ser consideradas desde una perspectiva analítica o sintética y, en tal sentido, puede analizarse comparativamente las virtudes y dificultades que cada abordaje puede llegar a representar.

Volviendo a las palabras de Klein, de que una aproximación «puramente analítica» a la geometría «difícilmente pueda ser llamada geometría», pude sugerirse ahora que una aproximación tal es extremadamente «ajena» al tópico geométrico –i.e. es extremadamente «impura». Pero nótese a todo esto, que Klein habla de una «diferencia de grado» entre ambos extremos puristas (analítico y sintético). Esta es ciertamente una diferencia respecto a la actitud observada en los pasajes de Weierstrass, Frege y Dedekind, donde tanto la representación geométrica de los números complejos, como la noción de magnitud eran *categóricamente* excluidas de los fundamentos de la aritmética (en sentido amplio).

Ciertamente la herramienta analítica, es decir, el uso de sistemas de coordenadas, es un recurso cuyo valor es difícilmente sobreestimable en el desarrollo de la geometría. Una manera de resumir apretadamente la contribución de los métodos analíticos en la geometría es diciendo que la introducción de estos «tuvo el efecto de dar a la Geometría el carácter de abstracción y universalidad que lo distingue esencialmente geometría antigua»[46] . Abstracción y generalidad son características

[46]Chasles (1989), *Tercera Parte*, §1: «*cette doctrine, dis je, eut pour effet de donner à la Géométrie le caractère d'abstraction et d'universalité qui la distingue essentiellement de la Géométrie ancienne*». Respecto a esta característica puede consultarse Chemla (2016), Nagel (1939). Así mismo,

que le otorgan a la investigación geométrica un alcance que no parecen tener los métodos sintéticos, o como dice Klein en el pasaje citado: los métodos puramente sintéticos no nos conducen demasiado lejos.

Puestas así las cosas, podría decirse que la preeminencia del método sintético («puramente geométrico») , o la preeminencia del método analítico es valiosa por razones distintas: la primera puede tener valor, por ejemplo, a la hora de indagar en los fundamentos de geometría con el fin de ofrecer una teoría autónoma o auto-suficiente (en consonancia con Hilbert); mientras que por otro lado, la preeminencia del método analítico tiene valor a la hora de desarrollar la geometría por medio de extender la clase de sus resultados.

2.4. El par «intrínseco/ajeno» y la restricción tópica de los medios

Durante el recorrido realizado en las secciones anteriores se identificó un uso de la expresión «pura» en relación con las expresiones «puramente aritmético» y «puramente geométrico». En ambos contextos se señaló que «pura» era una noción cargada de un contenido *metodológico*, y en virtud de ellos podemos introducir ahora la expresión «pureza del método» para explicitar esta característica, en consonancia con la literatura especializada en esta temática. Tanto en el caso de la «pureza aritmética» como en el de la «pureza geométrica» se identificó un contexto bastante particular donde dichas expresiones adquieren relevancia: la investigación en torno a los fundamentos del análisis y los fundamentos de la geometría en la Europa del Siglo XIX. Así mismo, también se observó que en cada caso la pureza metodológica se presentaba bajo la forma de una *restricción* de recursos o medios (tales como representaciones geométricas, o sistemas de coordenadas) empleados para diversos

puede verse Crippa (2014) en relación con la contribución del método analítico en las demostraciones de imposibilidad, así como el ya clásico trabajo de Bos (2001) sobre el empleo del álgebra en la clasificación de las curvas en Descartes.

fines; donde a su vez, se decía también que la misma era *tópica* debido a que estaba orientada, o era legítima en virtud de las teorías particulares a la que se hacía referencia en los pasajes citados –i.e.la exclusión de la representación geométrica ocurría para el caso del análisis, mientras que evitar el empleo de coordenadas ocurría para el caso de la geometría. Por último, también se observó que la pureza metodológica era promovida (si no prescrita) en relación a un dominio diverso de la actividad matemática que se agrupaba en torno a la investigación fundamental, es decir, «pura» puede emplearse para clasificar no sólo demostraciones sino también definiciones, teorías (y un indeterminado «etc.»). El interés de esta sección es sugerir una generalización útil (aunque no acabada) de la noción de pureza metodológica, a partir de los casos analizados en las secciones anteriores y en la línea sugerida de *restricción tópica de los medios*

Sin embargo, antes de hacer algunas aclaraciones sobre las nociones de «tópico», «medios» y «restricción», conviene realizar algunas puntualizaciones sobre la preocupación fundacionista que engloba los pasajes citados en las *Secciones* 2.2 y 2.3. Las observaciones recogidas en estos pasajes se enmarcaban en discusiones sobre *fundamentos* de teorías matemáticas: en dicho contexto se aprecia un interés (común a los diversos autores) por proveer una base para que la teoría en cuestión sea *autónoma* o *independiente* de otras teorías. A la luz de semejante objetivo la pureza del método, parece adquirir particular relevancia, pues una teoría «pura» sería aquella cuyo fundamento es precisamente «autónomo» o «autosuficiente», si se quiere. Esto sugiere, por un lado, que el par «pura/impura»[47] puede entenderse, aunque sea metafóricamente, por medio del par «intrínseco/ajeno»; así pues, la búsqueda de un fundamento sólido que se manifiesta en los pasajes citados puede ser entendida como la pretensión de *eliminar* las nociones «ajenas» a la teoría en cuestión. Dicho de otra manera: una noción «intrínseca» a la teoría constituye un recurso metodológico «puro» en la búsqueda de un fundamento para la misma, mientras que una noción «ajena» a la teoría, es un recurso metodológico «impuro». En tal sentido pues, es que una teoría fundamentada sobre la base de nociones «intrínsecas» sería, tomando

[47]No el par «pura/aplicada», ni el par «pura/mixta».

la sugerencia de Giovannini, una teoría *autónoma*.

Por otra parte, si se acepta esta relación solidaria entre pureza del método y autonomía de la teoría, entonces puede especularse la existencia de un vínculo entre el interés por la pureza del método y el «modernismo matemático» de Gray referido en la página 16. Sin embargo, aquí no se pretende dar a entender que que el interés por la pureza del método se únicamente a la investigación sobre fundamentos, o que el único tipo de práctica matemática para la cual esta noción tiene interés se circunscribe a la elaboración de teorías «autónomas de» otras teorías[48]. De todas formas, parece muy razonable sostener que la pureza del método un interés considerable en tales circunstancias, José Ferreirós sugiere algo en esta misma línea cuando dice:

> [w]hat I have just called *theory shaping* is a very important activity, which has become more and more so in the process of the emergence of modern mathematics. The goal here is to select those methods that are judged most appropriate and relevant for a given **subject matter**, and to rework systematically a theoretical corpus so as to develop it in accordance with that approach. The theory will be reconceived and the proofs of theorems will be fine-tuned accordingly [...] Value judgments are of the utmost importance in such cases-judgments about the most adequate conceptual framework; about the «purity» of the methods employed with respect to the subject matter; about which methods or ways of proving theorems are more fruitful, more explanatory; and so on[49].

De acuerdo con Ferreirós, la «formación de teoría» (si cabe la expresión) es precisamente una *actividad* importante en proceso de emergencia de la matemática moderna[50]; el objetivo aquí consistiría en seleccionar los *métodos* juzgados como más apropiados y relevantes a un *tópico* («subject matter») dado[51], y en este sentido

[48]No se pretende afirmar tal cosa ni su negación, simplemente porque la presente investigación no reúne evidencia en favor de algún tipo de pronunciamiento al respecto. No obstante, puede señalarse que el modelo de pureza que se presenta en el Capítulo 6, no parece tener como objetivo dar cuenta de la práctica de construcción de teorías.

[49][Ferreirós (2015): 32 - 33]. Las negritas son añadidas.

[50]Precisamente dentro de ese período es que se encuentran los autores citados anteriormente.

[51]Nótese que si el tópico es «dado», entonces la selección de los métodos (o de los «medios») puede entenderse metafóricamente a través del par «intrínseco/ajeno».

es que cuestiones acerca de la pureza del método (entre otras) devienen importantes[52]. En definitiva, parece muy razonable sostener la importancia que adquiere la noción de pureza en el contexto arriba señalado, pero es importante dejar sentado que la presente investigación no tiene como objetivo dar cuenta de cómo esta noción actúa en la formación de teorías, sino más bien intentar esclarecer la noción de *demostración pura*.

Para finalizar este capítulo en necesario terminar de esclarecer algunas ideas que han estado siendo sugeridas a lo largo de las secciones respecto a los usos de la expresión «pura», así como fijar un poco de vocabulario útil para abordar los capítulos venideros. Empecemos por esto último; en los párrafos anteriores (página 37) se introdujo el par «intrínseco/ajeno» y el mismo puede entenderse como un modo metafórico de *generalizar* la idea detrás del par «pura/mixta» de la *Sección 2.2*[53]. Por otro lado, también hemos usado la construcción gramatical «restricción tópica de los medios», la cual pueden emplearse para clasificar un recurso metodológico como «intrínseco» o «ajeno», o «puro» e «impuro». Para terminar este capítulo entonces, debemos decir algo más sobre las expresiones («tópico», «restricción», «medios»).

Por «tópico» se ha venido entendiendo, de forma más o menos explícita, lo atinente a *teoría* o *área* particular de las matemáticas; la motivación para introducir la disyunción «teoría o área» obedece a que en las secciones anteriores nos hemos referido a la «geometría» sin mencionar explícitamente alguna teoría geométrica particular (la teoría de los *Elementos* de Euclides, la teoría de los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert, etc.), así como también nos hemos referido a sistemas de coordenadas sin especificar algún tipo de sistema (homogéneas, analíticas, baricéntricas, esféricas, etc.). Así mismo, también se hizo referencia al «análisis» y a la «aritmética» de un modo difuso, es decir, sin entrar en detalles sobre las teorías de Weierstrass o Dedekind . Dicho de otra manera, en un área de la matemática

[52]Ferreirós menciona el interés por la pureza en conexión con los «juicios de valor»; en el Capítulo 5 se hará referencia a juicios de valor acerca de las demostraciones, pero por el momento lo que se pretende destacar es la relación entre pureza y formación de teorías.

[53]Recuérdese que las expresiones «ajeno» y «extraño» se reiteraban en los pasajes citados.

podemos encontrar diversas teorías, y por ello es que aquí la noción de «tópico» comprende ambas cosas[54].

Veamos la noción de «medio», la cual claramente es lo que le da a la noción de pureza su carácter metodológico. En la sección anterior se mencionaron al plano complejo, «axiomas geométricos», sistemas de coordenadas, etc., como «medios» para distintos *fines*: representar (o definir) números complejos, demostrar teoremas aritméticos, etc. Puede apreciarse pues la heterogeneidad de los medios mencionados en la sección anterior, tanto por su naturaleza matemática como por la finalidad de su empleo. Tener en cuenta el «fin» puede llegar a ser relevante para entender la noción de pureza metodológica; recuérdese a este respecto la observación de Weierstras en la sección anterior, cuando afirma que «la representación geométrica de las magnitudes complejas es una herramienta esencial para su investigación», y sin embargo «for analysis we need a purely arithmetical foundation». Así pues, es cuando los fundamentos de análisis es la finalidad que la representación geométrica queda excluida, pero este no es necesariamente el caso si lo que queremos es investigar en los números complejos. Así mismo, en el pasaje citado de Hilbert, este dice que es cuando la finalidad consiste en «erigir el edificio de la geometría», o dar su fundamento, que la representación analítica (la fórmula) debe evitarse. Lo que estas afirmaciones parecen sugerir fuertemente, es que los medios no son *a priori* «puros» o «impuros», sino que al menos debemos tener en cuenta la finalidad de su empleo para tal evaluación.

Tener presente la finalidad sugiere entonces, tener presente algo atinente al *contexto* donde opera la restricción tópica de los medios. Así pues, en los pasajes citados señalábamos distintas finalidades puntuales, aunque no excluyentes (definir, demostrar, o elaborar el fundamento de una teoría); no obstante, señalar una finalidad puntual para los medios quizás no baste para dar cuenta del *valor* de su restricción tópica, pues, sostener que un determinado medio es puro respecto a alguna de estas finalidades puntuales no evidencia de por sí, el interés o la importancia de la

[54]Cfr. [Ferreirós (2015): 182 - 3].

misma. A este respecto, podemos recordar la observación de Giovannini respecto al proyecto de Hilbert para la geometría: el valor de la construcción pura de un fundamento para la geometría, radicaba en la *autonomía* que la misma adquiría. Por lo tanto, podríamos discriminar, por un lado, una finalidad puntual en la construcción de un fundamento para la geometría, y por otro, una *valoración* teórica respecto a que el cumplimiento de la finalidad puntual satisfaga la relación de restricción pura, a saber, la provisión de un fundamento autónomo para la geometría. Esto último, sería aquello en virtud de por qué el empleo de medios puros es valioso a la hora de realizar la finalidad puntual.

Teniendo en cuenta estas consideraciones sobre «tópico» y «medio» pasemos a examinar «restricción». Como sugiere la construcción gramatical misma «restricción tópica de los medios», la restricción es una *relación* cuyos protagonistas son el tópico y los medios, por lo que es la interacción entre estas dos cosas de donde podemos extraer una idea general de pureza metodológica. En primer lugar, y por mor de esclarecer el vocabulario, diremos que la relación de «restricción tópica de los medios», se caracteriza del siguiente modo: M es un «medio puro» respecto al tópico T para una finalidad F, si precisamente M está *restringido* por T en un contexto C, y así mismo, si M no está restringido por T en C, entonces M es un «medio impuro»[55]. Dicho brutalmente: hay pureza cuando los medios satisfacen la restricción, mientras que no hay pureza cuando no se satisface la restricción. Como ya se dijo, la finalidad de los medios es un factor relevante y por tal razón esta caracterización sólo pretende fijan un vocabulario, pues recién en el próximo capítulo abordare la «finalidad» protagonista de esta investigación, a saber, la demostración de un teorema.

Nótese entonces, que a partir de la tupla $\langle M, T, F, C\rangle$ podemos incorporar el doble enigma de la pureza introducido en la *Sección 1.1* a nuestra discusión; pues, en lo que atañe al enigma de caracterizar la *extensión* de «pura», podríamos decir (al menos en este momento), que este enigma atañe particularmente a las proyecciones

[55]Podríamos expresar esto apelando a una notación típica de la teoría de modelos, donde la relación de restricción tópica consiste en una tupla de cuatro proyecciones: $\langle M, T, F, C\rangle$.

M, T y F, mientras que el segundo enigma relativo al *valor* de los medios puros, atañe a la proyección C[56].

Por lo tanto, lo más importante a tener presente en este momento es que podemos generalizar modestamente las observaciones recogidas en los pasajes citados, es que si hacemos variar el tópico, entonces también varían los medios que satisfacen la restricción. Así pues, si T es geometría euclideana, entonces de acuerdo a los pasajes citados, la definición de círculo de los *Elementos* satisface la restricción –i.e. es «puramente geométrica», puesto que se trata de una definición sintética, mientras que la ecuación en el sistema analítico de coordenadas no satisface la restricción –i.e. no es «puramente geométrica». Por otro lado, si T es el análisis, entonces el plano complejo no satisface la restricción –i.e. un punto en dicho plano no es una representación «puramente analítica» de una magnitud compleja.

Habiendo hecho la aclaración terminológica prometida, ahora debemos volver sobre los usos de la expresión «pura» que hemos intentado identificar. En la *Sección 2.1* asociamos «pura» con el par pura/aplicada, siguiendo el concepto historiográfico de *modernidad matemática* de Gray. En este contexto «pura» no discriminaba *entre* métodos matemáticos, ni se planteaba como una discriminación sustantiva *entre* disciplinas matemáticas; lo que ocurría en todo caso, era que «pura» era una adjetivación que caracterizaba *la* matemática –en singular– *in toto*. Debido a esto, es que sosteníamos que este *uso* de «pura», no iba a ser considerado en la presente investigación, pues nuestro interés radica en discriminar en términos de pureza *entre* métodos matemáticos.

Así mismo, también identificamos –a partir de Gauss–, un uso *disciplinar* de «pura» asociado con el par pura/mixta (*Sección 2.2*). Este uso se diferenciaba del anterior en virtud de que en Gauss, «pura», se empleaba para designar una disciplina (o un cúmulo de disciplinas) matemáticas, puntualmente, la aritmética en sentido amplio. No obstante, a partir de este uso intentamos señalar un «desplazamiento» del mismo hacia un uso *metodológico* de «pura». Dicho desplazamiento ocurría,

[56]En el Capítulo 5 relacionaré este contexto con *valores epistémicos*.

cuando la disciplina matemática «pura», fungía como criterio para *restringir* los métodos a emplear en *esa* disciplina. En este sentido, podíamos extraer, debido al desplazamiento un uso *metodológico* de «pura».
Finalmente, en la *Sección 2.3* también se identifico un manifiesto uso metodológico de «pura», pues siguiendo a Klein, discriminamos entre *métodos* «puramente sintéticos» y métodos «puramente analíticos». Cabe recalcar que nuestro énfasis en la escuela sintética, a la hora de subrayar el uso de «pura» metodológico que aquí va a interesar, se debe a que, considerando los pasajes de Chasles y Hilbert, la aproximación sintética a la geometría enfatizaba la relevancia *tópica* de la misma, (mientras que el valor de los métodos analíticos, estaba más relacionado con su eficiencia a la hora de ampliar la clase de resultados).

Por lo tanto, el uso de «pura» que interesa aquí es este uso metodológico, tópicamente orientado, que encontramos, como «desplazamiento», en el contexto del par pura/mixta, y manifiesto en el caso del par analítico/sintético. Ahora bien, una vez presentados estos distintos usos de «pura», y habiendo aclarado cuál de ellos va a ser considerado en esta investigación, se plantea una inquietud razonable: ¿hay alguna relación entre ellos? Ciertamente hemos sugerido una relación entre un uso disciplinar y metodológico, que metafóricamente caracterizamos como «desplazamiento», por lo que la inquietud puede plantearse con respecto los usos disciplinar y metodológico, de un lado, y al uso asociado con el par pura/aplicada, del otro.

Responder a esta interrogante está fuera del alcance de esta investigación, pero una hay *hipótesis* que puede plantearse como «pendiente» de profundización, a saber: podría pensarse en el proceso que conduce a la imagen modernista de la matemática (en el sentido de Gray), los tres usos identificado tiendan a *colapsar*. Naturalmente, no podemos ofrecer evidencia para esta hipótesis, pero podemos explicitar su motivación: si podemos entender este proceso como un proceso de *formación de teorías* en el sentido de Ferreirós[57], donde, dicho proceso se caracteriza por la construcción de teorías matemáticas *universales*, donde todas las demás

[57]Véase el pasaje citado en la página 38.

teorías puedan ser representadas, y finalmente, esas teorías universales pertenecen a la *disciplinas puras* (teoría de conjuntos, aritmética, por ejemplo), entonces la confluencia de estas tres cosas, podría conducir a un *colapso* de los tres usos de «pura»[58].

En definitiva, al comienzo de este capítulo (página 14) se sugirió que «pura» podía entenderse como un *predicado* clasificaba métodos; esta forma de expresarse puede dar a entender que dicho predicado es, para decirlo en una jerga lógica, de *aridad uno*, y sin embargo ahora estamos en condiciones de conjeturar que este predicado unario puede analizarse en dos predicaciones: una que atañe a la *restricción tópica de los medios*, y otra que atañe al *valor* de los métodos puros. Ahora bien, como esta investigación se concentrará en una finalidad particular. –i.e. la demostraciones de teoremas, el análisis del predicado «pura» debe adaptarse a las demostraciones –pues en principio, no tenemos por qué suponer *a priori* que el predicado pueda aplicarse homogéneamente a las demás finalidades anteriormente introducidas[59]. La tarea que que los capítulos venideros abordarán entonces, consiste en primer lugar, en la elaboración (con detalle) de cómo aplicar el predicado «pura» a las demostraciones (esta es la tarea a ser llevada a cabo en el Capítulo 3); con resultado del trabajo en este capítulo, obtendremos una una idea más clara de cómo es que el predicado «pura» puede descomponerse en dos predicados más que denominaremos «conservación tópica» y «superioridad epistémica». Así pues, dedicaremos el Capítulo 4 a elaborar una caracterización pre-teórica del predicado «conservación tópica», mientras que el Capítulo 5 estará dedicado a una tarea análoga para el predicado «superioridad epistémica». A partir de las caracterizaciones pre-teóricas de ambos predicados, el Capítulo 5 finaliza con una caracterización pre-teórica de *demostración pura*. Finalmente, en el Capítulo 6 se aborda un modelo de solución/demostración pura presentado en Detlefsen and Arana (2011); dicho abordaje será realizado en «clave elucidatoria» a fines de subrayar cómo el modelo puede entenderse como una contraparte *teórica* para la caracterización pre-teórica

[58]Una hipótesis como esta queda subsumida dentro de las sugerencias para futuras investigaciones. Véase la Sección 7.2.1.

[59]Un abordaje más general de la pureza del método está fuera del alcance de esta tesis.

de demostración pura presentada en el Capítulo 5.

Capítulo 3

Demostraciones matemáticas: pureza del método y comparación entre demostraciones

The overwhelming majority of research papers in mathematics is concerned not with proving, but with reproving; not with axiomatizing, but with re-axiomatizing; not with inventing, but with unifying and streamlining; in short, with what Thomas Kuhn calls «tidying up».
G. C. Rota

Al final del capítulo anterior se sugirió que el predicado «pura» era un predicado de aridad uno, aunque el mismo podía ser analizado en dos predicados. Así mismo y en cuanto a lo que atañe específicamente a los *medios*, se observó que la *finalidad* con la que estos se empleaban era un factor relevante a la hora de entender la importancia de su pureza[1]. A este respecto se identificaron diversos fines de acuerdo a los cuales la discriminación purista de los medios se observaba relevante: definiciones, demostraciones, formación de teorías, eran ejemplo de ello. El presente capítulo aborda pues la finalidad específica de la que se ocupa la presente investigación, a

[1]Recuérdese por ejemplo, las palabras de Hilbert respecto a la importancia de la pureza geométrica cuando la finalidad de la investigación era proveer un *fundamento* para la geometría.

saber, la *demostración* de teoremas.

La noción de «demostración matemática» es una noción eminentemente *epistemológica*, puesto que en virtud de las mismas podemos incrementar nuestro conocimiento matemático[2]. Así pues, al indagar sobre la pureza de los medios empleados en demostraciones, nos enfrentamos a una cuestión doble: ¿cómo se explica que una demostración satisfaga una relación de *restricción tópica*? Y ¿en qué consiste el *valor* de una demostración pura, el cual la diferencia de una demostración impura? La primera interrogantes tiene, por decirlo de algún modo, una naturaleza *semántica*, en parte porque atañe a las condiciones para aplicar el predicado relacional «pura» a una demostración, pero sobre todo porque la relación misma es de naturaleza *tópica*. La segunda interrogante tiene, por otro lado, una naturaleza más bien *epistémica*, puesto que atañe al «valor agregado» que una demostración pura traería aparejado en relación a una demostración impura, el cual daría cuenta de por qué las demostraciones puras pueden llegar a ser valiosas, o si se prefiere, por qué una demostración pura sería –llegado el caso –, «preferible» a una demostración impura. Ambas cuestiones serán solamente planteadas en el presente capítulo (*Sección 3.2*), pues el abordaje específico de cada una de ellas se hará en los capítulos 4, 5 y culminarán en el Capítulo 6.

El presente capítulo, sin embargo, es una aduana fundamental para los próximos capítulos en virtud de que primero debemos señalar, aunque sea de un modo intuitivo, cuál es el «dominio» del predicado «pura» (*Sección 3.1*); en segundo lugar, vamos a plantear un contexto general donde las características semántica y epistémica de «pura» se presentan con naturalidad: la comparación entre demostraciones de un mismo resultado. Este será la temática de las secciones 3.2 y 3.3. Este contexto será fundamental para entender los capítulos siguientes.

[2]Naturalmente, sería un error sostener que es *únicamente* por medio de demostraciones que se adquiere conocimiento en matemáticas; no obstante, la noción de demostración seguramente sea de las que más ha recibido atención por parte de los filósofos de la matemática contemporáneos.

3.1. Las demostraciones matemáticas y el dominio del predicado «pura»

¿De qué objetos vamos a predicar la pureza demostrativa? La respuesta obvia es «de demostraciones», pero lo que no es obvio es qué se entiende por «demostración». La noción de *demostración matemática* ha recibido mucha atención por parte de filósofos, lógicos, informáticos y matemáticos durante el Siglo XX, pues si bien las *prácticas* demostrativas –i.e. la actividad distintivamente matemática de demostrar teoremas[3], es quizás tan antigua como la matemática misma, el *concepto* – en singular – de «demostración» es una invención reciente en la historia del pensamiento matemático. A menudo cuando filósofos y lógicos (especialmente) refieren a «el» concepto de demostración, lo que se tiene presente es la definición *lógica*, la cual puede encontrarse en los libros de texto de esta disciplina así como los textos de informática, y que más o menos reza de la siguiente manera:

Definición 3.1 (Demostración lógica)**.** *Sea* $\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \rangle$ *una secuencia de fórmulas de un lenguaje formal L, sea a su vez* Σ *un conjunto de fórmulas de L y* $\sigma_n \approx \sigma$*. Se dice que* $\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \rangle$ *es una* prueba *o* demostración *de* σ *a partir de* Σ *en el sistema deductivo SD (*'$\Sigma \vdash_{SD} \sigma$'*) si y sólo si, para todo* σ_i *(con* $1 \leqslant i \leqslant n$*) se tiene que*

1) $\sigma_i \in \Sigma$*, o*

2) σ_i *es un axioma, o*

3) σ_i *es el resultado de aplicar alguna regla de inferencia de SD a fórmulas de la secuencia cuyo subíndices son estrictamente menores que* i[4]*.*

---

[3]Vega Reñón (1990).

[4][Seoane (2000): 147 - 148]. Así formulada, la definición se adecua sólo a los sistemas deductivos «axiomáticos», pero es fácilmente a sistemas deductivos carentes de axiomas, tales como sistemas de deducción natural o cálculo de secuentes.

Esta definición de demostración es exclusivamente *sintáctica* pues caracteriza a las mismas como una secuencia de sentencias de un lenguaje[5]; por otro lado, esta definición estipula que dicho lenguajes es un lenguaje *formal* y no natural, razón por la cual una demostración es un conjunto de fórmulas al que pertenecen todos los elementos de la secuencia $\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \rangle$[6]. Finalmente, las distintas categorías a los que los elementos de la secuencia $\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \rangle$ pertenecen están definidas sintácticamente: la *última* fórmula de la secuencia ($\sigma \approx \sigma_n$) es la «conclusión» de la demostración; σ_i es un «axioma» sólo si σ_i es trivialmente deducible en SD –i.e. se trata de una deducción de una sola línea; así mismo, σ_i es un «paso» si, por un lado, no es la conclusión –i.e. $\sigma_i \neq \sigma$, pero es deducida a partir fórmulas de la secuencia $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_k \rangle$, con $k < i$ por medio de alguna *regla de inferencia* de SD. Finalmente, σ_i es una «hipótesis» si pertenece a Σ pero no pertenece a ninguna de las otras categorías[7].

La definición lógica de demostración ha sido sometida de forma reiterada a diversas críticas desde diversas perspectivas filosóficas que enfatizan la *práctica matemática*, las cuales no podemos sumariar aquí; pero una forma muy comprimida de resumirlas es diciendo que esta definición no es satisfactoria a la hora de dar cuenta de las distintas prácticas demostrativas que pueden localizarse en la historia

[5]En virtud de esto, también podemos denominar a esta definición «concepto sintáctico» de demostración.

[6]En virtud de ser el lenguaje de la demostración un lenguaje formal, muchas veces también se hace referencia a esta definición como la definición «formal» de demostración. En la literatura suele asociarse «formal» con el empleo de lenguajes formales, por lo que la distinción entre demostración «formal» y demostración «sintáctica» estarían colapsando. Así por ejemplo, [Larvor (2012): 717] y [Dawson (2015): 1] consideran *in*formales a las demostraciones formuladas en un lenguaje natural. Sin embargo, es factible encontrar también, otras interpretaciones alternativas de «formal» en relación a la demostraciones, las cuales, junto con la recién mencionada, confluyen en la figura de Hilbert (aunque en diferentes períodos) [LassalleCasenave (2019): 114 - 115]. Así pues, puede encontrarse en el contexto del llamado *Programa de Hilbert* para fundamentos de matemática, una interpretación de «formal» en el sentido sintáctico recién referido; por otro lado, en el período de los fundamentos de geometría, puede encontrarse según Lassalle Casenave, una interpretación de demostración «formal» como «dispensabilidad de diagramas» geométricos (Cfr. [Tennant (1986): 304]). Por otro lado, podría decirse que las demostraciones (en el contexto de la axiomática moderna) son también «formales» en virtud de que los axiomas sólo afirman *relaciones* entre objetos (de la teoría), pero no se pronuncia sobre qué son específicamente estos objetos.

[7]Ver [Kleene (1974): 83]

de la matemática[8]. O expresado de otra manera: definición lógica de demostración no es aceptada como un *análisis lógico* exitoso de cierta noción (a especificar)[9] o si se prefiere no agota todo lo que en la práctica atañe al valor epistémico de las demostraciones. Una forma de resumir muy apretadamente la insuficiencia analítica de la definición lógica de demostración es diciendo que:

> [. . .] there is much more to a proof than merely establishing step by step that a certain proposition follows from some given ones, in a perfectly unobjectionable way[10].

Este rechazo conceptual de la definición habilita una apertura respecto a qué discursos se aceptan como demostraciones por derecho propio[11], pues ahora podemos aceptar como demostraciones tanto aquellas que satisfacen la definición lógica, como aquellas (la mayoría!) que no la satisfacen.

Así pues, podemos ampliar la noción de demostración de forma tal que comprenda también a la *argumentación matemática* que no satisface la definición lógica de demostración. Aquí «argumento demostrativo matemático» puede emplearse de un modo más general que «demostración lógica» para abarcar ambos tipos de discursos; es decir, dentro del universo de la argumentación matemática tenemos tanto a las demostraciones «lógicas» como a las que no lo son[12].

Para concebir a las demostraciones como argumentos puede en principio, seguirse al menos dos caminos: identificar una «noción intuitiva» o «pre-teórica» de demostración, en cuyo caso tenemos, por un lado, las instancias del concepto

[8]Para un resumen genealógico del surgimiento de este tipo de énfasis (y las críticas a la filosofía «tradiciona» de la matemática puede consultarse la introducción a Mancosu (2008) y [Ferreirós (2015): §2.2.].

[9]Cfr. [LassalleCasenave (2019): 117 y ss.], Seoane (2008).

[10][Ferreirós (2015): 24].

[11]Es decir, el concepto de «demostración» se vería ampliado en su extensión.

[12]Siguiendo a José Seoane (comunicación personal), podríamos decir que cuando admitimos dentro de nuestro concepto de «demostración» a las demostraciones no lógicas –i.e. que no satisfacen la definición lógica de arriba, podemos «recuperar» una noción de demostración como «argumento».

lógico y las instancias del concepto pre-teórico de demostración[13]. Alternativamente, podemos aproximarnos argumentativamente a las demostraciones matemáticas empleando modelos de argumentos extraídos de lo que forma amplia suele denominarse «teoría de la argumentación»[14], o así mismo, también recuperando la idea aristotélica de «retórica» y «dialéctica»[15].

Aquí se va a entender «demostración» como «argumento matemático» admitido como *correcto*, *sólido*, *válido*, o *riguroso* en cierto momento o dentro de cierta práctica matemática identificable, que se acepta como ofreciendo una «justificación maximal» de la proposición teoremática –i.e. una argumentación que difiere en su exigencia justificacional de la argumentación relativa a la defensa de un axioma, por ejemplo. En este sentido amplio de «demostración» es que podemos considerar el dominio de aplicación del predicado relacional «pura», siendo el contexto de la práctica matemática que sea el caso la que determine si las demostraciones en cuestión satisfacen o no la definición lógica de arriba[16]. Una putualización extra es conveniente aquí: los argumentos matemáticos (demostraciones en sentido amplio) que van a ser consideradas aquí son *particulares*; esto es, se tratarán de demos-

[13]Véase Seoane (2008); el contraste entre conceptos «teóricos» y conceptos «pre-teóricos», el cual identifica una diferencia en el estatuto epistémico de ambos conceptos, donde el primero es más «riguroso» que el segundo (de acuerdo a cierto estándar de rigor previamente aceptado), puede consultarse en [Seoane (2017): 1407]. Así mismo, para un esfuerzo analítco en consonancia con la identificación de un concepto «pre-teórico» de demostración puede consultarse Wagner (1987), Smith (2009), Hamami (2014), Prawitz (2012).

[14]Van Bendegem (2005) por ejemplo, emplea el modelo de Toulmin.

[15]Casanave (2008), Casanave (1999), LassalleCasenave (2019).

[16]Una manera de circunscribir el concepto de demostración allende los límites de la definición lógica es apelando a a un espectro de la «práctica matemática», orientada específicamente a la demostración de teoremas. Sin embargo, hasta donde alcanza nuestro conocimiento, no parece advertirse una concepción a la vez clara y estandarizada de «práctica matemática», sino más bien una pluralidad de aproximaciones o énfasis respecto qué es, o cómo identificar una «práctica matemática»([Giardino (2017): §4]). Un trabajo pionero en esta dirección es el de Kitcher ([Kitcher (1984): Caps. 4 y 5]), quien caracteriza una práctica matemática por medio de una quintupla $\langle L, M, Q, R, S\rangle$, donde *L* es un *lenguaje*, *M* es un conjunto de puntos de vista filosóficos o *meta-matemáticos*, *Q* es un conjunto de *preguntas* consideradas importantes, *R* es un conjunto de *razonamientos* aceptados, y *S* es un conjunto de *enunciados* aceptados. Esta quintupla de Kitcher ha sido aumentada por Kerkhove y van Bendegem (Van Bendegem and Van Kerkhove (2004)). Cabe destacar la adición de una «comunidad» que «acepta» los razonamientos, las preguntas, etc.., así como modificada por Ferreirós([Ferreirós (2015): §2.3, Cap. 3]). Cuatro respuestas a esta cuestión identifica Giardino: la respuesta *situada*, *semiótica*, *epistemológica* y *pragmática*([Giardino (2017) 24 - 25)]).

traciones que pueden encontrarse en la historia de la matemática, en contraste con demostraciones «posibles».

Aquí no se pretende dar una respuesta conceptualmente sustantiva acerca de qué es una demostración (o un a práctica demostrativa), en parte porque la pregunta, tomada seriamente excede los límites de esta investigación y más bien nos contentaremos con plantear alguna aclaración funcional sobre qué discursos serán admitidos como demostraciones; pero en parte también porque en el Capítulo 6 se presentará un modelo para el estudio de pureza, el cual define nociones como «problema», «agente» y tipos de «solución», siendo esto último aquello que comprende a las demostraciones. Nuestra aclaración funcional de a qué se le va a aplicar el predicado «pura» es la siguiente:

[**Dominio de «pura»**]

> «pura» (o su negación) podrán ser cualquier discurso *argumentativo* matemático *particular* que satisfaga o no la definición lógica de demostración, en tanto que sea aceptada como *solución* (total o parcial) por un *agente* (o multiplicidad de agentes) para un *problema* matemático.

Como las nociones de *solución*, *agente* y *problema* serán retomadas en el Capítulo 6, vamos a dedicar la siguiente sección (3.2) a explorar uno de esos aspectos de las demostraciones matemáticas que el concepto lógico de demostración, siguiendo la sugerencia de la cita de Ferreirós en la página 50, «deja afuera» pero que es muy importante para esta investigación: el análisis comparativo entre demostraciones.

3.2. Comparación entre demostraciones y la aplicación del predicado «pura»

¿Cómo podemos aplicar el predicado «pura» a las demostraciones? Al final del capítulo anterior se sugirió que se trataba de un predicado de aridad uno, pero que podíamos descomponer el mismo en dos predicamos. Empecemos con el *relación* de «restricción tópica»;si tenemos presente la cita de Frege[17] de la página 26, en la cual Frege objetaba que «*purely arithmetical theorems should rest on geometrical axioms*», entonces podemos observar que los *relata* serían la conclusión de una demostración –i.e. el teorema, y los axiomas empleados en la misma. Así pues, según Frege los axiomas serían «impuros» en relación al teorema. Sin embargo, como no pretendemos *a priori* restringirnos a axiomas (pues no siempre las demostraciones son axiomáticas), podemos ampliar la observación de Frege y decir (informalmente): los *relata* son la conclusión de una demostración y la «trama argumental»[18] que conduce de las hipótesis o supuestos a la conclusión[19]. Parece razonable entonces, llamar a esta relación *Conservación Tópica* (**CT**)[20]. De esta manera, podemos decir ahora que el predicado **CT** se aplica a los pares conformados por *conclusiones* (típicamente enunciados) y *demostraciones* de esos enunciados[21].

Que la «conservación» entre teorema y demostración sea «tópica» quiere decir que la «restricción tópica» es satisfecha; dicho de otro modo, la conservación tópica vendría a ser la descripción positiva de la «restricción». Así mismo, en la cita de

[17]De todas las citas presentadas en el Capítulo 2, la de Frege es la que más directamente hace referencia a las demostraciones, y por ello la tenemos presente aquí.

[18]Vega Reñón (1990).

[19]La definición 3.1 permite separar tajantemente una cosa de la otra, pues la conclusión es la última fórmula de la secuencia.

[20]Está expresión es empleada por Detlefsen (2008).

[21]Si entendemos esta relación como un *par ordenado*, surge una interrogante respecto a la «dirección» de la relación ¿Es la demostración «conservativamente tópica» *respecto* a la conclusión, o es la conclusión «conservativamente tópica» *respecto* de la demostración? ¿Se trata de una relación *simétrica*? Estas preguntas no atienden simplemente al interés en dar una caracterización *formalmente* precisa del predicado «pura», sino que esconden una interrogante semántica que abordaremos recién en el Capítulo 4.

Frege también se dice que la demostración de un teorema aritmético por medios de axiomas aritméticos es *prioritaria* respecto a una demostración de un teorema aritmético a través de axiomas geométricos. Es decir, una demostración «pura» es superior a una que no lo es, y en tal sentido «pura» puede entenderse como un criterio que permite *comparar demostraciones* desde una perspectiva netamente *epistémica*[22].

Estos dos aspectos de la pureza demostrativa –i.e. la *Conservación Tópica* y la *Superioridad Epistémica*, las cuales ya estaban implícitamente sugeridas en el Capítulo 2[23], son a nuestro juicio las características más identitarias de la pureza demostrativa[24]. Lo sostenido en los párrafos anteriores sugieren pues, este doble aspecto del predicado «pura»: por un lado, se decía que los *relata* de la relación de *conservación tópica* eran demostraciones y teoremas, la cual –como su nombre lo indica– se trata de una relación *semántica*; por otro lado, tenemos un aspecto *epistémico* según el cual una demostración pura se compararía con las demostraciones impuras en términos de una suerte de «superioridad epistémica»[25].

Así mismo, la *aplicabilidad* del predicado «pura» a demostraciones implica (naturalmente) que éste permite discriminar o clasificar demostraciones. En este punto no resulta baladí aclarar lo obvio: si el predicado va a clasificar demostraciones, entonces una demostración pura es una demostración *distinta* de una demostración impura. En este sentido, la superioridad epistémica parece ser la caracteristica que más netamente coloca a la pureza como una suerte de *criterio comparativo* entre demostraciones[26], pues como Frege sugería, una demostración «puramente aritmé-

[22]Este aspecto *epistémico* de la pureza será retomado en el Capítulo 5

[23]Recuérdese que se había identificado un uso de la expresión «pura» en un sentido metodológico, a la vez que se caracterizaba semánticamente –i.e. como una restricción *tópica* de los medios.

[24]Específicamente, ambas características serán la *condición sustantiva* de la noción intuitiva, o pre-teórica de demostración pura. Véase Capítulo 1 (secciones 1.2 y 1.3), Capítulo 4 y Capítulo 5.

[25]En este momento las expresiones «conservación tópica» y «superioridad epistémica», son sólo convenientes etiquetas para referir a estos dos aspectos de la pureza demostrativa. Recién en los capítulos 4 y 5 avanzaremos hacia una caracterización intuitiva, mientras que en el Capítulo 6 presentaremos un modelo que permita interpretarlas mejor.

[26]En [Dawson (2015): 6] se introduce explícitamente la pureza demostrativa como un «motivo»

tica» (de un teorema aritmético) es más valiosa que una demostración impura del teorema. Así pues, una demostración pura es epistémicamente «superior» en comparación con otra demostración (impura).

Sin embargo, una segunda reflexión puede sugerir que la relación de conservación tópica (entendida vagamente como ausencia de nociones «ajenas») entre demostración y teorema, no es absolutamente independiente del problema de la *identidad* entre demostraciones. Podríamos pensar en un *criterio de adecuación* para la relación **CT** donde la cuestión de la identidad de demostraciones es fundamental. Digamos que tenemos una demostración D de ϕ que es tópicamente impura –i.e. no es conservativamente tópica respecto al tópico de ϕ, pero donde esos elementos tópicamente «ajenos» puedan ser considerados *sólo una redundancia dispensable* en D; entonces, si podemos «re-escribir» D como D^*, donde D^* es una versión más elemental de D –i.e. sin dichos elementos «redundantes», entonces, podríamos decir que D^* es una demostración tópicamente pura de ϕ[27]. Ahora bien, si los concepto «ajenos» en D son en algún sentido «dispensables», entonces bien podríamos preguntarnos si D y D^* son demostraciones sustantivamente distintas, es decir, ¿altera la *identidad* de la demostración la eliminación de los conceptos *ajenos*, o D_* no es más que una re-escritura de D? Así pues, si sostenemos que D y D^* son *distintas* demostraciones de ϕ, entonces la relación de conservación tópica estaría efectivamente discriminando, o clasificando demostraciones; pero si sostenemos que D y D^* son las «misma» demostración, entonces la relación de conservación tópica *no* estaría discriminando entre demostraciones, y al fin de cuenta D es una demostración *pura* de ϕ (aunque esto sea mejor evidenciado por D^*)[28]. Así pues, parece que si la relación de conservación tópica va a *discriminar* demostraciones, entonces la diferencia tópica entre demostraciones debe contar siempre como una diferencia sustantiva.

para volver a demostrar un teorema, aunque en esta investigación hablaremos de «criterio comparativo» en vez de «motivos» (Véase la página 113).

