LOTHAR RIDDER

Gegenstände in der Zeit

§ 1 Einleitung

Im dritten Kapitel seines Buches „The Axiomatic Method in Biology“ entwirft Woodger 1937 die Umrisse eines biologischen Axiomensystems (*P*, *T*, *U*, etc.), in dem u.a. die undefinierten Zeichen *‚P’* und *‚T’* gegeben sind. *‚P’* bezeichnet dabei die Relation „Teil von“ in einem sehr allgemeinen Sinn und schließt räumliche und zeitliche Teile ein. *‚xPy’* lässt sich deshalb in der Weise lesen, dass *x* Teil von *y* ist, wobei *x* und *y* Gegenstandsvariablen sind. *‚T’* bezeichnet die Relation „zeitlich früher“. *‚xTy’* kann deshalb so verstanden werden, dass *x* zeitlich früher als *y* ist oder dass *x y* zeitlich vorangeht.

Im Appendix E von Woodger 1937 gibt Tarski eine detailliertere und systematischere Entwicklung der Eigenschaften von *‚P’* und *‚T’* und ihrer Beziehungen zueinander als sie Woodger mit der Skizze seines Systems (*P*, *T*, *U*, etc.) vorlegt. Geht Woodger in seinem System von einer klassischen Mereologie[1] aus, so ist das von Tarski für den Aufbau seiner Zeitlogik zugrunde gelegte mereologische System atomistisch. Zugleich interpretiert Tarski *‚T’* in geringfügig modifizierter Weise, wodurch sich seiner Auffassung nach die formalen Eigenschaften von *‚T’* in vielen Hinsichten deutlich vereinfachen. Jedoch lässt sich in Tarskis System in einfacher Weise eine zweistellige Relation definieren, deren Bedeutung mit der ursprünglichen Bedeutung von *‚T’* in Woodgers System (*P*, *T*, *U*, etc.) identisch ist.

Im Folgenden gebe ich eine systematische und in verschiedenen Hinsichten modifizierte und erweiterte Darstellung des von Tarski im § 2 im Appendix E von Woodger entwickelten undefinierten Begriffs *‚T’*.[2] Ziel der Ausführungen ist es zu zeigen, wie sich auf mereologischer Grundlage eine zeitliche Ordnung von Momentanwelten entwickeln lässt, die zum Kontinuum der reellen Zahlen isomorph ist. Dabei werden die von Tarski

---

[1] Zum Begriff der „klassischen Mereologie“ siehe Lothar Ridder, *Mereologie*, Frankfurt a.M. 2002, Kapitel I, insbesondere Abschnitt 2.1, 67-80.

[2] Alfred Tarski, „Appendix E“, § 2, in: Joseph Henry Woodger, *The Axiomatic Method in Biology*, Cambridge 1937, 163-172.

in PM-Notation angegebenen Axiome und Theoreme in moderne prädikatenlogische Schreibweise transformiert und zum besseren Verständnis der Axiome und Theoreme wird ihre intendierte Bedeutung umgangssprachlich formuliert und nach Möglichkeit durch anschauliche Diagramme ergänzt. Die bei Tarski fehlenden oder allenfalls skizzierten Beweise werden soweit ausgeführt, dass sie vom Leser selbstständig nachvollzogen werden können.

Den von Tarski im § 1 desselben Appendix axiomatisch eingeführten Teilbegriff *‚P'* und verschiedene daraus ableitbare Theoreme setze ich als bekannt voraus.[3]

§ 2 Die Axiome bezüglich ‚T'

Der Ausdruck *‚xTy'* bedeute in informeller Lesart im Weiteren, dass der ganze Gegenstand *x* dem ganzen Gegenstand *y* zeitlich vorausgeht oder dass das letzte Stück von *x* mit dem ersten Stück von *y* zeitlich koinzidiert. Wir sagen dafür auch, dass der Gegenstand *x* ganz früher ist als *y* oder das Endstück von *x* mit dem Anfangsstück von *y* zeitlich koinzidiert, oder − noch kürzer − dass *x* früher ist als *y*.[4] Dass *x* ganz oder fast ganz früher ist als *y*, lässt sich durch folgendes Diagramm veranschaulichen:

●——————● ●—————————● bzw. ●——————●—————————●

x *y* *x* *y*

Diagramm 1

Für die zweistellige Relation *‚T'* fordern wir zunächst die *Transitivität*.

[3] Für eine ausführliche Darstellung von Tarskis mereologischem System im „Appendix E", § 1, von Woodger 1937, 161-163, in moderner prädikatenlogischer Notation siehe Ridder 2002, 73-78 und 117-119.

[4] Von diesem schwachen Begriff des zeitlichen Vorausgehens grenzen wir später einen starken Begriff ab, bei dem der Gegenstand *x* dem Gegenstand *y* zeitlich *ganz* vorausgeht. In diesem Fall sagen wir, dass *x ganz früher ist als y*.

Ax1 Transitivität von *T*

Geht der Gegenstand *x* dem Gegenstand *y* zeitlich ganz oder fast ganz voraus und geht *y* dem Gegenstand *z* zeitlich ganz oder fast ganz voraus, dann geht *x* dem Gegenstand *z* zeitlich ganz oder fast ganz voraus.

$\forall x,y,z(xTy \wedge yTz \rightarrow xTz)$

Die Plausibilität des im ersten Axiom geforderten Sachverhalts zeigt das folgende Diagramm:

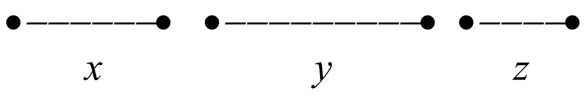

Diagramm 2

Mit dem nächsten Axiom fordern wir ganz allgemein die *Dichte von T*, d.h. wir fordern, dass in der Folge der Terme, die in der Relation *T* zueinander stehen, zwischen zwei Termen stets ein weiterer Term existiert.[5]

Ax2 Dichte von *T*

Ist ein Gegenstand *x* früher als ein Gegenstand *y*, dann existiert ein Gegenstand *z* zwischen *x* und *y* derart, dass *x* zeitlich früher als *z* und *z* zeitlich früher als *y* ist.

$\forall x,y(xTy \rightarrow \exists z(xTz \wedge zTy))$

Für das nächste Axiom benötigen wir den Begriff des momentanen Gegenstandes. Momentane oder augenblickliche Gegenstände stellen einen Sonder- oder Grenzfall von Gegenständen dar, die in der Zeitrelation *T* zueinander stehen. Sie lassen sich über die einstellige Relation *‚mom'* in folgender Weise definieren:

[5] Tarski (1937, 163, Axiom 2 A12) spricht statt von „Dichte" (engl. „density") von „Kompaktheit" („compactness).

D1 Momentane Gegenstände

Ein Gegenstand x ist genau dann *momentan*, wenn er früher ist als er selbst.

$$\forall x(mom(x) \leftrightarrow_{\text{def.}} xTx)$$

Die Klasse *‚Mom'* aller momentanen Gegenstände wird dann folgendermaßen definiert:

D1′ Klasse der momentanen Gegenstände

$$Mom =_{\text{def.}} \{x\text{: } mom(x)\} \text{ bzw. } Mom =_{\text{def.}} \{x\text{: } xTx\}$$

Wie wir später zeigen werden, sind Punkte Beispiele für momentane Entitäten:

● ● ●
x *y* *z* …

Diagramm 3

Zwei momentane Gegenstände sollen nun stets *vergleichbar* sein *bezüglich* T in der Weise, dass einer der Gegenstände dem anderen zeitlich vorausgeht.

Ax3 Vergleichbarkeit momentaner Gegenstände

Sind x und y zwei momentane Gegenstände, dann ist x früher als y oder y ist früher als x.

$$\forall x,y(mom(x) \wedge mom(y) \rightarrow xTy \vee yTx)$$

Das letzte anzuführende Axiom stellt einen plausiblen Zusammenhang her zwischen Gegenständen, die in der Zeitrelation T zueinander stehen, und ihren momentanen Teilen. Mit Ax4 lässt sich zeigen (siehe nachfolgend Theorem 4), dass sich der Begriff T genau auf solche Fälle bezieht, in denen jeder momentane Teil eines früheren Gegenstandes jedem momentanen Teil eines späteren Gegenstandes zeitlich vorausgeht.

Ax4 Gegenstände in der Zeit und momentane Teile

Ein Gegenstand x ist genau dann früher als ein Gegenstand y, wenn jeder momentane Teil von x früher ist als jeder momentane Teil von y.

$$\forall x,y(xTy \leftrightarrow \forall u,v((mom(u) \land uPx \land mom(v) \land vPy) \rightarrow uTv))$$

Das folgende Diagramm verdeutlicht die Forderung von Axiom 4:

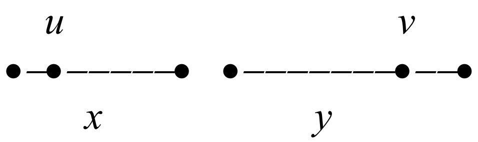

Diagramm 4

§ 3 Theoreme bezüglich ‚T'
§ 3.1 Allgemeine und momentane Gegenstände

Mit den vier Axiomen und der Definition des momentanen Gegenstandes im vorhergehenden Paragraphen lassen sich die folgenden Theoreme deduzieren.

T1 Ein Gegenstand x ist genau dann früher als ein Gegenstand y, wenn ein Gegenstand z zwischen x und y existiert in dem Sinne, dass z später als x und früher als y ist.

$$\forall x,y(xTy \leftrightarrow \exists z(xTz \land zTy))$$

Bew.: Existiere ein z mit xTz und zTy, dann folgt mit Ax1 xTy. – Sei nun umgekehrt $x, y \in T$, d.h. gelte xTy, dann existiert wegen Ax2 ein z mit xTz und zTy, d.h. $\exists z(xTz \land zTy)$.

Mit Hilfe von Ax4 lassen sich nun die folgenden plausiblen Sachverhalte beweisen, die Verhältnisse zwischen Gegenständen, die zeitlich einander vorausgehen, und ihren Teilen betreffen.

T2 Ist ein Gegenstand *x* früher als ein Gegenstand *y* und ist der Gegenstand *z* ein Teil von *x*, dann ist *z* früher als *y*.

$$\forall x,y(xTy \wedge zPx \rightarrow zTy)$$

Bew.: Gelte nach Voraussetzung *xTy* und *zPx*, dann gehen mit Ax4 alle momentanen Teile von *x* allen momentanen Teilen von *y* zeitlich voraus. Sei nun *u* ein momentaner Teil von *z* und *v* ein momentaner Teil *y*, dann ist nach Voraussetzung *u* ein momentaner Teil von *x* und deswegen geht *u* *v* zeitlich voraus, d.h. mit Ax4 *zTy*.