[27]Sería pura, al menos, en tanto carece de los conceptos «ajenos» identificados en D.

[28]Kahle and Pulcini (2017).

Puestas así las cosas, parecería que ambas características –i.e. conservación tópica y superioridad epistémica, permitirían abordar el estudio de las demostraciones puras como un capítulo dentro de una indagación más general en un *análisis comparativo entre demostraciones*. Hasta donde nuestro conocimiento alcanza, no hay en la literatura especializada un abordaje explícito de un programa de investigación orientado hacia la comparación entre demostraciones (de un mismo resultado). Pero tomando una sugerencia de Dawson[29] pueden identificarse dos preguntas fundamentales para la elaboración de u programa así: ¿cuándo dos demostraciones de un mismo resultado son la *misma*? Y ¿qué *criterios* comparativos pueden tener interés en matemáticas? [30] En el párrafo anterior vinculamos la conservación tópica con la interrogante sobre l identidad entre demostraciones, mientras que la superioridad epistémica la asociamos con la interrogante por los criterios comparativos entre demostraciones. En la próxima sección (así como en el Capítulo 4) ahondaremos un poco en la pregunta por la identidad entre demostraciones y su relación con la conservación tópica. Por otro lado, en el Capítulo 5 abordaremos la superioridad epistémica como *un* criterio comparativo entre demostraciones.

3.3. Identidad entre demostraciones: conceptos y estrategias argumentales

¿Cuándo dos demostraciones son la misma? ¿Cuándo dos demostraciones son diferentes? Ambas preguntas parecen ser dos caras de la misma moneda lógica, aquella que atañe a las *condiciones de identidad* de, en este caso, demostraciones. Prawitz formula el problema de hallar las condiciones de identidad para demostraciones, en

[29][Dawson (2015): i].

[30]Dawson no plantea exactamente así sus interrogantes, pues las mismas tienen una orientación marcadamente pragmática. La primera de ellas pregunta cuándo los *matemáticos juzgan* que dos demostraciones son las mismas o son diferentes, mientras que la segunda interroga por cuáles son los *motivos* que conducen a presentar una nueva demostración par un resultado ya demostrado.

el contexto de la *Teoría General de la Prueba*, de la siguiente manera[31]:

> *The representation of proofs by formal derivations*. In the same way as one asks when two formulas define the same set or two sentences express the same proposition, one asks when two derivations represent the same proof; in other words, one asks for identity criteria for proofs or for a «synonymity» (or equivalence) relation between derivations[32].

Prawitz coloca la pregunta por las condiciones de identidad entre demostraciones a la par de las condiciones de identidad entre el significado entre sentencias (sinonimia), y así como en este último caso se distingue entre las unidades lingüísticas que poseen significado (sentencias de un lenguaje, por ejemplo), y *el* significado que las mismas expresan (digamos, la «proposición»), en la cita de Prawitz se distingue entre «derivaciones» (o «representaciones» de demostraciones) y las demostraciones mismas, donde las primeras son instancias de la definición lógica de demostración dada más arriba[33]. En tal sentido, la formulación que Prawitz hace del problema

[31]Prawitz coloca a la pregunta por las *condiciones de identidad* entre demostraciones dentro de los problemas más importantes de la *Teoría General de la Prueba* Prawitz (2018). La expresión «Teoría General de la Prueba» la introdujo Prawitz en Prawitz (1973) para distinguir su programa del programa de teoría de la prueba propuesto por Hilbert en el contexto del *Programa de Hilbert* para la fundamentación de la matemática, el cual Prawitz denomina «programa restringido». En Hilbert el programa es «restringido» en dos sentidos: las demostraciones no se convierten en objetos de investigación en sí mismas, sino con la finalidad de demostrar la consistencia de teorías matemáticas formalizadas (Hilbert (1996)); mientras que por otro lado es «restringido» en cuanto a los métodos empleados, los cuales deben ser *finitistas* (véase Prawitz (1973) y Prawitz (2018); cfr. Thiele (2003)). El programa de Prawitz por su parte, es «general» en el sentido de que no supedita el estudio de las demostraciones a verificar la consistencia de teorías, así como en el sentido de que no restringe sus métodos a los métodos finitistas.

[32][Prawitz (1971): 237].

[33]El concepto de *demostración* y más precisamente, la caracterización de qué es una *inferencia válida* es el problema fundamental del programa de Prawitz, respecto del cual en la actualidad aún continua desarrollando (véase Prawitz (2018)). No podemos detenernos aquí en tan extensa discusión pero de todas formas tres observaciones conviene hacer aquí: en primer lugar, la noción de *inferencia válida* de Prawitz difiere del concepto de *consecuencia lógica* de Tarski en virtud que lo primero no consiste primariamente en una relación *semántica* (teórico modélica) entre sentencias («seguirse de»), sino en una «transición» entre aserciones o juicios ([Prawitz (2015): 67]), es decir, en vez de concebir a la demostración como algo que nos permite verificar la verdad de un juicio, Prawitz enfatiza el aspecto epistémico de la misma (ver Prawitz (2012)); en segundo lugar, las inferencias válidas se explican *grosso modo* en virtud del significado de ciertas expresiones (las constantes lógicas), el cual se manifiesta fundamentalmente en las *reglas de introducción* de las mismas en un sistema deductivo; y en tercer lugar, dicho significado es *lingüístico*, por lo que las demostraciones son construcciones (en el sentido intuicionista) cuyas representaciones son *derivaciones*. Esto último es de particular importancia para la presente investigación, pues son a las derivaciones a las que se le aplica el criterio de identidad.

parece presuponer algo que hemos rechazado en la sección anterior, a saber, que las demostraciones tengan que estar presentadas como instancias de la definición lógica de demostración[34]. Por esta razón es que lo que nos es relevante de esta cita es precisamente la analogía entre el problema de las condiciones de identidad para demostraciones y la condiciones de identidad para el significado, pues, tomando en serio dicha analogía la identidad entre demostraciones consistiría en una identidad de carácter *intensional*[35].

¿Cómo puede entenderse la *identidad intensional*? Siguiendo a Troelstra podemos decir: dos demostraciones son intencionalmente iguales si las mismas *nos son dadas* como el mismo objeto[36]. Troelstra dice a este respecto que

> [t]he very fact that considering objects from a strictly intensional point of view means carrying along *all* information about these objects, that is, we are not permitted to abstract from any of their properties, clearly indicates that, in general, strict intensional equality is not mathematically useful[37]

Si la identidad intensional entre demostraciones comprehende que la información por ambas provistas sea *toda* ella la misma, entonces no parece haber una diferencia práctica entre decir que las mismas «nos son dadas como la misma demostración» y decir que «son literalmente la misma demostración»[38]; en tal caso, la identidad intensional entre demostraciones no sería una relación matemáticamente interesante.

[34]En el mismo ensayo, Prawitz también plantea un respuesta tentativa a esta cuestión: «Dos derivaciones representan la misma demostración si y sólo si estas son equivalentes» [Prawitz (1971): 257]. La repuesta de Prawitz (así formulada) puede ser pensada como un *tesis* –en el sentido de Seoane (2017)– en la cual afirma que un concepto pre-teórico (identidad de demostraciones) es *elucidado* por medio de un concepto teórico riguroso (equivalencia entre derivaciones). Una dirección similar parece adoptarse en [Došen (2003): 480].

[35]Nótese de paso que la «tesis de Prawitz» estaría afirmando que una identidad intensional como la identidad entre demostraciones sería capturable por medio de un criterio extensional como una relación de equivalencia (donde ésta se caracteriza como «igual forma normal»). Cfr. [KREISEL (1971): 115 - 117], [Troelstra (1975): 317] para críticas esta pretensión de Prawitz.

[36][Troelstra (1975): 307]. Es importante tener presente que estas observaciones de Troelstra están situadas en un contexto *consstructivista* de la matemática. Precisamente, en este artículo Troelstra indaga en la noción de «identidad no-extensional» entre objetos, desde un punto de vista *intuicionista*.

[37][Troelstra (1975): 308].

[38]*Íbid.*, [Cellucci (1980): 14].

El problema parece radicar en que la identidad intensional involucra tener presente *toda* la información provista en las demostraciones, y dado que dicha información está representada por medio de derivaciones –i.e. por la sintaxis, entonces parece que la identidad entre demostraciones ocurre cuando estamos *literalmente* ante la misma demostración[39].

Esta situación sería aporética en dos sentidos: por un lado, y como sugiere Troelstra, la identidad entre demostraciones sería matemáticamente inútil, pero por otro lado, *cualquier* diferencia (in incluso sintáctica) entre demostraciones implicaría que las demostraciones sean distintas, por más *triviales* que esas diferencias puedan ser (pues no podríamos abstraer ninguna característica de ellas). De lo contrario, la pregunta por cierta condición o criterio general por medio del cual verificar que estamos en presencia de demostraciones distintas para un mismo teorema, puede resultar un tanto baladí o innecesaria desde un punto de vista práctico, pues las demostraciones podrían ser juzgadas como diferentes desde una multiplicidad de aspectos o características de distinta naturaleza.

En tal sentido, lo que diferencie a las demostraciones estaría en función de qué aspecto interese ponderar en cierta ocasión. Sin embargo, una actitud así de liberal tiene un límite intuitivamente irreprochable: no cualquier diferencia es relevante, o si se prefiere, de entre la multiplicidad de aspectos en los que las demostraciones pueden diferir, están los aspectos triviales. Si se piensa en demostraciones informales, por ejemplo, las mismas se llevan a cabo en lenguajes históricos o naturales (inglés, alemán, etc.), pero difícilmente esta diferencia acredite interés matemático o filosófico [40]. Ante esta situación lo mejor es reformular nuestra pregunta del siguiente modo: ¿Cuándo dos demostraciones son *sustantivamente* distintas? O si se prefiere ¿Cuándo son *sustantivamente* las mismas? La intuición de que las diferencias entre demostraciones deben ser no triviales si su comparación reviste algún

[39][Troelstra (1975): 318]

[40][Seoane Seoane (2018): 434].

interés (filosófico o matemático), es lo que alienta la introducción del adverbio «sustantivamente» en la formulación de la pregunta. Es decir, en vez de preguntarnos simplemente «cuándo son diferentes» –la cual comprende las diferencias matemáticamente irrelevantes– , lo que nos preguntamos es cuándo lo son «sustantivamente».

Además de la reformulación sugerida para nuestra pregunta, un segundo aspecto de la misma conviene tener en cuenta: la pregunta sugiere una distinción entre la «trama argumental»[41] de la demostración –la cual conecta las hipótesis con la conclusión, aunque no incluye esta última–, por un lado, y la conclusión (teorema) por otro. Dicho de otra manera, cuando hablamos de demostraciones distintas para un *mismo* resultado, lo que difiere es la «trama argumental», no la conclusión. Así pues, nuestra pregunta no sólo interroga sobre la identidad/diferencia de las tramas argumentales, sino que también interroga sobre la identidad/diferencia de la conclusión de esas tramas[42]. Esto introduce, por decirlo retóricamente, una «cota» a aquello que hace diferente a las demostraciones: esta diferencia no debería implicar que las conclusiones de las mismas sean distintas. Esta precaución hace sentido desde el momento en que recordamos que en muchas ocasiones el *enunciado* de las distintas demostraciones no es precisamente el mismo en cada caso, aunque las consideremos como demostraciones del mismo teorema.

Las observaciones (y precauciones) de arriba se hacen manifiestas cuando pensamos en demostraciones informales[43], por lo que en lo que resta de este capítulo así como en el próximos, vamos a considerar algunos ejemplos de tales tipos de demostraciones. Para ello podemos considerar la sugerencia de Dawson[44] de que las demostraciones son diferentes si difieren en los *conceptos* o *estrategias* que

[41]Vega Reñón (1990).

[42]Evidentemente demostraciones con distintas conclusiones *son* efectivamente demostraciones distintas.

[43]Por lo pronto, es claro que desde un punto de vista sintáctico, demostraciones con distintos *enunciados* como conclusión ya son demostraciones de distintos resultados.

[44][Dawson (2015): 1].

emplean[45]. Sin embargo, quizás ocurra en diversas ocasiones que las diferencias estratégicas conduzcan a diferencias conceptuales y vice versa; en el primer caso simplemente porque algunas estrategias (o técnicas) están fuertemente comprometidas con ciertos conceptos[46], o bien porque algunas diferencias conceptuales conducen a diferencias estratégicas[47].

Para ilustrar las diferencias entre demostraciones en términos de estrategias o conceptos, conidérese como ejemplo el siguiente teorema:

Teorema 3.1 (Suma de enteros)**.** $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Este es un teorema bastante simple y puede ser demostrado de muchas maneras; lo que interesa ahora es presentar algunas demostraciones atendiendo a sus diferencias estratégicas o eventualmente conceptuales, pero especialmente es conveniente tener presente que la conclusión es *literalmente* la misma en todas ellas, es decir, el enunciado que funge como conclusión es siempre 3.1.

Demostración de 3.1 (por inducción). Sea $n = 1$, es trivial: $1 = 1^2$. Asumiendo, por hipótesis inductiva que el resultado vale para n, se tiene que $1+3+...+(2n-1) = n^2$. Luego, $1 + 3 + ... + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = n^2 + (2n + 1)$. Es decir, $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Luego $1 + 3 + ... + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$, que es

[45]No conocemos una caracterización general de «estrategia demostrativa», aunque quizás podría decirse que se trata de la «concepción y ejecución» de la demostración [Seoane (2018): 345]. Chartrand et al. (2017) es una interesante fuente de estrategias demostrativas. Por otro lado, las diferencias conceptuales son más sencillas de enunciar: la presencia de ciertos conceptos en un demostración y su ausencia en otra.

[46]Tal es el caso por ejemplo, del método de exhaución, el cual necesariamente involucra algún concepto de *aproximación sucesiva infinita*.

[47]Tal es el caso por ejemplo, con el concepto de *número* cuando comparamos una demostración «constructiva» con una demostración «no constructiva»; así por ejemplo, una demostración clásica (por contradicción) de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ requiere que se acepte una definición de «x es irracional» como $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Sin embargo, un constructivista podría desetimar que esta estrategia en favor de una demostración «directa», sin apelar directamente a la crítica «lógica» respecto al principio de tercero excluido, sosteniendo «x es irracional» significa que hay una *regla* (o «rutina»), la cual permite computar (al menos en principio). Es decir, la diferencia estratégica estaría enrraizada en una divergencia respecto al significado de «x es irracional». Véase Bishop (1973) para una demostración «constructiva» de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

lo que había que demostrar[48]. □

Demostración de 3.1 (por método de Gauss).

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = S \tag{3.1}$$

$$(2n - 1) + ... + 5 + 3 + 1 = S \tag{3.2}$$

Luego, sumando por columnas, se tiene que

$$2n + 2n + ... + 2n = 2S \tag{3.3}$$

Luego, dado que se tiene n sumandos, $2n \times n = 2S$ o sea $n^2 = S$[49]. □

Las demostraciones por inducción 3.1 y por el método de Gauss se diferencian claramente desde el punto de vista estratégico, como su nombre lo indica. Así mismo también se diferencian desde el punto de vista conceptual, dado que la demostración por inducción emplea precisamente el concepto de inducción (o de conjunto inductivo), mientras que el procedimiento de Gauss no supone tener presente dicho concepto. Ahora bien, considérese la siguiente demostración.

Demostración de 3.1 (por «escalera»). Véase la Fig. 3.1. □

Esta demostración se distingue de la gaussiana y la inductiva en cuanto a el *recurso expresivo*[50] gráfico, específicamente, no es una demostración exclusivamente lingüística. Sin embargo, la misma no parece ser más que una representación visual del procedimiento gaussiano (donde la inversión ocurre en la Fig. 3.1 según se «suba o se baje» por la escalera resaltada en la línea roja). En este sentido podemos decir que la diferencia expresiva entre esta demostración «por escalera» y la demostración gaussiana no es *sustantiva*, mientras que la diferencia estratégico-conceptual entre ellas y la demostración inductiva es sustantiva. Por lo tanto, las demostraciones gaussiana y por escalera son *sustantivamente iguales*, mientras que las mismas son

[48][Seoane (2018): 433].
[49][Seoane (2018): 433].
[50]Seoane (2018).

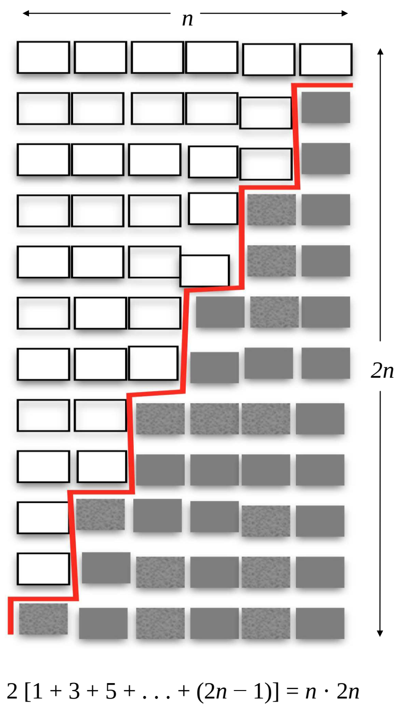


Figura 3.1: Demostración de 3.1 por «escalera» extrída de Seoane (2018).

sustantivamente distintas respecto a la demostración inductiva.

Pero para despejar el terreno pensemos ahora en otra demostración de 3.1 que también emplee el concepto de inducción pero no sea una demostración *inductiva*, así podemos resaltar sólo la diferencia estratégica.

Demostración de 3.1 (por contradicción). Asumamos, contrariamente a 3.1, que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) \neq n^2$$

para algún entero positivo n, dado que los enteros positivos están bien ordenados, entonces hay un entero positivo n que es el *menor* número tal que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) \neq n^2$$

Denotemos a este entero positivo con m. Por lo tanto

$$1 + 3 + 5 + ... + (2m - 1) \neq m^2, \tag{3.4}$$

mientras que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2,$$

para todo entero positivo impar n con $1 \leqslant n < m$. Dado que $1 = 1^2$, se sigue que $m \geqslant 3$; luego podemos escribir $m = k + 1$, donde $1 \leqslant k < m$.

$$1 + 3 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 1).$$

Sin embargo, observese que

1 + 3 + 5 + . . . + (2m - 1) = 1 + 3 + 5 + . . . + (2(k + 1) - 1),

= 1 + 3 + 5 + . . . + (2(k - 1)) + (k + 1),

= k^2 $+ (2k + 1)$,

$= (k + 1)^2$,

$= m^2$

lo cual produce una contradicción entre (3.4) y (3.3). □

Desde un punto de vista estrictamente estratégico, las demostraciones por inducción y contradicción son distintas, pues la ejecución de ambas demostraciones es distinta. En el caso de la demostración inductiva lo que hacemos es verificar que la propiedad identidad se da para el caso base ($n = 1$), y luego empleamos la hipótesis inductiva para luego demostrar que la identidad también vale para $n + 1$. Por otro lado, en una demostración *por contradicción* lo que hacemos es asumir por hipótesis que la conclusión (el enunciado 3.1 en este caso), es falso (tiene contra-ejemplo), para deducir a partir de allí una contradicción (entre (3.4) y (3.3), para el caso). Por otro lado, desde un punto de vista conceptual es claro que el concepto de inducción es empleado en ambas demostraciones. Para el caso de la demostración por inducción, el concepto fundamental está claro, pero ocurre que en la demostración por contradicción el concepto de inducción *también* resulta ser fundamental, pues la existencia del hipotético contra-ejemplo del cual se deduce la contradicción ((3.4)), se infiere inmediatamente del hecho de que los números enteros estén bien ordenados.

Una pregunta interesante aquí es si en efecto hay alguna diferencia *sustantiva* entre las demostraciones *por inducción* y *por contradicción* ofrecidas arriba. En nuestra opinión, la respuesta a esta interrogante no es evidente, pues: en primer lugar es claro que las estrategias son distintas, pero al mismo tiempo, ambas demostraciones comparten el concepto de *inducción* y en ambas demostraciones el rol del mismo es fundamental. En segundo lugar, surge la cuestión de la *prioridad* que le otorguemos al aspectos estratégicos o a las conceptuales, pues, al ser distintas las estrategias en una y otra demostración, esta diferencia podría ser ya suficiente para decir que se trata de distintas demostraciones –si es que le damos prioridad a ese aspecto, mientras que –en principio–, solo si depositamos sobre el aspecto conceptual aquello que es «sustantivo» en la información presentada en las demostraciones, es que podríamos conjeturar que ambas demostraciones son «sustantivamente semejantes». Por último, nuevamente surge la cuestión respecto a si es por medios *teórico-demostrativos* o no, que vamos a formular las diferencias entre las demostraciones. Un abordaje teórico-demostrativo tendería a enfatizar la búsqueda de una «convertibilidad» entre demostraciones y, a este respecto, el ejemplo expuesto puede resultar engañosamente simple, pues en ambos casos las estrategias argumentales son de naturaleza netamente *lógica* (por lo que la cuestión deviene en la transformación de esquemas argumentales lógicos); sin embargo, en demostraciones como la de incompletud, Gödel plantea un «idea y vuelta» entre el plano teórico y meta-teórico, siendo esta la estrategia central para su demostración. ¿es la misma una estrategia «reducible» a esquemas argumentales lógicos? Más aún ¿es la noción de «estrategia argumental» solo un modo de decir «esquema argumental»?[51]

Sin embargo, para esta investigación las diferencias conceptuales son particularmente relevantes, pues hemos sugerido asociar el «tópico» con los conceptos presentes en demostraciones y teoremas. Así mismo, se sugirió un «criterio de adecuación» para la relación de *conservación tópica*, basado en que la diferencia tópica entre una demostración conservativamente tópica y otra que *no* es conservativamente tópica, el cual implicaba que se trataban de demostraciones *distintas* (página 55). Supongamos que la demostración por inducción es una demostración conservativamente tópica –i.e. pura (esto resulta de lo más natural si tenemos presente que la secuencia de los naturales se construye inductivamente, y que la estrategia inductiva emana del concepto de conjunto inductivo); por otro lado, supongamos que la demostración por contradicción no es conservativamente tópica. De acuerdo con el criterio de adecuación, ambas demostraciones son tópicamente distintas; sin embargo, decíamos que este no parecía ser el caso, por lo que las diferencias estratégicas, *sin bien podrían hacer que las demostraciones fueran distintas, la diferencia ponderada no sería claramente relevante para la relación de conservación tópica*.

Por lo tanto, para *estas* demostraciones la diferencia en su estrategia argumental no parece ser importante para el criterio de adecuación propuesto. Incluso podríamos sugerir que el tópico del teorema no inhibe (o «restringe») el empleo de ninguna de las

[51]No conviene subestimar esta interrogante, pues la misma es central en la defensa de la *standar view* de las demostraciones, dado que que para la misma resulta de fundamental importancia que las demostraciones (estrategia argumental incluida), puedan representarse exhaustivamente como un andamieaje de esquemas argumentales. Véase a este respecto Lane (1935), Hamami (2019) y Avigad (2019). Alternativamente, y en conformidad con el espíritu del abordaje pragmático de Dawson, podríamos pensar que que la identidad de las demostraciones podría abordarse introduciendo una *agente*, el cual contaría con ciertas habilidades cognitivas y recursos demostrativos; así pues, la identidad (o la semejanza) entre demostraciones sería *relativa* a este agente.

dos estrategias (inducción y contradicción). En definitiva, lo que estos comentarios alientan a conjeturar es que, por un lado, el criterio de adecuación para la relación de conservación tópica solo implica una diferencia *tópica* entre una demostración pura y otra impura del mismo resultado; por otro lado, si somos sensibles (como parece razonable) a admitir diferencias estratégicas entre demostraciones como diferencias sustantivas (discriminables contextualmente de las diferencias tópicas), entonces cabe pensar que un resultado admita *más de una demostración pura*. Por lo dicho en esta sección, parecería entonces que si lo que nos interesa es la relación de conservación tópica, entonces las diferencias conceptuales entre demostraciones serían, en términos generales, más relevantes que las diferencias estratégicas[52]. En el próximo capítulo abordaremos mejor las diferencias conceptuales entre demostraciones y su relación con la conservación tópica.

[52]Siempre y cuando podamos establecer una distinción suficientemente nítida entre estrategia y conceptos.

Capítulo 4

Conservación Tópica: el aspecto semántico de «demostración pura»

Hacia el final del Capítulo 2 se propuso entender la noción de «pureza metodológica» como una relación de restricción tópica, en analogía con el par «intrínseco/ajeno». Por otro lado, en el Capítulo 3 (*Sección 3.2*) se introdujo la expresión «conservación tópica» como una relación entre (el tópico de) una demostración y un teorema. El siguiente pasaje de Hilbert parece dar una caracterización general de esta característica:

> [i]n modern mathematics one strives to preserve the purity of the method, i.e. to use in the proof of a theorem as far as possible only those auxiliary means that are required by the content of the theorem[1]

En esta cita lo que Hilbert denomina «pureza del método» es aquel aspecto de la pureza demostrativa que hemos denominado «conservación tópica». Dos interrogantes parecen surgir a partir de las palabras de Hilbert: ¿qué se entiende por «contenido de un teorema»? Y ¿Qué quiere decir «requerido por» el contenido del teorema? En ausencia de una respuesta clara, podemos decir que la siguiente caracterización de «conservación tópica» es *intuitiva*:

[1][Hallett and Majer (2004): 315 - 6]. Esta traducción se encuentra en [Pambuccian (2001): 393 - 4].

[**Conservación Tópica (CT)**]

> la demostración D es *conservativamente tópica* respecto del enunciado teoremático ϕ, $CT\,[D, \phi]$, si entre D y ϕ no hay un «hiato conceptual», o no hay en D algo «conceptualmente ajeno» a ϕ.

Esta caracterización es intuitiva porque contiene analogías como «hiato conceptual» o «conceptualmente ajeno»[2]. Así mismo, esta caracterización intuitiva (pre-teórica) de **CT** sugiere que, la propia *comprensión más o menos robusta* de la misma (con las limitantes intrínsecas por tratarse de una caracterización «pre-teórica»), exige que tengamos presente alguna noción de *tópico*. Decimos «exige» porque –con (Carnap, 1962, p.6)–, entendemos que la falta de una reflexión acerca de *cuál* es el concepto pre-teórico de **CT** (o formulación), puede conducir inadvertidamente a discusiones poco fructíferas. Así pues, *una* discusión sobre la legitimidad elucidatoria de un concepto *teórico* de **CT**, podría volverse estéril en ausencia de una consciencia respecto a si hay (o no) *más de un concepto pre-teórico de **CT***. Esto último puede ser el caso, si pudieran identificarse más de una manera de *aproximarse* a cierta noción de *tópico en matemáticas*. En tal sentido, la formulación pre-teórica de arriba sugiere que –incluso una investigación pre-teórica del enigma semántico de la pureza tópica– la siguiente interrogantes es de suma importancia: i) ¿Qué aproximación al tópico en matemáticas es útil para avanzar hacia un *concepto teórico* de **CT**? La identificación sucinta de *dos* aproximaciones al tópico en matemáticas, con implicancias distintas para la lectura de la formulación pre-teórica de **CT**, será abordada en la Sección 4.1.

Hay así mismo, una otra interrogante importante para una investigación pre-teórica de **CT**, la cual viene sugerida por las metáforas «hiato conceptual» y «conceptualmente ajeno»; a saber: ii) ¿Cómo es que vamos a *comparar* el tópico de teorema y demostración, a fin de tener un escenario para pensar cómo podríamos *aplicar*el concepto **CT**?[3] Al final del Capítulo 3, hicimos algunas observaciones

[2]En el Capítulo 6 se presenta un modelo que permite interpretar esta caracterización intuitiva.

[3]Una aclaración aquí es necesaria: en rigor, ambas interrogantes atañen a la «aplicación» de **CT**. Sin embargo, es factible pensar que la interrogante i) acerca del tópico en matemáticas guarda cierta prioridad respecto de ii), en tanto que es mapas generales.

sobre las demostraciones por inducción y por contradicción (contra-ejemplo mínimo), sugeríamos que en *esas* demostraciones, las estrategias argumentales lógicas, *demostración por inducción* y *demostración por contradicción*, no formaban parte de la comparación *tópica* entre ambas demostraciones y el teorema de la progresión $1+3+5...(2n-1)$. Así pues, debido a que el concepto de *inducción para números naturales* era *el* concepto fundamental en ambas demostraciones, así como fundamental para entender el **Teorema 3.1**, ambas demostraciones podrían entenderse como satisfaciendo el predicado **CT**, –i.e. como siendo *demostraciones tópicamente puras*. En tal sentido, estabamos sugiriendo que las estrategias argumentales de absurdo y contradicción, no era un ítem a *comparar tópicamente* a las demostraciones entre ellas, así como a las mismas con el teorema. Por lo tanto, la pregunta ii) nos interroga acerca de *cómo es que esas comparaciones va a proceder*? Sin ir más lejos, las demostraciones pueden contener *inferencias*, *estrategias argumentales*, *axiomas* (por nombrar sólo algunas), mientras que los enunciados que figuran como sus conclusiones no contienen estas cosas; ¿acaso la comparación entre el tópico de ambas abarca *todos* los elementos que componen la demostración, o sólo *alguno* de ellos? Y si son sólo algunos ¿cuáles?

Esta segunda interrogante no va a ser abordada explícitamente como parte de una investigación pre-teórica de **CT**, dado que nos concentraremos en la interrogante i), acerca de las aproximaciones al tópico en matemáticas. En su lugar, y por mor de preservar cierto rigor en la discusión de la Sección 4.2, procuraremos ser claros a la hora de distinguir entre *estrategias argumentales* y *conceptos* de las demostraciones, a fin de explicitar qué conceptos (tópico) se están comparando, así como explicitar *qué* estamos comparando entre ellos. En tal sentido, la discusión de la Sección 4.2 discurre de modo similar a la discusión sobre las demostraciones inductiva y por contradicción del **Teorema 3.1**. En este capítulo presentaremos tres aproximaciones muy generales como posibles respuestas a i) (*Sección 4.1*), y las ilustraremos por medio de un caso particular, el *Teorema de Pitagoras* (*Sección 4.2*).

En definitiva, lo que se espera mostrar a lo largo de las siguientes secciones del capítulo es, por un lado, que de las tres aproximaciones al tópico que se presentan, solo dos de ellas son fructíferas para avanzar hacia una elucidación de **CT**; por otro lado, esas dos aproximaciones motivan distintos concepto *pre-teóricos* de **CT**.

4.1. Tres aproximaciones generales al *tópico* en matemáticas

A esta altura de la investigación el lector estará impaciente ante el uso (quizás abusivo) que hemos hecho de la expresión «tópico», particularmente atendiendo a la importancia que le hemos otorgado. En la página 39 del Capítulo 2 se asoció «tópico» con una *teoría* o *área* de la matemática, y al mismo tiempo se sugirió implícitamente que el tópico de un enunciado involucraba una asociación como esta –i.e. una asociación entre enunciado y área matemática. Precisamente, la interrogante i) apunta a esta cuestión. Sin embargo, lo que a continuación se caracteriza como «aproximación» al tópico, no pretende ser una descripción rigurosa de doctrinas semánticas particulares, sino grandes lineamientos a partir de la cual la reflexión sobre el significado en matemáticas ha sido conducido en el siglo XX, en cuanto referida a la lógica y la matemática. Puntualmente, identificaremos algunas «aproximaciones» que parecen estar presente en la literatura sobre pureza.

En el capítulo anterior también asociamos la comparación conceptual entre demostraciones como una comparación tópica. Sin embargo, a la hora de pensar una respuesta a la interrogante (i) la proliferación de respuestas es un tanto desesperante, pero lo que lo que (i) pone a consideración es algo más específico que simplemente la cuestión del significado en matemáticas: (i) interroga sobre alguna noción de tópico apropiada para la indagación entorno a la pureza de las demostraciones –i.e. para para caracterizar **CT**. En esta sección vamos a presentar sucintamente tres aproximaciones generales que permiten responder a (i)

4.1.1. Aproximación «global»

En el contexto de una filosofía *fundacionista* de la matemática, del modo en que esta tuvo lugar en el Siglo XX, el interés no suele estar depositado en el fundamento de algún área o teoría *particular* de la matemática; o si se prefiere, la preocupación que lidera no concierne a la *certidumbre*, o *soporte* de un área o teoría particular. La preocupación que lidera atañe al hallazgo de una teoría que funja como un «marco global», el cual permita que las teorías u áreas particulares puedan ser *representadas*, y que a su vez ostente ciertas propiedades meta-matemáticas (consistencia, completud, etc.)[4]. En este contexto, cuando se habla de «estudios en fundamentos», lo que se quiere decir es, básicamente, *meta-matemática*.

Para entender cómo se puede introducir aquí cierta aproximación al tópico, considérese tres citas a este respecto; Gödel por ejemplo dice:

> [e]stos dos sistemas [*Principia Mathematica y Zermelo-Fraenkel*] son tan amplios que *todos* los métodos usados hoy en la matemática pueden ser formalizados en ellos, es decir, pueden ser reducidos a unos pocos axiomas y reglas de inferencia[5]

Por otro lado, Deudonnè dice

> [w]here the superficial observer sees only two, or several, quite distinct theories, lending one another 'unexpected support' through the intervention of a mathematician of genius, the axiomatic method teaches us to look for the deep-lying reasons for such a discovery, to find the *common ideas* of these theories, *buried under the accumulation of details properly belonging to each of them*, to bring these ideas forward and to put them in their proper light[6]

Finalmente, Carnap sostiene que

[4][Manders (1987): 199 - 200, [Burgess (2015): 65] [Baldwin (2018): 3 - 4].]
[5][Gödel (1931): 55 - 56]. Énfasis añadido.
[6][Bourbaki (1950): 223]. Énfasis añadido.

> [n]o existe una diferencia fundamental entre aritmética y geometría en tanto que cálculos ni con respecto a sus *posibles* interpretaciones; para cada cálculo existen las interpretaciones lógica y descriptiva. Sin embargo, si tomamos los sistemas con su interpretación *usual* –la aritmética como teoría de números y la geometría como teoría del espacio físico– entonces encontramos una importante diferencia: las proposiciones de la aritmética son lógicas, L-verdaderas y sin contenido factual; las de la geometría son descriptivas, factuales y empíricas[7].

Estas tres citas apuntan en similar dirección: el tópico de los enunciados matemáticos, o los conceptos matemáticos (en general), están «mapeados» a teorías (o «estructuras», para el caso de los bourbakistas) «fundamentales». El caso de la teoría de conjuntos es por lejos el más emblemático, pues tal como Gödel dice: todos los métodos de la matemática pueden ser formalizados (expresados) en teoría de conjuntos (ZFC o *Principia Mathematica*), pero en la actualidad existen un importante *pluralidad* de teorías que fungen como marcos fundamentales (tales como teoría de categorías, teoría constructiva de tipos, o HoTT, que también oficia de marco común para la informática). Por otro lado, en la cita de los bourbakistas, y aunque no tenemos precisamente *una* teoría fundamental sino tres tipos de *estructuras* fundamentales (grupo, orden, topología), podemos encontrar, (en ellas) a las «ideas comunes» que están «entreveradas» debajo de las teorías particulares. Una consecuencia natural de una aproximación «global» al tópico en matemáticas aparece elocuentemente formulada en la cita de Carnap: las diferencias entre teorías o áreas particulares no tienen mayor relevancia, en particular, no tienen una relevancia matemática –i.e. no tienen una diferencia «fundamental». Esto no quita que hayan diferencias entre las formulaciones (enunciados), pero esas diferencias son en último término *idiosincráticas* de los contextos teóricos donde se formulan[8].

[7][Carnap (1975): 124].

[8]Una aproximación «global» no es en sentido estricto una teoría *semántica* en el sentido tradicional de esta expresión –i.e. una teoría del significado, pues si se entiende que, por ejemplo el tópico de un teorema está «mapeado» a su representación en ZFC, entonces la cuestión deviene en una semántica para ZFC. No nos hemos involucrado con esta cuestión en nuestra sucinta descripción de esta aproximación. De hecho, bajo la misma podrían albergarse distintas teorías semánticas (ya sean teorías de la *referencia*, como teorías más orientadas al *sentido*); el punto aquí con hablar de «aproximación» es destacar cierta orientación común, a saber, la identificación de teorías o áreas de la matemática cuyo tópico *es* el tópico «de fondo» de las teoría o áreas particulares[9].

¿Es esta aproximación global al tópico en matemáticas fructífera para caracterizar pre-teóricamente **CT**? En nuestra opinión no se requiere una extensa reflexión para observar *no* es fructífera. Básicamente esta aproximación borra las diferencias entre teoría o áreas particulares que, como en el caso de la geometría y el análisis, hemos destacado en el Capítulo 2, y a partir la cual hemos introducido la noción de pureza metodológica. En otras palabras, si el tópico de un teorema consiste, fundamentalmente, en el tópico «de fondo» que adquiere en su representación en la teoría fundamental de turno, entonces se pierde las diferencias tópicas *locales*, en favor de un tópico *global*. Así pues, si colocamos a ZFC como «teoría fundamental», un teorema geométrico en cuya formulación encontramos expresiones como «punto» y «recta» tendría como tópico «superficial» un tópico *geométrico* –i.e. sus primitivos recibirían una interpretación «usual» como dice Carnap; por otro lado, de acuerdo a su tópico «profundo», un «punto» sería un elemento de un conjunto, mientras que «recta» sería un subconjunto de este. Luego, una demostración en ZFC

no podría considerarse «geométricamente impura»; pero tampoco lo sería una demostración algebraica (analítica), puesto que el tópico «profundo» de esta también sería conjuntístico. Por lo tanto, como sugiere Carnap, la distinción metodológica entre geometría «síntética» y «analítica» sería tópicamente *superficial*. El punto aquí es que una aproximación al tópico adecuada para responder a (i) debe ser *local* en vez de *global*.

4.1.2. Aproximación «formulacional»

Una observación de Hilbert bien pude tomarse como una caracterización general de una aproximación «formulacional» a la pureza del método:

> [i]t remains to discuss briefly what general requirements may be justly laid down for the solution of a mathematical problem. I should say first of all, this: that it shall be possible to establish the correctness of the solution by means of a finite number of steps based upon a finite number

> of hypotheses *which lie in the presentation of the problem* and which must always be *exactly formulated*[10].

Parece claro que aquí Hilbert relaciona por medio de «estar contenido en» a las hipótesis de la solución con la *formulación* del problema, y a tales efectos agrega que la misma debe ser siempre «exacta»[11]. Una aproximación así parece estar a la base de los enfoques actuales usuales sobre la pureza del método en matemáticas[12], y por esa razón ocupará un lugar central de la reflexión en los capítulos 6 y 7. Sin embargo, bajo el paraguas de esta aproximación pueden ampararse diversas respuestas a la pregunta por una fructífera aproximación al tópico para **CT**.

En el contexto de la literatura orientada hacia el abordaje lógico-matemático de la pureza (Sección 1.1), podemos encontrar una aproximación «formulacional» al tópico. Así pues, Arana[13] explora la posibilidad de que la relación **CT** pueda ser abordada por medio de una noción *sintáctica* de *analiticidad*: una demostración D de ϕ –presentada en un sistema de deducción natural o secuentes– es analítica si cada una de las fórmulas en D es una *subfórmula* de su conclusión ϕ. Es decir, si ϕ es demostrado por medio de una demostración analítica D, entonces toda fórmula que figura en D debe ser ϕ misma, o un componente más simple de ϕ –i.e. una subfórmula de ϕ [14].

Así pues, es en la fórmula misma donde hallamos *explícitamente* las fórmulas presentes en la demostración, es decir, como respuesta a (i) lo que encontramos es

[10][Hilbert (1902): 441]. Énfasis añadido. Una aclaración importante: Hilbert habla de «problemas» y no de «teoremas», pero en su caso una cosa no se diferencia mucho de la otra. Por lo pronto una «solución» a un problema involucra «una finita cantidad de pasos basados en una cantidad finita de hipótesis», lo cual es una descripción sucinta de *demostración*. En el Capítulo 6 se volverá brevemente sobre esta cuestión.

[11]La existencia de ciertas condiciones que se le imponen a la formulación, es una cuestión que el *Modelo Pragmático* a ser presentado en el Capítulo 6, va considerar.

[12]Concretamente nos referimos a los trabajos de Arana, Detlefsen, Mancosu. Hallet por otro lado, podría emparentarse más con la aproximación de la subsección4.1.3.

[13]Arana (2009).

[14]Como es sabido, la eliminación de la regla de corte implica la propiedad de subfórmula, esto es, el hecho de que cada teorema admita una demostración analítica Gentzen (1969a). Nótese de paso que este mismo resultado es empleado por Prawit como criterio de identidad entre demostraciones (cfr. 57, Capítulo 3), por lo que podría decirse que dos demostraciones son iguales si su demostración pura es la misma.

que el tópico del teorema estaría determinado por la sintaxis explícita del teorema. Sin embargo, esta noción sintáctica de analiticidad introduce una limitaciones técnicas importantes: en primer lugar, las teorías formuladas primer orden no permiten la eliminación de la regla de corte cuando estas introducen axiomas «no lógicos» [15], o bien la permiten pero no garantizan la propiedad de subfórmula, sino una versión débil de la misma[16]. En segundo lugar, como Arana mismo observa[17], la propiedad sintáctica de subfórmula parece ser muy rígida, pues exige una condición sintáctica que bien puede ser trivialmente no satisfecha, aunque intuitivamente no consideremos que la demostración introduzca nociones «ajenas». así por ejemplo, la demostración de Euclides de I.1 sobre la construcción de triángulos equilateros emplea círculos, aun cuando en su enunciación no se mencionan ¿es este simple hecho suficiente para declararla «impura»? Bueno, si pretendemos emplear la propiedad de subfórmula para indagar la pureza de demostraciones matemáticas particulares, tal como se ofrecen en la *práctica matemática*, entonces parece que la propiedad de subfórmula es muy rígida.

Por otro lado, en Arana (2014) se aborda la preferencia por las demostraciones puras en la práctica aritmética, puntualmente el empleo de las operaciones de adición y multiplicación en la demostración del teorema de la infinitud de los números primos (*Elementos* IX.20), que *no* figuran en la formulación que Euclides hace del teorema. A tales efectos, Arana explora *sistemas formales* de aritmética –puntualmente, Robinson (1949)–, el cual permite abolir las referencias explícitas a la adición y multiplicación, gracias al cual «*this translated solution would answer worries concerning the topicality of both addition and multiplication, by showing that neither operation is needed for this translated version of Euclidean solution, and si that a topically pure solution to IP has been identified.*» (*íbid.*, p.324).