Analog lässt sich natürlich zeigen, dass der Gegenstand *x* dem Gegenstand *z* zeitlich vorausgeht, wenn *x* dem Gegenstand *y* zeitlich vorausgeht und *z* ein Teil von *y* ist.

T3 Ist ein Gegenstand *x* früher als ein Gegenstand *y* und ist der Gegenstand *z* ein Teil von *y*, dann ist *x* früher als *z*.

$$\forall x,y(xTy \wedge zPy \rightarrow xTz)$$

Bew.: Analog zu T2.

Mit T2 und T3 lässt sich nun zeigen:

T4 Ein Gegenstand *x* ist genau dann früher als ein Gegenstand *y*, wenn alle Teile von *x* früher sind als die Teile von *y*.

$$\forall x,y(xTy \leftrightarrow \forall s,t(sPx \wedge tPy \rightarrow sTt))$$

Bew.: T2 und T3.

T5 Dass ein Gegenstand *x* früher ist als ein Gegenstand *y*, ist zu jeder der folgenden Bedingungen äquivalent:

(1) Es existiert ein Gegenstand *z*, der früher ist als *y* und wovon *x* ein Teil ist.

(2) Es existiert ein Gegenstand *z*, wovon *y* ein Teil ist und der später ist als *x*.

(3) Es existieren Gegenstände *r* und *s*, so dass *x* ein Teil von *r* und *r* früher als s und *y* ein Teil von *s* ist.

$$\forall x{,}y(xTy \leftrightarrow (1)\ \exists z(xPz \wedge zTy)$$
$$\leftrightarrow (2)\ \exists z(xTz \wedge yPz)$$
$$\leftrightarrow (3)\ \exists r{,}s(xPr \wedge rTs \wedge yPs))$$

Bew.: Existiere ein z mit *xPz* und *zTy*, mit T2 gilt deshalb *xTy* und wegen *yPy* gibt es deshalb ein *z* mit *xTz* und *yPz*. Gebe es nun ein *z* mit *xTz* und *yPz*, mit T3 folgt deshalb *xTy*. Gelte nun *xTy*, dann folgt wegen der Reflexivität von *P* sowohl *yPy* als auch *xPx* und nach Voraussetzung *xTy*, es existieren also *r* und *s* mit *xPr* und *rTs* und *yPs*. Existieren nun s und *r* mit *xPr*, *rTs* und *yPs*, dann folgt mit T3 *rTy* und deshalb existiert ein *z* mit *xPz* und *zTy*. – Insgesamt haben wir für beliebige Gegenstände *x* und *z* die Kette $\exists z(xPz \wedge zTy) \rightarrow \exists z(xTz \wedge yPz) \rightarrow xTy \rightarrow \exists r,\mathrm{s}(xPr \wedge rTs \wedge yPs) \rightarrow \exists z(xPz \wedge zTy)$ gezeigt, woraus sich mit der Transitivität von ‚$\rightarrow$' die in Theorem 5 behaupteten Äquivalenzen ergeben.

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass ein Gegenstand *x* einem Gegenstand *y* im Sinne von *T* zeitlich vorangeht, liegt vor, wenn kein Teil von *y* zeitlich einem Teil von *x* im Sinne von *T* vorausgeht.

T6 Ist kein Teil des Gegenstandes *y* früher als ein Teil des Gegenstandes *y*, dann ist *x* früher als *y*.

$$\forall x{,}y({\sim}\exists z(zPy \wedge \exists r(rPx \wedge zTr)) \rightarrow xTy)$$

Bew.: Sei *u* ein momentaner Teil von *x*, d.h. *mom(u)* und *uPx*, und *v* ein momentaner Teil von *y*, d.h. *mom(v)* und *vPy*, dann folgt mit Ax4 *uTv* oder *vTu*. Angenommen *vTu*, dann existierte wegen *uPx* ein *r* mit *rPx* und *vTr* und wegen *vPy* existierten dann *z* und *r* mit *zPy* und *rPx* und *zTr* im Widerspruch zur Voraussetzung des Theorems. Der Fall *vTu* ist also nicht möglich und deshalb ergibt sich mit Ax4 *xTy*.

T7 Die mereologische Summe[6] von α ist genau dann früher als die mereologische Summe von β, wenn die Klassen α und β beide nicht leer sind und jedes Element von α früher ist als jedes Element von β.

$$\forall \alpha,\beta\,(\Sigma\alpha T\Sigma\beta \leftrightarrow \alpha \neq \emptyset \wedge \beta \neq \emptyset \wedge \forall x,y(x \in \alpha \wedge y \in \beta \rightarrow xTy))$$

Bew.: ‚$\rightarrow$': Def. von Σ, Reflexivität von P, T2 und T3; ‚$\leftarrow$': Mit Hilfe von „$\forall x(xP\Sigma\alpha \rightarrow \Sigma\alpha = \Sigma(\alpha \cup \{x\}))$", Ax4 und der Existenz der Summe für α, $\beta \neq \emptyset$.