[15]Véase [Girard (1982): 104].
[16][Negri and Von Plato (2011): 103], Piazza and Pulcini (2016).
[17][Arana (2009): 206].

Por otra parte Kahle y Pulcini[18] sugieren entender el tópico de una conclusión desde un punto de vista *operacional*, caracterizado del siguiente modo: el tópico operacional de un teorema ϕ está dado por el conjunto de operaciones matemáticas *mencionadas* en ϕ[19]. Así mismo, y par construir su definición de **CT**, los autores asocian con el tópico operacional de ϕ una *ontología* para ϕ, la cual queda determinada por el *menor* dominio numérico cerrado por el conjunto de operaciones que forman parte del tópico de ϕ. Así pues $CT\,[D, \phi]$, si la ontología de ϕ está *incluida* en la ontología de D[20].
En este caso, puede decirse que la respuesta a (i) de Kahle y Pulcini, consiste en que el tópico también aparece explicitado en la formulación del teorema, pues las operaciones que lo determinan están *mencionadas* en la misma. A diferencia con la exploración de Arana mencionada arriba, no es la *estructura* sináctica del teorema lo que explicita su tópico, sino sólo las operaciones *matemáticas* mencionadas[21]. Así mismo, como la caracterización de tópico y **CT** manifiesta, se trata de un abordaje *limitado*; esto se debe a que está basado sustantivamente en una concepción conjuntística de la noción de «operación matemática»[22]. En tal sentido, este abordaje presenta un marco conceptualmente claro si lo que nos interesa es estudiar demostraciones teoría de números, por ejemplo; en tal sentido, este abordaje exige para su aplicación, que el caso de interés admita una caracterización precisa de la noción de *conjunto cerrado bajo operaciones*.

Estos dos abordajes, decíamos, están orientados a hacer de la noción de «demostración pura», una noción matemática o lógicamente tratables. Sin embargo,

[18]Kahle and Pulcini (2017).

[19][Kahle and Pulcini (2017): 9].

[20]*Íbid.* Así por ejemplo, si tenemos un tópico operacional $c = \{+, \cdot\}$ y un tópico operacional $d = \{+, -\}$, entonces la ontología de *c* está «incluida» en la ontología de *d*, pues la ontología del primero es $\mathbb{N}$, mientras que en el segundo caso es $\mathbb{Z}$. Así pues, D es una demostración pura de ϕ si el tópico operacional de D está «incluido» en el tópico operacional de ϕ; luego, una demostración que involucre un tópico como *d*, de un teorema cuyo tópico es *c* sería impura, pues $\mathbb{Z}$ *no* está incluido en $\mathbb{N}$.

[21]Esta diferencia puede resumirse diciendo que esta última hace un énfasis en el tópico «matemático», en vez de en el tópico «lógico».

[22]Esto es explicitamente reconocido por los autores (p. 11).

abordajes como los de Arana, Detlefsen y Mancosu[23], las cuales incluimos en la Sección 1.1 dentro de la orientación histórico-filosófica, tienen un compromiso más explícito con proveer una herramienta analítica que permita indagar *filosóficamente*, la práctica matemática relacionada con la pureza del método [24] . Este abordaje será protagonista en los capítulos 6 y 7, sin embargo, la diferencia crucial con los abordajes de arriba podemos formularla aquí del siguiente modo: *el tópico de un teorema* ϕ *está dado por los conceptos que un agente requiere para entender su formulación.* De esta manera, una caracterización de **CT** en estos términos hace un uso sustantivo de ambas nociones, la cual puede resumirse de la siguiente manera: $CT\,[D, \phi]$ para un agente α , si la comprensión (tópico) que este tiene de ϕ es *suficiente* para que α comprenda D. Como puede apreciarse entonces, este último abordaje hace un uso esencial de una noción de «agente» y de «comprensión», las cuales no resultan ser en absoluto nociones *matemáticas*.

Una caracterización de *tópico* en términos suscita algunas interrogantes, tales como: ¿en posesión de qué conceptos, técnicas, etc. debe estar el agente, a efectos de *comprender* una formulación de un teorema? Por otro lado, y dado que es razonable hablar de *grados* de comprensión, ¿qué grado de comprensión es adecuado para atribuir un tópico determinado a un teorema? La relevancia de esta interrogante se debe a que perfectamente puede ocurrir que, un grado de comprensión demasiado

[23]Detlefsen and Arana (2011), Arana (2014).

[24]Esta observación requiere una aclaración: que un abordaje de la pureza esté «orientado» ha proveer una caracterización lógica o matemática, no quita que la misma pudiera ser de utilidad para analizar filosóficamente la práctica matemática. Por otro lado, empleamos el adverbio «filosóficamente» para enfatizar dos cosas: por un lado, porque emplean nociones típicamente filosóficas (como «proposición», «comprensión», «agente» etc.), a diferencia de nociones como «conjunto cerrado bajo operaciones», o «subfórmula»; por otro lado, l presencia de una preocupación *epistemológica* que, por sí mismo, un abordaje matemático no requiere dar cuenta. Así pues, la observación de Arana arriba referida sobre la rigidez de la propiedad de subfórmula para dar cuenta de las demostraciones particulares de la práctica matemática, no hace de *ese* abordaje uno particularmente filosófico, (o la menos no lo hace en un modo análogo al que tampoco lo hace el querer axiomatizar un predicado como «demostrabilidad informal»). Ahora bien, si objetamos este mismo abordaje diciendo que las demostraciones analíticas (libres de la regla de corte), pueden resultar en demostraciones muy *extensas* y por ello, poco inteligibles, entonces esta crítica está orientada filosóficamente; esto es, la misma manifiesta una preocupación por proveer un andamiaje conceptual que de cuenta de el interés *epistémico*, o *cognitivo* en las demostraciones puras (cfr. Boolos (1984), [Ferreirós (2015): §2.3]). El aspecto epistémico de la pureza de las demostraciones será abordado en el Capítulo 5.

«superficial» podría impedir al agente la constatación de la pureza de una demostración, mientras que, por otro lado, una grado de compresión «demasiado profundo» podría redundar en una *trivialización* del predicado «demostración pura», en la medida de que cualquier teorema admitiría una demostración tal, si el agente cuenta con el necesario grado de comprensión. Como respuesta a estas interrogantes, Arana y Mancosu sugiere que el grado de comprensión debe consistir en aquel que le permita al agente *ensayar* una demostración del teorema (aunque tales ensayos puedan fracasar)[25].

En definitiva esto tres abordajes tienen en común el que sólo la *formulación* del teorema sea aquello en virtud de lo cual su tópico puede determinarse. En este sentido, esta aproximación «formulacional» parece comprometerse con alguna forma de posición *atomista* respecto al tópico, en el entendido de que los teoremas (sus formulaciones) tiene un tópico *que les es propio*, siendo pues en virtud de la determinación del mismo podemos comparar tópicamente demostraciones y teoremas. Por otro lado, en esta aproximación la extensión de **CT** se ve, evidentemente, afectada por la *formulación* con la que se pretenda trabajar; pero, ¿hasta qué punto las diferencias en las formulaciones son *diferencias tópicas*? Esta cuestión parece ser particularmente relevante para el abordaje en Detlefsen and Arana (2011) y Arana and Mancosu (2012), donde la comprensión por parte de un agente de la formulación es aquello a partir de lo cual damos con el tópico de un teorema; pues, retomando el **Teorema 3.1** acerca de la progresión aritmética, dado que podemos dar distintas formulaciones alternativas a la ofrecida en el capítulo anterior, tal como

$$\sum_{n=1}^{n}(2n-1)=n^2.$$

Aunque parezca irrisorio que esta formulación alternativa requiera una comprensión sustantivamente distinta a la requerida en el **Teorema 3.1**, la cuestión acerca de para qué *grado de comprensión* (o si se prefiere, para qué *agente*) las formulaciones distintas exhiben, a su vez, una diferencia *tópica*, no parece ser una cuestión menor

[25] Véase [Arana and Mancosu (2012): §4.5].

para este tipo de abordaje. En otras palabras, la noción de *sinonimia cognitiva* parece ser algo de lo que habría que tener una idea más o menos clara, a la hora de avanzar hacia un concepto teórico de **CT** a través de una aproximación formulacional. En definitiva, más allá de los diferentes abordajes que pueden englobarse bajo el rótulo de «aproximación formulacional», cierto compromiso con una perspectiva más o menos *atomista* al tópico, así como alguna noción de *sinonimia* (cognitiva o de otro tipo), parecen estar implícitamente asumidos.

4.1.3. Aproximación «inferencial»

Una tercera aproximación al tópico puede entreverse a partir de constatar lo siguiente: en matemáticas muchas veces ocurre que cierta *formulación* de un teorema no resulta ser del todo transparente respecto a su tópico, en el sentido vago que hemos venido asumiendo para esta expresión –i.e. el área o teoría a la que el teorema pertenece (página 39). Considérese el problema de la trisección del ángulo: dado un ángulo θ, hay un ángulo $\alpha = \frac{1}{3}\theta$.

Si pensamos en su formulación, este problema parece ser claramente un problema de geometría *plana*, pues en el mismo sólo se hace referencia a objetos geométricos plano, así como operaciones (construcciones) que de por sí son realizables por medio de regla y compás[26], por lo que cualquier de los abordajes de la subsección anterior diría que su tópico es *plano*. Sin embargo, este mismo problema no puede ser resuelto en general por medio de regla y compás (o círculos y rectas)[27]. En el libro IV de la *Colección* §§31-34 de Papus de Alejandría argumenta que el problema de la trisección del ángulo es, más allá de su formulación «plana», un problema de la geometría *sólida*. Más concretamente, Papus *clasifica* el problema de la trisección del ángulo en virtud de que los *medios* –las curvas–, más simples que permiten realizar la construcción pertenecen a la geometría sólida. No podemos entrar en de-

[26]En sentido estricto, la formulación problemática agrega que α es construible empleando sólo regla y compás.

[27]Wantzel (1837).

talles aquí sobre la argumentación de Papus, pero sí podemos aclara dos supuestos fundamentales; en el llamado pasaje «meta-matemático» del libro IV [28] Papus dice que los problemas matemáticos se clasifican en virtud de las curvas que se emplean en su solución, donde esta clasificación distingue tres clases de curvas: las plana (círculos y rectas), las sólidas (secciones cónicas), y una tercera menos definida que Papus llama «lineales» (concoide, cuadrática, espiral arquimediana). Por otro lado, estas curvas presentan una clasificación jerárquica en virtud de la «complejidad» de su génesis, done las curvas planas son las más simples y las lineales son las más complejas. Así pues, según Papus el problema de la trisección del ángulo es sólido debido a que *no puede* ser construido por curvas planas[29], pero sí puede serlo por medio de secciones cónicas (Papus emplea una hipérbola).

Esta apretada síntesis del razonamiento de Papus dispara la siguiente intuición: el tópico de un resultado no queda capturado necesariamente por su *formulación*, pero una investigación cerca de los *medios* para su demostración o solución, puede arrojar una «segunda luz» sobre el tópico del mismo, cuya formulación puede resultar «engañosa» a este respecto. En el caso de la trisección del ángulo, quizás Papus diría que su formulación es «engañosa» respecto a su clasificación conceptual, pues si bien la formulación no ofrece de por sí indicios acerca de curvas sólidas, una indagación en cuanto a los medios permitiría iluminar su carácter sólido[30].

Podemos subsumir esta intuición bajo una aproximación al tópico conocida como *inferencialismo*. Una forma genérica de formular la intuición fundamental de esta aproximación es la siguiente:

[28][Sefrin-Weis (2010): 271].

[29]Papus nunca *demuestra* tal imposibilidad, sino que acepta tal cosa sobre la base de los sucesivos intentos fallidos de la tradición matemática que le precede. Respuecto al problema de las «demostraciones de imposibilidad» en la colección de Papus véase Crippa (2014).

[30]Es importante aclarar que lo que se pretende resaltar aquí es cómo la investigación de Papus le provee una justificación para atribuirle un tópico al problema que no se manifiesta en su *formulación*. Naturalmente, que Papus lo clasifique como un problema «sólido» obedece a que, siguiendo a Apolonio de Pérgamo, concibe a las secciones cónicas como curvas generadas a partir de un cono, así como a *su* propia clasificación de las curvas geométricas. Todo esto pertenece al abordaje particular de Papus, del cual sólo nos servimos como una ilustración de nuestro punto.

> El significado de las expresiones lingüísticas está intrínsecamente ligado a las (reglas de/patrones de) inferencia(s).

Esta tesis general relaciona dos términos: por un lado tenemos al significado (d las expresiones lingüísticas), mientras que por otro lado tenemos a las inferencias, patrones (de inferencias) o reglas. Podemos introducirnos a las diferentes variantes de una aproximación inferencial haciendo énfasis en algunas de estas cosas: las inferencias, patrones (de inferencias) o reglas. Así mismo, podemos diferenciar estas variantes entendiendo de distinta manera la relación entre significado e inferencias, esto es, pensarla como «estar definido por», «ser expresado por», o «estar constituido por». Así, quienes interpretan esta tesis en términos de un Semántica de la Teoría de la Demostración (tales como Prawitz o Dummett, por ejemplo), se refieren alternativamente a inferencias y reglas. Mientras que Brandom[31] y Peregrin[32] insisten en referirse a reglas (pues según ellos, así se rescata la dimensión normativa de la tesis de arriba). Boghossian[33] por otro lado, refiere de modo más recurrente a «patrones de inferencia».

Michael Dummett es un ilustre representante de una aproximación inferencialista al tópico en matemáticas; pero además es muy consciente de un dificultad que se le plantean a este tipo de aproximaciones, la cual explicaremos en seguida. Considérese por ejemplo las siguientes palabras de Dummett de sobre el rol de las demostraciones en la comprensión de los enunciados matemáticos:

> [f]rom an intuitionistic standpoint, therefore, an understanding of a mathematical statement consists in the capacity to recognize a proof of it when presented with one; and the truth of such a statement can consist only in the existence of such a proof [...] such an understanding therefore transcends anything which we actually learn to do when we learn the use of mathematical statements[34].

[31]Brandom (2005).
[32]Peregrin (2014).
[33]Boghossian (1993).
[34][Dummett (2000): 4 - 5].

Aquí Dummett coloca a las demostraciones como el medio por el cual comprendemos un enunciado matemático, precisamente, la capacidad de reconocer que una demostración D es una demostración de un enunciado ϕ, es en lo que consiste –según el intuicionismo de Dummett– *entender* ϕ. Para Dummett una teoría del significado es en esencia una teoría de la *comprensión* del lenguaje, donde en el caso de los enunciados su comprensión está dada básicamente por la *evidencia* para su valor de verdad; así pues, en el caso particular de los enunciados matemáticos, el vehículo de su evidencia son las demostraciones, –i.e. la práctica lingüística por medio de la cual ofrecemos evidencia para una proposición en matemáticas [35].

Si leemos la afirmación «la comprensión de una afirmación matemática consiste en la capacidad de reconocer una demostración de la misma cuando es presentada», sin hacer ninguna aclaración, la misma es por lo menos problemática. Por un lado, el reconocimiento de que algo (una construcción en el caso intuicionista), sea una *demostración* es inseparable de la *validez* de la misma ¿cómo se realacionana la *comprensión del significado* y la *validez inferencial*? Por otro lado, si es su demostración lo que debemos comprender para comprender la afirmación teoremática, entonces parecería que, conforme los procedimientos demostrativos (construcciones) van cambiando, la comprensión de una afirmación *exigiría conocer de antemano la clase de todos esos procedimientos demostrativos*. Esto último implica que la clase de construcciones *no es predicativa*, y tal cosa es intuicionisticamente inaceptable, pues, como Dummett dice en la cita, este conocimiento «trasciende todo lo que sabemos sobre el uso de los enunciados matemáticos».

Otra cara de esta última cuestión atañe a la posibilidad de comparar tópicamente distintas demostraciones de un mismo resultado. Pues, si aceptamos que el tópico del teorema está *determinado* por su demostración, entonces *cualquier* demostración no trivialmente distinta podría estar alterando el tópico de la conclusión y, por lo tanto,

[35]Aquí estamos destacando tan sólo un aspecto de la teoría semántica de Dummett, a saber, su aspecto «verificacionista»; es decir, aquel aspecto de su uso que atañe a la evidencia para una aserción [Dummett (1981): 396].

la conclusión de la demostración «alternativa» sería, en sentido estricto, *diferente* –i.e. estaríamos ante demostraciones de distintos teoremas[36]. Dicho de otra manera: si D y D^* son demostraciones tópicamente distintas, entonces nuestra capacidad para reconocer a D y a D^* como una *demostración* estría conspirando contra nuestra capacidad de reconocer que son demostraciones del *mismo* teorema. Así pues esta «inestabilidad» del tópico conduciría a una suerte de *contextualismo radical*, y en virtud de ello no habría condiciones para aplicar **CT** [37].

En definitiva, lo que tenemos aquí es la amenaza de un *holismo radical*.

Sin embargo, tenemos que tener presente las siguiente dos tesis: a) entender una *expresión lógica* es conocer su rol en la inferencia[38] , y b) el entendimiento de una expresión lógica es *atomistica*[39]; finalmente, una tesis c) de acuerdo con la cual, cabe distinguir entre entre una demostración de la «matemática ordinaria» y una *demostración canónica* (que para Dummett, no es lo mismo que una derivación *normal* en un sistema deductivo)[40]. La tesis a) tiene sus raíces contemporáneas en la afirmación de Gentzen respecto a que la reglas de introducción de las expresiones lógicas «representarían, por decirlo así, las "definiciones" del símbolo lógico», mientras que las reglas de eliminación son las «consecuencias de esas definiciones»[41]. Así pues, estas «definiciones» cumplen simultáneamente dos funciones: dotar de significado

[36]A diferencia de la aproximación formulacional, no se trataría de distintos teoremas en virtud de las diferencias conceptuales que se manifiestan en las *formulaciones*, sino en las diferencias conceptuales que aparecen en sus *demostraciones*. Quizás podría ilustrarse esta aproximación –siguiendo a [Dummett (1978): 300 - 302]– como una versión radicalizada de Wittgenstein (1978), en la cual las demostraciones no simplemente proveen un criterio (regla) para para los conceptos presentes en la conclusión, sino que *definen* (II, §24) esos conceptos. Es decir, la adopción de un nuevo criterio para la aplicación de un concepto *modifica* su significado. Así pues, si se adopta una actitud «radical» en esta dirección, entonces el interés por *comparar* demostraciones distintas –i.e. sustantivamente diferentes, de un mismo resultado sería espurio, pues en sentido estricto esas demostraciones no tendrían la *misma* conclusión.

[37]En §4.5 de Arana and Mancosu (2012) Arana y Mancosu atribuyen un contextualismo radical (acerca del tópico de un teorema), a lo que ellos denominan «contenido formal». Brevemente planteado, el tópico formal de un enunciado está dado por el «rol inferencial» que dicho enunciado tenga en un contexto axiomático. En el Capítulo 7 volveremos sobre esto.

[38][Dummett et al. (1991): 246].

[39][Dummett et al. (1991): 223].

[40][Dummett (2000): 271].

[41][Gentzen (1969b): 80].

a las expresiones lógicas, e indicar su rol inferencial. En definitiva, la justificación de las inferencias (construcciones) radica en la *auto-evidencia* de esas definiciones. La tesis b) dice que podemos entender «$A \vee B$», con independencia de entender «$A \wedge B$», o «$(A \rightarrow B)$». Eviendet¿mente aquí hay una mitigación del holismo radical (aunque pueda ser un tanto artificioso).

A partir de las tesis a) y b), se plantea con naturalidad el *desideratum* de que las *definiciones* de las expresiones lógicas (especialmente las reglas de introducción) sean *puras*, esto es, definiciones en las que solo una expresión lógica figura[42]. Sin embargo, la noción de pureza que aquí nos interesa, está asociada con la clasificación de una demostración particular de acuerdo con el predicado **CT**, y no con definiciones; y así mismo, si las reglas de un sistema de deducción natural –intuicionista– fueran puras en el sentido de Dummett, entonces los procesos de normalización de derivaciones serían procesos por medio de los cuales transformamos una demostración en conservativamente tópica. En este caso entonces, estaríamos empleando el concepto teórico-demostrativo de *derivación normal* como un concepto *teórico*. Esta es la alternativa que Arana explora (aunque sin asumir una aproximación inferencialista), y que ya comentamos en la sección anterior; pero lo que nos interesa en este momento, es sugerir una manera de entender *pre-teóricamente* el predicado **CT**, a partir de una aproximación inferencialista al estilo de Dummett[43].

Para ello conviene volver sobre el problema que Dummett introduce en la cita de arriba respecto al *reconocimiento de una construcción como una demostración*. Puntualmente, una explicación general de la semántica intuicionista, esto es, de cómo el reconocimiento de que una construcción es una demostración es lo que nos permite comprender la afirmación teoremática, no puede asumir que la clase de construcciones efectivas ya está *dada* –so pena de impredicatividad. La comprensión

[42][Dummett et al. (1991): 257]. Sobre la importancia del *desideratum* de pureza en esto términos, véase Murzi (2018).

[43]No es menor aclarar que Dummett flexibiliza bastante el *desideratum* de pureza. Véase [Dummett et al. (1991): 257].

–en las demostraciones matemáticas ordinarias– no exige el conocimiento de construcciones efectivas específicas, según Dummett y en conformidad con la tesis c) mencionada arriba, las demostraciones ordinarias solo requieren entender que podemos buscar, a partir de la misma, una demostración donde se exhiben explícitamente las construcciones efectivas, –i.e. la comprensión de la demostración ordinaria solo pide que la comprensión de que, a partir de la misma, podemos encontrar una *demostración canónica*[44]. Así pues, podemos comprender una demostración ordinaria sin tener dada una clase de construcciones efectivas, y es este modo de comprensión el que nos previene de de cierta «inestabilidad tópica» de los teoremas, en tanto que las diferentes construcciones (demostraciones) amenazan con someter el tópico de una afirmación a un *holismo radical*. Dummett lo expone de la siguiente manera:

> [t]hese fears [*la inestabilidad tópica*] are groundless. In order to recognize an operation as a proof of $(B \to C) \to D$, we must think of it as acting on anything we may ever recognize as a proof of $(B \to C)$. Of such a proof, we know in *advance* only what is specified by the intuitive explanation of $\to$: namely, that we recognize it as an effective operation, and as one that will transorm any proof of B into a proof of C. We need not surveyor circumscribe possible such operations in advance in any more particular way than this. And so [...] the intuitionistic account of the meanings of mathematical statements is secured, and, with it, the stability of that account and the stability of intuitionistic proof[45].

Así pues, el conocimiento que tenemos de «antemano» del significado de «$\to$» no involucra tener circunscrita una clase de procedimientos efectivos (los cuales pueden *variar* a medida que cambia la matemática). En este sentido, la explicación intuitiva de «$\to$» sería la responsable de permitirnos *reconocer* una demostración de «$(B \to C) \to D$», a pesar de que cambien los procedimientos para transformar una demostración de «$(B \to C)$» en una demostración de «$(B \to C) \to D$». Por lo tanto, parecería que una aproximación al tópico en el espíritu del «inferencialismo» tendría que contar con una «reserva de estabilidad tópica», por decirlo de algún modo, que la prevenga de caer en un contextualismo, u holismo peligroso.

[44][Dummett (2000): 271].

[45][Dummett (2000)]: 274. Énfasis añadido.

En este contexto, podría pensarse en una «aproximación inferencialista» pre-teórica a **CT** al estilo de Dummett. Una duda que se plantea inmediatamente es: ¿qué tipo de tópico, el intuitivo de las demostraciones ordinarias, o el canónico de las demostraciones canónicas (o ambos), va a ser el protagonista? Si, por ejemplo, sostenemos que la demostración canónica es la que determina el verdadero tópico del enunciado teoremático, entonces resulta evidente que la misma es conservativamente tópica. Sin embargo, en este caso la noción de demostración pura colapsaría con la de demostración canónica, y dado que las últimas son *las* demostraciones propiamente dichas, entonces también ocurriría que la existencia de una demostración pura quedaría garantizada analíticamente, –i.e. por su mera definición. Luego, el predicado pura sería *trivial*; en otras palabras, no podríamos entender analíticamente cómo es que una demostración podría introducir un tópico «ajeno» al teorema [46].

No obstante, en vez de concentrarse en el aspecto del abordaje de Dummett, según el cual las condiciones para la aprehensión del tópico de una afirmación matemática viene dado por su demostración canónica, podríamos hacer foco en la *relación* entre la demostración ordinaria y la demostración canónica. Pues, en primer lugar, podríamos decir que es sobre la base de la comprensión intuitiva que reconocemos una demostración ordinaria de una afirmación teoremática, pero, en segundo lugar, *solo cuando la demostración canónica no exige que se introduzcan construcciones «ajenas» a esta comprensión ordinaria, es que tanto la demostración ordinaria como la canónica, son **CT***. Evidentemente, en este mismo punto es donde la elucidación del concepto de *demostración canónica* es fundamental, pues es en el tránsito entre la demostración ordinaria y la canónica donde las metáforas «conceptualmente ajeno» y «hiato conceptual» de la caracterización pre-teórica de **CT**, exigen a su vez una clarificación[47].

[46]Véase Isaacson (1987) y Hallett (2008); cf. Arana and Mancosu (2012)

[47]Véase, por ejemplo Weiss (1997), Placek (1999).

Es cierto que la noción dummettiana de *demostración canónica* es extremadamente programática, y ciertamente, un *locus* de la problemática refiere a las similaridades o diferencia con el concepto *teórico-demostrativo* de *demostración normal*, asi como con los procesos de *normalización*. No obstante, y solo a modo de especulación, la idea de que una demostración canónica es una demostración *fully analysed*[48] de la demostración ordinaria, es sugerente. Para pensar en una lectura pre-teórica de **CT** de acuerdo con una aproximación inferencialista, podríamos concentrarnos en la relación entre la *demostración ordinaria* y la *demostración canónica*; sin embargo, para tal fin no necesitamos comprometernos ni con la doctrina intuicionista sobre el carácter «constructivo» de los recursos demostrativos, ni entender «demostración canónica» únicamente como *demostración normal* (sintáctica)[49].

Considérese, por ejemplo, la demostración *ordinaria* como una suerte de «entimema» del modo en que lo hace Lassalle Casanave[50], esto es, una demostración (ordinaria) como un *discurso público* donde su carácter entimemático no se debe a una «falta» de premisas, sino al hecho de que «si alguna de ellas es cosa sabida, no es preciso decirla, porque el propio oyente la pone»[51]; es pues, en este sentido aristotélico que Lassalle Casanave concibe *retóricamente* las demostraciones matemáticas. Las demostraciones (pruebas) canónicas vendrían a ser el *detalle* de la demostración entimemática[52].

Si adoptamos una aproximación inferencialista al tópico (que no forma parte de las preocupaciones de Lassalle Casanave), podríamos sostener que el tópico de un teorema se caracteriza por medio del «espacio de posibilidades de argumentación» que ofrece la teoría donde pertenece la demostración ordinaria. Así pues,

[48][Dummett (2000): 68].

[49]Si la entendemos «demostración canónica» como una demostración normal, entonces se llega a una abordaje como en Arana (2009). Cf. Sección 4.1.2.

[50][LassalleCasenave (2019): §§1,4].

[51]*Retórica* 1357a18-22. Traducción de Racionero (1999).

[52][LassalleCasenave (2019): 114].

si distinguimos entre *demostraciones ordinarias* (entimemáticas) y *demostraciones detalladas* («canónicas»), entonces podemos –vía inferencialismo– distinguir entre, digamos, un «tópico ordinario» y un «tópico canónico». De esta manera, si la demostración canónica no introduce conceptos «ajenos» al tópico de la demostración ordinaria, entonces el inferencialismo nos habilita a sostener que ni la demostración ordinaria, ni la demostración canónica introducen conceptos «ajenos» al teorema. Luego, la demostración ordinaria sería conservativamente tópica (**CT**) respecto del teorema porque el tópico canónico verifica que la demostración ordinaria identifica adecuadamente el tópico del teorema. Naturalmente, en tal caso también ocurriría que la demostración ordinaria y la demostración canónica no tienen diferencias tópicas (sustantivas). Por lo tanto, para determinar que una demostración ordinaria satisface **CT**, podríamos verificar que una eventual demostración canónica *no introduce conceptos «ajenos» a la demostración ordinaria*.

Ahora bien, ¿cómo *restringimos* los conceptos que pueden figurar en la demostración canónica? En este punto, Lassalle y Panza sugieren la idea de que una *teoría* matemática «se identifica con un espacio de posibilidades de argumentación, con un sistema razonablemente claro de autorizaciones o, por analogía con el derecho, con un conjunto suficientemente codificado de reglas de potestades»[53]. Así pues, las demostraciones ordinarias ofrecen un conjunto de «instrucciones» para construir las demostraciones detalladas (canónicas)[54], pero Lassalle y Panza sugieren que hay un espacio de posibilidades que *delimitan*, y dicho espacio estaría dado por las *teorías* a la que la demostración ordinaria pertenece. En este sentido, podríamos sugerir que es la delimitación de ese «espacio de posibilidades» lo que permite introducir una restricción tópica que diferencie los concepto «ajenos» de los «propios». En otras palabras, cuando la demostración canónica *va más allá del espacio de posibilidades* habilitado por la teoría en la que se sitúa la demostración ordinaria, entonces la misma introduce algún concepto «ajeno» a la demostración ordinaria[55].

[53][Casanave and Panza (2015): 157].

[54][Casanave and Panza (2015): 159].

[55]Es importante aclarar aquí lo siguiente: de acuerdo con la noción de *prueba canónica* de

Pero ¿cómo una demostración canónica puede introducir conceptos «ajenos» a la demostración ordinaria? Podemos ilustrar brevísimamente este punto con el caso de la demostración de la Proposición I.1 de los *Elementos*. Consideremos la demostración del propio Euclides como una demostración entimemática (ordinaria), puntualmente en lo que hace a la existencia del punto C, –i.e. la intersección de los círculos de igual radio. Así pues, podríamos «detallar» que la inferencia que concluye con la existencia del punto C involucra una *proposición* como la siguiente:

> Dados dos círculos Γ, Δ, si Δ contiene al menos un punto dentro de Γ, y Δ tiene al menos un punto fuera de Γ, entonces Γ y Δ se intersectan[56].

Esta proposición podría ser demostrada euclideanamente apelando a una construcción (diagrama incluido) y a las definiciones de *círculo* (Def. I.15) y *región* (Defs. I. 5 - 7)[57]. Así pues, en una demostración canónica este detalle no va más allá del espacio de posibilidades demostrativas de la teoría (en el sentido de Lassalle Casanave) de Euclides. No obstante, también podríamos pensar es introducir un *axioma de continuidad*, tal como el Axioma de Arquímedes, o el Axioma de la Cota Superior para los números reales (a partir del cual podemos deducir la propiedad arquimediana). En tal caso, resulta evidente que estaríamos *excediendo* el espacio de posibilidades de la teoría de Euclides donde pertenece la demostración entimemática; luego, una demostración canónica[58] tal estaría introduciendo un concepto «ajeno» a los *Elementos*, a saber, $\Re$. Por lo tanto, podríamos decir que la demostración de Euclides es conservativamente tópica debido a que *hay* una demostración detallada que no excede el espacio de posibilidades habilitado por la teoría de Euclides, mientras que una

la Lassalle Casanave, no podríamos tener tales pruebas cuando el «detalle» de la demostración entimemática va más allá del espacio de posibilidad de la teoría. Aquí sin embargo, no pretendemos introducir tal restricción en la caracterización de demostración canónica; más bien ocurre que esta restricción la empleamos aquí para abordar la metáfora de «concepto ajeno». Así pues, las pruebas canónicas de Lassalle Casanave (en una teoría) vendrían a ser, en nuestro planteo, las demostraciones que *identifican* el tópico inferencial del teorema y, de esta manera, nos informan que la demostración ordinaria (entimemática) sería una demostración conservativamente tópica.

[56]Véase [Greenberg (1993): 94] y [Hartshorne (2013): 108].

[57]Véase [Shabel (2017): §1.2.4].

[58]Para evitar confusiones, es importante aclarar que para Lassalle Casanave esta demostración detallada no es «canónica» en su sentido.

demostración detallada que apele a un axioma de continuidad para números reales *no es* conservativamente tópica, pues dota a I.1 de un tópico inferencial «ajeno» al tópico inferencial que la demostración ordinaria le otorga.

El modo que adopta la relación **CT**, según la aproximación inferencial que estamos considerando ahora, satisface el *criterio de adecuación* presentado en el Capítulo 3, página 55, este era: si $CT\,[D, \phi]$ y $\neg CT\,[D^{*}, \phi]$, entonces la demostración canónica de D y la demostración canónica de D^{*} serán tópicamente distintas, desde una perspectiva *exclusivamente tópica*. La razón es que si la demostración canónica de φ es una demostración *conservativamente tópica* respecto a la demostración ordinaria de φ, entonces son entonces no hay nada «ajeno» en la demostración canónica; por lo tanto, ambas demostraciones son sustantivamente similares *desde el punto de vista tópico*.

En definitiva, en los párrafos de arriba intentamos sugerir cómo podría abordarse la relación **CT** desde una aproximación inferencialista al estilo de Dummett (por su inferencialismo), aunque no completamente fiel a él, pero también hemos tomado la noción de *prueba canónica* de Lassalle Casanave. Al hacer esto, pretendemos dar razones para creer que es admisible la exploración pre-teórica de **CT** desde una aproximación inferencialista (como la que arriba se describe). Este hecho no es trivial para la discusión actual, dado que, por ejemplo, en Arana and Mancosu (2012) se argumenta extensivamente contra una aproximación que los autores denominan «contenido formal», y que no es exactamente la misma que aquí se ha esbozado. Una discusión detallada acerca de las críticas de Arana y Mancosu excede con creces el alcance de nuestra tesis.

Para finalizar esta sección conviene explicitar mejor lo que se pretende obtener de las discusiones precedentes: en **primer** lugar, la *aproximación global* no parece adecuada, o fructífera para indagar acerca de la pureza de las demostrqciones, al menos desde el punto de vista que se plantea en esta tesis (especialmente en el Capítulo

2). En **segundo** lugar, identificamos dos aproximaciones al tópico, «formulacional» e «inferencialista», las cuales parecen conducirnos a *distintos conceptos pre-teóricos de* ***CT***. En **tercer** lugar, sugerimos algunos desafíos o dificultades («sinonimia cognitiva», «demostración canónica», por ejemplo), a las que ambas aproximaciones parecían tener que enfrentarse a la hora de avanzar hacia un concepto *teórico* de **CT**. En **cuarto** lugar, hay una dificultado *común a ambas aproximaciones*, la caracterización de lo que se entienda por «entendimiento ordinario». En la próxima sección intentaremos poner en práctica estas reflexiones pre-teóricas en la comparación de tres demostraciones del teorema de Pitágoras.

4.2. CT ante el *Teorema de Pitágoras*

Para terminar el presente capítulo, podemos ilustrar brevemente las distintas aproximaciones reseñadas en la sección anterior, considerando algunas demostraciones y formulaciones del *Teorema de Pitágoras* (**TP**)[59]. Consídere pues las siguientes formulaciones de **TP**:

Teorema 4.1 (Prop. I.47 de los *Elementos*)**.** *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiene el ángulo recto es igual* [congruente] *a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*

Teorema 4.2 (Formulación algebraica de **TP**)**.** *Dado cualquier triángulo rectángulo cuya hipotenusa* $a = \overline{|BC|}$, *sea* $b = \overline{|AC|}$ *y* $c = \overline{|AB|}$*; entonces* $a^2 = b^2 + c^2$.

Teorema 4.3 (Formulación trigonométrica de **TP**)**.** *Sea* θ *un ángulo agudo en un triángulo rectángulo; luego* $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$.

Antes de presentar las demostraciones para 4.1, 4.2 y 4.3 conviene detenerse en una comparación de las tres formulaciones de **TP** ¿Hay alguna diferencia conceptual

[59]Es importante advertir que esta ilustración es «intuitiva» debido a que estamos apelando a la caracterización de **CT** de la página 69. Así pues, de acuerdo a la interrogante (ii) (pagina 108), lo que haremos es señalar para cada caso los elementos de las demostraciones que son relevantes para su comparación tópica con **TP**.

o *tópica* entre ellas?[60] Esta pregunta es relevante para nosotros debido a que si efectivamente hay diferencias tópicas, entonces las demostraciones de éstas serían demostraciones de *distintos* teoremas. Así pues, si consideramos la aproximación «global», simplemente diríamos que 4.1, 4.2 y 4.3 son todas representaciones de un resultado general, a saber, la *Ley de Cosenos*[61].

Por otro lado, si consideramos una aproximación «formulacional», es factible observar que 4.1, 4.2 y 4.3 pueden guardar diferencias. Dado que en el Capítulo 6 presentaremos un modelo de pureza que responde al abordaje «formulacional» de Arana, Detlefsen (y en menor medida Mancosu),[62] concentrémonos en abordar las diferencias entre las formulaciones atendiendo a los conceptos involucrados en sus contextos teóricos[63]. De este modo, la formulación 4.1 tiene un contexto claro: los *Elementos* de Euclides, particularmente el Libro I donde se encuentra 4.1 [64] . Consideremos entonces un «agente euclideano» para atacar el tópico de 4.1 [65] . Así, expresiones como «el cuadrado del lado» $\overline{AB}$, designan una *figura* geométrica (concretamente, un cuadrado), mientras que expresiones como «el triángulo $\overline{ABC}$ es igual al cuadrado $\overline{DEGH}$» significan que ambas figuras tienen el mismo «tamaño», puntualmente, la misma *área*[66].

¿Qué ocurre cuando enfrentamos a nuestro «agente euclideano» a la formulación

[60] Aquí la disyunción «conceptual» atiende al hecho de que la diferencia en los conceptos involucrados en distintos enunciados es redunda en una diferencia en el «tópico».

[61] La ley de cosenos se formula usualmente como $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\, cos\gamma$, donde γ refiere al ángulo contenido entre los lados de longitud c y b y opuesto al lado de longitud a. Así pues, si γ es un ángulo recto –i.e. 90º o $\frac{\pi}{2}$ radiantes, entonces $cos\ \gamma = 0$; luego la ley de cosenos se reduce a 4.2 –i.e. $a^2 = b^2 + c^2$.

[62] Véase la página 78.

[63] Cfr. la caracterización de «agente» del Capítulo 6.

[64] Los libros I - IV forman una unidad temática en los *Elementos* que barca la *geometría plana* libre de la teoría de la proporción (que recién es introducida en el Libro V).

[65] El análisis que sigue a partir de aquí, vamos a abordar las formulaciones 4.2 y 4.3 por comparación con el tópico de 4.1. Esta prioridad respecto a 4.1 es una *elección* que hacemos porque entendemos que así se ilustra mejor la relación entre tópico y **CT**; pero nada de lo que hemos dicho (particularmente sobre la aproximación «formulacional»), impide que prioricemos alguna de las restantes formulaciones.

[66] Recuérdese que *longitudes*, *áreas* y *volúmenes* son todas ellas «magnitudes».

4.2? El enunciado 4.2 suele ser la formulación estandarizada actual. Así mismo, no es inusual que se considere a la formulación 4.2 como una formulación de 4.1 en «notación moderna»[67]. Sin embargo, podría decirse que si afinamos el análisis, 4.2 no es *simplemente* una formulación de 4.1 en «notación moderna», sino que se trata de la imposición de una interpretación algebraica de Euclides –i.e. el «álgebra geométrica», que distorsiona so contexto teórico[68]. Así, se objetaría que 4.2 no es una paráfrasis de 4.1 en «notación moderna», pues Euclides *nunca* multiplica una longitud a por sí misma par producir su cuadrado a^2; es decir, en la geometría de Euclides, el cuadrado *sobre* el lado no es el cuadrado *del* lado. Este último es una *región* del plano (un cuadrado) el cual tiene cierto «tamaño»[69]. Otro tanto ocurre con $=$, pues para Euclides la *igualdad geométrica* no es una *igualdad aritmética*; puntualmente, mientras que $a = b$ quiere decir que el objeto denotados por a y por B son el *mismo objeto*, para Eulides «iguales» quiere decir que tienen el mismo *tamaño*[70].

No obstante, la formulación 4.2 acompañada de la figura 4.1, quizás permita proveer una lectura comprensible para nuestro «agente euclideano»; es decir, ¿podría verse en 4.2 una formulación más o menos *sinónima* respecto de 4.1? No debe subestimarse la relevancia de esta pregunta para una aproximación «formulacional», pues si las diferencias formulacionales implican diferencias tópicas –i.e. si 4.1 y 4.2 no fueran «sinónimas», entonces no podríamos comparar las demostraciones respectivas como demostraciones de un *mismo* resultado[71]; luego, no podríamos compararlas en términos de **CT** (dado que se tratarían de teoremas distintos). De esta manera, si 4.1 y 4.2 pueden, en algún sentido, considerarse sinónimas, entonces hay condiciones para compararlas según **CT**[72].

[67]En las traducciones contemporáneas de los *Elementos* –Heath (1956), por ejemplo– suelen emplear esta notación moderna para para *parafrasear* teoremas «de los *Elementos*».

[68]Grattan-Guinness (1996).

[69][Grattan-Guinness (1996): 361].

[70]*Íbid.* .

[71]Cfr. página 92.

[72]Véase Capítulo 3,página 55.

Por mor de la exploración intuitiva de esta aproximación, podemos sugerir cierta *convención* que le permitiese a un agente euclideano entender 4.2 a la luz de 4.1, o eventualmente considerar ambas formulaciones como «sinónimas». Considérese pues que en vez de designar «a^2» una operación *homogénea* entre números[73], esta expresión deviene en una abreviación de «el cuadrado $BCDE$», si convenimos en que $a = \overline{BC}$, por ejemplo; o que el rectángulo $BIDL = a \cdot d$, si convenimos además que $d = \overline{BI}$. Así mismo «$c^2 + b^2$» designa la suma mereológica de las áreas c^2 y b^2, y no la operación aritmética de *adición*; finalmente, «=» vendría a significar *congruencia*, y no «mismo objeto»(4.2 (b))[74].

Así pues, un «agente euclideano» no necesariamente requiere incorporar *nuevos* conceptos para comprender 4.2, en particular, no tiene por qué interpretar esta formulación como lo hacemos *nosotros* –i.e. algebraicamente, sino que bastaría con que tuviese presente la convención sugerida para poder comprender «euclideanamente» el enunciado 4.2. Recuérdese que estamos tomando la formulación 4.2 aisladamente y asignándoles un contexto teórico para atribuirle un tópico. Así pues, cuando decimos que el agente euclideano podría «entender» por medio de convenciones el enunciado 4.2, no queremos decir que este agente vea en «=» una identidad *aritmética*; más bien queremos decir que bajo la convención « $a = \overline{|BC|}$, sea $b = \overline{|AC|}$ y $c = \overline{|AB|}$», «$a^2 = b^2 + c^2$» podía ser entendido «euclideanamente». En tal sentido, no estamos obligados a interpretar 4.2 algebraicamente, sino que podemos leerla «euclideanamente» por medio de una convención como la del párrafo anterior. Es pues tomando en cuenta la misma *para* el agente euclideano, que podemos concluir que no hay una diferencia «tópica» entre ambas formulaciones[75].

[73]Cfr. [Grattan-Guinness (1996): 361].

[74]Nótese que estas convenciones notacionales respetan el contexto teórico de los *Elementos* I - IV respecto de que el producto de segmentos es un área, y no un segmento como ocurre con el cálculo introducido por Descartes en su *Geometría*. Véase [Bos (2001): Cap. 6] para una explicación detallada de esta diferencia.

[75]Es importante aclarar que aquí no estamos intentando introducir la interpretación del «álgebra geométrica» –i.e. no estamos atribuyendo al agente euclideano un álgebra implícita. Pues estas convenciones no introducen una lectura algebraica de 4.2. Aquí estamos considerando las formulaciones

Por otro lado 4.3 sí parece ser una formulación sustantivamente distinta de 4.1; esto es, no parece ser tan evidente o trivial considerar 4.3 como una formulación alternativa a 4.1 (ni de 4.2) para un agente euclideano, pues por un lado, en 4.3 se introducen las operaciones de seno y coseno la cuales tienen como su producto a *longitudes* de segmentos y no áreas. Por otro, el flanco derecho de la identidad en 4.3 es la unidad. Es decir, la hipotenusa en este caso está representada por una longitud concreta, mientras que en las otras formulaciones la hipotenusa no es una magnitud concreta (Fig. 4.3). Así pues, para entender que el flanco derecho de la identidad en 4.3 no le quita generalidad a esta formulación (en comparación con 4.1), debemos tener en cuenta que en el contexto trigonométrico de 4.3, las diferencias escalares no afectan la identidad entre la hipotenusa y la suma de las razones del flanco izquierdo, (expresadas por medios de las operaciones de seno y coseno). El punto aquí es que estas diferencias no son triviales sino sustantivas, pues no podríamos considerar a expresiones como $sen\theta$ como meras «abreviaciones» de conceptos presentes en *Elementos* I - IV. Para que nuestro agente euclideano perciba (entienda) que 4.3 es una reformulación de 4.1, debemos tener presente un contexto teórico lo suficientemente amplio (la trigonometría, por ejemplo) en el cual 4.3 y 4.1 sean «traducibles» una en otra[76]. Por lo tanto, desde este punto de vista, puede decirse que 4.3 y 4.1 tienen un tópico distinto.

Ahora bien para comparar esta aproximación «formulacional» con una aproximación «inferencial», pasemos a considerar unas demostraciones de 4.1, 4.2 y 4.3.

Demostración de 4.1 (resumen de *Elementos*, I.47). Sea ABC un triángulo rectán-

de **TP** de una forma aislada, donde de acuerdo con la aproximación «formulacional» de Arana, Detlefsen y Mancosu, estamos dotando a este «agente euclideano» de un contexto teórico, a partir del cual le atribuimos un tópico a las formulaciones. En tal sentido, este agente entiende el contenido de = –por ejemplo– *geométricamente*, y no «algebraicamente». Dicho de otra manera: aquí se está «geometrizando» el tópico de 4.2, no «algebrizando» el tópico de 4.1. Es en este sentido que esta sugerencia exploratorioa sostiene que 4.1 y 4.2 pueden ser vistas como «sinónimas».

[76]Una aduana fundamental en esta extensión es la incorporación de la teoría de la proporción del Libro V de los *Elementos*.

gulo cuyo ángulo recto es BAC (Fig. 4.1), constrúyase un cuadrado sobre cada uno de sus lados (de cuerdo con la Prop. I.46), y nótese que como $\angle BAC$, $\angle BAG$, y $\angle CAH$ son todos ángulos rectos, $\overline{AH}$ y $\overline{AG}$ son extensiones de los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{CA}$, por lo que los segmentos $\overline{CG}$ y $\overline{BH}$ son paralelos al segmento $\overline{BF}$ y $\overline{CK}$ respectivmente. Luego, trácese una recta perpendicular de A al segmento $\overline{DE}$, interceptando $\overline{BC}$ en I –i.e. $\overline{AI}$ es la altura del triángulo ABC, así como $\overline{DE}$ en L. El segmento $\overline{LI}$ divide entonces, al cuadrado sobre $\overline{BC}$ en dos rectángulos, por lo que *la idea central de la demostración es mostrar que el área del cuadrado de lado $\overline{AB}$ es igual (congruente) al área del rectángulo $BDLI$ y el área del cuadrado de lado $\overline{AC}$ es igual (congruente) al área del rectángulo $CELI$*. La herramienta principal para hacer esto es la Prop. I.41, la cual en esencia dice que todos los triángulos de igual base e igual altura tienen la misma área. De esta manera, si trazamos los segmentos $\overline{AD}$, AE, $\overline{CF}$ y BK, entonces los triángulos BCF y ABF tienen la misma área (la mitad del área del cuadrado de lado $\overline{AB}$), del mismo modo que los triángulos BCK y ACK (la mitad del área del cuadrado de lado $\overline{AC}$). Por otro lado, el triángulo ABD tiene la mitad del área del rectángulo $BDLI$ y el triángulo ACE tiene la mitad del área del rectángulo $CELI$. Pero los triángulos BCF y ABD son congruentes, como también lo son los triángulos BCK y ACE, por el criterio del lado-ángulo-lado (Prop. I.4), dado que los ángulos $\angle CBF$ y $\angle DBA$ son iguales (cada uno es un ángulo recto más el ángulo $\angle ABC$), como también lo son los ángulos $\angle BCK$ y $\angle ACE$ (cada uno es un ángulo recto más el ángulo $\angle ACB$). Luego la mitad del área del cuadrado de lado AB más el área del cuadrado de lado $\overline{AC}$ es igual a la mitad del área del rectángulo $BDLI$ más la mitad del área del rectángulo $CELI$, a partir de lo cual se obtiene el resultado deseado por medio de multiplicar por dos[77]. $\square$

Demostración de 4.2. En la Fig. 4.2(a), sea $y = \left|\overline{BI}\right|$. El triángulo ABC es similar al triángulo ABI y al triángulo ACI (dado que los ángulos correspondientes son iguales), luego su lados correspondientes son proporcionales. En particular, ocurre

[77][Dawson (2015): 27 - 28].

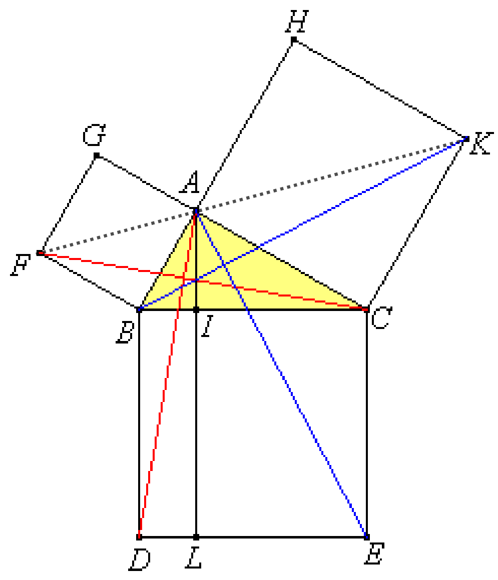


Figura 4.1: Diagrama «cometa» en *Elementos*, I.47.

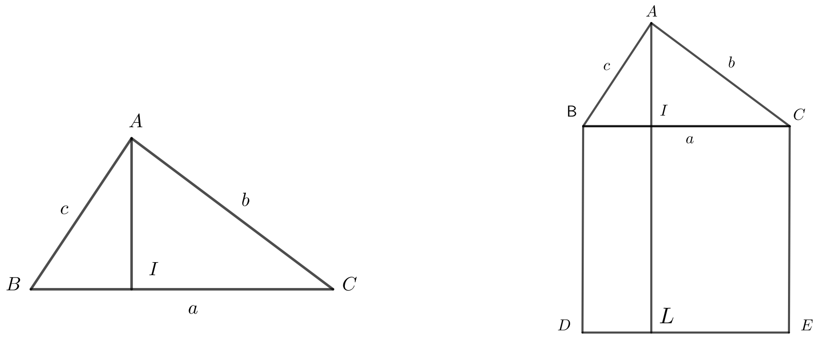
que $a/c = c/y$ y $a/b = b/(a-y)$; esto es, $ay = c^2$ y $a(a-y) = a^2 - ay = b^2$. Luego $a^2 - c^2 = b^2$ y finalmente, $a^2 = b^2 + c^2$.

□

Demostración de 4.3 (por trigonometría). Dado que las razones de los lados del triángulo no son afectados por las diferencias escalares, es suficiente con considerar un triángulo rectángulo ABC cuya hipotenusa sea el radio de un círculo de longitud 1 y su ángulo recto en A. Situemos el ángulo θ en el vértice C, y situemos a C (por conveniencia) en el origen de un sistema de coordenadas (Fig. 4.3(a)). Eríjase la altura $\overline{AI}$ (4.3(b)). En el triángulo ACI, $cos\theta = \frac{|\overline{CI}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{CI}|}{cos\theta}$, mientras que en el triángulo BAI, $sin\theta = \frac{|\overline{BI}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{BI}|}{sin\theta}$, dado que el ángulo $BAI = \theta$. Luego, $1 = |\overline{CI}| + |\overline{BI}| = cos^2\theta + sen^2\theta$[78]. □

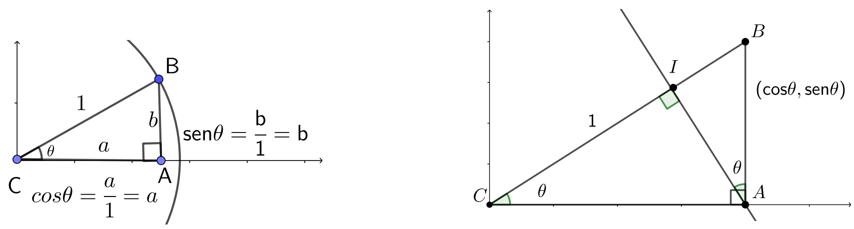
La demostración de 4.1 es un resumen de la demostración de Euclides y su estrategia (o «idea central») es la de comparar áreas –i.e. las áreas de las figuras $BAGF$,

[78] [Dawson (2015): 31].



(a) (b)

Figura 4.2: (a) demostración de **4.2**. (b) base del diagrama «cometa» (Fig.4.1).



(a) a (b) b

Figura 4.3: (a) círculo unitario. (b) demostración de **4.3**.

$ACKH$ y $DEBC$, donde dicha comparación emplea el concepto de *congruencia* entre figuras. En cuanto a la demostración de 4.2, lo que se observa es que no hay ninguna referencia a *áreas* (y menos aún a su comparación); en lugar de ello, lo que se observa es que sólo relaciones entre *longitudes* están involucradas. A tales efectos, el núcleo conceptual de la demostración es el concepto de *similaridad* entre triángulos: las proporciones $a/c = c/y$, $a/b = b/(a-y)$ son inferidas del hecho de que el triángulo $\triangle ABC$ es *similar* a los triángulos $\triangle ACI$ y $\triangle ABI$.

Desde una aproximación «formulacional», la demostración de 4.1 parece ser pura, –i.e. conservativamente tópica, pues conceptos centrales de la demostración de Euclides, tales como el de *paralelismo*, y la estrategia de comparar áreas de los cuadrados levantados sobre los lados de los triángulos, nos exigen mayor comprensión de lo que exige la comprensión de la Proposición I.47 de los *Elementos*. Por otro lado, la demostración (algebraica) de 4.2 no es conservativamente tópica respecto a la lectura euclideana de 4.2, y en definitiva, respecto al tópico de 4.1[79]. Podríamos además decir que la situación es más dramática si enfrentamos al agente euclideano con la demostración de 4.3, pues en este caso no sólo no lograría comprender la demostración, sino que como ya hemos dicho, tampoco comprendería la formulación –i.e. no comprende 4.3. En este sentido, podría sugerirse que en relación al tópico (euclideano) de 4.1, las demostración trigonométrica de 4.3 es *más impura* que la demostración de 4.2; pues, mientras que nuestro agente podría –convenciones mediante– llegar a entender «euclideanamente» 4.2, aunque no su demostración, en el caso de la demostración de 4.3 ni siquiera vería en *su* conclusión –4.3– un mera reformulación de 4.1.

Si consideramos la demostración de 4.2, respecto de una lectura algebraica ordinaria de 4.2, –i.e. como una *identidad* entre magnitudes, entonces podríamos decir que esta demostración *no es conservativamente tópica* según la aproximación formulacional. La razón podría consistir en lo siguiente: el concepto de similaridad (o semejanza) de triángulos no parece ser necesario para comprender la formulación 4.2, por lo que su presencia en la demostración (presencia fundamental) es «ajena» al tópico algebraico del teorema. Concretamente, la similaridad entre los tres triángulos de la figura 4.2(a) está al servicio de la manipulación algebraica, pues la identidad entre las proporciones a/c y c/y nos permite (manipulación algebraica mediante), obtener c^2, –i.e. el cuadrado de la magnitud de uno de los lados del

[79]Cabe recordar que efectivamente, la demostración de 4.2 es impura en relación a la lectura «euclideana» de 4.2, si se acepta que el agente euclideano podría llegar a entender esta formulación por medio de convenciones. Pero si no se acepta tal posibilidad –i.e. si se sostiene que 4.1 y 4.2 tienen tópicos sustantivamente distintos, entonces las demostraciones de 4.1 y 4.2 no podrían ser *comparadas* en términos de **CT**, pues se tratarían de teoremas distintos. En este punto, nuevamente se pone de manifiesto la importancia de contar con cierta noción de *sinonimia* para una aproximación «formulacional», pues con una noción tal podríamos evaluar mejor si las diferencias en las formulaciones de 4.1 y 4.2, son además diferencias tópicas. Digámoslo de otra manera: sin una noción de sinonimia ¿cómo evaluaríamos cuándo una diferencia formulacional es o no una diferencia tópica?

triángulo pitagórico; por otro lado, la identidad $a/b = b/(a - y)$ está al servicio de obtener $a^2 - ay = b^2$, a partir de lo cual llegamos –gracias a que $ay = c^2$– a la identidad $a^2 - c^2 = b^2$, de donde trivialmente obtenemos la identidad requerida por la formulación del teorema, –i.e. $a^2 + b^2 = c^2$. Así pues, no se requiere del concepto de semejanza entre triángulos para comprender la manipulación algebraica que conduce a la identidad deseada, ni se requiere para comprender la identidad misma; la semejanza entre los triángulos tiene una importancia *meramente estratégica*, –i.e. como medio para introducir las identidades $a/c = c/y$ y $a/b = b/(a - y)$, pero esta estrategia no viene tópica o conceptualmente «sugerida» por la identidad $a^2 + b^2 = c^2$.

Para terminar con la aproximación formulacional, consideremos la demostración de 4.3. No es necesario aclarar que la formulación 4.3 no puede ser entendida por nuestro agente euclideano (el cual solo conoce los contenidos de los libros I - IV), ni tampoco su demostración. Ahora bien, en este caso no parece valer la observación hecha a la demostración algebraica, acerca de que el concepto de semejanza de triángulos, pues, en el caso trigonométrico el término $cos^2\theta + sen^2\theta$ es igualado a la unidad, –i.e. a 1. ¿Cómo puede formularse el teorema igualando $cos^2\theta + sen^2\theta$ a 1 sin perder generalidad? Es debido a que las diferencias de *escala* entre triángulos no afecta las identidades de proporciones, que podemos introducir un triángulo con hipotenusa igual a la unidad. Así pues, el concepto de similaridad de triángulos empleado (aunque no explicitado)[80] en la demostración trigonométrica, no resulta ser «ajeno» al tópico de la formulación trigonométrica. Por último, cabe aclarar que el empleo de un sistema de coordenadas (cartesianas) en la demostración trigonométrica no introduce conceptos «ajenos» a la formulación del teorema, en tanto las operaciones de *seno* y *coseno* se definen ordinariamente como *funciones*, incluso suelen definirse en la práctica, sobre la base de un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud 1, a partir del círculo unidad cuyo centro se sitúa en el origen del

[80]Puntualmente, como se observa en la figura 4.3(b), $\angle ICA = \angle BAC = \theta$. Esto se debe a que la altura $\overline{IA}$ de $\triangle BAC$, hace que los triángulos $\triangle BAC \sim \triangle BAI \sim \triangle CAI$, por lo que los ángulos agudos en cuestión son congruentes.

sistema de coordenadas. De este modo, la comprensión de las operaciones de *seno* y *coseno* emplean un sistema de coordenadas.

Desde el punto de vista de la aproximación «inferencial», la demostración de Euclides de 4.1, determina que las expresiones «igual» y «el cuadrado del lado» significarían «congruencia» y «área», respectivamente; luego, podríamos decir la demostración de Euclides es conservativamente tópica porque no introduce conceptos «ajenos» al espacio argumental habilitado por los libros I - IV; incluso podría decirse que si la demostración de los *Elementos* es canónica respecto al resumen presentado arriba, entonces la primera es conservativamente tópica respecto de la segunda. Así mismo, si restringimos la teoría a la que la demostración de Euclides pertenece, –i.e. a los libros I - IV, entonces podemos sostener que la demostración algebraica (de 4.2) no es conservativamente tópica respecto de 4.1. Concretamente, la demostración algebraica nunca podría ser una demostración canónica de 4.1 debido al empleo del concepto de similaridad de triángulos, el cual resulta «ajeno» al espacio de posibilidades argumentales ofrecido por la teoría de los libros I - IV. Luego, ocurre que desde la aproximación «inferencial» las formulaciones 4.1 y 4.2 tienen tópicos *sustantivamente* distintos, esto es, nuestro agente euclideano no podría servirse únicamente de la convención de arriba para entenderla. Por lo tanto, si estas formulaciones tienen un tópico dado por sus respectivas demostraciones, entonces la diferencia de *formulación* entre 4.1 y 4.2, no significa de por sí que haya una diferencia conceptual sustantiva; ahora bien, de acuerdo a la aproximación «inferencial», estas dos formulaciones son tópicamente discriminables, pero no meramente en virtud de las diferencias *formulacionales*, sino en virtud de sus *demostraciones*.

Pero ¿es la demostración algebraica conservativamente tópica respecto de la formulación 4.2, según la aproximación inferencial? Resulta evidente que la demostración de arriba puede ser elaborada con mayor *detalle* y, en tal sentido, podríamos obtener –a partir de ella– una demostración «canónica». No obstante, se aprecia que un desarrollo «detallado» de esta demostración no tiene por qué introducir conceptos del álgebra superior, ni ir más allá del concepto de semejanza de triángulos (junto con las reglas de manipulación algebraica básica). Nótese que la pertinencia del concepto de semejanza de triángulos no se evalúa comparándolo con los conceptos requeridos para comprender la formulación del teorema, tal como se haría de acuerdo con la aproximación formulacional. Pues, lo que en la aproximación inferencial tomamos como «tópico intuitivo» del teorema supone ya los conceptos presentes en la «demostración ordinaria»; en este caso, el concepto de semejanza de triángulos *es parte de ese tópico intuitivo*.

Así pues, si se pretende ofrecer una demostración más detallada de la ofrecida arriba, debemos en primer lugar, debemos detallar cómo obtenemos las identidades $a/c = c/y$ y $a/b = b/(a-y)$, a partir del los triángulos $\triangle BAC$, y $\triangle AIC$. Específicamente, los triángulos $\triangle BAC$ y son semejantes, pues comparten dos ángulos ($\angle BAC$, $\angle BIA$ son ambos ángulos rectos, mientras que $\angle ABC$ y $\angle ABI$ son compartidos por ambos triángulos). Luego, por el teorema de Tales, se obtiene la proporcionalidad: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$. Dado además, que podemos reemplazar los segmentos por sus longitudes, obtenemos (siendo $h = \overline{AI}$): $a/c = c/y = b/h$. De aquí extraemos la identidad $a/c = c/y$, que es la que necesitamos y figura en la demostración de arriba (nótese que en la demostración de arriba, se dice «en particular, ocurre que»). Por un razonamiento análogo, ocurre que los triángulos $\triangle BAC$ y $\triangle AIC$, pues los ángulos $\angle BAC$ y $\angle AIC$ son ambos rectos, mientras que los ángulos $\angle ACB$ y $\angle ACI$ son compartidos. Luego, también por el teorema de Tales, se obtiene la proporcionalidad: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$. Así, se obtiene la identidad $c/h = b/a - y = a/b$, a partir de la cual extraemos «en particular» la ecuación $a/b = b/(a-y)$. El resto del «detalle» es una trivial manipulación algebraica, y para más detalle, podríamos explicitar las inferencias «lógicas»; pero difícilmente podría sostenerse que el «detalle» de la demostración ordinaria arriba presentada, excede los conceptos involucrados en esta. Por lo tanto, podríamos decir que la demostración en cuestión es *consevartivamente tópica* desde la perspectiva inferencialista.

Por último, la demostración de 4.3 –la cual emplea el mismo diagrama que la demostración de 4.2[81]–, también hace un uso esencial del concepto de similaridad entre triángulos, pero invoca a su vez, las operaciones de $seno$ y $coseno$ sobre el ángulo θ. Ciertamente, no parece difícil sostener que una demostración «más detallada» a la ofrecida pueda introducir conceptos «ajenos» a los que se requieren para comprender la demostración «ordinaria» arriba presentada (nótese que la misma contiene implícitamente el razonamiento sobre semejanza de triángulos de la demostración algebraica).

Una última cuestión referida a la comparación tópica, entre las demostraciones algebraica y trigonométrica, resulta ser de interés desde la perspectiva inferencialista . La cuestión es la siguiente: ¿hay una diferencia tópica sustantiva entre ambas demostraciones? Pero antes de presentar un respuesta tentativa a esta pregunta, debemos comprender cómo podemos introducir las operaciones de *seno* y *conseno* en la demostración algebraica. En la demostración de 4.2 (Fig. 4.2 (b)), $y = \overline{BI}$, pero al mismo tiempo $sen\theta = y$ (Fig. 4.3 (b)); luego $a\ sen\theta = c^2$ y $a^2 - a\ sen\theta = b^2$. Así pues, podemos introducir la operación se *seno*[82] en la demostración de 4.2.

Debido a esto, podríamos sostener que, desde la aproximación inferencialista, la demostración algebraica es una demostración «detallada» respecto a la demostración trigonométrica, pues en esta última la *notación* de *seno* y *coseno* permiten «compactar» la demostración; así pues, podríamos decir que la notación trigonométrica permitiría una demostración más *perspicua*[83]. Por otro lado, también podríamos invertir la cuestión: al *añadir* la *notación* trigonométrica a la demostración alge-

[81]Nótese que en la Fig. 4.3(b) el triángulo ABC se diferencia en orientación y posición sólo por «conveniencia».

[82]Análogamente podríamos introducir la operación de *coseno* atendiendo a la Fig. 4.2 (b), donde $a = c\,cosA + b\,cosA$, es decir, $a = c\left(\frac{c}{a}\right) + b\left(\frac{b}{a}\right)$.

[83]En [Dawson (2015): 31], se observa que la demostración trigonométrica de 4.3 es computacionalmente más simple que la demostración algebraica de 4.2, aunque ambas son algebraicamente «equivalentes». Así mismo, sostiene que la representación geométrica de $cos^2\theta + sen^2\theta$, como la longitud de la hipotenusa, le añade perspicuidad a esta demostración. Aquí pues, Dawson señala diferencias que no son precisamente *conceptuales*.

braica, ¿estamos *extendiendo* el tópico de la demostración algebraica al área de la trigonometría? Es decir, ¿estamos yendo conceptualmente *más allá* de propiedades de las *figuras* geométricas dadas (longitud), hacia propiedades de las *funciones* trigonométricas de *seno* y *coseno*?

Alexander Bogomolny[84], por ejemplo, sostiene que la introducción de la notación trigonométrica *no* añade nada conceptualmente (tópicamente) sustantivo a la demostración algebraica. Pues la relación de proporción entre longitudes de una figura es una propiedad de las *figuras* geométricas, la cual se conserva a través de las figuras similares . El hecho de que una proporción particular utilizada en la demostración desempeñe un papel suficientemente importante en la trigonometría y, más generalmente, en matemáticas, la cual merece una notación especial propia (*sen*, *cos*), no hace que la demostración *dependa* de esa notación. Es decir, no hace que la demostración sea *trigonométrica*.

Ahora bien, si damos por buena la observación de Bogomolny, entonces podríamos decir que la introducción de la notación trigonométrica en la demostración algebraica (de 4.2) es *conceptualmente espuria*, siendo a razón de ello que la notación trigonométrica no introduce nada «ajeno» a la demostración algebraica. Al mismo tiempo, se aprecia con más énfasis que la apoximación inferencialista es menos sensible a los recursos expresivos (formulaciones, notaciones) que la aproximación formulacional. En efecto: para la aproximación inferencial la notación trigonométrica que figura en la formulación trigonométrica del teorema de Pitágoras, –i.e. el teorema 4.3, no conduce a sostener que el tópico del mismo sea *trigonométrico*; sin embargo, para la aproximación formulacional, parecería que sí conduciría (no decimos «implicaría») a sostener tal cosa.

Para concluir este capítulo conviene destacar los puntos centrales abordados. En **primer lugar**, tenemos una caracterización intuitiva de **CT** (página 69) que recoge

[84]Véase en su blog *Cut the Knot*la entrada «Pythagorean Theorem», *Proof 6*.

las observaciones preeliminares del Capítulo 3 respecto a su dominio y aplicación[85]. En **segundo lugar** (página 108), se plantearon las interrogantes (i) y (ii) sobre una noción de «tópico» adecuada para fortalecer la noción intuitiva de **CT** –interrogante (i)–, mientras que respecto a la interrogante (ii) lo que se planteaba era qué elementos de las demostraciones debían ser considerados en la «comparación tópica». Respecto a esto último, hemos señalado en cada demostración planteada, aquellos conceptos relevantes en las distintas demostraciones presentadas (tales como los conceptos de similaridad de triángulos, áreas y operaciones de *seno* y *coseno*). Respecto de la interrogante (i), presentamos en la Sección 4.1 tres «aproximaciones al tópico» en matemáticas («global», «formulacional» e «inferencial»), de las cuales solo la «formulacional» e «inferencial» se encontraron útiles para ofrecer una lectura pre-teórica de la formulación pre-teórica de **CT**. En **tercer lugar**, se observo que podíamos ofrecer *dos lecturas distintas* de **CT**, una formulacional y otra inferencialista, donde cada una de ellas respetaba el *criterio de adecuación* de la página 55, y al mismo tiempo, permitía entender de distinta manera (aunque siempre en un plano pre-teórico) las expresiones «hiato conceptual» y «conceptualmente ajeno» que figuran en **CT**. En **cuarto lugar**, hemos sugerido un desafío para cada una de las aproximaciones al tópico que consideramos útiles: respecto a la aproximación formulacional, aparece el desafío de la *sinonimia*, mientras que para la aproximación inferencial, aparece el desafío del holismo.

Damos pues, por finalizada, la investigación pre-teórica respecto del enigma semántico de la pureza demostrativa en esta tesis. En el próximo capítulo avanzaremos en un investigación pre-teórica del enigma epistémico.

[85]Decíamos «pre-teórica» porque carecíamos de una noción concreta de «tópico», a la vez que hablamos metafóricamente de «hiato conceptual», o «conceptualmente ajeno».

Capítulo 5

Superioridad epistémica ¿Por qué las demostraciones puras son «valiosas»?

En el Capítulo 2 observamos, a lo largo de los pasajes allí citados, que la pureza del método, o la pureza de los «medios» era *preferible* o *privilegiada* respecto a los medios impuros. Por otro lado, hacia el final de la *Sección 3.2* del Capítulo 3, se sugería que la pureza demostrativa tenía un aspecto epistémico, el cual bautizamos como «superioridad epistémica» con la finalidad de dar a entender que, de algún modo, las demostraciones puras son epistémicamente «más valiosas» que las demostraciones impuras del mismo teorema.

Nuestra investigación pre-teórica acerca del enigma de la superioridad epistémica **SE**, va ser conducida del siguiente modo. En primer lugar, en la Sección 5.1 sugeriremos que **SE** puede ser abordada como una *virtud teórica* de ciertas demostraciones, análogamente a como se suele trabajar sobre los conceptos de *demostración explicativa*, *demostración perspicua*, etc.. En segundo lugar, y aceptando la sugerencia de pensar **SE** como una virtud teórica, en la Sección 5.2 abordamos la interrogante i): ¿a partir de qué característica propia de las demostraciones conservativamente tópicas, indagaremos la superioridad epistémica de las mismas? Como respuesta a esta interrogante, sugeriremos que las demostraciones conservativamente tópicas se caracterizan por su *especificidad*, mientras que por otro lado, exploraremos brevemente cómo esta especificidad puede ser abordada tanto por la «aproximación formulacional», como por la «aproximación inferencialista». En tercer lugar, indagaremos la siguiente interrogante: ii) ¿En qué sentido puede ser epistémicamente «valiosa» una demostración pura, de acuerdo con la literatura actual? Esto será hecho en la Sección 5.3. Finalmente, y en base a los trabajado en las secciones anteriores, en la Sección 5.4 se presenta una caracterización pre-teórica de **SE**, así como una caracterización pre-teórica de *demostración pura*.

5.1. Demostración matemática y «finalidades epistémicas»

Como ya se señaló al principio del Capítulo 3, la noción de *demostración* es una noción eminentemente epistémica, en cuanto atañe a una de las modalidades canónicas para aumentar nuestro conocimiento en matemáticas. Ahora bien, también se señaló (siguiendo una observación de Ferreirós) que la **Definición 3.1** de demostración parecía ser insensible a cualquier aspecto epistémico allende la deducción «paso a paso» de una proposición a partir de otra(s)[1]. Esta observación de Ferreirós nos permite plantear con naturalidad la pregunta por el *valor* de las demostraciones matemáticas de la siguiente manera: ¿qué objetivos epistémicos o cognitivos podemos alcanzar mediante una demostración? Evidentemente, hay un objetivo primario, o básico de las demostraciones: ofrecer *evidencia* para la verdad de una proposición matemática. Sin embargo, es sencillo advertir que no es el *único* objetivo que se persigue mediante demostraciones; a nuestro juicio, la *pluralidad* de estos objetivos o finalidades, |permite entender el papel epistémico de las demostraciones matemáticas de una forma amplia.

La pregunta por lo objetivos «epistémicos o cognitivos» es quizás una traspola-

[1]Véase página 50 del Capítulo 3.

ción del problema de las «virtudes teóricas» de las teorías en filosofía de la ciencia (experimental). Existen muy *grosso modo*, tres problemas asociados a esta noción: el problema de la existencia y clasificación de las virtudes, esto es la cuestión de qué virtudes *hay* y si las mismas pueden organizarse en una taxonomía; por otro lado, tenemos el problema de caracterizar en qué consiste tener tal o cual virtud, es decir, qué hay en las teorías que permite decir de ellas que poseen *cierta* virtud; y por último, está el problema de su *jerarzquizaqción* en la práctica ante un eventual «conflicto» entre ellas[2].

Un caso elocuente donde un tipo de extrapolación así ocurre en filosofía de la práctica matemática es el de la *explicación matemática* en general, y las *demostraciones explicativas* en particular[3]. Así pues, nuestro punto aquí es que la **SE** puede ser entendida intuitivamente como una «virtud teórica», particularmente una virtud atribuible a las demostraciones[4].

¿Por qué entonces las demostraciones son epistémicamente valiosas? Un objetivo o finalidad básica de las demostraciones, en función de las cuales son consideradas valiosas es el de inferir «paso por paso» (o sin «hiatos») una proposición a partir de otra(s). Así pues, por medio de las demostraciones *justificamos* nuestra creencia en que cierta proposición sea una «verdad matemática», o un «teorema»[5]. Dicho de otra manera, establecer que una proposición se sigue «paso a paso» de otra(s), cons-

[2]En [Kuhn (1977): Cap. XIII], Kuhn formula el problema de la precisión y el de la jerarquización; el problema de la existencia por otro lado, no aparece como tal en Kuhn debido, quizás, a que a su juicio hay cuatro virtudes que forman *la* base para la elección de teorías (*íbid*. p. 322). Véase Keas (2018) para un tratamiento del problema de taxonomización, mientras que en relación a su jerarquización puede verse, por ejemplo, Laudan (1990).

[3]Con respecto al problema de la existencia de las explicaciones matemáticas, véase Steiner (1978), Resnik and Kushner (1987), Zelcer (2013), Castro (2017), Lange (2010), Mancosu (2001); con respecto a la caracterización misma de *demostración explicativa* existen una variedad importante de modelos, como por ejemplo, Steiner (1978), Resnik and Kushner (1987), Hafner and Mancosu (2005), Lange (2009), Lange (2014). Respecto a su jerarquización como virtud, puede verse Detlefsen (1988), Cellucci (2008).

[4]Nótese que los problemas identificados por Kuhn son básicamente las ya presentadas interrogantes i) y ii) acerca de **SE**.

[5]En ocasiones se sostiene que la filosofía «fundacionista» de la matemática del Siglo XX se caracteriza por una concentración excluyente en este objetivo epistémico; tal es el caso de [Chateaubriand (2005): 432] y [Manders (1987): 194 - 5].

tituye por sí mismo un evidente incremento de nuestro conocimiento matemático, pues de esta manera podemos determinar que una proposición resulta ser un teorema.

Las demostraciones pueden valorarse así, según su capacidad para proveer justificación para sostener que cierta proposición es una verdad matemática; o si se prefiere, la deducción «paso por paso» adquiere un evidente valor a la luz de que nos permite *aumentar la clase de teoremas*, justificando la incorporación de una proposición como un *nuevo* teorema[6]. Nuestro **primer punto** en este capítulo es pues el siguiente: la finalidad de aumentar la clase de teoremas es una finalidad *básica* asociada a las demostraciones, aunque no es la única. Ahora bien, debido a no ser «básicos» es que estos otros fines están allende la corrección de la demostración[7].

Pongámoslo de otra manera. El que las demostraciones permitan aumentar la clase de teoremas (o de verdades matemáticas, si se quiere también), no es sin embargo el *único* objetivo que las hace valiosas; pues es evidente que las demostraciones muchas veces son objeto de *juicios valorativos* que están allende su corrección (lógica). Entonces, al decir que esta finalidad es «básica», queremos dar a entender lo siguiente: cualquier otra finalidad está allende la corrección lógica de la demostración, en tanto que su *ausencia* (v.g. la falta de perspicuidad, o explicatividad) en una demostración, no implica de modo alguno que la misma sea *incorrecta* (o «falaz» en algún sentido), a la vez que la ausencia de la finalidad básica –i.e. la deducción «paso a paso», implica que no tenemos en absoluto una demostración[8].

[6]También podríamos decir, por ejemplo, que la información contenida en la demostración a efectos de establecer que la conclusión «se sigue» de las hipótesis, es valiosa en virtud de la «novedad del resultado» que establecen (Seoane (2018)).

[7]Puestas así las cosas, las palabras citadas de Ferreirós podrían interpretarse de la siguiente manera: la justificación de la conclusión no es el *único* objetivo epistémico que podemos perseguir a través de las demostraciones. No obstante, no es nuestra pretensión interpretar a Ferreirós a partir de la exigua cita del Capítulo 3, pues para ello se requiere profundizar en su *esquema básico* de práctica matemática ([Ferreirós (2015): Cap. 3].). No obstante, pareciera que la forma en que Ferreirós caracteriza al *agente*, así como su noción kitcheriana de *meta-teoría*, habilita a introducir las «virtudes teóricas» como «ideales» a los que los agentes históricos suscriben (ver §3.3 y especialmente §3.6, p. 80).

[8]Cfr. [Ferreirós (2015): 159]. Como cabe esperar, la interpretación *precisa* de la expresión «seguirse paso por paso» depende de cómo elucidemos la noción misma de *demostración*. Así pues,

Esto puede verse cuando, por ejemplo, se valora una demostración por las potencialidades de los métodos que exhiben para poder demostrar otros teoremas (como es el caso de la técnica de diagonalización de Cantor), o también se las valora por ser «perspicuas», «elementales», «profundas», «explicativas», etc. En un sentido usual nadie diría que la ausencia de alguna de estas «virtudes» arroja alguna *duda* sobre el carácter teoremático de su conclusión.

Jeremmy Avigad, por ejemplo, sugiere una distinción como esta en términos de «valores» u «objetivos» vinculados a la práctica matemática, de la siguiente manera:

> It is generally acknowledged that at least one goal of mathematics is to provide correct proofs of true theorems. Traditional approaches to the philosophy of mathematics have therefore, quite reasonably, tried to clarify standards of correctness and ground the notion of truth.[...] But even an informal survey of mathematical practice shows that a much broader range of terms is employed in the evaluation of mathematical developments: concepts can be fruitful, questions natural, solutions elegant, methods powerful, theorems deep, proofs insightful, research programs promising [...] the challenge is to explain what can be gained from a proof beyond knowledge that the resulting theorem is true.[9].

De acuerdo con Avigad la filosofía «tradicional» de la matemática[10] se concentraron en clarificar los estándares de corrección para las demostraciones (y el fundamento de la verdad matemática). Y sin embargo, una revisión informal de la práctica matemática revelaría –de acuerdo con Avigad– un abanico más amplio de «juicios valorativos», algunos de los cuales atañen específicamente a métodos, demostraciones o soluciones (de problemas)[11]. Así pues, los métodos pueden ser «potentes»,

bien puede decirse, como se sugiere en Hamami (2014), que hay distintas interpretaciones de esta expresión; por ejemplo, si analizamos la noción de «inferencia paso a paso» adoptando la **Definición 3.1**, entonces identificaríamos en las propiedades de la *sintaxis* propiedades de la *justificación*; Alonzo Church por ejemplo, sugería que la «convicción final» acerca de la conclusión, a partir de la *sintaxis*. Cfr. [Chateaubriand (2005): Cap. 19], Capítulo 3.

[9][Avigad (2006): 105 - 106].

[10]Entiéndase, los proyectos fundacionistas.

[11]De acuerdo a lo que venimos sosteniendo en el párrafo anterior, Avigad estaría diciendo que la justificación de una proposición no es la única manera de evaluar una demostración. Así mismo, Avigad hace extensivo el uso de predicados como estos también a *teorías* y *programas*, sin embargo nuestro actual interés está en las demostraciones, así como los «métodos» que en estas se empleen (cfr. Capítulo 2).

las soluciones «elegantes», mientras que las demostraciones pueden ser «iluminadoras». El punto entonces es que estas *valoraciones* forman parte, parafraseando a Ferreirós[12], de todo aquello que hay en las demostraciones y que está allende su corrección (lógica). El desafío conceptual, finaliza Avigad, es pues el de explicar qué más es lo que se «obtiene» de las demostraciones, además de su corrección lógica, o si se prefiere, además de hacernos conocer (justificar) que un enunciado es un teorema.

Puestas así las cosas, parece razonable conjeturar que, si no es la «novedad» de su resultado resultado lo que interesa acerca de su demostración, entonces es la *demostración* misma un *medio* para alcanzar las virtudes teóricas u objetivos epistémicos. Dicho de otra manera, las demostraciones matemáticas podrían ser consideradas como «portadoras de información», a partir de las cuales las mismas son *valoradas* de acuerdo a ciertos fines. Tanto Dawson como Rav parecen adoptar una perspectiva como esta; considérese por ejemplo las siguientes palabras de Rav, citadas por Dawson[13]:

> [...] *proofs rather than the statement-form of theorems are the bearers of mathematical knowledge*. The whole arsenal of mathematical methodologies, concepts, strategies and techniques for solving problems, the establishment of interconnections between theories, the systematisation of results? The entire mathematical *know-how* is embedded in proofs[14].

Así pues, según Rav hay un saber *práctico* (*know-how*) que las demostraciones «portan». Gracias a esto –podríamos continuar–, las demostraciones podrían ser puestas en «comparación» unas con las otras, siendo esa comparación misma el objeto de estudio de Dawson[15]. Sin embargo, Dawson en *Why prove it again?* enumera distintos *fines* o «motivaciones» de las mencionadas en el pasaje de Rav. Éste último refiere, como parte del «arsenal» embebido en las demostraciones, un *know-how* de talante «resultadista» –por decirlo de alguna manera–; pues, las

[12]Recuérdese la cita de la página 50, Capítulo 3.

[13]Dawson (2006)

[14][Rav (1999): 20].

[15]En este punto conviene tener presente lo sostenido en la Sección 3.2, respecto a que la **SE** podía entenderse como un criterio comparativo entre demostraciones.

metodologías matemáticas, sus conceptos, estrategias y técnicas, están al *servicio de* la solución de problemas, determinación de conexiones entre distintas teorías, así como la «sistematización de resultados».
De esta manera, la solución de problemas, la determinación de conexiones entre distintas teorías, así como la «sistematización de resultados», son finalidades que pueden satisfacerse *matemáticamente* presentando un *resultado* (matemático). Puede advertirse que esto último resulta obvio si la finalidad es *resolver* un –nuevo– problema, pero algo similar ocurre con la finalidad de establecer «conexiones entre teorías»[16], pues la verdad matemática de que *hay* tales conexiones es un resultado matemáticamente establecido (demostrado, si se quiere). Es decir, hay *know-how* en las demostraciones que sugiere la conjetura de que hay cierta conexión entre tales y cuales teorías, o quizás la demostración de que la conexión existe podría ser un *lema* en el transcurso de la demostración que porta el *know-how*. El punto entonces, es que Rav parece enfatizar la capacidad de las demostraciones de proveer (o sugerir) más resultados que el teorema que demuestran. El hallazgo de estos otros resultados es una labor *matemática*, no estrictamente filosófica.