Mit Hilfe von T7 ergibt sich das folgende Theorem:

T8 (1) Die Summe von α ist genau dann früher als ein Gegenstand y, wenn die Klasse α nicht leer ist und alle Elemente von α früher als y sind.

$$\forall \alpha,y(\Sigma\alpha Ty \leftrightarrow \alpha \neq \emptyset \wedge \forall z(z \in \alpha \rightarrow zTy))$$

(2) Ein Gegenstand x ist genau dann früher als die Summe von β, wenn β nicht leer ist und alle Elemente von β später als x sind.

$$\forall \beta,x(xT\Sigma\beta \leftrightarrow \beta \neq \emptyset \wedge \forall z(z \in \beta \rightarrow xTz))$$

Bew.: T7 und ‚$\alpha = \{x\} \rightarrow x = \Sigma\alpha$'.

In den nun folgenden Theoremen geht es um momentane Gegenstände und die Relationen, die zwischen ihnen und den Gegenständen im Allgemeinen bestehen.

T9 Ein Gegenstand x ist genau dann *momentan*, wenn jeder Teil von x momentan ist.

$$\forall x(mom(x) \leftrightarrow \forall z(zPx \rightarrow mom(z))$$

[6] Unter der (mereologischen) *Summe* der Elemente einer Klasse α verstehen wir denjenigen Gegenstand x, wovon jedes Element von α ein Teil ist und dessen Teile mit mindestens einem Element von α einen gemeinsamen Teil haben. Formal (vgl. Ridder 2002, 73, T2D1): $\forall x,\alpha\,(x = \Sigma\alpha \leftrightarrow_{\text{def.}} \forall z(z \in \alpha \rightarrow zPx) \wedge \forall z(zPx \rightarrow \exists u,v(uPv \wedge uPz \wedge v \in \alpha)))$.

Bew.: ‚$\rightarrow$': D1, T2, T3 und A1; ‚$\leftarrow$': Reflexivität von *P*.

T10 Die mereologische Summe einer Klasse ist genau dann *momentan*, wenn die Klasse nicht leer ist und alle Elemente der Klasse einander zeitlich vorausgehen.

$$\forall\alpha(mom(\Sigma\alpha) \leftrightarrow \alpha \neq \varnothing \wedge \forall x,y(x,y \in \alpha \rightarrow xTy))$$

Bew.: D2 und T7.

T11 Ein Gegenstand *x* ist genau dann früher als ein Gegenstand *y*, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:
(1) Alle momentanen Teile von *x* sind früher als *y*.
(2) Alle momentanen Teile von *y* sind später als *x*.

$$\begin{aligned}\forall x,y(xTy &\leftrightarrow (1)\ \forall z(mom(z) \wedge zPx \rightarrow zTy)\\ &\leftrightarrow (2)\ \forall z(mom(z) \wedge zPy \rightarrow xTz))\end{aligned}$$

Bew.: ‚$\rightarrow$': T2, T3; ‚$\leftarrow$': Ax4, T3.

So wie jeder Gegenstand einen Raum-Zeit-Punkt[7] als Teil hat, lässt sich nun zeigen, dass alles mindestens einen momentanen Gegenstand als Teil hat. Und so wie jeder Gegenstand die Summe seiner Raum-Zeit-Punkte ist, ergibt sich dann auch ein analoges Theorem für die momentanen Gegenstände.

T12 Jeder Gegenstand *x* hat einen momentanen Gegenstand als Teil.

$$\forall x\exists y(mom(y) \wedge yPx)$$

---

[7] Tarski (1937, 163, Def. 1· 4) definiert die Klasse der Raum-Zeit-Punkte als die Klasse aller Gegenstände *x*, deren Teile mit *x* identisch sind, d.h. formal $Pkt =_{\text{def.}} \{x: \forall y(yPx \rightarrow y = x\}$. Für die Klasse der Raum-Zeit-Punkte fordert Tarski (ebd., Ax 1· 41), dass ihr Durchschnitt mit den Teilen eines beliebigen Gegenstandes nicht leer ist. Dies bedeutet, dass jeder Gegenstand einen Raum-Zeit-Punkt als Teil hat und entspricht dem Atomismusprinzip (vgl. hierzu Ridder 2002, 113-117), wonach jeder Gegenstand einen atomaren Teil besitzt. (Zu Tarskis Theorie der Raum-Zeit-Punkte vgl. Ridder 2002, 117-119)

Bew.: Sei x ein beliebiger Gegenstand. Gilt $mom(x)$, dann folgt mit xPx unmittelbar die Behauptung. Gilt $\sim mom(x)$, dann folgt mit Def.1 $\sim xTx$ und mit Ax4 existiert deshalb ein Gegenstand y mit $mom(y)$ und yPx.

T13 Jeder Gegenstand ist die Summe seiner momentanen Teile.

$$\forall x(x = \Sigma\{z\colon mom(z) \wedge zPx\})$$

Bew.: Sei $\alpha = \{z\colon mom(z) \wedge zPx\}$, dann gilt zPx für alle z Element α, d.h. $\forall z(z \in \alpha \rightarrow zPx)$. Sei nun zPx, dann existiert mit T12 ein s^* mit $mom(s^*)$ und s^*Pz und mit der Transitivität von P und zPx gilt deshalb auch s^*Px, also s^* Element α. Wegen s^*Ps^* existieren deshalb r und s mit rPs und rPz und $s \in \alpha$, also $\forall z(zPx \rightarrow \exists r,s(rPs \wedge rPz \wedge s \in \alpha))$, insgesamt mit Def. Σ also $x = \Sigma\alpha$.

Nun lässt sich – analog zum Identitätsprinzip für Raum-Zeit-Punkte[8] – ein Identitätsprinzip für momentane Gegenstände nachweisen.