Dawson, por su parte, parece incluir dentro de lo que denomina «motivaciones primarias» para volver a demostrar un teorema, la consecución de objetivos satisfacibles matemáticamente, así como objetivos que difícilmente se satisfagan con sólo proveer matemáticamente un resultado [17] . Considérese por ejemplo, los siguientes dos motivos primarios sugeridos por Dawson: *extender el rango de validez del teorema* y *presentar a una demostración más perspicua*[18].

Como ejemplo de lo primero, Dawson refiere a la demostración de Henkin del teo-

[16]La construcción de un *cálculo de segmentos lineales* en la *Geometría* de Descartes, o en los *Grundlagen* de Hilbert es un resultado en este sentido. Como también lo es la construcción que hace Gödel de los *números gödelianos* (ver [Gödel (1931): 56 - 57]).

[17]En su abordaje «pragmático» Dawson introduce la comparación entre demostraciones en términos de *motivaciones* para volver a demostrar un teorema; en este contexto es que Dawson identifica cuatro motivaciones «primarias», las cuales están allende la novedad del resultado.

[18][Dawson (2015): 7].

rema de completitud para la lógica del primer orden, aplicable tanto para lenguajes numerables como no numerables[19]. A tales efectos podríamos tomar las demostración original de Gödel para lenguajes numerables, y compararla con la de Henkin para lenguajes también numerables; en este sentido la *estrategia demostrativa* de Henkin –i.e. la extensión del lenguaje a una «teoría Henkin» Post-completa, –i.e. maximalmente consistente, y posterior construcción de un modelo canónico para esa extensión, puede emplearse también para demostrar la completitud de lenguaje de primer orden no numerables[20]. En este sentido, la demostración de Henkin (su «estrategia») permite extender el rango de validez –original– del teorema de completitud para primer orden, a lenguajes no numerables, por lo que esta finalidad de extender el rango de validez queda satisfecha por medio del *know-how* presente en la estrategia de Henkin, la cual permite establecer un *nuevo resultado* más general, a saber, la completitud para lenguajes no numerables[21]. El punto aquí es, nuevamente, que el cumplimiento o satisfacción de esta finalidad puede verificarse *matemáticamente*.

Sin embargo, no es para nada evidente que la *perspicuidad* de una demostración (o el hecho de ser «más perspicua que» otra) sea algo *matemáticamente* tratable, esto es, que la perspicuidad de una demostración sea un *hecho meta-matemático*, es decir, que podemos *demostrar matemáticamente la perspicuidad de una demostración*[22]. Esto no quiere decir, evidentemente, que no hayan otros objetivos epistémicos, o incluso propiedades de las demostraciones, que admitan un análisis lógico (tales como la *simplicidad*). Más aun, Jeremy Avigad es un defensor de la idea de que todo lo que *grosso modo* puede entenderse como *propiedades heurísticas*, o *meta-cognitivas* de las demostraciones pueden ser conceptualizadas meta-matemáticamente, en la

[19]*Íbid.*

[20]En el caso de los lenguajes no numerables, ambos momentos de la estrategia de Henkin requiere asumir el Teorema del Buen Orden.

[21]Cfr. [Seoane (2018): 431].

[22]Una tercera manera de decirlo podría ser: no es evidente que la perspicuidad admita una *elucidación matemática*.

medida de que podamos enriquecer la meta-teoría[23].

Una caracterización de *perspicuidad*[24] suele incorporar ciertas características presentes en las demostraciones, junto con cierta idea –meta-cognitiva usualmente– de cómo se entiende la «perspicuidad» . Dawson por ejemplo, vincula la perspicuidad con la capacidad de hacernos entender *por qué* el resultado es verdadero (y no sólo hacernos ver *que* es verdadero)[25]. Por otro lado, también se dice que las demostraciones perspicuas aportan una forma más eficaz a la *comprensión* del teorema[26]

En cuanto a las *características* presentes en la demostración (responsables de que la misma satisfaga una finalidad), puede decirse, naturalmente, que las mismas deben ser identificables en la demostración. ¿Qué hay que tener en cuenta en las demostraciones para juzgarlas perspicuas? Podríamos, por ejemplo, hablar de que una demostración con una dosis menor de supuestos conceptuales o pasos en la argumentación que otra, podría ser una diferencia identificable en las demostraciones que encamine a la primera a ser más perspicua que la segunda. Por otro lado, también puede formar parte de las características de las demostraciones las *estrategias demostrativas*, o los *recursos representacionales* que emplee[27] . Pero incluso el abordaje de este último asunto admite la pregunta ¿perspicua para *quién* es la demostración? Es decir, quizás la perspicuidad no dependa *sólo* de las características de la *demostración* sino también sobre características del «receptor» de la demostración[28].

[23]Precisamente, la cita de Avigar de arriba, plantea el «desafío» de dar cuenta de los juicios valorativos que está allende la corrección lógica de las demostraciones. En tal sentido, es que en Avigad (2020) sugiere que la heurística y la meta-cognición de las demostraciones –contra Rav (1999) y Azzouni (2013)– admite una tratamiento meta-matemático. Véase también a este respecto, el clásico trabajo Feferman (1978).

[24]Y otro tanto vale para virtudes como la *elegancia* o la *explicatividad*.

[25][Dawson (2015): 7; [Resnik and Kushner (1987): 154]. Nótese que aquí Dawson vincula la perspicuidad con la explicatividad de una demostración, y así mismo, Resnik y Kushner sostienen que las demostraciones explicativas «presentan más información y son más perspicuas» que las demostraciones no explicativas del mismo resultado (por lo que les permite a las mismas, de acuerdo con ellos responder más preguntas *por qué*) ¿Se tratan pues, de virtudes *distintas*?

[26][Seoane (2018): 432].

[27]Véase a este respecto Seoane (2018).

[28][Seoane (2018): 432]. Cfr. Cellucci (2015).

Si retomando el *primer punto* importante que sugeríamos arriba (página 110), respecto a la pluralidad de los objetivos epistémicos en las demostraciones, entonces cabe preguntarse lo siguiente: ¿asociaremos el *valor* de las demostraciones puras con el objetivo básico de la *justificación*, o entenderemos que la pureza es una *virtud teórica*, como la perspicuidad, etc.? ¿Representa la «impureza» de una demostración algún tipo de *error lógico* en la misma? En el resto del capítulo asumiremos que *no*. Aquí no podemos argumentar con rigor en favor de nuestra respuesta negativa. Sin embargo, es importante aclarar que nuestro compromiso con la opinión de que *el valor de la pureza está allende la corrección lógica*, está en conformidad con el espíritu de la actual discusión sobre pureza del método [29] . Así pues, nuestro *segundo punto* importante es que el enigma epistémico de la pureza de las demostraciones, consiste en sostener que el valor de la pureza está allende la corrección lógica de las demostraciones, y en este sentido, el valor de la pureza es tratable como un tipo de *virtud teórica*, o *finalidad epistémica no básica*.

Para finalizar esta sección, debemos hacer una última puntualización, la cual atañe al carácter *filosófico* de nuestro concepto de pureza demostrativa: ya desde el Capítulo 1, sosteníamos que la literatura sobre la pureza del método podía clasificarse en tres orientaciones, –i.e. lógico-matemática, «histórico-filosófica» y «mixta». Dado que era en la segunda orientación donde el enigma del valor era mejor visualizado, nuestro *tercer punto* importante es el siguiente: el valor de las demostraciones puras sería mejor abordado, si orientamos la investigación en la identificación de *objetivos epistémicos en la práctica matemática*, a la luz de los cuales la relación de conservación tópica (**CT**) resulta valiosa.

Teniendo presente estos tres puntos importantes, se comprende mejor la importancia y el significado de las interrogantes i) y ii) de la página 108, –i.e. «¿a partir de qué característica propia de las demostraciones conservativamente tópicas,

[29]La opinión según la cual la pureza del método está allende la corrección lógica, se encuentra ya en los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert (esto fue ya señalado en [Kreisel (1980): 163 - 4], 166 - 67).

indagaremos la superioridad epistémica de las mismas?», y «¿en qué sentido puede ser epistémicamente "valiosa" una demostración pura, de acuerdo con la literatura actual?». Así pues, las características de las demostraciones que satisfacen la relación **CT** son *independientes* de la corrección lógica de la demostración (tal como se observó en el análisis de las demostraciones del teorema de Pitágoras); mientras que, por otro lado, las virtudes teóricas con las que podamos relacionar el valor de las demostraciones puras exige y se muestra relevante, por medio de una indagación en la práctica matemática. En tal sentido es que en la Sección 5.2 se avanzará sobre la interrogante i), mientras que en la Sección 5.3 abordaremos la interrogante ii), de acuerdo con la literatura actual perteneciente a la orientación histórico-filosófica. En definitiva, las siguientes secciones van a sugerir distintas *estrategias para responder a nuestras dos interrogantes*.

5.2. CT y la *especificidad* de las demostraciones puras

¿Qué característica riene en la relación de conservación tópica, a partir de la cual pueda indagarse su valor epistémico? A nuestro juicio, esa característica es la *epsecificidad* de la demostración respecto del teorema. Esta especificidad puede ser explotada (conceptualmente), tanto por la aproximación formulacional como por la aproximación inferencialista, a fin de atribuirle un valor epistémico a la misma.

Empecemos por explicar brevemente esta «especificidad» de las demostraciones conservativamente tópicas[30]. Esta especificidad emerge de la caracterización preteórica de **CT** de la página 69; de acuerdo con la misma, el tópico de la demostración es *intrínseco* en relación con el tópico del teorema. En este sentido, la especificidad de las demostraciones conservativamente tópicas puede entenderse como el superlativo grado de especificidad, debiendose la misma a que no hay en la demostración de ϕ algo «ajeno» al tópico de ϕ. Es decir, si la caracterización intuitiva de **CT** afirma

[30]En el Capítulo 6 veremos cómo el *Modelo Pragmático* ofrece una explicación más precisa, –i.e. teórica, de esta especificidad.

que no hay una *diferencia conceptual* entre demostración y teorema, entonces una demostración impura incluiría conceptos que no atañen específicamente al tópico del teorema. Pongámoslo de otra manera: a la hora de emplear **CT** como un criterio comparativo entre demostraciones, lo que **CT** introduce es una *restricción* en los conceptos involucrados en la demostración[31], y esto haría de la demostración pura una demostración que demuestra *específicamente* el (tópico) del enunciado que tiene de conclusión, y no digamos uno «similar»[32].

Esta «especificidad» de las demostraciones conservativamente tópicas puede recibir lecturas disímiles, según qué *aproximación al tópico* se emplee para interpretar (o aplicar) la noción pre-teórica de **CT**,[33].

Así pues, si tenemos presente una *aproximación formulacional* (*Sección 4.1.2*), podríamos entender que la especificidad de las demostraciones conservativamente tópicas, radica en que la *comprensión* del tópico del teorema es *suficiente* para comprender su demostración. Dicho de otra manera: no se necesita tener presentes *más* conceptos para comprender su demostración, de lo que se requieren para comprender el teorema. Por el contrario, si una demostración es *impura*, entonces esa demostración exige, para su comprensión, más conceptos de lo que exige la comprensión del teorema. Evidentemente, esta suerte de «economía conceptual» de las demostraciones conservativamente tópicas –en contraste con las demostraciones impuras–, sugiere una variedad de estrategias a partir de las cuales pueden atribuírseles a las demostraciones pura un valor epistémico particular. Dado que esta manera de entender la relación **CT** es bastante hegemónica en la literatura, en la Sección 5.3 diremos algo más al respecto. No obstante, el punto aquí es que la especificidad podría entenderse pues, como una suerte de «distancia cero» entre el tópico del teorema y el de su demostración[34]. Para mantener la discusión en un

[31]Cfr. [Dawson (2015): 8].

[32][Arana (2014): 331].

[33]Véase el Capítulo 4, Sección 4.1.

[34]Esta idea (no metafórica) de «distancia cero», aparece con frecuencia en los trabajos de Arana

plano «pre-teórico», podemos recordar las demostraciones del teorema de Pitágoras del Capítulo 4. Allí conjeturamos que un agente que comprenda la formulación de Euclides (formulación 4.1) bien podría *no* comprender una demostración algebraica como la demostración de 4.2; esto mismo podría ser explicado diciendo que en esta última demostración hay conceptos que no forman parte del tópico de 4.1. Luego, la demostración de los *Elementos* bien podría verse como más «específica» en este sentido, –i.e. más pura.

Siendo así las cosas, diríamos que la demostración de Euclides incorpora *menos* conceptos que la demostración algebraica, o que la *distancia* entre teorema y demostración es menor en la primera. Podría decirse entonces, que la demostración pura demuestra específicamente el tópico de 4.1, mientras que la demostración algebraica bien podría emplearse para demostrar el teorema 4.3 en vez de 4.1; es decir, la demostración impura podría demostrar un teorema *distinto*. La demostración pura, por otro lado, demostraría específicamente *el* resultado en cuestión[35].

En el contexto de una *aproximación inferencial* al tópico (Sección 4.1.3), la especificidad de las demostraciones conservativamente tópicas adquiere inmediatamente una dimensión epistémica. En esta aproximación, una demostración canónica es conservativamente tópica cuando la misma no introduce conceptos ajenos a los involucrados en la *comprensión ordinaria* del tópico del teorema, –i.e. la comprensión ordinaria de la demostración «entimemática». Dado que la demostración canónica –*a la* Dummett– es la que determina el tópico del teorema, la demostración canónica *pura*; luego, podríamos decir que es la demostración *canónicamente pura* la que realmente *analiza maximalmente* el tópico del teorema[36]. Así pues, mientras que la demostración canónica *simpliciter* determina un tópico para la afirmación teoremá-

(así como en sus colaboraciones con Detlefsen y Mancosu), y la misma introduce un aspecto particular en sus investigaciones: la idea de que esta «distancia» pueda ser *medida*. Sobre este aspecto se dirá algo más en el Capítulo 6.

[35][Arana (2017): 208].

[36]Véase [Chateaubriand (2005): 303 - 304]; cfr. [Seoane (2018): 428].

tica, dependiente de la construcción efectiva empleada en la misma, la demostración canónica *pura* emplea construcciones conservativamente tópicas respecto a la comprensión ordinaria; por lo tanto, la demostración pura «explicita» (en sentido propio) el tópico ordinario, mientras que la demostración canónica a secas, solo nos provee de *una* interpretación (construcción) del tópico del teorema.

Podemos apreciar una situación así en el caso de las demostraciones algebraica y trigonométrica del teorema de Pitágoras[37]. Si sostenemos que la demostración algebraica de 4.2 es **CT**, entonces la demostración trigonométrica estaría siendo equívoca respecto al tópico del teorema. Tal cosa se debería a que al introducir la última las operaciones de *seno* y *coseno*, se induce pues, la impresión (¿equívoca?) de que el teorema pertenece a la trigonometría; y la razón de ello, es el empleo de construcciones como *seno* y *coseno*. Por lo tanto, la especificidad de las demostraciones conservativamente tópicas entonces, consistiría decodificar el tópico del teorema, es decir, decodifica *el* tópico del teorema *particular* que establece.

En definitiva, lo que en esta sección se quiere destacar es que la especificidad de las demostraciones puras parece ser una característica que «sobreviene» a la conservación tópica de las mismas. Al señalar esto, no queremos dar a entender, sin más, que es la especificidad misma lo que las hace *valiosas*. Más bien intentamos restringir esta discusión pre-teórica a la interrogante i), –i.e. la interrogante «¿a partir de qué característica propia de las demostraciones conservativamente tópicas, indagaremos la superioridad epistémica de las mismas?». En definitiva, la especificidad es un aspecto de las demostraciones puras que, a nuestro juicio, una noción intuitiva de **SE** debe incluir. Sin embargo, no hemos dicho nada concreto sobre el *valor* que esta especificidad pueda tener en la práctica matemática, pues esto es a lo que apunta la interrogante ii).

En definitiva, lo que en esta sección se quiere destacar es que la especificidad de las demostraciones puras parece ser una característica que «sobreviene» a la

[37]Véase la página 105, Capítulo 4.

conservación tópica de las mismas. Al señalar esto, no queremos dar a entender sin más que es la especificidad misma lo que las hace *valiosas*. Más bien intentamos restringir la discusión a capturar qué podría haber en la conservación tópica para señalar de ellas una característica propia; esto es lo que interroga i). En definitiva, la especificidad es un aspecto de las demostraciones puras que, a nuestro juicio, una noción intuitiva de **SE** debe incluir. Sin embargo, no hemos dicho nada concreto sobre el *valor* que esta especificidad pueda tener en la práctica matemática, pues esto es a lo que apunta la interrogante ii).

5.3. La relación SE y sus finalidades epistémicas

¿Qué valor puede adquirir la especificidad (tópica) de las demostraciones? Esta era nuestra interrogante ii), y nuestro **tercer punto** importante (página 116), consistía en nuestra opción por explorar la interrogante ii) a través de la literatura histótico-filosóficamente orientada. Así pues, en esta sección intentaremos asociar la especificidad de las demostraciones conservativamente tópicas con diversos fines, los cuales no siempre son referidos como un fin «purista», pero que en la literatura referida son identificado con el valor de la pureza. En este sentido, creemos más valioso no considerar a la pureza (puntualmente, a la especificidad de las demostraciones puras), como un fin *en sí mismo*, sino como un *medio* para fines más claramente reconocibles en la literatura reciente sobre esta cuestión[38].

Dentro de la literatura histórico-filosófica existe una serie de orientaciones o estrategias, que avanzan hacia una asociación entre las demostraciones conservativamente tópicas, –i.e. puras, y la consecución de ciertos objetivo o finalidades epis-

[38]En otras palabras, no parece ser para nada sencillo pensar en la especificidad de las demostraciones puras como una virtud *en sí misma*, esto es, difícilmente podamos figurarnos algo acerca del valor de las demostraciones puras diciendo simplemente que es una demostración «específica». Así mismo, en la literatura actual parece haber un esfuerzo extra en *asociar* la pureza de las demostraciones, con algún *plus* de conocimiento o comprensión que estas proveen. En este sentido, aquí estamos adoptando una posición *instrumentalista* respecto a la pureza demostrativa como un fin, pues sugeriremos que la pureza (de las demostraciones) es evaluada por su capacidad de satisfacer otros fines que no son, en primera instancia la *mera* especificidad de las demostraciones puras.

témicas. En la presente sección no vamos a presentar todas las propuesta concretas, y por esa razón es que hemos decidido plantear «orientaciones»; lo que haremos entonces, es presentar sucintamente *tres orientaciones*, por medio de propuestas concretas. Estas tres orientaciones pueden caracterizarse del siguiente modo: en primer lugar, el valor de las demostraciones puras que muy asociada –quizás *identificada*– con las demostraciones «explicativas», tanto en la concepción metafísica de explicación, –i.e. causa, como en concepciones más actuales. La segunda orientación tiene a vincular el valor de la demostración pura con un objetivo epistémico relacionado a la *formación de teorías matemáticas*, a saber, su «autonomía». Finalmente, la tercera orientación parte de asociar, sino *identificar*, las demostraciones conservativamente tópicas con las *demostraciones elementales* típicas en teoría de números. A partir de esta asociación, algunos autores como Detlefsen y Arana sugieren diversos objetivos epistémicos que *grosso modo* pueden entenderse como *pragmáticos*. En las siguientes secciones dedicaremos un espacio a exponer sucintamente estas orientaciones.

5.3.1. Pureza y *explicación*

Comencemos con la primera orientación mencionada. En su contribución a la colección *The Philosophy of Mathematical Practice*, Michael Detlefsen[39] coloca a la pureza como un «ideal epistémico» cuyo origen se remonta a Aristóteles[40]. Así pues, Detlefsen toma como punto de partida de su análisis el pasaje de *Segundo Analíticos* (75a29 - 75b12) en el que Aristóteles introduce la *exclusión de géneros* como un requisito de la demostración *científica*[41]; y en tal sentido, la pureza de la

[39]Detlefsen (2008).

[40]En el recorrido histórico de este ideal que Detlefsen plantea, la influencia de Aristóteles (o el aristotelismo) es diempre un un aspecto central. Detlefsen divide su exposición del ideal de pureza en «Aristotélico», «Neo aristotélico» y «contemporáneo»; pero incluso en este último caso, el «purismo de tipo aristotélico continua funcionando como un ideal entre los matemáticos contemporáneos». [Detlefsen (2008): 190].

[41]En el Capítulo 1 (*Sección 1.1*) hicimos referencia a ese pasaje como el antecedente más antiguo sobre la idea de pureza con el que contábamos.

demostración silogística es un requisito de la demostración científica[42].

De esta manera, Detlefsen asocia «demostración pura» aristotélica –i.e. demostraciones que respetan el requisito de exclusión de géneros, con la «demostración científica» de Aristóteles. En sus palabras:

> [i]n Aristotle's view, then, purity increased epistemic quality. A pure proof provided knowledge that the predicate of its conclusion (the minor term of the proof) held of its subject (the major term) solely because of what the subject in itself was. It showed the very *whatness* (i.e. the essence) of the subject of a theorem to be the «cause» of its having the property expressed by its predicate[43]

Así pues, la superioridad epistémica de una demostración pura consiste básicamente en que una demostración tal provee el conocimiento de la *causa*; o expresado en la jerga de Aristóteles, una demostración científica no sólo nos dice *que* algo es el caso, sino también *por qué* es el caso[44]. Un aspecto que aquí nos interesa de la asociación de la pureza con el conocimiento de la causa (de acuerdo con la interpretación que Detlefsen hace de Aristóteles), es que las últimas introducen la idea de que las verdades pertenecientes a determinado «género» tienen un *orden objetivo*[45]. En este sentido, las demostraciones puras (a.k.a. científicas) nos informan acerca del orden de las verdades; Detlefsen lo dice claramente cuando afirma que

> [s]uch an ordering of truths suggests a parallel conception of purity: pure proof is proof which recapitulates a segment of the natural, objective ordering of truths concerning a given subject[46].

---

[42]No tenemos espacio aquí para desarrollar la importancia como la naturaleza de este requisito para las demostraciones científicas, pero cierta literatura reciente sobre el mismo podría sugerir que se trata de un requisito clave. Así pues, en [Steinkrüger (2018): §4] Angioni et al. (2012) Angioni (2014) Cantù (2010) (cfr. De Jong and Betti (2010)), sugieren que el requisito de exclusión de géneros –i.e. la prohibición de solapar géneros, está en el corazón del carácter causal de las premisas del silogismo científico. La razón es que dicho carácter depende fuertemente de la *escencialidad* de la predicación del término medio del silogismo en relación al término menor (predicación «universal» en la jerga de Aristóteles, *Seg. An.*, I, 4).

[43][Detlefsen (2008): 180].

[44]Véase *Seg. An.* 78a 22 - 79a 15.

[45]Esto se debe a que en las demostraciones científicas aristotélicas las premisas son «primeras» (o «anteriores») «por naturaleza» (*Seg. An.* 71b30 - 72a5).

[46][Detlefsen (2008): 182].

De este modo, las demostraciones puras son valiosas en virtud de que proveen una información acerca del teorema que las demostraciones impuras no, a saber, el lugar que dicho teorema ocupa en el *orden* de las verdades pertenecientes al tópico («subject») de la teoría.

No podemos si quiera reseñar aquí la extendida influencia de esta idea aristotélica de *orden de las verdades*[47], pero está suficientemente claro que el valor de la pureza adquiere visibilidad en la concepción aristotélica de teoría científica. Ahora bien, ese orden tiene como punto de partida los «primeros principios», los cuales son «primeros» por ser más *elementales*; así por ejemplo, dice Aristóteles que en matemáticas, el «por qué» nos remite en último término al «que», esto es a las definiciones (*horos*) de *línea recta*, o *conmensurable*, etc.[48].Entonces, a partir de los elementos más simples (primeros) de las teorías (en sentido aristotélico), se introduce un orden de las verdades.

Así mismo, la referencia informal al conocimiento de la «causa» también pueden encontrarse en la práctica matemática contemporánea[49]. Así pues, en un contexto menos metafísico, demostrar el *por qué* suele interpretarse como proveer una demostración *explicativa*[50] del teorema. En la literatura reciente sobre la pureza del método, podemos encontrar cierta «relación» entre explicación matemática y pureza, donde esta relación tiene como vector la noción de *tópico tácito*[51]. Esta noción

[47]El trabajo de Detlefsen al que nos hemos estado refiriendo acomete un poco esa tarea. Ejemplos relevantes de ello son Detlefsen (1988) [Ferraro and Panza (2012): §2.4] y [Lagrange (1847): 17], Mancosu (1999), [Leibniz (1996): IV, viii], Bolzano (1810), Bolzano and Russ (2004), Loeb and Roski (2014), Cantù (2014).

[48]*Física*, 198a16 - 18.

[49]Así por ejemplo, en [van Lamoen (2002): 397] los editores comentan, acerca de una solución analítica a un problema geométrico sobre medianas en un triángulo, lo siguiente:

> The submitted solutions used analytic geometry (or complex numbers) and involved lengthy computations (some done with Maple or Mathematica). The editors felt that a coordinate-free statement deserves a coordinate-free solution; such a solution may shed more light on *why* the result is true. (Énfasis añadido).

[50]Sintéticamente dicho: tales demostraciones responden a la pregunta «¿por qué tal o cual cosa es el caso?». Cfr. [Van Fraassen (1980): Cap. 5].

[51]Véase a este respecto Hallett (2008), Arana and Mancosu (2012), Isaacson (1987).

de tópico se enmarca bien dentro de una aproximación inferencial[52], y su aspecto central consistiría en reconocer que el tópico de un teorema (proposición), o una parte del mismo, no está explicitada maximalmente por su *formulación*. Ahora bien, este aspecto tácito del tópico se revelaría por medio de una *explicación* de por qué el teorema es verdadero –i.e. bajo qué condiciones el teorema es el caso.

En tal sentido, Michael Hallett escribe en un artículo dedicado a la pureza del método en los *Grundlagen* de Hilbert y en relación al Teorema 33[53], dice lo siguiente:

> [...] one, the overall result being a re-education of our geometrical intuition, for what it reveals is that the Planar Desargues's Theorem in effect actually has **spatial content**. This provides an explanation of why it is (in the absence of congruence and the Parallel Axiom) that the Planar Desargues's Theorem cannot be *proved* without the use of spatial assumptions, and it provides a beautiful example of Hilbert establishing in the fullest way possible *why* «impure» elements are required in the proof of Desargues's Theorem[54].

No podemos ahondar mucho en el extenso y completo trabajo de Hallett, pero el punto parece ser el siguiente: la «demostración especial» del teorema de Desargues en el plano (concretamente, su formulación *afín*), es *pura* debido a que el teorema *tiene* efectivamente un «tópico espacial». Que esto último es el caso, se debe a que la indagación meta-geométrica de Hilbert, explica *por qué* dicho teorema no puede ser demostrado en el plano por Hilbert definido. En otras palabras, a pesar de que la demostración espacial pueda parecer «impura» debido a que la intuición sugiere que el teorema tiene un tópico *absolutamente* plano, una investigación más profunda (meta-geométrica) muestra que la formulación afín del teorema de Desargues tiene, ya sea de forma «oculta», «implícita», o «codificada», un tópico espacial[55]. Lo que nos interesa destacar aquí pues, es por un lado, que de acuerdo con Hallett la

[52]Véase *Sección 4.1.3*.

[53]Este teorema dice, *grosso modo*, que la formulación afín del teorema de Desargues requiere, para ser demostrado en un plano (con todos los axiomas lineales y planos), todos los axiomas de congruencia , o los axiomas espaciales.

[54][Hallett (2008): 227]. Negritas añadidas. Cfr. Hall (1943).

[55][Hallett (2008): 249].

«demostración espacial» de la formulación afín del teorema de Desargues devendría en *pura*, a pesar de que de buenas a primeras sería una demostración impura; por otro lado, la demostración espacial podría verse como una demostración del tipo «explicativa», en el sentido de que la misma incorporaría la «causa» (explicación) de que –la formulación afín– del teorema sea *verdadera*, esto es, la presencia de axiomas del espacio. Dicho de otra manera, la demostración pura/explicativa ilumina precisamente un tópico del teorema, el cual no es explicito en la formulación[56].

Así mismo, en un artículo conjunto de Arana y Mancosu, también hacen referencia a esta noción de tópico implícito[57]. Puntualmente, sostienen por un lado, que la misma no es las más adecuada para indagar en la pureza del método[58], pero dejan lugar para considerar que la misma puede contribuir efectivamente a sancionar como «pura» una demostración. Para el caso de la formulación afín del teorema de Desargues, sugieren que en el contexto de una geometría diferencial –i.e. un abordaje de la geometría a partir del análisis, es factible *explicar* por qué hay planos donde el teorema no es verdadero[59]. Así pues, de acuerdo a los autores, sería factible identificar en *esta* formulación del teorema, cierto tópico implícito *métrico*, y

> if we were to adopt a metrical understanding of straight line, then metrical considerations become appropriate to Desargues' theorem and a case could then be made that metrical, purely planar proofs of Desargues' theorem (for instance, proofs using congruence by way of Menelaus' theorem) are pure. We are not advocating a metrical understanding of straight line, but rather observing that attempts to articulate the tacit content of Desargues' theorem should at least consider it[60]

El punto aquí es, en analogía con Hallett, que cierta noción de tópico implícito podría emplearse para evaluar que una demostración «euclideana» del teorema de

[56]Mucho más puede ser dicho y discutido acerca de esto, y de hecho una buena parte de la discusión en Arana and Mancosu (2012) está dedicada a objetar este planteo de Hallett, es decir, a objetar que el teorema de Desargues (en su formulación afín), tenga un tópico espacial «implícito».

[57]Arana and Mancosu (2012).

[58]Ellos sostienen que la noción más adecuada es lo que en la *Sección 4.1.2* denominamos «aproximación formulacional».

[59][Arana and Mancosu (2012): 339].

[60][Arana and Mancosu (2012): 341].

Desargues sea *pura*, a pesar de que la misma emplee nociones «métricas»[61], las cuales suelen ser consideradas «ajenas» a la geometría proyectiva[62]. Así pues, tomando en consideración esta perspectiva tópica, Mancosu y Arana sugieren que los planos arguianos se caracterizan en virtud de propiedades métricas[63]; luego, una demostración de esta formulación del teorema de Desargues que emplee relaciones de proporción, sería a pesar de ello una demostración *pura*. Nuevamente entonces, como en el caso de Hallett, por un lado tenemos que la «demostración euclideana» es una demostración *pura*, aunque en primera instancia la formulación afín del teorema de Desargues afirma nada sobre relaciones «métricas»; por otro lado, esta demostración podría considerarse como «explicativa», en el sentido de que la misma incorpora el tipo de propiedades que caracterizan los planos arguianos –i.e. propiedades métricas.

En definitiva, nuestro punto respecto a esta primera orientación es el siguiente. En la literatura actual se advierte cierta solidaridad entre demostración explicativa/causal –según se asuma o no cierto contexto metafísico– y demostración pura, aunque el vinculo no parece estar del todo claro. Pues, por un lado, en la literatura (Detlefsen en particular) se interpreta el requisito de la exclusión de géneros en Aristóteles como un requisito purista (asociable a la relación **CT**), el cual asocia la demostración pura con la demostración científica aristotélica; luego, bajo tal asociación, lo que emerge es una manera de entender la superioridad epistémica de las demostraciones puras como aquellas que proveen el conocimiento de la causa, o el lugar que el teorema ocupa en el «orden natural» de las verdades. Por otro lado, si se asume una aproximación del tipo «inferencial» al tópico, entonces hay lugar para sostener sensatamente que una demostración pura es explicativa respecto al tópico implícito del teorema. En otras palabras, la demostración pura apuntaría a satisfacer la finalidad de exponer, o explicitar (el tópico) del teorema[64]. No obstante,

[61]Entiéndase, la noción de *longitud* de segmentos (puntualmente, relaciones de proporción), y apertura de ángulos.

[62]Como ejemplo de ello puede consultarse [Dieudonne (2017): 9].

[63]Puntualmente, sugieren –con base en el teorema de Beltrami– que los plano arguianos tienen curvatura constante (*íbid.*, 316 - 317, 339).

[64]Cfr. página 119.

aquí no podemos más que *sugerir* un vínculo como este, pues su profundización de be afrontar el hecho de que las referencias citadas no explicitan qué asumen por «demostración explicativa»[65].

Por lo tanto, esta primera orientación en la literatura relevante no es homogénea y, en ciertos casos, una interpretación de la relación **SE** involucraría comprometerse con cierta aproximación al tópico (aproximación inferencial), mientras que en el caso de la lectura de Aristóreles semejante compromiso no es evidente.

5.3.2. Pureza y *formación de teorías autónomas*

En cuanto a la segunda orientación, decíamos que estaba orientada a asociar la pureza con la finalidad de establecer un «fundamento autónomo» para una teoría[66]. En relación a la preocupación de Hilbert respecto al papel del *número* en la construcción axiomática de la geometría, Eduardo Giovannini dice:

> Con el objetivo fundamental de mostrar que la geometría podía ser considerada justificadamente como una teoría matemática *auto-suficiente*, resultaba esencial que su construcción proceda de una manera autónoma o independiente, es decir, que en ella no se utilicen conceptos y supuestos provenientes de otras teorías matemáticas, como la aritmética, el análisis, o incluso la mecánica[67].

[65]En el caso de Mancosu, dicha ausencia no debe opacar que se trata de un autor que ha indagado profusamente en dicha noción (véase por ejemplo, Mancosu (2001)). Sin embargo, en el artículo citado de Arana y Mancosu no se dice mucho al respecto, excepto cunado se hace referencia a que la explicación del teorema de Desargues, involucra la «identificación de la característica de los plano arguianos [*Desarguesian*] que hace claro por qué esos planos son suficientemente "regulares" para ser embebidos en el espacio». [Arana and Mancosu (2012): 338]. Por otro lado, en un artículo de Lange sobre demostración explicativa en el caso de Desargues, dice explícitamente que su abordaje hace de la explicación un fenómeno «independiente» de la pureza. Véase [Lange (2015):438].

[66]Nótese que aquí estamos hablando de *teorías* y no de demostrar *teoremas*. En el Capítulo 2 sugeríamos que el predicado «pura» podría ser aplicado también a teorías (o a la construcción de teorías); pero la introducción de las teorías aquí no es completo desvío de nuestro problema, pues la demostración de teoremas, particularmente de los teoremas «fundamentales», es parte importante de la construcción de una teoría matemática.

[67][Giovannini (2015): 202]. Cfr. nuestra observación sobre la relación entre fundamentos «independientes» de la geometría y la aritmética en el Capítulo 3 (página 20). En las conclusiones de esta tesis (Capítulo 7) retomaremos este punto.

Este requisito de «auto-suficiencia» o «autonomía» puede ser interpretado como un requisito «purista»[68]; más precisamente, el resultado de la construcción pura de una teoría es una teoría autónoma de otra(s) teoría(s), y de esta manera, la pureza –i.e. la especificidad del método, puede ser buscada con el fin de proveer un fundamento autónomo para una teoría.

Un ejemplo claro donde puede observarse cómo la finalidad de ofrecer un fundamento autónomo a una teoría puede ser alcanzado a través de la pureza del método, es en el tratamiento de von Staudt[69] de la geometría proyectiva, particularmente de su sustitución del concepto de *razón cruzada* por el de *cuaterna armónica*. Durante el Siglo XIX –en los años que siguieron al tratado de Poncelet (1822)–, la geometría proyectiva se había convertido en una nueva rama de la geometría, cuyos objetivo generales y conceptos básicos, en tanto que distintos a los de la geometría euclideana, se encontraban bien definidos. Sin embargo, desde el punto de vista de los *fundamentos*, la geometría proyectiva adolecía aún de un problema fundamental, el cual impedía que sea considerada como una disciplina completamente *autónoma*. Precisamente, si bien era evidente que las propiedades de las figuras que estudiaba la geometría proyectivas estaban bien diferenciados de aquellas que caracterizaban el contenido de la geometría euclideana, ya sea desde una perspectiva sintética o analítica, era que se mezclaban conceptos y técnicas proyectivas con conceptos y técnicas métricas, provenientes de la geometría euclideana[70].

El concepto de razón cruzada solía definirse apelando a razones entre longitudes de segmentos[71], al cual el ser una *invariante proyectivo*, lo que tenemos es una identidad entre razones[72]. Así pues, una de las estrategias empleadas por von Staudt, para autonomizar la geometría proyectiva de la geometría euclideana, fue la de sustituir las nociones métricas de la geometría euclideana[73], por el concepto de*cuaterna*

---

[68]Giovannini acepta esta interpretación; [(*íbid.*): n. 22].

[69]von Staudt (1847).

[70][Giovannini (2015): 37].

[71]Sean A, B, C, D cuatro puntos sobre una recta, considerados en ese orden, la razón doble se define como la cantidad $(ABCD) = \dfrac{CA}{CB}/\dfrac{DA}{DB}$.

[72]Es decir, $(ABCD) = (A^*, B^*, C^*, D^*) = \dfrac{CA}{CB}/\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{C^*A^*}{C^*B^*}/\dfrac{D^*A^*}{D^*B^*}$.

[73]Básicamente el empleo de razones entre segmentos en la definición de *razón doble*, a la vez que

armónica, el cual puede ser definido por técnicas «puramente proyectivas»[74]. En resumen, la especificidad tópica de las demostraciones conservativamente tópicas (**CT**) puede entenderse como valiosa, si las mismas contribuyen a la construcción de un fundamento *auto-suficiente* de las *teorías*.

5.3.3. Pureza y *demostración elemental*

La tercera orientación que mencionábamos asociaba la pureza demostrativa –i.e. su especificidad tópica, con un valor teórico *pragmático* inspirado en las demostraciones *elementales*. A este respecto, volvamos al artículo de Detlefsen sobre la pureza como una ideal; Detlefsen cita la siguiente caracterización de *demostración elemental* de Gian Carlo Rota, donde según Detlefsen «"elemntariedad", en este caso, significa algo como lo que hemos querido decir con "tópicamente pura"»[75]:

> What does it mean to say that a proof is «elementary» In the case of the prime number theorem, it means that an argument is given that shows the «analytic inevitability» (in the Kantian sense of the expression) of the prime number theorem on the basis of an analysis of the concept of prime without appealing to extraneous techniques[76]

Dejando a un lado la referencia a Kant (que no parece agregar mucho)[77], el punto relevante para el planteo de Detlefsen es que en una demostración elemental (entendida como Rota lo hace, es decir, como una demostración *analítica*), tal como

el empleo de relaciones de proporción en la demostración del carácter *invariante* de la razón doble.

[74][Giovannini (2015): 39]. La estrategia de von Staudt consiste en definir el concepto de *cuaterna armónica* por medio de la construcción del cuadrilátero completo; esta construcción permite tomar tres puntos sobre una recta arbitrariamente y construir el cuarto *punto armónico*. En dicha construcción, la *unicidad* de esta cuarto punto armónico está garantizada por el *Teorema de Desargues*, por lo que la *demostración* de este resultado resulta ser sumamente importante en la definición del concepto fundamental de cuaterna armónica. Por lo tanto, la *pureza* de la demostración de este teorema está íntimamente relacionada a la pureza de la *teoría* proyectiva; y en tal sentido, el interés por la pureza del método atañe tanto a la demostración del teorema de Desargues, como a la definición de *cuaterna armónica* [cfr. Giovannini (2015): 195 - 196]. En Arana and Mancosu (2012) y Hallett (2008) pueden encontrarse abordajes sobre la pureza de las demostraciones en el caso del teorema de Desargues.

[75][Detlefsen (2008): 190].

[76][Rota (2008): 115].

[77]Lo que sí es destacable es la asociación entre demostración elemental y demostración analítica; en este punto es más ilustrativa qui´zas, la referencia a Leibniz (*praedicatum inest subjecto*) que a Kant (véase [Leibniz (1996): 472], [Baaz and Leitsch (2011): 6]).

la demostración elemental de la distribución asinptótica de los números primos, no introduce nada «ajeno», «extraño» al concepto mismo de número primo. De acuerdo con Detlefsen y Rota, la demostración elemental del teorema de los números primos toma lo que había sido un «misterio» (la relación de la densidad de los números primos con la función *zeta* de Riemann, como es presentada en la demostración de Hadamard y de la Vallée Poussin), en algo cuyas raíces se encuentran en el concepto mismo de número primo, junto con otros conceptos necesario en virtud de mirar el problema como un verdadero problema *combinatorio*[78].

Para Detlefsen entonces, la demostración elemental del teorema de los números primos es un «potente ilustración» de la vigencia de enfoque aristotélico de la pureza (en un sentido amplio, no metafísico). Pero ¿cuál es el *valor* de una demostración elemental para, digamos un combinatorialista? Detlefsen considera un buen ejemplo de su valor en una observación de Staton y Zeilberger, quienes dicen que «para un verdadero combinatorialista, un resultado combinatorio no está propiamente demostrado hasta que no recibe una *demostración combinatoria directa*», mientras que para un no combinatorialista «una demostración combinatorialista directa es "sólo otra demostración"»[79]. Así pues, una demostración combinatoria directa añade un *insight* para el combinatorialista, aunque tal cosa no tiene por qué suceder a un no combinatorialista[80].

El punto de Detlefsen es pues: i) un especialista es más afín a hacer algo significativo con cualquier solución a un problema en su especialidad; ii) esta ventaja es mejorada si se da una solución en términos de los conceptos más familiares para él; iii) cuanto más pura es una demostración, más se ajusta la misma a este tipo de solución[81]. Detlefsen sugiere entonces, un modo *pragmático* de entender el valor de la pureza el cual consiste en la *eficiencia* de las mismas para producir más

[78][Detlefsen (2008): 190].
[79][Stanton and Zeilberger (1989): 39].
[80]*Íbid.*
[81][Detlefsen (2008): 190 - 191].

conocimiento:

> [v]iewed this way, purity is a *pragmatic* virtue, albeit one which serves epistemic ends (namely, the effective utilization of knowledge to produce more knowledge). It does not itself constitute an epistemic virtue; a pure proof is not, sheerly by dint of its purity, a better justification of the theorem it proves. It is, however, a more effective instrument for gaining further knowledge. We see here, then, a suggestion of the idea that purity generally increases the effectiveness of divisions of epistemic labor based on specialization[82].

De acuerdo con Detlefsen, la pureza es una virtud «pragmática» de una demostración; pues se trata de una virtud que sirve a fines epistémicos, siendo tales fines la «efectiva utilización del conocimiento para producir más conocimiento». Luego, la pureza es un *medio* para satisfacer una finalidad espitémica: producir conocimiento. Sin embargo, la justificación del teorema también producen conocimiento, a saber, permite aumentar la clase de resultados; pero entonces : ¿cuál es el *plus* de la pureza para una demostración? Detlefsen responde categóricamente que es la *eficiencia* de las demostraciones puras para aumentar la clase de resultados, es decir, la eficiencia de los medios, para producir más conocimiento; esto es pues, lo que hace a las demostraciones puras valiosas.

Parece claro en qué consiste el *pragmatismo* de la observación de Detlefsen: las denostraciones puras son medios *más eficientes* que sus contrapartes impuras para producir conocimiento. Así pues, como Detlefsen afirma: esta noción pragmática de de la virtud de pureza, es *grosso modo* un aristotelismo pragmático, donde el conocimiento de la *causa* sede su lugar a la *eficiencia*.
A este respecto es sugerente que el valor *epistémico* de la pureza se entienda en relación a la *práctica profesional* de la matemática. Detlefsen entiende la eficiencia en relación con la más efectiva *división del trabajo en base a la especialización*. El aspecto aristotélico de esta virtud es el hecho de que la proliferación de demostraciones puras para *todos* los teoremas conduce a la idea de que no hay una «ciencia

[82][Detlefsen (2008): 191].

absoluta del ser»; pues en tal sentido se entiende usualmente, que el requisito de «exclusión de géneros» de las demostraciones científicas, es una manifestación de «anti-platonismo» por parte de Aristóteles. Sin embargo, en la interpretación pragmática de Detlefsen, la práctica profesional contemporánea, particularmente la de los matemáticos combinatorialistas[83], aprecia la «especiación», o «especialización» si se prefiere, aunque no por el conocimiento de la causa, sino por la mayor eficiencia del instrumento –i.e. la demostración.

Por lo tanto, una orientación pragmática de la *superioridad epistémica* (SE) de la pureza como esta, observaría en el interés por la pureza del método, una valorización de la *especificidad* de la demostración por parte de los matemáticos profesionales, –i.e. una valoración de la conservación tópica en las demostraciones. La especificidad sería «valiosa» debido a que le permite al investigador ahondar o quizás *entender* mejor su *propia disciplina* (por ejemplo, a un «verdadero combinatorialista», según Staton y Zeilberger). Es importante aclarar, sin embargo, que Detlefsen no ve solamente un fin *epistémico* de la pureza, sino también un valor «pedagógico-cognitivo», pues según las opiniones que Detlefsen recoge, la pureza es cognitivamente valiosa, en tanto es una «buena disciplina para la mente»[84]; mientras que el empleo de demostraciones puras en un salón de clases mejora la eficiencia del aprendizaje, particularmente, hace decreser el tiempo y la distancia conceptual que separa la comprensión de la definición de los términos de una proposición, y la demostración de *esa* proposición[85].

Hasta aquí hemos pues, sugerido tres orientaciones que pueden guiar una comprensión general, intuitiva digamos, sobre la *superioridad epistémica* de las demostraciones puras, es decir, tres orientaciones acerca de cómo entender el *valor* de la

[83]Detlefsen dice concretamente «se trata de una inquietud compartida generalmente por los combinatorialistas»[Íbid.]. El buen ejemplo de Detlefsen son las observaciones de Staton y Zeilberger citadas arriba.

[84][Detlefsen (2008): 193].

[85][Íbid.: 193]. Cfr. a este respecto Arana and Mancosu (2012).

especificidad tópica de las demostraciones puras. Para finalizar esta sección, cabe hacer tres aclaraciones relevantes para el próximo capítulo: por un lado, no pretendemos sugerir que estas sean las *únicas* orientaciones interesantes; por otro lado, estas distintas orientaciones no están necesariamente en tensión una con la otra, pues la *especificidad* podría colaborar simultáneamente en la consecución de los distintos fines identificados en cada una de las tres orientaciones: *explicación/causa*, *autonomía* y *eficiencia*. Finalmente, la orientación en la que vamos a indagar en el próximo capítulo es la orientación pragmática, y esto lo haremos exponiendo un modelo de pureza, a saber, el *Modelo Pragmático*.

5.4. Los conceptos pre-teóricos de *Superioridad Epistémica* y *demostración pura*

En virtud de lo sugerido en las secciones anteriores, podemos avanzar una caracterisación intuitiva («pre-teórica») de **SE**, la cual incorpore los dos elementos que hemos destacado: la especificidad que «emerge» de **CT**, así como el objetivo, o la finalidad en virtud de lo cual esta especificidad resulta valiosa.

[**Superioridad Epistémica (SE)**]

Si $CT\left[D,\phi\right]$ y $\neg CT\left[D^{*},\phi\right]$, entonces $SE\left[D_{\phi},D_{\phi}^{*}\right]$ en virtud de que D es más *específica* respecto tópico de ϕ que D^{*}; y donde esta «especificidad» resulta valiosa desde el punto de vista de algún *objetivo epistémico*.

En la *Sección 1.3* del Capítulo 1 decíamos que uno de los objetivos específicos era sugerir un candidato a «condición sustantiva» –en el sentido de Seoane[86]– para la noción de demostración pura. Así pues, en el Capítulo 3 (página 52) caracterizamos de forma muy genérica el dominio del predicado «pura» aplicado a demostraciones; y así mismo, en el Capítulo 4 (página 69) se presentó una caracterización de

[86]Véase la *Sección 1.2* del Capítulo 1.

conservación tópica (**CT**); finalmente, ahora hemos formulado una caracterización intuitiva de *superioridad epistémica* (**SE**).
Llegado este punto, podemos apreciar claramente que el análisis que hemos venido llevando a cabo conduce a sostener que el predicado «pura», aplicado a demostraciones, puede desglosarse en dos predicados relacionales (o comparativos): **CT** y **SE**. El primero relaciona o compara el tópico de las demostraciones con el tópico de los teoremas (conclusiones), mientras que el segundo relaciona o compara demostraciones de un mismo teorema.

Así pues, en nuestra opinión **CT** y **SE** constituyen ambas la «condición sustantiva» de la noción intuitiva de demostración pura, de acuerdo al modo en que hemos introducido esta noción, esto es, como un «doble enigma»[87].Sin embargo, es necesario puntualizar que en los capítulos anteriores no hemos ofrecido un argumento *directo* en favor de esta opinión, sino que hemos intentado ofrecer una interpretación del doble enigma cuya virtud –si la hubiere–, consistiría en su capacidad para entender algunos debates actuales sobre la pureza del método en general, y de las demostraciones en particular. En tal sentido, las relaciones de **CT** y **SE** permitirían generar una suerte de «mapa» que permita identificar distintas aproximaciones (al tópico en matemáticas, a objetivos epistémicos en matemáticas) que le dan sustancia a ambas relaciones; y de tal manera, le dan sustancia también a la noción de demostración pura. Así mismo, y si tomamos en sentido estricto que éstas sean la «condición sustantiva» de la noción de pureza, este mapa también podría guiar la elaboración de *modelos* de demostración pura, así como el análisis de los mismos; pues en nuestra opinión todo putativo modelo de demostración pura debería ofrecer un concepto *teórico* –en el sentido de Seoane– de **CT** y **SE**. Por otra parte, una *evaluación* exclusivamente analítica de eventuales *modelos* de pureza, –i.e. una evaluación *elucidatoria*, debería a nuestro juicio prestar fundamental atención a cómo se elucidan ambas relaciones[88].

[87]Véase la *Sección 1.1* del Capítulo 1.
[88]Volveremos brevemente sobre esto en las conclusiones.

Sin más dilación podemos formular una caracterización *intuitiva* de demostración pura:

[**Demostración pura**] Una demostración D de ϕ es *pura*, si $CT\,[D,\phi]$; y si hay una demostración alternativa para ϕ, D^* tal que $\neg CT\,[D^*,\phi]$ –i.e. D^* no es pura respecto a ϕ, entonces $SE\left[D_\phi, D^*_\phi\right]$.

Esta formulación es naturalmente vaga en el entendido que tanto **CT** como **SE** encierran también una vaguedad. Como cabe esperar, esa vaguedad consiste básicamente en que la caracterización de **CT** no trae consigo un concepto claro de *tópico*; mientras que en el caso de **SE**, por otro parte, no trae consigo la especificación de un *objetivo epistémico* particular. Es la pretensión del próximo capítulo exponer un modelo que permite interpretar esta caracterización intuitiva de demostración pura.

Capítulo 6

El *Modelo Pragmático* de pureza

El recorrido que hemos hecho desde el Capítulo 2 hasta el Capítulo 5, ha consistido en una investigación *pre-teórica* sobre el concepto de demostración pura; es decir, las observaciones, argumentaciones y sugerencias planteadas en los capítulos precedentes se restringen al plano pre-teórico. A raíz de ello, las consideraciones expuestas en los capítulos anteriores revisten una insoslayable «inexactitud conceptual», así como una carácter netamente programático; en otras palabras: la pretensión de los capítulos anteriores, ha sido la de señalar algunas complejidades que una indagación sobre la pureza tópica presenta, ya en una etapa temprana de la misma, –i.e. en el plano pre-teórico. El valor de nuestra indagación pre-teórica radica, a nuestro juicio, en poner de manifiesto la razonable posibilidad de contar con *más de un concepto pre-teórico* de demostración pura, según qué «aproximación al tópico» y qué «objetivos epistémicos» se consideren. En efecto, la búsqueda de un concepto *teórico* (o «modelo») de demostración pura, se vería fuertemente beneficiada, si se presta la atención debida a las relaciones **CT** y **SE**, –i.e. más de una manera de interpretar la «condición sustantiva»; por otro lado, nuestra investigación pre-teórica ofrece un marco de referencia para la *evaluación* de modelos de pureza demostrativa.

En este capítulo nos serviremos de nuestra indagación pre-teórica para exponer un modelo de *solución tópicamente pura* [1] , el cual podemos aplicar a las demostra-

[1]Hasta donde nuestra erudición de problema alcanza, este es el *único* modelo que puede encon-

ciones, –i.e. aplicar a las «soluciones» donde las demostraciones son protagonistas. Así pues, en tanto modelo de pureza tópica, podemos extraer del mismo un concepto *teórico* de *conservación tópica* y *superioridad epistémica*. Este modelo es propuesto por Michael Detlefsen y Andrew Arana[2], y como este es el único artículo donde los autores presentan su modelo en detalle, siempre que no refiramos al trabajo de Detlefsen y Arana, estaremos dando a entender que nos referimos a Detlefsen and Arana (2011). Al modelo de solución pura que estos autores presentan le llamamos «Modelo Pragmático», y la razón de esta denominación es que el mismo hace énfasis en la ganancia de *eficiencia* de las demostraciones puras, siendo en este sentido que el mismo podemos subsumirlo dentro de la orientación pragmática de la Sección 5.3.3.

No obstante, y debido a que el marco metodológico de nuestra investigación es el de la elucidación, nuestra exposición del modelo pragmático será realizada en «clave elucidatoria». Solo así es podremos servirnos de toda la investigación pre-teórica que precede a este capítulo. En virtud de todas estas consideraciones es que el capítulo se organiza de la siguiente manera: en la Sección 6.1 justificaremos la legitimidad de nuestra lectura en «clave elucidatoria» del artículo de Deltlefsen y Arana; en la Sección 6.2 –la más extensa–, expondremos los elementos de los que se compone el modelo pragmático. Finalmente, en la Sección 6.3 presentaremos los conceptos *teóricos* de **CT** y **SE** que pueden extraerse del modelo.

---

trarse en la literatura específica (caracterizado en detalle, al menos). Es cierto, no obstante, que en Baldwin (2013) y Baldwin (2018) se sugiere un concepto *teórico* de la relación **CT** como *definición explícita* en una teoría, añadiendo que la definición no debe extender la clase de *modelos* que el teorema admite. Sin embargo, el enigma del valor epistémico de la pureza ocupa un lugar extremadamente marginal, y por esta razón es que no lo consideramos un «modelo» de pureza en sentido estricto. En Arana and Mancosu (2012), por otro lado, lo que encontramos es más una defensa de la «aproximación formulacional» al tópico, pero la discusión conceptual allí presente parece más circunscrita al plano pre-teórico (argumentando precisamente, en favor de lo que hemos denominado «aproximación formulacional»), pero no pretenden presentar un «modelo» de pureza.

[2]Detlefsen and Arana (2011)

6.1. El *Modelo Pragmático* en «clave elucidatoria»

El párrafo con el que inician Detlefsen y Arana su artículo es bastante elocuente respecto a sus intenciones. En el mismo se lee

> [t]here is a long tradition in mathematics of preferring the pure to the impure in proofs of theorems and solutions of problems. «Purity» in mathematics has generally been taken to signify a preferred relationship between the resources used to prove a theorem or solve a problem and the resources used or needed to understand or comprehend that theorem or problem. In this sense, a pure proof or solution is one which uses only such means as are in some sense *intrinsic to* (a proper understanding of) a theorem proved or a problem solved.[3].

Lo primero a notar aquí es que la pretensión de los autores es la de *clarificar* una cierta concepción de pureza, y esta es nuestra noción de «pureza tópica». En tal sentido, la pretensión de Detlefsen y Arana es claramente «analítica», y la protagonista de su análisis es una cierta *concepción* de la pureza. El segundo aspecto importante del párrafo introductorio de su artículo, es la descripción de la «concepción» bajo estudio. Nótese que dicha concepción «tópica» consiste en una «relación privilegiada entre recursos»; dichos recursos son los «usados» para demostrar un teorema, o resolver un problema, por un lado, y los «usados o necesarios para entender o comprehender» un teorema, o un problema, por otro lado; por lo tanto, dicha concepción de pureza es evidentemente *metodológica*. En tercer lugar, la tarea analítica de Detlefsen y Arana consiste en una doble cometido: clarificar la «característica» de las soluciones o demostraciones *tópicamente puras*, así como clarificar también su «importancia epistémica». Así pues, los autores pretenden ofrecer un análisis de una concepción de pureza por medio de acometer dos tareas analíticas: caracterizar la pureza de una demostración o solución, y clarificar su valor epistémico. La cual se verá inmediatamente.

[3][Detlefsen and Arana (2011): 1].

Nuestro punto entonces, es que esta pretensión puede ser *leída* en «clave elucidatoria»[4]. A tales efecto, podemos leer en esta clave los tres aspectos destacados arriba.

En primer lugar, resulta evidente la pretensión *analítica* o *clarificadora* de Detlefsen y Arana, aunque un poco más adelante puntualicen que no pretenden hacer justicia a toda la variedad de formas que la pureza pueda llegar a adquirir[5]. En este sentido, no parece acertado querer interpretar sus palabras atribuyéndoles algún modelo de elucidación; sin embargo, nuestra lectura en clave elucidatoria no es, así misma, contraria a su pretensión analítica. Nótese que los autores se refieren a la pureza tópica como una *concepción* de la pureza. En tal sentido, nuestra lectura elucidatoria sugiere que esta concepción es un *concepto pre-teórico* de pureza.

En segundo lugar, de acuerdo al tercer aspecto señalado arriba, hay dos tareas analíticas que se proponen los autores: esclarecer las características que las soluciones o demostraciones puras revisten, por un lado, y su valor epistémico por otro. En nuestra lectura la «concepción» de pureza tópica vendría a ser un concepto pre-teórico y, en tal sentido, el mismo reviste una «condición sustantiva». Así pues, podríamos decir que ambas tareas analíticas remiten a proveer un concepto teórico como *elucidatum* de una cierta *condición sustantiva* del concepto pre-teórico. Podemos observar en el pasaje citado a su vez, que Detlefsen y Arana identifican la pureza con el carácter «intrínseco» de la solución para con el problema, pero incluso los autores afirman en la misma página que este carácter intrínseco tiene dos aspectos, que bien pueden ser leídos como la formulación de una condición sustantiva para la elucidación del concepto pre-teórico de pureza tópica:

> [...] there has been a widespread, persistent *tendency* to think that there

[4]No es nuestra intención atribuir una pretensión «elucidatoria» a Detlefsen y Arana; dicho de otra manera, no estamos sugiriendo que la intensión de los autores sea la de *elucidar* una noción de pureza. Sin embargo, sí creemos que las propias palabras de los autores, no inhibe el interés por entender su trabajo como un esfuerzo elucidatorio y, de hecho, a nuestro juicio la lectura elucidatoria permite ofrecer una exposición concisa de sus propuestas.

[5][Detlefsen and Arana (2011): 2]. No obstante, sostienen que la concepción tópica de pureza es «la concepción más importante, o al menos es una noción central» de pureza (*íbid.*).

> are ways in which the resources used in a proof/solution *can match or fail to match* the theorem proved/problem solved, and that when proper match is achieved it in some way(s) *adds to the value* of the proof/solution produced[6].

Claramente, la «coincidencia» entre teorema y demostración, así como el «valor agregado» de tal cosa, son la dos relaciones que ya identificamos con la condición sustantiva de la noción intuitiva de pureza: **CT** y **SE**. De este modo, una lectura elucidatoria, en el espíritu que ha guiado los capítulos anteriores, sugiere que los dos enigmas definitorios de la «tendencia» que los autores identifican, no son otra cosa que **CT** y **SE**. En otras palabras, ambas tareas analíticas refieren a una doble característica, o «enigma»[7] relacionado con el con el concepto pre-teórico («concepción») de pureza tópica.

Por lo tanto, es factible sostener a nuestro juicio, que una lectura en «clave elucidatoria» del modelo de Detlefsen y Arana, no se presenta como algo completamente alejado de las intenciones de los autores y, en tal sentido nuestra lectura es legítima. Así pues, es legítimo aproximarnos a su modelo de pureza como si se tratase de un esfuerzo elucidatorio de las nociones de **CT** y **SE** y, en definitiva, de la noción intuitiva de *demostración pura* que presentamos al final del Capítulo 5.

6.2. Los elementos del *Modelos Pragmático*: *problema*, *investigador* y *solución*

Para comprender cómo funciona el *Modelo Pragmático* de Detlesfen y Arana (*MP* desde ahora), debemos prestar atención a tres cosas: qué es un *investigador* (*Sección 6.2.1*), qué es un *problema matemático* (*Sección 6.2.2*), qué es una *solución* (*Sección 6.2.3*); así como algunas nociones conexas a éstas.

[6][Detlefsen and Arana (2011): 1]. Los énfasis son nuestros.

[7]Esta expresión la usamos en la Sección 1.1.

6.2.1. ***Investigador*, *ignorancia específica* y *alivio***

Empecemos con la noción de *investigador*. La sección §3 del artículo de Detlefsen y Arana empieza diciendo:

> [o]ne important goal of epistemic development is to reduce ignorance of which an investigator is aware and relief of which she in some important sense pursues. Among the different types of ignorance investigators may seek to alleviate is one we call «specific ignorance»[8]

En esta cita se introduce la noción de investigador en conexión con el objetivo o la finalidad de reducir la ignorancia de la que este está al tanto (o está «consciente»); esto es, la actividad de un investigador estaría orientada hacia la finalidad de eliminar o reducir su ignorancia, por lo que un investigador incrementa su conocimiento por medio de reducir su ignorancia. Ahora bien, el modelo involucra una tipo de ignorancia particular que denominan «ignorancia específica», un tipo particular de eliminación de la ignorancia el cual denominan «alivio» (*relief*). Así pues, Detlefsen y Arana introducen la noción de investigador según dos supuestos: que este está al tanto de casos de ignorancia específica, y que este tiene el derecho (*qua* investigador) de buscar el «alivio» de esa ignorancia[9].

Antes de abordar la «ignorancia específica» y su «alivio», debemos detenernos un poco más en esta abstracta caracterización de «investigador». Cabe enfatizar esto último: es *sumamente* abstracta, pues la única caracterización concreta de este es que persigue un objetivo particular: aliviar su ignorancia específica[10]. En una nota al pie Detlefsen y Arana dice algo más a este respecto:

[8][Detlefsen and Arana (2011): 8].

[9]*Íbid.*

[10]Es claro para nosotros que una caracterización tan abstracta de «investigador» deja un poco *deflacionada* a cualquier noción de *agente*. Así pues, en la caracterización de Detlefsen y Arana las eventuales «habilidades» que el agente pueda llegar a tener no son una preocupación para ellos en este momento; sin embargo, cuando veamos la noción de *problema pretendido*, notaremos que esta cuestión acerca de las eventuales *habilidades* que un investigador pueda tener, volverá a aparecer y será fundamental (*Sección 6.2.2*).

> [w]e note that on our view investigators are not generally to be thought of as individuated along the same lines as persons or human beings. Rather, they are to be thought of as conductors of investigations. Generally speaking, one and the same human person can and typically will be involved in the conduct of more than one investigative role at a given time[11]

Analíticamente, podemos decir que un investigador no es un *agente* o *sujeto* humano, aunque tales cosas podrían ser *instancias* de la noción de investigador; pues lo investigadores son los «conductores de una investigación». Así pues, una misma persona puede conducir *más de una* investigación y, en tal sentido, puede ser instancia de *distintos roles* investigativos. Dicho brutalmente: investigadores y personas tienen distintas condiciones de *identidad*

Parece claro entonces, que desde una perspectiva puramente analítica, la noción de *investigador* de Detlefsen y Arana está caracterizado únicamente como una actividad orientada por un fin muy particular, a saber, aliviar la ignorancia específica. A partir de esto, podemos decir que el «investigador» según ambos autores, se caracteriza como la consecución (o el intento) de alcanzar un *fin epistémico*, siendo este el ya mencionado «alivio». Por lo tanto, el objetivo epistémico introducido por los autores es lo que debemos exponer a continuación.

La *especificidad* de la ignorancia depende, en parte, de la *formulación* problema[12]; pero por otro lado, en §3 del artículo podemos entender la especificidad de la ignorancia por medio de la especificidad de su «alivio», –i.e. el alivio de la ignorancia específica. Pero para ello, conviene entender la distinción que los autores plantean entre simple «reducción» de la ignorancia y su «alivio».

> In this paper we operate from a basic but only partially developed conception of ignorance and its relief, one which sees specific ignorance as capable of relief even in cases where global ignorance (measured,

[11][Detlefsen and Arana (2011): 8].

[12]Esto lo abordaremos en 6.2.2.

> for example, by the number of problems we do not know how to solve, or by the proportion of problems we know to which we have solutions) may not be [...] we believe that alleviating a case of specific ignorance may be an epistemic good even if it does not, overall, result in a lasting reduction of the *extent* of our ignorance. At the same time, however, we do not believe that absolutely all ways of eliminating instances of specific ignorance should count as *relieving* it. Specifically, we would not count the elimination of a case of specific ignorance as relief if application of the means of elimination itself systematically produced further cases of specific ignorance not eliminated by such application. So, even though *relief* of specific ignorance does not itself necessarily entail reduction, it does require the absence of systematic effects of replenishment[13].

No toda eliminación de instancias de ignorancia específica cuenta como un *alivio*, es decir, no toda *reducción* de la ignorancia específica constituye un alivio. La solución de un problema específico redunda en una disminución de la «ignorancia global» (en el entendido de que disminuye el número de problemas que no sabemos cómo solucionar, por ejemplo), pero, también puede implicar la «producción sistemática de otros casos de ignorancia específica». El «alivio» por otra parte, puede *no* disminuir la ignorancia global; pero el rasgo las sobresaliente del alivio de la ignorancia específica, consiste en que las soluciones que lo generan, no producen sistemáticamente más instancias de ignorancia específica, pues esto es lo que la hace valiosa aunque esas soluciones no conduzcan a una reducción de la ignorancia global. Así pues, piénsese a este respecto una solución que «introduce» una hipótesis controversial, –i.e. una hipótesis cuya legitimidad es discutible; ahora bien, si esta hipótesis controversial *forma parte de las condiciones del problema original, entonces la misma no representa una «nueva» instancia de ignorancia específica, y por lo tanto, la solución «alivia» la ignorancia específica*; por el contrario, si esto mismo no ocurre, entonces la solución introduce otro problema y, por lo tanto, no constituye un alivio. Así pues, como puede intuirse, en el caso donde la hipótesis es parte de las condiciones del problema, las solución en cuestión es tópicamente pura (en cuanto a esa hipótesis, al menos). De esta manera, la especificidad del alivio no

[13][Detlefsen and Arana (2011): 8]. Énfasis en el original.

es lo mismo que la especificidad del problema, pues lo primero es un atributo de la *solución*; en otras palabras, el modelo pragmático parece apuntar a sostener que las soluciones puras son soluciones específicas que, en cuanto tales, permiten «aliviar» la ignorancia específica.

El alivio es *específico* porque no implica una reducción global de la ignorancia, –i.e. el número de problemas podría no decrecer; pero por otro lado, es también específico debido a que no introduce sistemáticamente *nuevos* problemas que requieran *nuevas* soluciones[14]. Así pues, en cuanto a los primero, se trata de una característica que pueden compartir las soluciones tanto que alivian, como las que reducen (a secas) la ignorancia específica, a saber, el no necesariamente reducir la *extensión* de la ignorancia. Piénsese a este respecto una solución que introduce una hipótesis controversial; en tal caso, hemos reducido/aliviando la ignorancia específica (hemos solucionado un problema específico), pero hemos introducido *otro*: la legitimidad de la hipótesis. Luego, simplificando mucho las cosas, el número de problemas seguiría siendo globalmente el mismo. En cuanto a lo segundo, –i.e. la condición de que la solución que alivia, no conduce «sistemáticamente» a nuevos problemas, piensese por ejemplo, que la hipótesis controversial deba ser aceptada por formar parte de las *condiciones* del problema, digamos; en tal caso, la solución que la incorpora no estaría agregando *nuevos* problemas, pues aquello que concierne a la legitimidad de la hipótesis controversial, también concierne a la existencia del problema original. Luego, el alivio de la ignorancia es *específico* debido a que la legitimidad de la hipótesis en la solución está «atada» a la existencia del problema.

Esta descripción general de *alivio* de la ignorancia específica, se entronca con la idea de solución *pura* que quieren transmitir los autores, pues las soluciones puras aportaría la *especificidad* que la solución requiere para que permita «aliviar la ignorancia específica». Es decir, cuanto «más atada»[15] esté la hipótesis a las condiciones

[14]Esto es, la hipótesis controversial del párrafo anterior no introduce un nuevo problema porque la misma es «intrínseca» al problema original.

[15]Podríamos decir pues, que esta condición se encuentra maximalmente representada en la relación

del problema, más efectivamente la solución produce un «alivio» de la ignorancia específica, dado que menos oportunidad de introducir nuevos problemas tendrá. En tal sentido pues, el alivio parece ser algo epistémicamente más prometedor que la simple reducción de la ignorancia específica, y la capacidad de aliviar la ignorancia específica sería algo que las soluciones puras proveerían por excelencia. En particular, Detlefsen y Arana dicen que «la virtud básica de las soluciones *puras* a problemas es que las mismas son medios particularmente efectivos de aliviar la ignorancia específica»[16].

Esta es pues, una descripción en términos *epistémicos* de la especificidad de la ignorancia y el alivio. Como puede observarse, la *especificidad* es una cuestión importante aquí, pues la especificidad de las soluciones puras parecería que es lo que les permite ser soluciones privilegiadas a la hora de aliviar la ignorancia específica. Ahora bien, para finalizar esta subsección podemos aclarar por qué nos hemos referido al modelo de Detlefse y Arana como «modelo pragmático». Si nos fijamos en la cita del párrafo anterior acerca de la «virtud» de las soluciones puras, se observa con claridad el carácter pragmático de dicha virtud: la *eficiencia* en la consecución de un objetivo, a saber, el alivio de la ignorancia específica. Puestas así las cosas, pareciera que nos encontramos con un modelo que caracteriza el valor de las soluciones puras desde un punto de vista *instrumental*, pues éstas no son valiosas de por sí, sino como un «medio» para el alivio de la ignorancia, un medio cuya virtud es ser *eficiente*[17]. Así pues, llamamos «pragmático» al modelo de Detlefsen y Arana debido a su énfasis en la eficiencia de las soluciones puras a la hora de introducir el *valor* que estas tienen para el modelo.

---

de conservación tópica (**CT**).

[16][Detlefsen and Arana (2011): 8].

[17]El hecho de que Detlefsen sea co-autor del modelo, es significativo si se compara lo dicho aquí con lo con expuesto en la página 132 de esta tesis, donde Detlefsen mismo habla de una concepción «pragmática» de pureza.

6.2.2. *Problema pretendido*

En la subsección anterior expusimos centralmente la noción de *alivio de la ignorancia específica*, y destacamos el carácter *específico* de este alivio, pero no dijimos nada muy concreto acerca de qué es la «ignorancia específica», excepto que la extensión de la ignorancia podía verse (a juicio de los autores) como el número de problemas, los cuales vendrían a ser también «específicos». En esta subsección abordaremos el concepto de *problema pretendido* atendiendo particularmente a cómo es que un problema es, en efecto, «específico». Sin embargo, otro aspecto del concepto de problema en este modelo, es que los problemas son tales *para un agente o investigador*, a decir de los autores, los investigadores se *dirigen* a un problema, o los investigadores solucionas los problemas *pretendidos*. Esta idea de que el problema es «pretendido» sugiere fuertemente que el *Modelo Pragmático* tiene un fuerte carácter *intencional*; y en este sentido es que la especificidad de las soluciones puras también también atañe al hecho de que las mismas soluciones *el* problema pretendido, en vez un problema «similar».

Ambas cuestiones, la especificidad del problema y la cuestión de que estos sean los pretendidos por el investigador, estarán presentes a la hora de entender el tipo de solución que Detlefsen y Arana denominan «co-final»[18]. Detlefsen y Arana sugieren esto (§3.1) cuando dicen:

> [w]e'll generally refer to the attempts of investigators to relieve specific ignorance as «directed investigations». We'll call the questions or problems towards which these investigations are directed «directing questions» or «directing problems.»[19]

Una investigación está «dirigida a», o «conducida hacia», según los autores. En principio esto no tiene por qué extrañarnos, puesto que en la Subsección 6.2.1 se observó ya que el investigador estaba caracterizado por la persecusión de una finalidad

[18]Sobre este punto volveremos en la *Subsección 6.2.3*.

[19][Detlefsen and Arana (2011): 9].

particular: reducir la ignorancia (a secas)Precisamente por ello es que el *alivio* tenía una condición extra en relación a la simple *reducción*: ser eficiente en la reducción de la ignorancia específica, o no producir nueva ignorancia «sistemáticamente». Gracias a esto es que las soluciones *puras* son valiosas, pues son medios *eficientes* para aliviar la ignorancia específica.. Así pues, quizás el carácter intencional del modelo sólo consista en asumir una finalidad particular; por lo que en tal caso, que el problema sea «pretendido» no estaría agregando nada sustancial a lo ya explicado por Detlefsen y Arana.
Sin embargo, si recordamos la importancia que la «especificidad» parece tener en el modelo, podríamos entender que esta condición de que el problema sea «pretendido», es relevante para la cuestión del *tópico* del problema. Pues, como dice Arana en otro artículo,

> [...] a topically pure solution of a problem is best thought of as a solution of precisely *that* problem, **not some different problem** even if there are good reasons to pursue the solution of that different problem[20]

Si tenemos presentes las formulaciones trigonmétrica y euclideana del Teorema de Pitágoras (página 92), podría decir que una demostración como la trigonométrica *no es específica* de la formulación euclideana, dado que no es una solución de *ese* teorema, sino de uno diferente –aunque similar–, dado que la formulación trigonométrica no tiene exactamente el *mismo tópico* que la formulación euclideana. En este sentido, el aspecto *intencional* del modelo, no es ajeno a un aspecto *intensional*, pues la falta de especificidad de la demostración trigonométrica podría deberse a que la formulación trigonométrica no es *sinónima* de la formulación euclideana.

Concentrémonos entonces, en cómo el modelo de Detlefsen y Arana caracteriza el concepto de *problema*. Este consiste consiste en un triplo $\mathcal{P} = \langle ?_{s/n}, P, \phi \rangle$, donde la proyección $?_{s/n}$ es una *actitud interrogativa* del tipo «sí/no», P es es un *contenido proposicional* y ϕ es una *formulación* de P (a partir de los recursos formulacionales pertinentes de los que disponga el investigador)[21]. Lo que necesitamos ahora

[20][Arana (2014): 331]. Negritas añadidas. Véase también [Arana (2017): 208].
[21][Detlefsen and Arana (2011): 9].

es explicar un poco más qué entienden los autores por cada una de estas proyecciones.

Empecemos exponiendo la *actitud interrogativa* $?_{s/n}$. Los autores no se extienden mayormente en la clarificación de esta proyección, pero hay un punto que es suficientemente claro: la actitud interrogativa es, precisamente, una *actitud*, y en tal sentido es parte del investigador; es decir, es *para* el investigador que una pregunta representa un problema, según el modelo. Ahora bien, esta actitud por parte del investigador se manifiesta –digamos– bajo la forma de una condición bastante específica que se le impone a la formulación del problema: el mismo consiste en una pregunta que se responde con un «sí» o con un «no»; donde esto último redunda, a su vez, en una condición *sintáctica* que viene impuesta por la actitud interrogativa $?_{s/n}$. Esta condición sintáctica consiste en que la formulación no debe contener *funciones proposicionales*, sino proposiciones. A este respecto, Detlefsen y Arana hacen la siguiente observación:

> Questions of other interrogative types (such as «what» or «why» problems) do not ordinarily express a proposition, but instead only propositional functions (cf. John Searle, Speech Acts [...]). For instance, consider the question «What is $\int_0^1 dx = X$?» Its content is the propositional function $\int_0^1 dx = X$, for X a propositional variable ranging over some intended domain (which we will take to be the complex numbers). So we may restate the question «What is $\int_0^1 dx$?», as «Does there exist an X such that $\int_0^1 dx = X$?» While it is true that this restatement results in a different question, the change affects the interrogative type and formulation of the question but not its content; and indeed the formulation changes only to reflect the shift in interrogative type. For this reason we consider this reformulation adequately close to the question as originally formulated for our analysis. [22]

La actitud $?_{s/n}$ no es evidentemente la única actitud *interrogativa* que podemos encontrar, pues el investigador también podría preguntarse «por qué», o «qué es» tal o cual cosa. Como los mismos autores sugieren, es conveniente remitirnos a John Searle[23]; éste representa la forma general de (un gran número de) géneros

[22][Detlefsen and Arana (2011): 9, n. 35].
[23][Searle (1980): Cap. III].

de actos de habla ilocucionarios como $F(p)$, donde la variable F toma como valores los dispositivos indicadores de fuerza ilocucionaria, (aserciones, promesas, peticiones, advertencias, etc.), mientras que *p* es una variable que toma como valores a proposiciones. La cuestión entonces radica en qué ocurre con *p* cuando *F* toma el valor de una pregunta. Considerando el ejemplo de la cita, podemos considerar las pregunta «¿Cuál es $\int_0^1 dx$?» como una abreviación informal de «¿Cuánto es $\int_0^1 dx = X$?», donde *X* es una variable numérica cuyo dominio pretendido son, por ejemplo, los números complejos o reales. Así pues, esta segunda formulación contiene una función proposicional –$\int_0^1 dx = X$–, por lo que no sería una pregunta del tipo $?_{s/n}$; para ello debemos o bien, cuantificar *X*, o bien instanciar *X*. Los autores transforman la pregunta «¿Cuánto es $\int_0^1 dx = X$?» en «¿Hay un X tal que $\int_0^1 dx = X$?»; en este último caso efectivamente tendríamos una pregunta del tipo $?_{s/n}$.

De acuerdo con esto, la actitud interrogativa $?_{s/n}$ parece introducir una condición sintáctica sobre la *formulación* del problema (aunque la formulación sea una proyección distinta en el triplo), a saber, la condición sintáctica de carecer de términos abiertos. En este punto ya puede observarse que las preguntas tratables por el modelo son, precisamente, de un tipo bien *específico*. Dicho de otra manera, según el modelo pragmático no podríamos hablar de una «explicación pura» para un hecho matemático, digamos, sencillamente porque no se trataría de una pregunta del tipo adecuado, –i.e. del tipo $?_{s/n}$[24].

En cuanto a la proyección *P* lo que tenemos es un «contenido proposicional», acerca del cual los autores ciertamente no ofrecen pista alguna acerca de cómo lo conciben. Por último tenemos la proyección ϕ, el cual es una *formulación* que *expresa* el contenido proposicional *P*. Es importante observar que, como señalamos arriba, la formulación del problema depende de los recursos representacionales de los que el

[24]Piénsese por ejemplo en la pregunta «¿por qué no podemos cuadrar un círculo por medio de círculos y rectas?». La respuesta resumida sería «porque el número π es demostrablemente trascendente»; ahora bien, según el modelo esta solución no podría clasificarse ni como «pura», ni como «impura», pues no estamos ante una interrogación del tipo tratable por este.

investigador disponga

[25]

Por lo pronto, la *identidad* del problema pretendido depende de la identidad de cada una de las proyecciones del triplo. Ahora bien, las tres proyecciones no parecen ser del todo *independientes*. Volvamos a la cita de arriba, allí teníamos las preguntas «¿Cuánto es $\int_0^1 dx = X$?» y «¿Hay un X tal que $\int_0^1 dx = X$?»; como señalan los autores *hay* en efecto una diferencia en la formulación, y dicha diferencia no es baladí, pues involucra que entre los recursos con los que el investigador cuenta, tenemos un lenguaje con cuantificadores, cuyo tipo (primer, segundo orden) dependerá del caso. En efecto, dicho cambio de formulación está dado por el cambio en la actitud interrogativa, pero un cambio de formulación así, –i.e. exigir que la formulación no contenga términos abiertos, un cambio no siempre se trata de un cambio *inocuo* en los recursos representacionales del investigador, así como para el propio *contenido* del problema[26].

Por otro lado, la relación entre las proyecciones *P* y ϕ es evidente y explícita: ϕ *expresa* el contenido proposicional *P*. Luego, la proyección ϕ está determinada por *P* (así como por $?_{s/n}$, según hemos visto). Ahora bien, en este punto el cerco se cierra sobre la proyección *P* ¿Cómo se determina? Como decíamos arriba, esta proyección no aparece caracterizada en absoluto por lo autores en el párrafo que éstos dedica al concepto de problema[27], ¿es acaso una proyección *independiente* de las restantes? Es importante notar una diferencia entre esta proyección y las demás, a saber,

[25]En cuanto a tales recursos, en primer lugar tenemos que considerar que el investigador cuenta con un *lenguaje*, el cual debe al menos, ser suficientemente potente para *expresar* el contenido proposicional *P*. Ahora bien, es menester también puntualizar que en la descripción del modelo que Detlefsen y Arana avanzan, no resulta del todo sencillo plantearse cómo el *investigador* podría cuestionar (en un sentido sustantivo) la capacidad de los recursos formulacionales para expresar un contenido proposicional. La razón es que el *contenido* del problema se determina –según los autores–, de acuerdo con la *comprensión* que el investigador tenga de la *formulación* del problema (volveremos en seguida sobre esto). Lo que en todo caso podemos decir, es que un investigador puede tener un preferencia (o una actitud crítica) ante las eventuales distintas formulaciones de *P*, siempre y cuando los diversos recursos representacionales empleados en las distintas formulaciones sean, todos ellos, accesibles al investigador.

[26]Tómese como ejemplos las preguntas «¿es verdad que $\forall x(((Pc \wedge Px) \rightarrow Ps(x)) \rightarrow \forall x Px)$?», y «¿es verdad que $\forall P \forall x(((Pc \wedge Pn) \rightarrow Ps(x)) \rightarrow \forall x Px)$?». Difícilmente podríamos decir que la cuantificación de P es inócua para el contenido de la pregunta.

[27]Volveremos sobre esto en 6.3.

mientras que las distintas instancias de ϕ pueden ser discriminadas *señalándolas*, la proyección *P* podría involucrar un carácter intensional[28].

En definitiva, el concepto de problema (pretendido), o al que el investigador se «orienta» consiste en el triplo $\langle ?_{s/n}, P, \phi \rangle$, y en virtud de esto ocurre que la *identidad* del problema estaría determinada por las instancias de cada una de las proyecciones. Por otro lado, hemos visto cómo la *especificidad* del problema (y por ello, la especificidad de la ignorancia) parece ser introducida por la *actitud interrogativa* –i.e. $?_{s/n}$. En efecto, (i) esta actitud interrogativa restringe aquello que representa un problema para el investigador, (ii) esta restricción es, en la caracterización de los autores, una condición *sintáctica* –i.e. la exclusión de las funciones proposicionales, y en tal sentido, la proyección $?_{s/n}$ tiene consecuencias para ϕ. Esto último se otorga al problema –y quizás también diríamos a su formulación–, un carácter específico en el sentido de que el mismo –su contenido, quizás también– está más *determinado* que si involucrara una función proposicional[29]

6.2.3. Soluciones (*co-finales*, *estables*) y *disolución* de problemas

En la sección §3.2 Detlefsen y Arana abordan el concepto de *solución* del modelo pragmático, y en particular, la identificación de distintos *tipos* de soluciones, a saber, solución *co-final* y solución *estable*, así como la idea de *disolución*. Pero para exponer ambos tipos de soluciones los autores distinguen primero, dos modalidades en las que un problema puede darse por racionalmente resuelto.

Los problemas pretendidos se resuelven por medio de investigaciones orientadas (a

[28]Cfr. más arriba la página 148.