T14 Zwei Gegenstände sind genau dann identisch, wenn sie dieselben momentanen Teile haben.

$$\forall x(x = y \leftrightarrow \forall z(mom(z) \rightarrow (zPx \leftrightarrow zPy)))$$

Bew.: Der Beweis verläuft analog zum Nachweis des Identitätsprinzips für Raum-Zeit-Punkte.[9]

T15 Ein Gegenstand x ist genau dann früher als ein Gegenstand y, wenn ein momentaner Gegenstand später als x und früher als y existiert.

$$\forall x,y(xTy \leftrightarrow \exists z(mom(z) \wedge xTz \wedge zTy))$$

Bew.: Gelte xTz und zTy für ein gewisses z, dann folgt mit Ax1 xTy. Gelte nun xTy, dann existiert mit T1 ein z^* mit xTz^* und z^*Ty. Gilt $mom(z^*)$, so ist alles gezeigt. Gilt $\sim mom(z^*)$, dann existiert mit T12

[8] Vgl. Ridder 2002, 119, T2T11.
[9] Vgl. ebd.

ein r^* mit r^*Pz^* und $mom(r^*)$. Mit T1 und T2 folgt deshalb xTr^* und r^*Ty, d.h. insgesamt $\exists z(mom(z) \wedge xTz \wedge zTy)$.

T16 Alle Raum-Zeit-Punkte[10] sind momentan.

$\forall x(Pkt(x) \rightarrow mom(x))$ bzw. $Pkt \subseteq Mom$

Bew.: Sei $x \in Pkt$, d.h. $Pkt(x)$, d.h. alle Teile von x sind mit x identisch. Nach T12 existiert deshalb ein momentaner Teil von x, der mit x identisch ist, d.h. $mom(x)$, d.h. $x \in Mom$.

§ 3.2 Zeitliche Koinzidenz

Im Weiteren definieren wir eine zweistellige Relation *‚C'* in der Bedeutung *zeitlicher Koinzidenz* und geben einige bedeutsame Eigenschaften dieser Relation an. Mit Hilfe der Koinzidenzrelation betrachten wir sodann gewisse Relationen zwischen momentanen Gegenständen.

D2 Koinzidenz

Zwei (momentane) Gegenstände x und y *koinzidieren* genau dann *zeitlich*, wenn x früher ist als y und y früher ist als x.

$\forall x,y(xCy \leftrightarrow_{\text{def.}} xTy \wedge yTx)$

Offensichtlich sind diejenigen Gegenstände, die zeitlich miteinander koinzidieren, momentan.

T17 Koinzidiert ein Gegenstand x mit einem Gegenstand y, dann sind x und y momentan.

$\forall x,y(xCy \rightarrow mom(x) \wedge mom(y))$

Bew.: D2, Ax1 und D1.

[10] Zum Begriff der Raum-Zeit-Punkte siehe Fußnote 7.

Die Relation der Koinzidenz von Gegenständen ist eine Äquivalenzrelation, d.h. sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

T18 Die Relation C ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, d.h. (1) jeder momentane Gegenstand koinzidiert mit sich selbst, (2) koinzidiert ein momentaner Gegenstand x mit einem momentanen Gegenstand y, dann koinzidiert y auch mit x und (3) koinzidieren die momentanen Gegenstände x und y und y und z, dann koinzidieren auch x und z.

(1) $\forall x(xCx)$
(2) $\forall x,y(xCy \rightarrow yCx)$
(3) $\forall x,y,z(xCy \wedge yCz \rightarrow xCz)$

Bew.: D2 und Ax1.

T19 Dass ein Gegenstand x momentan ist, ist zu folgenden Bedingungen äquivalent:
(1) Der Gegenstand x koinzidiert mit einem gewissen Gegenstand y.
(2) Ein gewisser Gegenstand y koinzidiert mit dem Gegenstand x.

$$\begin{aligned}\forall x(mom(x) &\leftrightarrow (1)\ \exists y(xCy)\\ &\leftrightarrow (2)\ \exists y(yCx))\end{aligned}$$

Bew.: D1 und D2.

T20 Ein Gegenstand x ist genau dann momentan, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
(1) Alle Teile von x koinzidieren miteinander.
(2) Jeder Teil von x koinzidiert mit x.

$$\begin{aligned}\forall x(mom(x) &\leftrightarrow (1)\ \forall u,v(uPx \wedge vPx \rightarrow uCv)\\ &\leftrightarrow (2)\ \forall y(yPx \rightarrow yCx))\end{aligned}$$

Bew.: D1, D2, T4 und Reflexivität von P.

T21 Die mereologische Summe einer Klasse α ist genau dann momentan, wenn α nicht leer ist und ein Gegenstand x existiert derart, dass die Elemente von α mit x koinzidieren.

$\forall \alpha(mom(\Sigma\alpha) \leftrightarrow \alpha \neq \varnothing \wedge \exists x(\forall z(z \in \alpha \rightarrow zCx)))$

Bew.: T10, D2 und T17.

§ 3.3 Die Zeitrelation ‚Z'

Neben *T* wird nun eine weitere zweistellige Zeitrelation *Z* für momentane Gegenstände eingeführt, die für *‚xZy'* in der Weise gelesen werden kann, dass ein momentaner Gegenstand *x* *ganz früher* ist als ein momentaner Gegenstand *y*.[11] Die Definition für *Z* lautet:

D3 Die Relation *Z*

Ein Gegenstand *x* ist genau dann *ganz früher* als ein Gegenstand *y*, wenn *x* und *y* momentan sind und *y* nicht früher als *x* ist.