[29]Entiéndase por esto que la pregunta «¿es el caso que Px?» no admite una respuesta «sí-no», pues una respuesta a esta pregunta empezaría por decir «depende de qué sea x»; mientras que la pregunta «¿es el caso que $\exists x Px$?» no requiere tal aclaración. Por último, en la Sección §3.1 del artículo de Detlefsen y Arana, donde introducen el concepto de problema, los autores no explicitan nada acerca de en qué consiste el *tópico* del problema – si éste se identifica con el triplo mismo, o no–; aunque ciertamente la proyección *P* –i.e. el contenido proposicional del problema, parecería un candidato natural con el que identificar el tópico del problema. En la *Subsección 6.2.3* y la *Sección 6.3* señalaremos mejor qué rol juega la proyección *P*.

resolver *ese* problema); en este sentido los problemas pretendidos son resueltos por medio de los *resultados* de una investigación:

> Here by «result», we mean the body of evidence produced by a directed investigation for the purpose of answering its directing question. An «answer», on our analysis, is thus a «yes» or «no» response backed by evidence, and not merely a «yes» or «no» response[30]

La primera modalidad para solucionar un problema pretendido consiste, entonces en dar un *respuesta* –«sí», «no»– a la pregunta en cuestión, estando la misma acompañada de cierta *evidencia*. Esto último nos permite hacer una aclaración respecto a nuestro uso indiscriminado a lo largo de la presente investigación, de las expresiones «teorema» y «problema», así como «demostración» y «solución»[31]. En el contexto de este modelo pragmático la evidencia que acompaña la respuesta no excluye *a priori* ningún recurso o procedimiento, por lo que este modelo puede ser aplicado al tipo de evidencia que hemos estado estudiando: la demostración. Así pues, ante una pregunta como «¿es la suma de los ángulos internos de un triángulo euclideano igual a dos ángulos rectos?», podríamos responder con un «sí» y ofrecer una demostración que concluya «la suma de los ángulos internos de un triángulo euclideano igual a dos ángulos rectos», como evidencia; y si, por otro lado, respondiéramos con un «no», entonces ofreceríamos como evidencia un contra-ejemplo a modo de demostración. Luego, el modelo pragmático no distingue entre demostraciones y otros tipos de evidencia matemática, por lo que podemos emplearlo para caracterizar la noción de *demostración* pura. En definitiva, responder (con evidencia) a la pregunta puesta por el problema es una modalidad apropiada para terminar una investigación.

La segunda modalidad para resolver un problema es la *disolución racional* del mismo. Lo autores hacen hincapié el aspecto espitemológico de la expresión latina *solvere* que asocia «resolver» con «librarse» de un problema.

[30][Detlefsen and Arana (2011): 9].

[31]Véase por ejemplo la *Sección 1.1*.

> We take this «releasing» aspect of solution seriously, if not entirely literally. If problems are solved in order to relieve specific ignorance, then, generally speaking, a solution to a problem is anything that eliminates the specific ignorance it represents. [...] The idea behind [disolución racional], of course, is that once a problem ceases to be a directing problem for an investigator, it no longer represents a locus of specific ignorance for her[32].

Así pues, de acuerdo con Detlefsen y Arana una solución es «todo lo que elimina» un caso de ignorancia específica, –i.e. un problema. En tal sentido ocurre que, si un problema *deja* de ser un problema pretendido para un investigador, entonces el problema puede darse por *eliminado*, aunque dicha eliminación no conlleve una respuesta a la pregunta; dicho de otra forma, si el problema se disuelve, entonces éste deja de ser un *locus* de ignorancia específica[33].

Por lo tanto, tenemos dos modalidades para aliviar la ignorancia específica (responder o disolver). Ambas modalidades se combinan para darle a las soluciones puras su valor epistémico, pues éste tipo de soluciones vendrían a tener la distintiva capacidad de *disolver* aquellos problemas que estas no resuelven de forma *perdurable*. Pero para entender esto, primero debemos decir algo acerca de las soluciones *co-finales* y *estables*, así como de las *disoluciones* de problemas.

Sintéticamente expresado, una solución *co-final* es una solución que «perdura como solución a un problema dado tanto tiempo como ese problema permanezca siendo el problema que es»[34]. O mejor expresado, un problema $\mathcal{P} = \langle ?_{s/n}, P, \phi \rangle$ y su solución a través de una investigación $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ es co-final para un investigador α, cuando el resultado $\mathcal{E}$ de la investigación $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ conserva su estatus de *solución* para $\mathcal{P}$ para α, tanto tiempo como *P* continua siendo el contenido de $\mathcal{P}$ para α.

Un aspecto fundamental de las soluciones co-finales es la estrecha relación entre

[32][Detlefsen and Arana (2011): 9].

[33]También podemos emplear una metáfora sugerida por José Seoane: la disolución del problema hace que el mismo «desaparezca de la pantalla del radar» del investigador.

[34][Detlefsen and Arana (2011): 10].

el estatus de $\mathcal{E}$ como solución para $\mathcal{P}$, y la *identidad* del contenido *P* del problema. Puntualmente, la relación puede plantearse del siguiente modo: si $\mathcal{E}$ *dejara* de ser una solución de $\mathcal{P}$ para α, entonces la identidad de *P* (y *a fortiori* de $\mathcal{P}$) cambiaría. En virtud de esto es que las soluciones co-finales adquieren su peculiar capacidad para aliviar la ignorancia específica, pues aseguran uno de los siguientes resultados: o bien, $\mathcal{E}$ mantiene su estatus de solución, o no lo mantendrá. Si lo hace, entonces reduce la ignorancia específica que $\mathcal{P}$ (aún) representa. Pero si no lo hace, entonces tampoco el problema, para el que $\mathcal{E}$ era originalmente una solución lo haría[35]. En palabras de Detlefsen y Arana:

> Whatever modification changes the original solution to a non-solution will also remove it from the register of problems to be solved. Either way, the specific ignorance that is represented by the original problem's being a problem will be reduced. In the one case, it will be reduced by the addition of an enduring solution. In the other case, it will be reduced by the deletion of the problem from the class of problems that are to be solved[36].

Nótese pues, que el estatus de solución de $\mathcal{E}$ y el estatus de problema de $\mathcal{P}$ están, entonces, íntimamente conectados cuando la solución es co-final en relación al problema para el investigador. De esta manera, una solución co-final tendría dos posibles beneficios: solucionar el problema, o disolverlo; y ambas cosas constituyen un alivio de la ignorancia específica. Podemos redefinir la solución co-final a partir de esto: $\mathcal{E}$ es co-final respecto a $\mathcal{P} = \langle ?_{s/n}, P, \phi \rangle$, precisamente cuando cualquier *retractación* de $\mathcal{E}$ por parte de α podría *disolver* $\mathcal{P}$ para α. De esta manera, cuando $\mathcal{E}$ es co-final respecto de $\mathcal{P}$, el alivio de la ignorancia específica está garantizada.

Dos cosas son importantes destacar respecto de las soluciones co-finales. Por un lado, qué se entiende por «retractación», y por otro, el papel fundamental de la proyección *P* –i.e. el contenido del problema. Respecto a lo primero, los autores dicen que por «retractación queremos decir un cambio en la actitud de α», de acuerdo

[35] *Íbid.*
[36] *Íbid.*

con lo cual: i) hay una premisa o una inferencia de $\mathcal{E}$ que α ya no acepta; y ii) lo que resta de $\mathcal{E}$ una vez que esta premisa o inferencia es removida (sea esto $\mathcal{E}^{-}$), ya no funge como una justificación de *P* (o su negación). Así pues, la retractación es un cambio de *actitud* por parte del investigador, aunque dicho cambio no se relaciona –en principio, al menos– con la *actitud interrogativa* (la proyección $?_{s/n}$); más bien involucra no aceptar más a $\mathcal{E}$ como una solución para $\mathcal{P}$, en virtud de que algunos de los elementos que integran $\mathcal{E}$ deja de ser aceptado por α.
En este punto los autores introducen una novedad analítica en el modelo, a saber, la noción de *compromisos o creencias* del investigador[37]. Como cabría esperar, un investigador que obtiene una solución $\mathcal{E}$ para un problema $\mathcal{P}$ como resultado de una investigación, está comprometido, o cree que $\mathcal{E}$ reduce su ignorancia especifica respecto a $\mathcal{P}$; es decir, al comprometerse con $\mathcal{E}$, el investigador adquiere una *creencia*. De modo análogo, su descreeimiento, o retractación de ciertos compromisos o creencias acerca de $\mathcal{E}$ –i.e. a cerca de su estatus de solución, también repercute sobre las creencias del investigador acerca del problema. En otras palabras, los compromisos o creencias del investigador para con el problema y la solución, parecen constituir el aspecto *normativo* del modelo de Detlefsen y Arana (diremos más sobre esto enseguida).

Ahora bien, el otro aspecto importante que mencionábamos era el papel de la proyección*P*, puntualmente, sus condiciones de identidad. Veamos, en la misma página (10, *supra*) Detlefsen y Arana describen la solución co-final de dos maneras distintas; la primera dicen que una retractación por de $\mathcal{E}$ por parte de α podría acarrear un cambio en la identidad de la proyección *P*[38]. En este punto se observaría entonces, se manifiesta la importancia analítica que las condiciones de identidad de *P* tienen para el modelo: sin una determinación precisa de *P* no podríamos, *sensu estricto*, identificar si $\mathcal{E}$ es o no una solución co-final. Pero también dicen (*infra*) que la retractación podría conducir a una disolución de $\mathcal{P}$. Esta segunda caracterización

[37]*Íbid.*
[38]Véase la página 154 más arriba.

es más amplia en virtud de algo que veremos en seguida: las distintas modalidades de la disolución; mientras que la primera caracterización menciona específicamente a *P*, lo cual también tiene como producto un cambio en la identidad del triplo $\mathcal{P}$. No obstante, el concepto de solución pura del *Modelo Pragmático* hará especial hincapié en los «compromisos tópicamente determinantes» del *tópico* del problema, y precisamente, las soluciones co-finales van a ser el corazón del valor epistémico de las soluciones puras[39].

Otro aspecto relevante sobre el rol de la proyección *P* tiene que ver con otro tipo de solución que Detlefsen y Arana identifican, a saber, las soluciones *estables*. Una investigación $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ soluciona establemente un problema pretendido $\mathcal{P}$ para un investigador α, cuando esta provee una evidencia $\mathcal{E}$ tal que las siguientes condiciones se cumplen[40]

1. (a) $\mathcal{E}$ justifica la creencia de α en *P* (de acuerdo a ciertos estándar de justificación), o (b) $\mathcal{E}$ justifica la creencia en no-*P* para α, y

2. $\mathcal{E}$ es *co-final con* $\mathcal{P}$ para α.

Para emplear una metáfora: el significado de la *estabilidad* en el sentido de los autores, es que la racionalidad de una solución tal a un problema tiene tanta «vida útil» como la racionalidad de la creencia de α en *P* (o no-*P*, según sea el caso). Dicho de otra manera, la condición 2. «ancla» la solución al problema, –i.e. $\mathcal{E}$ persiste como solución a $\mathcal{P}$ tanto como $\mathcal{P}$ siga siendo el mismo. Por otro lado, la condición 1. nos dice que $\mathcal{E}$ *justifica* la creencia de α en *P*/no-*P*, –i.e. en el tópico del problema. La primera condición le confiere a la solución estable una característica deseable de la «lógica» de la solución racional de problemas, a saber, la confianza racional de que una solución ζ resuelve el problema $\mathcal{P}$ no puede exceder la confianza racional de que mientras $\mathcal{P}$ siga siendo el problema, ζ seguirá siendo una solución para él. Dicho de otra manera: no podemos cree racionalmente que ζ sea una solución para $\mathcal{P}$, a la vez que creemos que en un futuro ζ dejará de serlo[41]. La solución estable

[39]Volveremos sobre esto en la *Sección 6.3*.
[40]Detlefsen and Arana (2011): 10].
[41]*Íbid.*

garantizaría que esto último efectivamente no ocurriría. En particular las soluciones estables prometen aliviar la ignorancia específica reduciendo el *stock* de problemas que los investigadores pueden representarse, pero que no pueden resolver. Esta reducción puede tomar la forma de una solución para el problema «retenido» por el investigador, o por medio de una disolución y, por lo tanto, la «no retención» del problema. Es decir, tanto la solución como la disolución constituyen una *eliminación* del problema[42].

Antes de finalizar esta sección debemos la noción de *disolución*. A partir de los párrafos anteriores se puede apreciar rápidamente su importancia epistémica para el modelo de Detlefsen y Arana: la disolución es –junto con la solución–, una de las formas en que una solución estable garantiza el alivio de la ignorancia específica. La disolución de un problema $\mathcal{P} = \langle ?_{s/n}, P, \phi \rangle$ consiste en un *cambio* (o modificación) de alguna de las proyecciones del triplo $\mathcal{P}$. En virtud de esto los autores identifican tres modalidades según las cuales un problema se diluye: una *disolución actitudinal*, una *disolución tópica* y una *disolución formulativa*[43]. Así pues, $\mathcal{P}$ es actitudinalmente disuelto para α cuando cuando sus razones para adoptar una actitud $?_{s/n}$ para *P* ya no están disponibles para α. Así mismo, $\mathcal{P}$ es tópicamente disuelto para α, cuando los recursos formulativos de este ya no incluyen aquella parte de ϕ que le permiten representarse *P*[44].
La idea central aquí es que la disolución ocurre cuando hay un cambio en los *compromisos* de α que afectan alguna proyección de $\mathcal{P}$. En este sentido, una retracctación por parte de puede concernir no exclusivamente a la solución, sino al problema mismo; por otro lado, a las retractaciones que conducen a una disolución del problema, los autores las denominan «retractaciones resolutivas», y las mismas adoptan tantas variantes admisibles como las que produzcan, «impliquen» un cambio formulacio-

[42]*Íbid.*
[43][Detlefsen and Arana (2011): 11].
[44]La *condición* para una disolución formulacional del problema es la misma que la condición para una disolución tópica (de contenido). Sin embargo, la noción misma de disolución formulacional y tópica son distintas; pues la primera consiste en un cambio respecto a la calidad de ϕ para representar *P*, y no un cambio en el tópico *P* (*Íbid.*).

nal, actitudinal o tópico[45]. En tal sentido, una retractación será resolutiva si la misma atañe a compromisos que determinan (aunque sea parcialmente) la comprensión que el investigador tenga del problema. En este punto pues, se advierte la relación que la disolución (y retractaciones resolutivas) tienen con las soluciones *puras*, a saber, los compromisos (creencias) retractables en una solución pura son *todas* determinantes del problema.

Antes de finalizar esta sección, conviene destacar algunos puntos que nos conduzcan a presentar los conceptos *teóricos* de **SE** y **CT**. En **primer** lugar, el *Modelo Pragmático* es un modelo que introduce un *investigador* (o *agente*); este elemento es relativamente novedoso en nuestra investigación, pues en la caracterización intuitiva de **SE** se hacía referencia a una «finalidad epistémica»[46]. Como hemos notado, el investigador (α) es descrito en términos sumamente abstractos, donde los que sabemos acerca de él es que está orientado por una finalidad bastante específica (reducir su ignorancia eficientemente), y que el mismo podría ser sustanciado (instanciado, si se quiere) especificando un conjunto de *compromisos* de diverso tipo.

En **segundo** lugar, la descripción del modelo transcurre en términos mayoritariamente *epistémicos*. Nótese que en esta sección hemos descrito (siguiendo a Detlefsen y Arana, naturalmente) al investigador en base a una finalidad netamente epistémica, mientras que la noción de problema pretendido representaba casos de ignorancia (específica), aunque su definición –i.e. el triplo $\langle ?_{s/n}, P, \phi \rangle$, no era caracterizado en términos exclusivamente espitémicos; finalmente, la exposición de los elementos del modelo requirió una extensión considerable dedicada a los distintos tipos de solución (con sus particularidades para aliviar la ignorancia específica). Y sin embargo, también hemos notado cómo la proyección *P* del triplo, acerca del cual los autores no ofrecen una caracterización, tiene una naturaleza fuertemente *semántica*. Esta proyección será fundamental para introducir el concepto de solución *pura*, a

[45] *Íbid.*

[46] Véase la página 134 en el Capítulo 5. En tal sentido, parecería sensato introducir la noción de *agente* en la caracterización intuitiva de *demostración pura*; volveremos sobre esto en el Capítulo 7.

pesar de que hasta el momento, su importancia no es del todo clara (amén de que se destaca en las caracterizaciones de solución *co-final* y *estable*).

En **tercer** lugar, hay un aspecto orientador en la configuración del modelo que los autores no llegan explicitamente a afirmarlo como una característica general del modelo, a saber, la idea de *especificidad*. Nótese que «específico/a» se emplea para adjetivar explícitamente los concepto de *ignorancia*, *alivio* y *problema*, por un lado; pero el mismo adjetivo también podría hacerse extensivo a la *solución co-final*, pues este tipo de solución esta estrechamente relacionada con la identidad del problema *específico* que soluciona, a la vez que la reducción de la ignorancia que produce, es una alivio de *ese* problema –i.e. no necesariamente reduce la *extensión* global de la ignorancia. Dicho de otra manera: el *Modelo Pragmático* de Detlefsen y Arana parece apuntar a capturar la noción de solución pura, como un tipo de solución que se destaca por su *especificidad*. Metafóricamente expresado: las soluciones que el modelo parece apuntar a conceptualizar son herramientas de precisión para reducir la ignorancia[47]. En la próxima sección estos tres aspectos destacados serán relevantes para abordar el concepto *teórico* de solución pura.

6.3. Los conceptos teóricos de CT y SE en el *Modelo Pragmático* (breves observaciones críticas)

De acuerdo con nuestra pretensión de exponer en «clave elucidatoria» el *Modelo Pragmático* de Detlefsen y Arana[48], debemos pasar a presentar los conceptos *teóricos* de **CT** y **SE**. Detlefsen y Arana nunca se refieren excplícitamente a estas dos relaciones que en los capítulos anteriores asociamos con una noción intuitiva (preteórica) de demostración pura, porque para empezar los autores suelen referirse a «soluciones», más que a demostraciones. Sin embargo, como se observó también en

[47] Recuérdese que para Detlefsen y Arana la «virtud» de las soluciones puras radicaba en ser «medios eficientes para aliviar la ignorancia específica» [Detlefsen and Arana (2011): 8].

[48] Véase la *Sección 6.1*.

la *Sección 6.1*, Detlefsen y Arana identifican dos problemas (o como decíamos, dos «tareas analíticas»), las cuales en buena medida pueden asociarse con las «tareas» de analizar (o «elucidar») las nociones pre-teóricas de **CT** y **SE**[49].

Empecemos con la noción de **CT**. Al final de la sección anterior observábamos que la descripción de los elementos del modelo tenía un carácter mayoritariamente epistémico, aunque en el concepto de *problema pretendido* había una proyección en partícular, *P*, que tenía una naturaleza semántica. Ahora bien, en este escenario el *Modelo Pragmático* debería hacer dos cosas: ofrecer un concepto de *tópico* de un problema más preciso que la vaga proyección *P*, así como precisar cómo el modelo caracteriza la ausencia –en la solución–, de «nociones ajenas» al tópico del problema. Empecemos por la noción de tópico; a este respecto Detlefsen y Arana dicen:

> [i]n mathematics, among those things that determine contents are definitions, axioms concerning primitive terms, inferences, etc.. We'll generally refer to such items as *commitments*. What we are calling the *topic* $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ of the problem $\mathcal{P}$ (or, equally, of the investigation $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$) is a set of commitments. Specifically, it is that set of commitments each element of which is such that were a to retract it, the content of ϕ would not be what it is for her [i.e. α][50].

Esta no parece ser ciertamente una caracterización muy *suficientemente exacta* de «tópico de un problema $\mathcal{P}$», pues sólo sugiere algunas cosas «entre las cuales determinan» el mismo[51] . Exploremos muy brevemente esto, pero antes es pertinente hacer una observación: el conjunto de tales «cosas» son los ya mencionados *compromisos* del investigador, pero dichos compromisos son de un tipo específico: ese

[49] Véase más arriba la página 141.

[50] [Detlefsen and Arana (2011): 13].

[51] Esto no pasa desapercibido para los autores, pues ellos mismos lo reconocen (*íbid.*):

> [t]o make a theory of topical purity complete, we would of course need an account of how topics of problems are generally determined. This is a difficult task that is beyond what we presently know how to do. We can make a start on it, though, by giving some cases we think illustrate topical purity. It is to this that we now turn.

conjunto de compromisos del que la retractación de uno de ellos, *cambiaría el tópico de ϕ para el investigador*. En tal sentido, cada compromisos de estos estarían determinando parcialmente el tópico de ϕ para ; en otras palabras, el tópico $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ del problema $\mathcal{P}$. Ahora bien, estos «compromisos» son poseídos por el *investigador*, por lo que bien podemos decir que el tópico del problema consiste en aquellos compromisos a partir de los cuales el investigador *entiende* el problema, siendo pues de esta manera que podemos subsumir la noción de tópico que el modelo pragmático presenta, dentro de una *aproximación formulacional al tópico*[52] que los autores parecen aceptar. Como se señaló en la *Sección 6.2.2* la proyección *P* –i.e. el contenido proposicional del problema pretendido, había quedado sin un caracterización explicita; ahora bien, considerando el pasaje arriba citado podemos hacernos una idea de cómo el *Modelo Pragmático* se «aproxima» a la caracterización de *P*: por un lado tenemos los compromisos del investigador, y por por otro lado tenemos la formulación ϕ del problema. Luego, *P* parece estar en función del conjunto de compromisos de α y ϕ; podríamos decir quizás, que *P* es la manera en que α *comprender* la formulación ϕ. Luego, no solo ocurre que ante distintas formulaciones, podríamos tener una misma solución que es pura para una formulación, e impura para la otra; también ocurriría que una misma formulación ϕ puede ser entendida de forma distinta por dos investigadores, –i.e. podemos tener los problemas distintos $\langle ?_{s/n}, P, \phi\rangle$ y $\langle ?_{s/n}, P^{*}, \phi\rangle$, por lo que aquellas soluciones que son «puras» para un investigador, pueden ser impuras para otro.

Así pues, la caracterización de *tópico de un problema* $\mathcal{P}$ de arriba no es una

[52]En el sentido manejado en la *Sección 4.1.2*, puntualmente en la página 78. No obstante, podría anteponerse el siguiente reparo respecto a esta asociación, así como quizás a la etiqueta «formulacional» misma: nuestra caracterización parece hacer un énfasis desmedido en la formulación (la proyección ϕ), opacando así el carácter *cognitivo* de la aproximación, en tanto que el tópico depende también de los compromisos del investigador para entender (o representarse) ϕ. Ciertamente hemos puesto un énfasis en la formulación, pero también hay que notar que la formulación del problema parece ser la *materia prima* a partir de la cual se determina el tópico; pues en ningún momento en Detlefsen and Arana (2011), ni en Arana and Mancosu (2012), se ahonda en la cognición del investigador, sino que sólo se hace referencia al conjunto de compromisos (los que sean) que permitan al investigador representarse un tópico para la formulación en cuestión. Así pues, el conjunto de compromisos «determinantes» de α está en función de ϕ, dándole así a esta última proyección, una preeminencia que la etiqueta «formulacional» pretende poner de manifiesto.

caracterización satisfactoriamente exacta por dos motivos: en primer lugar, no se especifica de modo alguno *cómo* es que los ítems que los autores mencionan –definiciones, axiomas concernientes a los términos primitivos, inferencias, *etc.*– se asocian con la formulación ϕ; por ejemplo, ¿es la *forma sintáctica* (lógica o natural) de la formulación una guía suficiente para ello, o hace falta tener presente alguna otra cosa? En segundo lugar –y más importante aún–, el pasaje citado menciona un lista parcial de compromisos: definiciones, axiomas concernientes a los términos primitivos, inferencias, *etc.*. En efecto este «etc.» sugiere que la lista no es completa, pero tampoco se dice *cómo* continuarla. Pero incluso aunque aceptemos que podemos hacer frente a esto en la aplicación del modelo a casos concretos, todavía resta una dificultad conceptual: la aplicación del modelo debe tener presente una diferencia en el grado de comprensión de la formulación por parte del agente, entre una comprensión suficiente para *comprender el problema*, pero insuficiente para *comprender alguna solución* para el mismo. Es cuando hay una diferencia tal entre la comprensión de ambas cosas, que la solución es *impura*; pero si el modelo no nos informa acerca de una manera de *limitar los compromisos respecto al problema*, entonces podemos atribuirle libremente compromisos al investigador a la hora de determinar el tópico del problema, habilitando siempre la atribución de aquellos compromisos que le permitan comprender la solución. Pero si tenemos «libertad» para hacer eso, –i.e. si no tenemos un criterio conceptual para limitar los compromisos que determinan el tópico del problema, entonces el modelo no oscurece un aspecto fundamental del problema de la pureza tópica del método, a saber, la existencia –no arbitraria– de un «hiato conceptual» entre solución y problema[53].

[53]Aunque no tenemos espacio para ahondar en esta cuestión relevante, es menester explicitar que el mismo es abordado en [Arana and Mancosu (2012): 335]. En líneas generales, Arana y Mancosu sugieren que la *formulación* del problema es una guía para limitar los compromisos determinantes del tópico; así pues, la formulación plana del Teorema de Desargues –que es el caso por ellos estudiado–, sugiere que el concepto de *espacio* (bidimensional, digamos) no es *requerido* por un investigador para entender esta formulación del teorema de Desargues. En este sentido, es razonable pensar que un entendimiento «ordinario» –como dicen los autores– de esta formulación no requiere el compromiso con un concepto de espacio; pero nótese sin embargo, que esto no es suficiente para determinar si el tópico de dicho teorema involucra una noción *métrica* de recta, o un concepto de recta como lo que uno dos puntos. ¿Como se distingue aquí entre un entendimiento «ordinario» y uno «profundo»? Podemos decir entonces, que persiste el problema para justificar la atribución de un cierto tópico a un problema (cf. Sección 4.1.2).

Por lo tanto, parece razonable pensar que si bien no podemos extraer del trabajo de Detlefsen y Arana un concepto claro de *tópico*, y en tal sentido, una respuesta a la interrogante i) de la página 69, –i.e. «¿qué aproximación al tópico en matemáticas es útil para avanzar hacia un *concepto teórico* de **CT**?», es factible asociar su aproximación con una *aproximación formulacional* . Teniendo en cuenta esto, pasemos entonces a la caracterización concreta que Detlefsen y Arana ofrecerían de **CT**:

> [w]e say that a solution $\mathcal{E}$ of $\mathcal{P}$ is *topically pure* when it draws only on such commitments as topically determine $\mathcal{P}$[54]

Aquí el punto es la expresión «draws only», la cual podría verse como la respuesta del modelo a la interrogante ii). Así pues, parece que la solución o demostración, *sólo se construye* a partir de los compromisos a partir de los cuales el investigador comprende ϕ, –i.e. a partir del tópico *P* del problema. Luego, si la solución *sólo* se construye a partir de los compromisos tópicamente determinantes, entonces parecería que *toda* retractación de la solución $\mathcal{E}$ por parte de α, implicaría una *disolución* del problema. Podríamos formular así el *concepto teórico de conservación tópica* (**CT**) del *Modelo Pragmático*.

[**Conservación Tópica**]

> $CT\,[D, \phi]$[55] syss *toda* retractación de los «compromisos» asumidos en *D* por α implican una disolución tópica (i.e. un cambio en la identidad) del tópico *P* para α.

En esta formulación del concepto teórico de **CT** hemos sustituido la expresión «sólo se construye», la cual aún parece ser un tanto metafórica, por la expresión «toda retractación» que involucra el concepto *teórico* de «retractación»[56] . Ciertamente es una condición extremadamente fuerte para una solución $\mathcal{E}$, el que *todos* los elementos que la integran sean compromisos (parcialmente) determinantes del tópico

[54]*Íbid.*

[55]Léase: «la demostración *D* de la sentencia ϕ es conservativamente tópica respecto al tópico *P* que ϕ representa».

[56]Una observación de Detlefsen y Arana en la misma página habilita esta sustitución:

del problema. En particular, parece una condición bastante inverosímil para una demostración o solución, el pretender que el cuantificador «todo» tenga como dominio a $\mathcal{E}$ (en vez de un subconjunto de $\mathcal{E}$, el cual a sí mismo no sería sencillo de identificar)[57]. Sin embargo, quizás esta caracterización tenga una carácter *maximal*, es decir, una solución $\mathcal{E}$ sería *maximalmente pura* si todos sus elementos fueran tópicamente determinantes. Pero esto no quita que, a la hora de comparar soluciones en estos términos no podamos apelar a *grados* de pureza, indagando si una solución es *más pura* que otra, a partir de la identificación de un conjunto de compromisos particulares dentro de las soluciones, –i.e. subconjunto de $mathcal E$, si se quiere[58]. De todas formas, parece bastante claro que la *aplicación* del *Modelo Pragmático* exigiría, por un lado, una identificación clara del tópico de un problema, así como la identificación clara de que elementos de la solución se comparan tópicamente con el problema, por otro. Así pues, el procedimiento para la *aplicación* de este concepto

> if $\mathcal{E}$ were a topically impure solution to $\mathcal{P}$, there would be premises or inferences in $\mathcal{E}$ that the investigator could retract without contentually dissolving $\mathcal{P}$.

Así mismo, en [Arana (2014): 317], Arana dice que «todo componente de una solución pura a un problema pertenece al tópico de ese problema, y por lo tanto, determina parcialmente el entendimiento de ese problema».

[57]Cfr. Capítulo 4, página 69.

[58]Este matiz no pasa desapercibido para Detlefsen y Arana, y es particularmente relevante en Arana (2009), Arana and Mancosu (2012), Arana (2017), Arana (2014) y Arana (2008). Puntualmente, está en el espíritu y en la práctica de estos artículos la pretensión de *medir* el grado de pureza de una solución, e incluso en [Arana (2017): 207], Arana dice que

> [a] purity constraint, restricting proofs of theorems to what is «close» or «intrinsic» to that theorem, *requires* an account of how the distance between proof and theorem is to be measured. (Énfasis añadido)

Sin embargo, en esta exposición no nos hemos hecho eco de esa característica en virtud de lo siguiente: en *ninguno* de los trabajos mencionados se ofrece una descripción *analítica* de cómo debe entenderse tal medición, ni qué cómo podemos entender la unidad de medida pertinente. Puntualmente, en Arana (2008) sólo se hace referencia a que hay demostraciones que requieren «más conceptos» que los requeridos para entender el teorema; en Arana (2009) por su parte, se concentra en mostrar lo *inadecuado* que resultaría plantear tal medición en términos sintácticos; mientras que en [Detlefsen and Arana (2011): 8, 13] se reconoce la dificultad que tal empresa conllevaría. Por otra parte, en Arana (2014) se *aplica* de hecho una medición, apelando al recurso clásico de representar un teorema en distintos sistemas aritméticos *intermedios*, para evaluar si son o no demostrables en ellos, y así verificar la pureza de la demostración euclideana de la infinitud de los números primos. En definitiva, aquí nos estamos enfocando en una presentación analítica del *Modelo Pragmático*, y dado que no tenemos información conceptual sobre este aspecto cuantitativo, creemos que su ausencia no afecta sustantivamente nuestra exposición, excepto quizás respecto a esta aclaración que hacemos sobre el cuantificador «todas», en la formulación del concepto teórico de **CT**.

teórico de **CT**, no parece desprenderse elocuentemente de su caracterización analítica. Por lo tanto, una eventual evaluación de la fecundidad del mismo para echar luz sobre la práctica matemática, seguramente encuentre en esta cuestión un aspecto particularmente sensible.

Pasemos a considerar el *concepto teórico* de **SE**. Para ello debemos recordar dos cosas de la noción intuitiva de **SE** formulada en el Capítulo 5 (página 134): la especificidad de las demostraciones puras (característica emergida de la **CT**), y la identificación de una *finalidad espistémica*. La especificidad de las soluciones puras es un aspecto bien contemplado en la definición teórica de **CT** ofrecida arriba, en virtud de que «toda» retractación de la misma conduce a una disolución, así que lo importante ahora es concentrarse en los segundo. La virtud epistémica de las soluciones puras –como cabía suponer– es que una solución pura es una *solución estable*.

> The epistemic significance of topical purity derives from the stability it brings to problem solutions. Every topically pure solution $\mathcal{E}$ to a problem $\mathcal{P}$ is stable in the sense that were a to retract a premise or inference from $\mathcal{E}$, the content of $\mathcal{P}$ would change for her. In other words, her retraction would contentually dissolve $\mathcal{P}$ for her (i.e. $\mathcal{E}$ would be cofinal with $\mathcal{P}$ for her)[59].

Como puede observarse, la importancia epistémica de una solución pura se expresa por medio de un enunciado contrafáctico:la solución pura retiene su carácter de *solución* aun cuando el investigador se retractara, puesto que al hacer esto último el problema se vería disuelto. Así pues, o bien la solución pura reduce la ignorancia específica proveyendo una solución, o bien la reduce disolviendo el problema[60]. Ahora podemos formular el concepto teórico de **SE** del siguiente modo:

[**Superioridad Epistémica**]

$SE\left[D_\phi, D^*_\phi\right]$ syss D es una solución *estable* (provee un alivio efectivo de la ignorancia específica), mientras que D^*, siendo una

[59] *Íbid.*

[60] Véase también [Arana (2014): 317].

> demostración «ordinaria», sólo *elimina* una caso de ignorancia específica.

Aquí conviene recordar la diferencia entre la solución estable y la mera *eliminación* de un caso de ignorancia específica, a saber, en el segundo caso no hay garantía de que la solución no genere sistemáticamente *más* problemas. De esta manera, al identificar las soluciones puras con soluciones estables, queda clara cuál es la virtud de la pureza: ser medios eficientes –i.e. soluciones que no generan más problemas– para reducir la ignorancia específica. Por otro lado, si tenemos presente la caracterización intuitiva de **SE**, entonces podemos observar en esta caracterización dónde está la *finalidad epistémica* de las soluciones puras; a este respecto la finalidad es la de *aliviar la ignorancia específica*.

Hay algunas interrogantes que se pueden plantear a partir de este concepto teórico de **SE**, y particularmente de la finalidad de aliviar la ignorancia específica. Por un lado, ¿es esta una finalidad particular, o más bien consiste en un modo más *eficiente* de acometer la finalidad general de reducir la ignorancia? En cualquier caso las soluciones puras seguirían siendo virtuosas desde un punto de vista pragmático, pues sería herramientas eficientes para alcanzar cualquiera de los dos fines. Sin embargo, la eventual *aplicación* del *Modelo Pragmático* nos exigiría que el investigar, –i.e. la instancia de esta noción, esté orientado por la búsqueda del alivio específico, y no meramente por la eliminación de la ignorancia. Pero si pensamos en iluminar la práctica matemática relativa a la pureza del método por medio de este modelo, entonces tendríamos que identificar casos donde lo que el sujeto (o comunidad, quizás) persigue es el alivio de la ignorancia específica, no simplemente la eliminación de la ignorancia (cosa que en buena medida sería trivial). Entonces, ¿cómo podemos hallar la presencia efectiva de una finalidad tan peculiar como el alivio de la ignorancia específica? Nuestra conjetura, la cual no podemos investigar aquí, es que dicha finalidad es *analíticamente* relevante para el modelo (pues singulariza el tipo de solución que la pureza provee), pero no parece ser para nada claro que podemos identificar instancias de ello en la práctica.

Por otro lado, dada la especificidad de la finalidad en cuestión, cabe preguntarse ¿en qué contextos es el alivio de la ignorancia específica una finalidad epistémica *preferible* a otra(s)? Esta pregunta es también relevante para la evaluación del modelo, pues parece claro que las soluciones puras –con su grado de especificidad– no son siempre deseables, incluso quizás puedan ser a veces contraproducentes para el progreso matemático. Carlo Cellucci por ejemplo, sostiene de forma bastante temeraria que «en el desarrollo histórico de la matemática, la demanda en favor de la pureza del método ha sido extensamente ignorada»[61], aunque el punto que sus ejemplos parecen ilustrar, es que la satisfacción indiscriminada de esta demanda, habría obstruido avances sustantivos en matemáticas, tales como la demostración del último teorema de Fermat[62]. Este reparo parece apoyarse en la convicción –por demás justificada–, de que las demostraciones *impuras* también permiten incrementar nuestro conocimiento, iluminando por ejemplo, *conexiones* entre distintas áreas de las matemáticas[63]. En esta caso, la pureza del método bien puede ser un obstáculo, en lugar de una virtud. A este respecto, Hilbert dice algo muy sugerente en los párrafos finales de los *Fundamentos de Geometría*:

> This fundamental principle, which we ought to bear in mind when we come to discuss the principles underlying the impossibility of demonstrations, is intimately connected with the condition for the «purity» of methods in demonstration, which in recent times has been considered of the highest importance by many mathematicians. The foundation of this condition is nothing else than a subjective conception of the fundamental principle given above[64].

Esta observación de Hilbert merece un análisis específico que aquí no vamos a realizar, pero sí podemos decir que el espíritu de la letra parece ser el siguiente: la demanda por la pureza hunde sus raíces en un principio fundamental de la

[61][Cellucci (2017): 299]. Es elocuente a este respecto que la sección de su libro donde afirma esto se denomine «La imposibilidad de satisfacer la demanda por la pureza del método».

[62]*Íbid.*

[63]El caso de la relación entre álgebra (aritmética) y geometría, por medio de la geometría analítica es por demás evidente.

[64][Hilbert (1971): 82].

investigación matemática[65] , pero no obstante, la *sistemática* preferencia por los métodos puros es injustificada («subjetiva»)[66]. Así pues, si la pureza del método es una demanda cuya validez es contextual (como opuesta a sistemática), entonces una pregunta fundamental sería ¿cuáles son esos contextos? El punto es que, *analíticamente* hablando, el modelo de Detlefsen y Arana, no parece dar elementos muy claros para juzgar cuándo el alivio de la ignorancia específica es o no preferible a *otros* fines epistémicos.

En definitiva, durante el presente capítulo hemos expuesto en «clave elucidatoria» el *Modelo Pragmático* de Detlfesen y Arana; a tales efectos, que hemos sugerido cómo es que las dos tareas analíticas que se proponen los autores, pueden entenderse como un esfuerzo elucidatorio orientado a ofrecer las contrapartes teóricas de las nociones intuitivas de **CT** y **SE**, y para ello primero presentamos los elementos del modelo. Respecto a su calidad de *elucidatum* de **CT** –i.e. su calidad para responder a las interrogantes i) y ii), el concepto de solución pura tiene una insuficiencia, a saber, el modelo no provee un concepto *preciso* y general de «tópico de un problema» –i.e. no responde cabalmente la interrogante i), pero sí podíamos decir que la aproximación que el modelo parece seguir, puede asociarse con la «aproximación formulacional» de la *Sección 4.1.2*. Así mismo, no parece estar del todo claro cómo la aparición del cuantificador universal, para referirse a los compromisos tópicamente determinantes en las soluciones puras, responde a la interrogante ii). En cuanto al concepto teórico de **SE**, observamos que Detlefsen y Arana identificaban con claridad una finalidad epistémica en virtud de la cual las soluciones puras son virtuosas, a saber, su eficiencia para aliviar la ignorancia específica. Por lo tanto, parece que

[65]Hilbert formula este principio del siguiente modo (íbid.,: 82):

> In this investigation, we have taken as a guide the following undamental principle; viz., to make the discussion of each question of such a character as to examine at the same time whether or not it is possible to answer this question by following out a previously determined method and by employing certain limited means.

[66]En [Detlefsen and Arana (2011): 7, n. 28] también se adopta esta interpretación. Véase también [Hallett (2008): 199 - 200].

el concepto teórico de **SE** es más exitoso como *elucidatum* que el concepto teórico de **CT**.

Por otro lado, también se sugirió –aunque con menos énfasis–, que la dificultad de **CT** como *elucidatum* podría tener consecuencias negativas para la eventual *aplicación* del modelo a casos concretos. Respecto a la aplicación del modelo, también se sugirió cierta dificultad a la hora de identificar, en la práctica matemática, la persecución de una finalidad epistémica tan particular como el alivio (no «eliminación») de la ignorancia específica. Ambas observaciones críticas, la calidad de los *elucidata* ylas dificultades para aplicar el modelo, no van a ser desarrolladas en esta investigación por razones de espacio, pero creemos que hemos señalado un camino a seguir a este respecto.

Capítulo 7

Conclusión: resultados obtenidos e investigaciones futuras

En la *Sección 1.4* habíamos adelantado que la investigación se dividiría en dos actos y una escena final. El primer acto transcurrió a lo largo de los capítulos 3 - 5, y su propósito consistió en identificar una noción intuitiva –pre-teórica– de *demostración pura*. Por otra parte, el segundo acto consistió en un único capítulo, a saber, el Capítulo 6, y su propósito consistió en presentar el *Modelo Pragmático* de Detlefsen y Arana en «clave elucidatoria»; es decir, presentamos el modelo como un esfuerzo elucidatorio de la noción intuitiva de demostración pura ya identificada. Estos dos actos representan pues, la pretendida unidad que encierra la presente investigación y que prometíamos en el primer párrafo de esta tesis. Finalmente, este último capítulo representará nuestra «escena final» y lo dedicaremos a exponer los resultados obtenidos, así como sugerir futuras cuestiones a investigar, las cuales representan parte de la «incompletud» que encierra esta investigación, la cual también fue explicitada en el primer párrafo de esta tesis.

7.1. Resultados obtenidos en la tesis

En la *Sección 1.3* del Capítulo 1 habíamos planteado un objetivo general y tres objetivos específicos. El objetivo general consistía en ofrecer un abordaje analítico de la noción de demostración pura en clave elucidatoria; a tales efectos, introducimos los dos primeros objetivos específicos: identificar una noción intuitiva o pre-teórica de demostración pura, a través de la presentación de una *condición sustantiva*; por otro lado, presentar un modelo que provea un concepto teórico de la condición sustantiva.

7.1.1. Resultados de la investigación pre-teórica

Resulta evidente que la mayor parte de esta tesis está dedicada a una *investigación pre-teórica* del concepto de demostración pura. El valor específico de una investigación pre-teórica, puede apreciarse a la luz de las palabras de Carnap citadas en el epígrafe de esta tesis, las cuales vale la pena volver a citar aquí:

> [t]here is a temptation to think that, since the *explicandum* [concepto pre-teórico] cannot be given in exact terms anyway, it does not matter much how we formulate the problem. But this would be quite wrong. On the contrary, since even in the best case we cannot reach full exactness, we must, in order to prevent the discussion of the problem from becoming entirely futile, do all we can to make at least practically clear what is meant as the explicandum. (Carnap, 1962, p. 6)

Expresado en pocas palabras, lo que Carnap nos advierte es que en la elucidación (y esto no contraría la propuesta de Seoane), empieza por una reflexión que transcurre a nivel *pre-teórico*, –i.e. una reflexión sobre el *explicandum* en la jerga carnapiana. Caso contrario, es decir, cuando no tenemos una noción suficientemente clara (dentro de sus intírsecas limitaciones) del concepto pre-teórico, nos arriesgamos a comprometernos en discusiones inútiles. Un tipo de discusión inútil consistiría en una crítica elucidatoria que asume un concepto pre-teórico *distinto* a la elucidación que se pretende criticar; otra discusión, no tanto «inútil», sino *filosóficamente par-*

cial, consistiría en avanzar demasiado rápido en la discusión de distintos conceptos *teóricos*, sin tener presente alguna noción suficientemente explícita sobre el (o los) conceptos pre-teóricos cuyo interés motiva la introducción de los conceptos teóricos.