$\forall x,y(xZy \leftrightarrow_{\text{def.}} mom(x) \wedge mom(y) \wedge \sim(yTx))$

Gilt *xZy*, so folgt aus D3 mit Ax3 und D2, dass *xTy* und ~*xCy*, d.h. *x* ist früher als *y*, koinzidiert aber nicht mit *y*, d.h. in unserer Lesart, dass *x* ganz früher als *y* ist. Modifiziert man die Relation *Z* so, dass man die Einschränkung auf momentane Gegenstände fallen lässt, so erhält man die von Woodger in seinem biologischen Axiomensystem als primitiv zugrunde gelegte Relation *T* in der Bedeutung, dass ein Gegenstand *x* ganz früher als ein Gegenstand *y* ist.[12]

Die momentanen Gegenstände sind bezüglich der Relation Z streng geordnet, d.h. es gilt das folgende Theorem:

T22 Die Relation *Z* ist irreflexiv, asymmetrisch und transitiv, d.h. (1) alle Gegenstände, die in der Relation *Z* zueinander stehen, sind verschieden, (2) ist ein Gegenstand *x* ganz früher als ein Gegenstand *y*, dann ist *y* nicht ganz früher als *x*, und (3) gilt für Gegenstände *x*, *y* und *z*, dass *x* ganz früher ist als *y* und *y* ganz früher ist als *z*, dann ist auch *x* ganz früher als *z*.

---

[11] Siehe in diesem Aufsatz auch Fußnote 4.

[12] Siehe §1 in diesem Aufsatz. – Die Definition für *‚Z'* (vgl. Tarski 1937, 166) könnte dann lauten: $\forall x,y(xZy \leftrightarrow_{\text{def.}} \sim\exists z(\exists r(rPx \wedge zTr) \wedge zPy))$.

(1) $\forall x,y(xZy \rightarrow x \neq y)$
(2) $\forall x,y(xZy \rightarrow \sim(yZx))$
(3) $\forall x,y,z(xZy \wedge yZz \rightarrow xZz)$

Bew.: D1, D3, Ax3 und Ax1.

Um die Dichte für die Relation Z zu erhalten, fordern wir die Dichte der momentanen, nicht koinzidierenden Gegenstände. Diese erhalten wir, wie die Definition von Z nahe legt, über die Negation der Relation T.

Ax5 Dichte der momentanen, nicht koinzidierenden Gegenstände

Sind x und y momentane Gegenstände, die nicht koinzidieren, so existiert ein momentaner Gegenstand z zwischen x und y.

$\forall x,y(mom(x) \wedge mom(y) \wedge \sim yTx \rightarrow \exists z(mom(z) \wedge \sim zTx \wedge \sim yTz))$

T23 Dichte von Z

Ist der Gegenstand x ganz früher als der Gegenstand y, dann existiert ein Gegenstand z zwischen x und y in dem Sinne, dass x ganz früher als z und z ganz früher als y ist.

$\forall x,y(xZy \rightarrow \exists z(xZz \wedge zZy))$

Bew.: Gelte xZy, dann folgt mit D3 $mom(x)$ und $mom(y)$ und $\sim(yTx)$, mit Ax5 existiert dann ein z mit $mom(z)$ und $\sim zTx$ und $\sim yTz$, d.h. nach Voraussetzung und nach D3 mit xZz und zZy.

T24 Seien x und y zwei momentane Gegenstände. Dann ist x genau dann früher als y, wenn x mit y koinzidiert oder x ganz früher als y ist.

$\forall x,y(x,y \in Mom \rightarrow (xTy \leftrightarrow xCy \vee xZy))$

Bew.: D2, D3 und Ax3.

T25 Seien x und y zwei momentane Gegenstände. Dann koinzidiert x mit y oder x ist ganz früher als y oder y ist ganz früher als x.

$\forall x,y(x,y \in Mom \rightarrow (xCy \vee xZy \vee yZx))$

Bew.: Ax3 und T24.

T26 Koinzidieren zwei Gegenstände x und y, dann ist weder x ganz früher als y noch ist y ganz früher als x.

$\forall x,y(xCy \rightarrow ({\sim}xZy \wedge {\sim}yZx))$

Bew.: D2 und D3.

§ 3.4 Momentanwelten und die Zeitrelation ‚Z'*

Mit Hilfe der Klasse momentaner Gegenstände, der Koinzidenz- und der Teilrelation definieren wir die *Klasse momentaner Welt-Abschnitte* (‚the class of momentary world-sections')[13], die wir kurz auch als *Momentanwelten* bezeichnen. Momentanwelten sind momentane Gegenstände. Sie stellen gewissermaßen eine Momentaufnahme aller Gegenstände in der Welt dar. Eine Momentanwelt ist deshalb „maximal" in dem Sinne, dass sie alle momentanen Gegenstände, die mit ihr koinzidieren, als Teile enthält.

D4 Momentanwelten

Ein Gegenstand ist genau dann ein *momentaner Welt-Abschnitt* oder eine *Momentanwelt*, wenn er momentan ist und alles, was mit ihm koinzidiert, ein Teil von ihm ist.

$\forall x(mw(x) \leftrightarrow_{\text{def.}} mom(x) \wedge \forall y(yCx \rightarrow yPx))$

Für die Klasse aller Momentanwelten schreiben wir abkürzend

$Mw =_{\text{def.}} \{x: mw(x)\}$.

T27 Sind x und y Momentanwelten, dann sind x und y genau dann identisch, wenn sie miteinander koinzidieren.

[13] Vgl. Tarski, ebd., 2·6.

$\forall x,y(mw(x) \wedge mw(y) \rightarrow (x = y \leftrightarrow xCy))$

Bew.: D4, T21, T23 und Identitivität von *P*.

T28 Sind *x* und *y* Momentanwelten, dann ist *x* früher als *y* genau dann, wenn *x* mit *y* identisch oder *x* ganz früher als *y* ist.

$\forall x,y(mw(x) \wedge mw(y) \rightarrow (xTy \leftrightarrow x = y \vee xZy))$

Bew.: D4, T24, T27 und D3.

Für Momentanwelten gilt die Konnexität bezüglich *Z*.

T29 Konnexität der Momentanwelten bzgl. *Z*

Sind *x* und *y* Momentanwelten, dann ist *x* ganz früher als *y* oder *y* ist ganz früher als *x* oder *x* und *y* sind identisch.

$\forall x,y(mw(x) \wedge mw(y) \rightarrow xZy \vee yZx \vee x = y)$

Bew.: D4, T25 und T27.

Die in D4 verankerte Fassung von Momentanwelten als momentane Gegenstände von maximaler Größe führt zu folgendem Theorem:

T30 Ist *x* ein momentaner Gegenstand, dann ist die Summe der Gegenstände *y*, die mit *x* koinzidieren, sowohl identisch mit der Momentanwelt *y*, die mit *x* koinzidiert, als auch mit der Momentanwelt *y*, wovon *x* ein Teil ist.

$\forall x(mom(x) \rightarrow \Sigma\{y\colon yCx\} = (\iota y)(mw(y) \wedge yCx) = (\iota y)(mw(y) \wedge xPy)$

Bew.: (Vgl. Tarski 1937, 167, Beweis zu Theorem 2·62) Wir zeigen zunächst, dass $\Sigma\{y\colon yCx\}$ eine Momentanwelt ist, mit *x* koinzidiert und *x* ein Teil von ihr ist: Mit T17, T18 und T21 ergibt sich $mom(\Sigma\{y\colon yCx\})$. Da nach Definition von Σ alles, was mit *x* koinzidiert, ein Teil von $\Sigma\{y\colon yCx\}$ ist, gilt mit T18 insbesondere $xP\Sigma\{y\colon yCx\}$. Mit T20 und T18 ergibt sich dann $\Sigma\{y\colon yCx\}Cx$. Wir erhalten so $\forall z(zC\Sigma\{y\colon yCx\} \rightarrow zCx \rightarrow zP\Sigma\{y\colon yCx\})$, d.h. gemäß D4 $mw(\Sigma\{y\colon yCx\})$. Mit T18, T20 und T27 ergibt sich schließlich $\forall y,z(y,z \in Mw \wedge yCx \wedge zCx) \vee (y,z \in Mw \wedge xPy \wedge xPz) \rightarrow yCz \wedge y = z)$, woraus die Eindeutigkeit der behaupteten Kennzeichnungen folgt.

Mit T30 lässt sich nun beweisen, dass die Welt die mereologische Summe aller Momentanwelten ist.

T31 Die Welt[14] ist die Summe aller Momentanwelten.

$W = \Sigma\{x\colon mw(x)\}$

Bew.: Def. W, T12, Def. Σ, Existenz von Σ für $\alpha \neq \emptyset$ und T30.

Bezeichnen wir die Restriktion von Z auf das Feld der Momentanwelten mit Z^*, so lässt sich Z^* in folgender Weise definieren:

D5 Die Relation Z^*

Eine Momentanwelt x ist genau dann ganz früher als eine Momentanwelt y, wenn x ganz früher als y ist und x und y Momentanwelten sind.

$\forall x,y(xZ^*y \leftrightarrow_{\text{def.}} xZy \wedge mw(x) \wedge mw(y))$

Mit D5 besagt T29, dass Z^* konnex ist, d.h. für Momentanwelten gilt stets xZ^*y oder $x = y$ oder yZ^*x.

T32 Konnexität von Z^*

$\forall x,y(xZ^*y \vee yZ^*x \vee x = y)$

Z^* ist eine strenge Ordnungsrelation:

[14] Die *Welt W* ist die Summe aller Gegenstände und sie lässt sich über die universelle Klasse aller mit sich selbst identischen Gegenstände definieren. (Vgl. Ridder 2002, 77, T2D7)

T33 Die Relation Z^* ist irreflexiv, asymmetrisch und transitiv.

(1) $\forall x,y(xZ^*y \rightarrow x \neq y)$
(2) $\forall x,y(xZ^*y \rightarrow \sim(yZ^*x))$
(3) $\forall x,y,z(xZ^*y \wedge yZ^*z \rightarrow xZ^*z)$

Bew.: T22.

Mit D5 und der Dichte von Z lässt sich auch die Dichte von Z^* beweisen.

T34 Dichte von Z^*

Zwischen zwei Momentanwelten existiert stets eine dritte.