En nuestra opinión, la investigación pre-teórica llevada a cabo en los capítulos 2 - 5 arroja resultados que permiten prevenir este tipo de «discusión inútil»: en **primer lugar**, en el Capítulo 2 hemos introducido «pureza tópica» como un *predicado metodológico*, distinguiéndolo de otros usos de la expresión «pura», cuya aplicación no se restringe únicamente a la clasificación de demostraciones. A este respecto, es importante notar que no necesariamente este predicado se extrae de la expresión «pura» aplicado a ciertas áreas de la matemática, como vimos en la cita de Gauss (página gauss). Pues, en rigor, el predicado metodológico «pura» (o «puramente T») se introduce por medio de un «desplazamiento» de «T», como el nombre de un área, hacia «puramente T» como un criterio en virtud del cual *restringir los medios* a ser empleados, es decir, «el medio *M* es "puramente T"», introduce una restricción tópica de los recursos metodológicos. Estas consideraciones sugieren como resultado la siguiente consideración:

> **Resultado pre-teórico 1:** Para indagar en la pureza tópica de tales o cuales recursos metodológicos («medios»), debemos tener presente una *área o teoría matemática* «de fondo», pues es en virtud de esta que el predicado «pura» restringe (tópicamente) los recursos metodológicos.

Este resultado implica que debemos tener bien presente al teoría o área «de fondo»; en la literatura sobre el tema hay un problema recurrente: se hace referencia al tópico de teoremas, definiciones, etc., donde es este tópico el que se compara con el tópico involucrado en los recursos metodológicos; pero a a la vez existen una indefinición respecto a qué debemos tomar en cuenta para determinar el tópico de teoremas, definiciones, etc.[1]. De acuerdo con el resultado formulado, tenemos una manera relativamente más precisa de «definir», o «circunscribir» el tópico, a saber,

[1]Esta indefinición se ve claramente en el caso del *Modelo Pragmático*, en la Sección 6.3.

por medio de la teoría o área matemática «de fondo».

En **segundo lugar**, hemos planteado explícitamente que la indagación en torno a la pureza (tópica) de las demostraciones encierra dos enigmas: uno *semántico*, el cual atañe a la relación de restricción tópica de los medios, y un enigma acerca del *valor* que pueda tener dicha restricción. A nuestro juicio, la explicitación de este «doble enigma» constituye un segundo resultado pre-teórico.

> **Resultado pre-teórico 2:** Una indagación elucidatoria de la pureza tópica debe apuntar a iluminar ambos enigmas.

Este doble enigma resulta ser una cuestión *fundamental* para *formular* el problema de la indagación elucidatorioa de la pureza del método, y tal cosa se debe a que en ausencia de un tratamiento adecuado del mismo, podemos caer en discusiones filosóficamente parciales (tal como lo sugerimos a partir de la cita de Carnap de arriba). Si pensamos en la literatura orientada hacia el abordaje matemático-lógico (Sección 1.1), resulta notable la *ausencia* de una preocupación por el enigma acerca del valor de los métodos puros (quizá porque el interés allí es *hacer matemática*). Que en un abordaje así, lo que encontremos sean discusiones que considero «filosóficamente parciales», se debe a que una teorización *filosófica* no puede cercenar él enigma del valor; y algo análogo ocurre en la literatura correspondiente a la tercera orientación, –i.e. la orientación «mixta» de la Sección 1.1. Finalmente, en la literatura correspondiente a la segunda orientación (histórico-filosófica) es donde –con limitaciones– el doble enigma es mejor visualizado[2].

En **tercer lugar**, nuestra investigación pre-teórica sugiere que una *condición sustantiva* para un análisis elucidatorio de demostración pura, la cual es extraída del «doble enigma» de la pureza: las relaciones **CT** y **SE**. En los capítulos 4 y 5 se presentaron sendas formulaciones pre-teóricas de estas relaciones, y se señaló

[2]Esto es bastante claro en el *Modelo Pragmático*. Véase la Sección 6.1.

aquello que en las mismas era inexacto (pre-teórico), esto es, aquello que un análisis elucidatorio tornaría en conceptos teóricos.

> **Resultado pre-teórico 3:** Las relaciones de *conservación tópica* (**CT**) y *superioridad epistémica* (**SE**) representan una formulación más precisa del «doble enigma», a la vez que constituyen la *condición sustantiva* del concepto pre-teórico de *demostración pura*. En virtud de ello es que un concepto teórico (o modelo) de *demostración pura* deberá presentar los conceptos teóricos contraparte de los conceptos pre-teóricos **CT** y **SE**; en particular, el modelo debe ofrecer una caracterización teórica de «tópico de un teorema», «hiato conceptual» –pertenecientes a **CT**–, así como ofrecer una caracterización de «agente» y «finalidad epistémica», la cual debe explicitar su vínculo con la *especificidad* de las demostraciones conservativamente tópicas (siendo estas nociones pertenecientes a la relación **SE**).

En **cuarto lugar**, hemos sugerido que -a nivel pre-teórico– es factible pensar que podamos formular *más de un concepto pre-teórico de demostración pura*; esto se observó tanto en la discusión sobre la conservación tópica del Capítulo 4, como en la discusión sobre la superioridad epistémica en el Capítulo 5. Así pues, en la Sección 4.1.2 se identificó una «aproximación formulacional» al tópico en matemáticas que comprende distintas propuestas presentes en la literatura, y sugerimos que podíamos ver en esta aproximación una manera –pre-teórica– de leer la formulación pre-teórica de **CT** debido a que esta aproximación respectaba el *criterio de adecuación* de la página 55. Por otro lado, y a pesar de que no avanzamos en una lectura pre-teórica de la noción de «hiato conceptual» (que, por otro lado, se abordó en la Sección 6.3), sí observamos que esta aproximación se enfrentaba a dos desafíos conexos: circunscribir aquello que un agente debía tener presente para *comprender cierta formulación particular de un teorema* y, por otro lado, poder ser capas de identificar cuándo dos formulaciones son *cognitivamente sinónimas*. En la Sección 4.1.3, por su parte, identificamos una «aproximación inferencial» al tópico, a partir de una lectura de Dummett. De acuerdo con nuestra lectura, esta aproximación al tópico también satisface el criterio de adecuación, pues si la demostración canónica no es conservativamente tópica en comparación con la demostración entimemática, entonces ambas demostraciones son sustantivamente distintas respecto al tópico (o incluso a las construcciones). Así pues, ambas aproximaciones habilitan distintas lecturas pre-teóricas de **CT**. En cuanto a **SE**, en la Sección 5.3 se identificó distintos objetivos epistémicos que se asocian con la especificidad de las demostraciones conservativamente tópicas, y que podemos encontrar en la literatura. Así pues, esas distintas orientaciones también darían lugar a diferentes maneras de leer la caracterización pre-teórica de **SE**. Por lo tanto, leyendo de distintas maneras las formulaciones pre-teóricas de **CT** y **SE**, podemos apreciar la posibilidad de dar lugar a *distintos concepto pre-teóricos de demostración pura*. Así pues, tenemos un cuarto resultado pre-teórico:

> **Resultado pre-teórico 4:** Es factible que podamos caracterizar –incluso a nivel pre-teórico– distintos concepto de *demostración pura*, los cuales emanan de las distintas lecturas que las formulaciones pre-teóricas de **CT** y **SE**.

Hay una cuestión relacionada con la posibilidad de formular más de una concepto pre-teórico de demostración pura, y que fue solamente referido muy sucintamente en las secciones 5.3.1 y 5.3.3, a saber, la aparente «solidaridad» entre la lectura de **CT** y la lectura de **SE**. En particular, se sugirió que una aproximación formulacional como la de Detlefsen tendía a identificar a las demostraciones elementales como prototipo de demostraciones puras y, en tal sentido, objetivo epistémicos como la *simplicidad* parecían ser muy naturalmente identificables con la pureza demostrativa. En efecto, podría pensarse que una aproximación formulacional a **CT** «conduce» a asociar con naturalidad la simplicidad como **SE**. Así mismo, también sugerimos que una aproximación inferencial «conduce» a asociar con naturalidad, el objetivo de *explicitar*, o incluso *explicar* el tópico o la verdad del teorema, es decir, explicatividad o explicitación son objetivos epistémicos solidarios con una aproximación inferencial a **CT**. Sin embargo, como en rigor no sería correcto presentar esta sugerencia como un resultado, presentamos como un «resultado parcial», y a modo de interrogante:

> **Resultado pre-teórico 5 (parcial):** ¿Podemos elucidar *independientemente* las relaciones **CT** y **SE**, o debemos hacerlo de forma *conjunta*?

> Precisamente ¿repercute el abordaje de una de las relaciones sobre la otra?

A nuestro juicio, esta puntualización es valiosa (a pesar de ser «parcial») debido a que esta cuestión está virtualmente ausente en la literatura sobre pureza. En definitiva, creemos que es factible pensar que un buen trabajo elucidatorio debe ofrecer un abordaje *conjunto* de **CT** y **SE**.

En esta sección hemos presentado aquello que entendemos son *resultados de nuestra investigación pre-teórica*. Entendemos que estos resultados son valiosos y novedosos para la discusión actual sobre la pureza del método y las demostraciones; son «novedosos» porque en el mejor de los casos, las cuestiones planteadas en los resultados son solo *implícitamente* planteadas, mientras que, por otro lado, son «valiosos» porque permiten formular (o por lo menos advertir) de un modo más claro en qué consiste el *problema de la pureza*. A este respecto hacemos acuerdo con Carnap, al advertir que la indagación pre-teórica es una etapa necesaria para evitar caer en discusiones pre-teóricas «inproductivas», siendo en tal sentido es que creemos que nuestra investigación es valiosa. En resumen: nuestra investigación es novedosa porque una discusión así no forma parte de la literatura actual sobre la temática, mientras que es valiosa porque permitiría entender mejor la discusión; más aún, en nuestra opinión, la caracterización del problema como un «doble enigma» pone de manifiesto los problemas fundamentales que encierra el problema de la pureza tópica.

7.1.2. Investigación teórica: observaciones sobre el *Modelo Pragmático*

El segundo acto de esta tesis (Capítulo 6) consistió en la presentación de un concepto teórico de *solución pura* elaborado por Detlefsen y Arana y que denominamos «Modelo Pragmático». La presentación de este modelo fue relevante para nuestra investigación, en **primer lugar**, debido a que el mismo admitía con naturalidad la realización de una lectura «en clave elucidatoria» del mismo, y en tal sentido, se mostró que nuestra investigación pre-teórica resultaba valiosa cono un marco de análisis para dicho modelo. Así pues, lo que podemos extraer aquí como un resultado, es la confirmación –para el caso del modelo pragmático–, de que el **Resultado pre-teórico 2** es un marco fructífero para el estudio de modelos de pureza tópica. En otras palabras:

> **Resultado teórico 1:** Los modelo de pureza tópica pueden factiblemente ser leídos «en clave elucidatoria», a partir de la cual podemos caracterizar estos modelos como ofreciendo caracterizaciones teóricas de las relaciones **CT** y **SE**.

Nuestra lectura «en clave elucidatoria» del modelo pragmático también nos permitió, en la Sección 6.3, identificar algunas cuestiones potencialmente problemática del modelo. Una de ellas refería al concepto de *tópico de un problema*, la cual puede formularse del siguiente modo:

> **Resultado teórico 2:** El modelo pragmático tiene una falencia en su concepto de *tópico de un problema*, en tanto no es muy claro respecto a cómo limitar los compromisos que le atribuimos al agente, –i.e. qué compromisos determinan el tópico del problema.

Por otro lado, también en la Sección 6.3 observamos que el concepto teórico de superioridad epistémica que podía extraerse del modelo pragmático, según el cual las soluciones puras son *estables*, podría ser de dudosa utilidad para el análisis de la práctica matemática. La razón consistía en que no es para nada claro que el *alivio de la ignorancia específica* sea un objetivo epistémico identificable en la práctica matemática.

7.2. Investigaciones futuras

Además de arrojar los resultados expuestos, la presente tesis sugiere algunas cuestiones que podrían motivar futuras investigaciones. Como algunas de estas cuestiones atañen los objetivos, mientras que otras atañen a cuestiones que fueron surgiendo a lo largo de los capítulos, vamos a exponer estas cuestiones en secciones separadas.

7.2.1. Investigaciones futuras en relación a los objetivos

El título de esta tesis hace referencia a la *práctica matemática* y, precisamente, en el Capítulo 2 introdujimos el predicado «pura» sirviéndonos de una brevísima revisión, donde figuras importantes en la matemática del siglo XIX, ponían la preocupación por la pureza del método en primer plano. Así mismo, en la Sección 4.2 del Capítulo 4, planteamos diversas formulaciones y demostraciones del Teorema de Pitágoras que también fueron tomadas de la práctica matemática. Sin embargo, razones de extensión nos impiden avanzar en la explotación de la investigación pre-teórica para el estudio de casos de la historia de la matemática. Así pues, una investigación futura podría consistir en la aplicación de las categorías **CT** y **SE** a teoremas y demostraciones concretas, tales como el Teorema de Desargues o el Teorema Fundamental del Álgebra, los cuales suelen ser mencionados como ejemplos relevantes.

Dado que la investigación llevada a cabo en esta tesis se desarrolla a nivel preteórico, otra línea de investigación futura consiste evidentemente, en la elaboración de un *modelo de demostración pura*. Para este fin, creemos que hay algunas sugerencias que pueden extraerse de la investigación precedente, más allá de los resultados concernientes a las relaciones **CT** y **SE**. Una de esas sugerencias puede extraerse del **Resultado pre-teórico 5**, a modo de *desideratum*: un modelo de demostración pura debe articular con *naturalidad* los dos enigmas. Tal como hemos estado sosteniendo, es ya a nivel pre-teórico donde nos enfrentamos a esta cuestión (en virtud de la lectura que hagamos de las formulaciones pre-teóricas de **CT** y **SE**), pero a la vez es importante que el modelo no sea infiel a esa naturalidad.

Una segunda sugerencia está relacionada con algunas orientaciones acerca de cómo entender la relación **SE**, especialmente las orientaciones de las secciones 5.3.1 y 5.3.3. Pues, ya sea que asociemos la superioridad epistémica de las demostraciones puras con su capacidad *explicativa*, o por ser *simples*, en ambos casos la pureza tópica de las demostraciones estaría *colapsando con algún otro objetivo epistémico* (explicatividad, simplicidad). Siendo así las cosas, se sigue que la pureza es solo «otro nombre» para ciertos tipos de demostraciones, en otras palabras, la pureza tópica de las demostraciones (y quizá del método) no serían un problema en sí mismo, u autónomo. A nuestro juicio, tales asociaciones son un indicio de «mala salud» para la discusión, o bien muestran que la pureza no es un problema por derecho propio; ciertamente, nosotros nos inclinamos por la primera opción y, a tales efectos, consideramos que una investigación futura se vería beneficiada si prosiguiera de acuerdo con la orientación de la Sección 5.3.2, –i.e. la orientación de acuerdo con la cual los métodos puros son valiosos para la *formación de teorías autónomas*. Ya en el Capítulo 2 (página 38), citábamos las palabras de José Ferreirós donde éste describía sucintamente la práctica matemática que denomina *theory shape*; sintéticamente expresado, el objetivo aquí consistiría en seleccionar los *métodos* juzgados como más apropiados y relevantes a un *tópico* («subject matter») dado. Así pues, parece bastante razonable decir que en el contexto de esta práctica la cuestión de la pureza (tópica) de los métodos y las demostraciones se presenta con naturalidad; y así mismo, también se aprecia la importancia de ampliar el contexto de las demostraciones hacia las *teorías* y y las *proto-teorías* que les preceden. Por lo tanto, una futura investigación particularmente prometedora es el estudio de las prácticas de formación de teorías.

Por otro lado, la idea de agente es explícita en la caracterización del *dominio del predicado «pura»* de la página 52, a la vez que está implícitamente sugerida en la formulación pre-teórica de **SE** (Capítulo 5, página 134), pues la idea misma de «objetivo» conduce a la existencia de una *acción consciente*, y así mismo, en la *Sección 4.1.2*, página 78, hicimos referencia a la noción de *agente* en relación pensar el tópico de un teorema como aquello que el agente *comprende*; finalmente, uno de lo elementos del modelo pragmático es el *investigador*. Así pues, esta idea de agente ha estado presente en diversos lugares de esta tesis. Por lo tanto, una tercera sugerencia (continuación de la anterior) consiste en construir un modelo de demostración pura en base a desarrollar un criterio de adecuación de los métodos al tópico de una teoría, que forma el corazón de la actividad de formación de teorías de Ferreirós, por medio de lo que éste denomina *core scheme* de la práctica matemática. Este *core scheme* tiene tres componentes: el *marco simbólico*, el *marco conceptual* y un *agente*, donde este último es susceptible de aceptar (o comprometerse) con ciertos objetivos epistémicos.

En definitiva, dado la sustantiva extensión dedicada a la exploración pre-teórica, estas sugerencias para futuras investigación se agrupan bajo el objetivo de construir un modelo de demostración pura.

7.2.2. Investigaciones futuras en relación con cuestiones surgidas en la investigación

Un problema surgido en el Capítulo 3 (aunque también estuvo presente en los capítulo 4 y 5): la idea de emprender un *análisis comparado* entre demostraciones. En la *Sección 3.2* introdujimos esta cuestión con el fin de sugerir que podíamos aproximarnos a la caracterización (intuitiva) de demostración pura[3], pensando al predicado «pura» como un *criterio comparativo* entre demostraciones. Este punto suscita la siguiente interrogante: ¿cómo podría llevarse a cabo una análisis comparado de demostraciones? O más aún: ¿es factible pensar en un *línea de investigación filosófica* cuyo objetivo sea el análisis comparado entre demostraciones?

Sin duda estas son preguntas muy ambiciosas para el presente contexto, aunque son relevantes debido a que en buena medida, nuestro abordaje de la pureza de-

[3]Más específicamente, que podíamos pensar la aplicación del predicado «pura» a las demostraciones.

mostrativa coloca a la misma como una instancia de semejante hipotética línea de investigación. Como dijimos en la sección antedicha, un abordaje *general* de esta cuestión parece estar aun en formación en la filosofía actual[4]; es decir, lo que ocurre no es que la comparación entre demostraciones esté «fuera del radar» de la filosofía actual (ni pasada), pues sin ir más lejos las discusiones metodológicas en filosofía de la matemática siempre repercuten sobre la comparación entre demostraciones (que empleen uno u otro método)[5]. Nuestro punto más bien es que aun resta bastante trabajo por delante.

A este último respecto se planteó[6], siguiendo a Dawson[7], que el abordaje directo de esta cuestión podría empezar planteando dos preguntas (conceptualmente) fundamentales: ¿cuándo dos demostraciones de un mismo resultado son la *misma*? Y ¿qué *criterios* comparativos pueden tener interés en matemáticas? Sobre la primera pregunta se hicieron algunas observaciones breves en la *Sección 3.3* que apuntaban en la siguiente dirección: tomando en cuenta el modo como Prawitz plantea originalmente la cuestión, lo que tenemos para discutir es una *tesis*[8], y donde la discusión parecería radicar en proveer algún *elucidatum* razonablemente aceptable, pues parece no haber consenso al respecto.[9].

Con relación a la segunda pregunta, algo se dijo en el Capítulo 5, pero aquí la cuestión acerca de qué se pretende debe ser clara; pues, en el mismo espíritu que Dawson, hay que tener presente que de la *enumeración* de lo que pueden ser los criterios comparativos (independientes del «orden» de surgimiento de las demostraciones), o las «motivaciones» para volver a demostrar un teorema, no permitirá clausurar esa lista. Luego, parece más factible situar esos criterios o motivaciones

---

[4]Con excepción quizás del trabajo de Dawson (2015). En el mismo sentido podría hablarse de Rav (1999).

[5]Otro ejemplo puede ser el de las demostraciones *explicativas*, pues evidentemente el interés de estas es su valor añadido en *comparación* con las demostraciones no explicativas.

[6]Véase la página 56 y ss.

[7][Dawson (2015): i].

[8]En el sentido que Seoane le da a esta expresión. Véase la Sección 1.2.

[9]En un muy reciente artículo Straßburger (2019) se vuelve a poner el foco sobre este tema.

en el contexto de ciertos *valores* promovidos por las comunidades matemáticas que interese estudiar. De este modo, y en analogía con las discusiones sobre «virtudes teóricas», también podríamos pensar que los distintos criterios pueden estar sometidos a una *jerarquización* ante el eventual conflicto entre ellas[10]. El punto aquí es que no parece ser para nada evidente cómo es que concretamente puede responderse a esta pregunta de forma general.

En definitiva, la pregunta por un abordaje explicito y general (o sistemático) de la comparación entre demostraciones es una cuestión pendiente de profundización en esta investigación, pero la misma –podemos decir– es «fundamental» para nuestro planteo, en virtud de que hemos enmarcado la investigación sobre la pureza demostrativa como un «capítulo» de este problema más general.

Para finalizar esta tesis, podemos decir que las cuestiones pendientes mencionadas en esta sección sugieren algunas líneas de investigación futura; aunque de ningún modo se pretende aquí sostener que hemos agotado el campo de problemas que surgen a partir de la noción de pureza. Precisamente, y como decíamos en el Capítulo 1, parte del enigma que encierra a nuestro juicio la pureza en matemáticas, es lo poco explorada que está en la literatura filosófica. En tal sentido, esta investigación sólo ha pretendido incursionar en un tema que seguramente continuará motivando ulteriores investigaciones.

[10]Véase la página 109.

Bibliografía

Aguirre, A., Foster, B., and Merali, Z. (2016). *Trick Or Truth?: The Mysterious Connection Between Physics and Mathematics*. Springer.

Angioni, L. (2014). Aristotle on necessary principles and on explaining x through xâs essence. *Studia Philosophica Estonica*, pages 88–112.

Angioni, L. et al. (2012). Os seis requisitos das premissas da demonstração científica em aristóteles (segundos analíticos i2). *Manuscrito*.

Arana, A. (2008). Logical and semantic purity. *Protosociology*, 25:36–48.

Arana, A. (2009). On formally measuring and eliminating extraneous notions in proofs. *Philosophia Mathematica*, 17(2):189–207.

Arana, A. (2014). Purity in arithmetic: Some formal and informal issues.â. *Formalism and Beyond. On the Nature of Mathematical Discourse*, pages 315–335.

Arana, A. (2017). On the alleged simplicity of impure proof. In *Simplicity: Ideals of Practice in Mathematics and the Arts*, pages 205–226. Springer.

Arana, A. and Mancosu, P. (2012). On the relationship between plane and solid geometry. *The Review of Symbolic Logic*, 5(2):294–353.

Aristóteles (1988). *Tratados de lógica (Órganon) II: Sobre la interpretación. Analíticos primeros. Analíticos segundos*. Gredos. Traducido por Miguel Candel Sanmartín.

Avigad, J. (2006). Mathematical method and proof. *Synthese*, 153(1):105–159.

Avigad, J. (2019). Reliability of mathematical inference.

Avigad, J. (2020). Reliability of mathematical inference. *Synthese*, pages 1–23.

Azzouni, J. (2013). The relationship of derivations in artificial languages to ordinary rigorous mathematical proof. *Philosophia Mathematica*, 21(2):247–254.

Baaz, M. and Leitsch, A. (2011). *Methods of cut-elimination*, volume 34. Springer Science & Business Media.

Baldwin, J. T. (2013). Formalization, primitive concepts, and purity. *The Review of Symbolic Logic*, 6(1):87–128.

Baldwin, J. T. (2018). *Model Theory and the Philosophy of mathematical practice: Formalization without Foundationalism*. Cambridge University Press.

Bishop, E. (1973). *Schizophrenia in contemporary mathematics*. American Mathematical Society.

Boghossian, P. A. (1993). Does an inferential role semantics rest upon a mistake? *Mind & language*, 8(1):27–40.

Bolzano, B. (1810). Contributions to a better-grounded presentation of mathematics. translated by s. russ. *Ewald (1996)*, 1:174–224.

Bolzano, B. and Russ, S. (2004). Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite signs, there lies at least one real root of the equation. *The Mathematical Works of Bernard Bolzano, Oxford University Press, Oxford*, pages 251–263.

Boniface, J. (2002). Les constructions des nombres reels dans le ntouvement d'arithmetisation de vanalyse.

Boolos, G. (1984). Don't eliminate cut. *Journal of Philosophical Logic*, 13(4):373–378.

Bos, H. J. (1984). Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory; the âconstruction of equationsâ, 1637–ca. 1750. *Archive for history of exact sciences*, 30(3-4):331–380.

Bos, H. J. (2001). *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction*. Springer Science & Business Media.

Bottazini, U. and Dalmedico, A. D. (2013). *Changing images in mathematics: From the French Revolution to the new millennium*. Routledge.

Bourbaki, N. (1950). The architecture of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 57(4):221–232.

Boyer, C. B. (2004). *History of Analytic Geometry*. Courier Corporation.

Brandom, R. (2005). *Hacerlo explícito*. Barcelona: Herder.

Burgess, J. P. (2015). *Rigor and structure*. Oxford University Press, USA.

Cantù, P. (2010). Aristotleâs prohibition rule on kind-crossing and the definition of mathematics as a science of quantities. *Synthese*, 174(2):225–235.

Cantù, P. (2014). The right order of concepts: Graßmann, peano, gödel and the inheritance of leibniz's universal characteristic. *Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences*, (18-1):157–182.

Carnap, R. (1962). *Logical foundations of probability*. University of Chicago press Chicago.

Carnap, R. (1975). *Fundamentos de lógica y matemáticas*. Taller de Ediciones Josefina Betancor.

Casanave, A. L. (1999). La concepción de demostración de oswaldo chateaubriand. *Manuscrito: revista internacional de filosofía*, 22(2):95–107.

Casanave, A. L. (2008). Entre la retórica y la dialéctica. *Manuscrito*, 31(1):11–18.

Casanave, A. L. and Panza, M. (2015). Pruebas entimemáticas y pruebas canónicas en la geometría plana de euclides. *Revista latinoamericana de filosofía*, 41(2):147–170.

Castro, E. (2017). Problemas para a explicação matemática. *Revista Portuguesa de Filosofia*, 73(3/4):1437–1462.

Cellucci, C. (1980). Proof theory and theory of meaning. In *Italian Studies in the Philosophy of Science*, pages 13–29. Springer.

Cellucci, C. (2008). The nature of mathematical explanation. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 39(2):202–210.

Cellucci, C. (2015). Mathematical beauty, understanding, and discovery. *Foundations of Science*, 20(4):339–355.

Cellucci, C. (2017). *Rethinking knowledge: The heuristic view*, volume 4. Springer.

Chartrand, G., Polimeni, A. D., and Zhang, P. (2017). *Mathematical Proofs: A transition to advanced mathematics*. Pearson.

Chasles, M. (1989). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie.* Editions Jacques Gabay Paris, 2e éd.

Chateaubriand, O. (2005). *Logical Forms. Part II: Logic, Language, and Knowledge*. Campinas: Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2005.(Coleção CLE, v. 42.

Chemla, K. (2016). The value of generality in michel chasless historiography of geometry. In Chemla, K., Chorlay, R., and Rabouin, D., editors, *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, pages 47 – 89. Oxford University Press.

Coffa, J. A. (1975). Dos concepciones de la elucidación filosófica. *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía*, pages 43–67.

Crippa, D. (2014). Impossibility results: From geometry to analysis: A study in early modern conceptions of impossibility. *PhD thesis.*

Cuomo, S. (2000). *Pappus of Alexandria and the mathematics of late antiquity*. Cambridge University Press.

Dawson, J. W. (2006). Why do mathematicians re-prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 14(3):269–286.

Dawson, J. W. (2015). *Why Prove it Again?* Springer.

De Jong, W. R. and Betti, A. (2010). The classical model of science: A millennia-old model of scientific rationality. *Synthese*, 174(2):185–203.

Dedekind, R. (1876). Sur la théorie des nombres entiers algébriques. *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 11:278–288.

Dedekind, R. (2014). *¿Qué son y para qué sirven los números?* Alianza Editorial. Traducción e introducción de José Ferreirós.

Descartes, R. (1981). *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Alfaguara, Madrid. Trad. de Alonso Quintás.

Detlefsen, M. (1988). Fregean hierarchies and mathematical explanation. *International Studies in the Philosophy of Science*, 3(1):97–116.

Detlefsen, M. (2008). Purity as an ideal of proof. In Mancosu, P., editor, *The Philosophy of Mathematical Practice*, pages 179 – 197. Oxford University Press.

Detlefsen, M. and Arana, A. (2011). Purity of methods. *Philosophers' Imprint*, 11(2):1–20.

Dieudonne, S. (2017). *History Algebraic Geometry*. Routledge.

Došen, K. (2003). Identity of proofs based on normalization and generality. *Bulletin of Symbolic Logic*, 9(4):477–503.

Dugac, P. (1973). Eléments d'analyse de karl weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences*, 10(1):41–174.

Dugac, P. (2003). *Histoire de l'analyse: autour de la notion de limite et de ses voisinages*. Vuibert.

Dummett, M. (1978). *Truth and other enigmas*. Harvard University Press.

Dummett, M. (1981). *Frege: Philosophy of language*. Harvard University Press.

Dummett, M. et al. (1991). *The logical basis of metaphysics*. Harvard university press.

Dummett, M. A. (2000). *Elements of intuitionism*, volume 39. Oxford University Press.

Euler, L. (1796). *Introduction à l'analyse infinitésimale*, volume 2. Chez Barrois.

Feferman, S. (1978). The logic of mathematical discovery vs. the logical structure of mathematics. In *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, volume 1978, pages 309–327. Philosophy of Science Association.

Ferraro, G. and Panza, M. (2012). Lagrangeâs theory of analytical functions and his ideal of purity of method. *Archive for History of Exact Sciences*, 66(2):95–197.

Ferreirós, J. (2007). ?o*θ*?òζ?a*ριθμηί*íξ?*ι*: The rise of pure mathematics as arithmetic with gauss. In *The shaping of arithmetic after CF Gauss?s Disquisitiones Arithmeticae*, pages 234–268. Springer.

Ferreirós, J. (2010). On the very notion of applied mathematics. In Epple, M., Hoff Kjeldsen, T., and Siegmund, R., editors, *From Mixed to Applied Mathematics: Tracing an important dimension of mathematics and its history*, pages 726 – 731, DOI: 10.4171/OWR/2013/12.

Ferreirós, J. (2015). *Mathematical knowledge and the interplay of practices*. Princeton University Press.

Frege, G. (1885). On formal theories of arithmetic. *(1984), Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy, Blackwell, Oxford*, pages 112–121.

Friedman, H. (1975). Some systems of second order arithmetic and their use. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, BC, 1974)*, volume 1, pages 235–242. Citeseer.

Gentzen, G. (1969a). *The collected papers of Gerhard Gentzen, ed*.

Gentzen, G. (1969b). Investigations into logical deduction. *The collected papers of Gerhard Gentzen*, pages 68–131.

Giardino, V. (2017). The practical turn in philosophy of mathematics: A portrait of a young discipline. *Phenomenology and Mind*, (12):18–28.

Giovannini, E. N. (2015). *David Hilbert y los fundamentos de la geometría: 1981 - 1905*. College Publications.

Girard, J. (1982). *Proof theory and logical complexity, Bibliopolis Napoli*. North-Holland, Naples.

Gödel, K. (1931). Sobre sentencias formalmente indecidibles de principia mathematica y sistemas afines. *Obras completas*, pages 55–90.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in euclid'selements: How did he handle them? *Historia mathematica*, 23(4):355–375.

Gray, J. (2008). *Plato's ghost: the modernist transformation of mathematics*. Springer.

Greenberg, M. J. (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. Macmillan.

Guicciardini, N. (2009). *Isaac Newton on mathematical certainty and method*. Number 4. Mit Press.

Hafner, J. and Mancosu, P. (2005). The varieties of mathematical explanation. In *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, pages 215–250. Springer.

Hall, M. (1943). Projective planes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 54(2):229–277.

Hallett, M. (2008). Reflections on the purity of method in hilbert's grundlagen der geometrie. In Mancosu, P., editor, *The Philosophy of Mathematical Practice*, pages 198–255. Oxford University Press.

Hallett, M. and Majer, U. (2004). *David Hilbertâs lectures on the foundations of geometry 1891–1902*, volume 1. Springer Science & Business Media.

Hamami, Y. (2014). Mathematical rigor, proof gap and the validity of mathematical inference. *Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences*, (18-1):7–26.

Hamami, Y. (2019). Mathematical rigor and proof. *The Review of Symbolic Logic*, pages 1–44.

Hartshorne, R. (2013). *Geometry: Euclid and beyond*. Springer Science & Business Media.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Courier Corporation.

Henkin, L. and Leonard, W. A. (1978). A euclidean construction? *Mathematics Magazine*, 51(5):294–298.

Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(10):437–479.

Hilbert, D. (1971). *Foundations of Geometry, (trans. L. Unger)*. Open Court, La Salle, IL.

Hilbert, D. (1996). The new grounding of mathematics. first report. In Ewald, W. B., editor, *From Kant to Hilbert, vol. 2*, pages 1115 – 1134. Oxford University Press.

Isaacson, D. (1987). Arithmetical truth and hidden higher-order concepts. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 122, pages 147–169. Elsevier.

Jahnke, H. N. and Otte, M. (1981). Origins of the program of «Arithmetization of Mathematics». In *Social history of nineteenth century mathematics*, pages 21–49. Springer.

Kahle, R. and Pulcini, G. (2017). Towards an operational view of puritty.

Keas, M. N. (2018). Systematizing the theoretical virtues. *Synthese*, 195(6):2761–2793.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford University Press.

Kleene, S. (1974). *Introducción a la Metamatemática*. Tecnos.

Klein, F. (1945). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis, Translated from the 3d German Ed. by ER Hedrick and CA Noble. With 125 Figures*. Dover Publications.

Kline, M. (1982). *Mathematics: The loss of certainty*, volume 686. Oxford Paperbacks.

Kline, M. (1999). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza.

KREISEL, G. (1971). A survey of proof theory ii. In *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, 1971*, pages 109–170. North-Holland.

Kreisel, G. (1980). Kurt gödel. 28 april 1906-14 january 1978. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, pages 149–224.

Kuhn, T. S. (1977). *The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Teadition and Change*. University of Chicago Press.

Lacroix, S. F. (1797). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, volume 1. JBM Duprat.

Lagrange, J. L. (1847). *Thĕorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul diffĕrentiel*. Bachelier.

Lane, S. M. (1935). A logical analysis of mathematical structure. *The Monist*, pages 118–130.

Lange, M. (2009). Why proofs by mathematical induction are generally not explanatory. *Analysis*, 69(2):203–211.

Lange, M. (2010). What are mathematical coincidences (and why does it matter)? *Mind*, 119(474):307–340.

Lange, M. (2014). Aspects of mathematical explanation: Symmetry, unity, and salience. *Philosophical Review*, 123(4):485–531.

Lange, M. (2015). Explanation, existence and natural properties in mathematics–a case study: Desarguesâ theorem. *dialectica*, 69(4):435–472.

Larvor, B. (2012). How to think about informal proofs. *Synthese*, 187(2):715–730.

Lassalle Casanave, A. (2012). *Symbolic Knowledge from Leibniz to Husserl*. College Publications.

Lassalle Casanave, A. and Panza, M. (2015). Pruebas entimemáticas y pruebas canónicas en la geometría plana de euclides. *Revista latinoamericana de filosofía*, 41(2):147–170.

LassalleCasenave, A. (2019). *Por construção de conceitos: em torno da filosofia kantiana da matemática*. Editora da PUC- Loyola. En prensa.

Laudan, L. (1990). Normative naturalism. *Philosophy of Science*, 57(1):44–59.

Leibniz, G. W. (1996). *New essays on human understanding*. Cambridge University Press.

Loeb, I. and Roski, S. (2014). The transition from formula-centered to concept-centered analysis bolzano's purely analytic proof. as a case study. *Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences*, (18-1):113–129.

Mancosu, P. (1999). Bolzano and cournot on mathematical explanation. *Revue d'histoire des sciences*, pages 429–455.

Mancosu, P. (2001). Mathematical explanation: Problems and prospects. *Topoi*, 20(1):97–117.

Mancosu, P. (2008). *The philosophy of mathematical practice*. Oxford University Press.

Manders, K. L. (1987). Logic and conceptual relationships in mathematics. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 122, pages 193–211. Elsevier.

Murzi, J. (2018). Classical harmony and separability. *Erkenntnis*, pages 1–25.

Nagel, E. (1939). The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry. *Osiris*, 7:142–223.

Negri, S. and Von Plato, J. (2011). *Proof analysis: a contribution to Hilbert's last problem*. Cambridge University Press.

Pambuccian, V. (2001). Fragments of euclidean and hyperbolic geometry. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 53(2):361–400.

Peregrin, J. (2014). *Inferentialism: why rules matter*. Springer.

Petri, B. and Schappacher, N. (2007). On arithmetization. In *The Shaping of Arithmetic after CF Gausss Disquisitiones Arithmeticae*, pages 343–374. Springer.

Piazza, M. and Pulcini, G. (2016). Uniqueness of axiomatic extensions of cut-free classical propositional logic. *Logic Journal of the IGPL*, 24(5):708–718.

Placek, T. (1999). *Mathematical intuitionism and intersubjectivity: A critical exposition of arguments for intuitionism*, volume 279. Springer Science & Business Media.

Prawitz, D. (1971). Ideas and results in proof theory. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 63, pages 235–307. Elsevier.

Prawitz, D. (1973). Towards a foundation of a general proof theory. *Logic, methodology and philosophy of science IV*, 74:225–250.

Prawitz, D. (2012). The epistemic significance of valid inference. *Synthese*, 187(3):887–898.

Prawitz, D. (2015). Explaining deductive inference. In *Dag Prawitz on proofs and meaning*, pages 65–100. Springer.

Prawitz, D. (2018). The fundamental problem of general proof theory. *Studia Logica*.

Quine, W. V. O. (2013). *Word and object*. MIT press.

Racionero, Q. (1999). Aristóteles retórica. *Madrid: Biblioteca Clásica Gredos*.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia mathematica*, 7(1):5–41.

Resnik, M. D. and Kushner, D. (1987). Explanation, independence and realism in mathematics. *The British journal for the philosophy of science*, 38(2):141–158.

Robinson, J. (1949). Definability and decision problems in arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, 14(2):98–114.

Rota, G.-C. (2008). *Indiscrete Thoughts*. Modern Birkhuser Classics.

Searle, J. (1980). *Actos de habla*. Cátedra.

Sefrin-Weis, H. (2010). *Pappus of Alexandria: Book 4 of the Collection: Edited With Translation and Commentary by Heike Sefrin-Weis*. Springer Science & Business Media.

Seoane, J. (2000). Rigor y finitud. *Cuadernos del Sur - Filosofía*, 30:157 – 157.

Seoane, J. (2008). Elucidando el concepto de demostración. observaciones sobre chateaubriand. *Manuscrito*, 31(1):279–292.

Seoane, J. (2017). On mathematical elucidation. *Revista Portuguesa de Filosofia*, 73(3/4):1405–1422.

Seoane, J. (2018). Â¿cuándo una demonstración es más perspicua que otra? *Principia: an international journal of epistemology*, 21(3):427–444.

Shabel, L. (2017). *Mathematics in Kant's critical philosophy: Reflections on mathematical practice*. Routledge.

Simpson, T. M. (1975). Análisis y eliminación: una módica defensa de quine. *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía*, pages 69–83.

Smith, N. J. (2009). Frege's judgement stroke and the conception of logic as the study of inference not consequence. *Philosophy Compass*, 4(4):639–665.

Stanton, D. and Zeilberger, D. (1989). The odlyzko conjecture and oâharaâs unimodality proof. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 107(1):39–42.

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies*, 34(2):135–151.

Steiner, M. (2009). *The applicability of mathematics as a philosophical problem*. Harvard University Press.

Steinkrüger, P. (2018). Aristotle on kind-crossing. *Oxford Studies in Ancient Philosophy*, 54:107–158.

Straßburger, L. (2019). The problem of proof identity, and why computer scientists should care about hilbert's 24th problem. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 377(2140):20180038.

Tennant, N. (1986). The withering away of formal semantics? *Mind & Language*, 1(4):302–318.

Thiele, R. (2003). Hilbert's twenty-fourth problem. *The American mathematical monthly*, 110(1):1–24.

Troelstra, A. (1975). Non-extensional equality. *Fundamenta Mathematicae*, 82(4):307–322.

Van Bendegem, J. P. (2005). Proofs and arguments: The special case of mathematics. In *Cognitive Structures in Scientific Inquiry*, pages 157–173. Brill.

Van Bendegem, J. P. and Van Kerkhove, B. (2004). The unreasonable richness of mathematics. *Journal of Cognition and Culture*, 4(3):525–549.

Van Fraassen, B. C. (1980). *The scientific image*. Oxford University Press.

van Lamoen, F. (2002). Circumcenters on a circle: 10830. *The American Mathematical Monthly*, 109(4):396–397.

Vega Reñón, L. (1990). *La trama de la demostración*. Madrid: Alianza Editorial.

von Neumann, J. (1925). An axiomatisation of set theory. In Heijenoort, J. V., editor, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, pages 393–413. Harvard University Press.

von Staudt, K. G. C. (1847). *Geometrie der lage*. Bauer und Raspe.

Wagner, S. J. (1987). The rationalist conception of logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 28(1):3–35.

Wantzel, L. M. (1837). Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de Mathématiques pures et appliques*, 23:366 – 372.

Weiss, B. (1997). Proof and canonical proof. *Synthese*, 113(2):265–284.

Wigner, E. P. (1990). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. In *Mathematics and Science*, pages 291–306. World Scientific.

Wittgenstein, L. (1978). *Remarks on the Foundations of Mathematics*. von Wright, Georg Henrik and Rhees, Rush and Anscombe, Gertrude Elizabeth Margaret and Anscombe.

Zelcer, M. (2013). Against mathematical explanation. *Journal for general philosophy of science*, 44(1):173–192.