$\forall x,y(xZ^*y \rightarrow \exists z(xZ^*z \wedge zZ^*y)$

Bew.: Gelte xZ^*y, dann folgt mit D5 xZy und $mw(x)$ und $mw(y)$, mit T23 existiert deshalb ein momentaner Gegenstand z mit xZz und zZy. Nach T30 lässt sich z zur Momentanwelt $z^* = \Sigma\{u: uCz\}$ erweitern und zeigen, dass auch xZ^*z^* und z^*Z^*y.

Das folgende Theorem besagt, dass Z^* die Dedekind'sche Schnitteigenschaft besitzt.

T35 Dedekind'sche Schnitteigenschaft für Z^*

Seien α und β zwei nicht-leere Klassen, sei deren Vereinigung eine Teilklasse der Klasse der Momentanwelten und seien alle Elemente aus α früher als Elemente aus β, dann existiert eine Momentanwelt z, so dass alle von z verschiedenen Elemente aus α früher als z und alle von z verschiedenen Elemente aus β später als z sind.

$(\alpha \neq \emptyset \wedge \beta \neq \emptyset \wedge \alpha \cup \beta \subseteq Mw \wedge \forall x,y(x \in \alpha \wedge y \in \beta \rightarrow xZ^*y)) \rightarrow$
$\exists z(z \in Mw \wedge \forall x(x \in \alpha \wedge x \neq z \rightarrow xZ^*z) \wedge \forall y(y \in \beta \wedge y \neq z \rightarrow zZ^*y)$

Bew.: (Vgl. Tarski 1937, 168, Beweis zu 2·67) Mit den Voraussetzungen, T28 und T7 folgt $\Sigma\alpha T\Sigma\beta$. Da das relative Produkt von T, eingeschränkt auf *Mom* im konversen Definitionsbereich, und T mit

T identisch ist,[15] existiert ein $u \in Mom$ mit $\Sigma\alpha Tu$ und $uT\Sigma\beta$. Mit T30 existiert auch ein $z \in Mw$ mit zCu. Mit D2 und Ax1 erhalten wir $\Sigma\alpha Tz$ und $zT\Sigma\beta$ und daher mit T8 $\forall x(x \in \alpha \rightarrow xTz)$ und $\forall y(y \in \beta \rightarrow zTy)$ und schließlich mit T28 die Behauptung.

Aufgrund der Theoreme T33, T32 und T34 ist (Mw, Z^*) eine strenge Ordnungsrelation, die zudem konnex und dicht ist. Mit T35 schließlich gilt für Z^* die Dedekindsche Schnitteigenschaft. Wir fordern nun mit Ax6, dass Z^* weder ein erstes noch ein letztes Element besitzt.

Ax6 Z^* ohne erstes und ohne letztes Element

Für jede Momentanwelt x existiert stets sowohl eine Momentanwelt, die früher ist als x, als auch eine Momentanwelt, die später ist als x.

$\forall x(\exists z(zZ^*x) \wedge \exists z(xZ^*z))$

Es lässt sich nun standardmäßig zeigen (vgl. Theorem 2·68 bei Tarski 1937, 168), dass die Ordnung (Mw, Z^*) ähnlich oder *isomorph* zur Ordnung (ú, $<_{ú}$) ist, wobei ‚ú' für die Klasse der reellen Zahlen und ‚$<_{ú}$' für die gewöhnliche ‚kleiner'-Relation zwischen den reellen Zahlen steht.[16] Es gilt das folgende zentrale Theorem:

---

[15] Vgl. bei Tarski 1937, Theorem 2·36, 165. – Unter dem relativen Produkt ‚T B S' zweier Relationen T und S verstehen wir die Menge $\{(x,y)\colon \exists z(xTz \wedge zSy)\}$. – Der konverse Definitionsbereich einer Relation R ist $\{y\colon \exists x(xRy)\}$.

[16] Hat man eine dichte, totale (= konnexe) Ordnung ohne erstes und letztes Element zusammen mit der Dedekindschen Schnitteigenschaft, dann bildet die Menge der Dedekindschen Schnitte eine dichte und totale Ordnung ohne erstes und letztes Element, die überdies vollständig ist. Dabei ist eine totale geordnete Menge A genau dann vollständig, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von A ein Supremum hat. Die Dedekindsche Schnitteigenschaft charakterisiert die Struktur der reellen Zahlen eindeutig, d.h. jede dichte, totale Ordnung ohne erstes und letztes Element, die die Dedekindischen Schnitteigenschaft erfüllt, ist zur Ordnung der reellen Zahlen bezüglich der „kleiner"-oder „kleiner oder gleich"-Relation isomorph. Zur Vollständigkeit der reellen Zahlen und deren Konstruktionen vergleiche z.B. Kurt Mainzer, „Reelle Zahlen", in: Heinz-Dieter Ebbinghaus, Hans Hermes u.a., *Zahlen*, Darmstadt 1985, Kapitel 2, 23-44, oder Arnold Oberschelp, *Aufbau des Zahlensystems*, 2. erweiterte Aufl. Göttingen 1972, insbes. 100-146.

T36 Die ‚ganz früher als'-Relation auf der Klasse der Momentanwelten ist von ähnlicher Ordnung (oder isomorph) wie die (zur) ‚kleiner'-Relation auf der Klasse der reellen Zahlen.

$$(\mathit{Mw}, Z^*) \cong (\text{ú}, <_{\text{ú}})$$

Bew.: Ax6, T33, T34 und T35.

‚Z'* hat damit dieselben strukturellen Eigenschaften wie ‚$<_{\text{ú}}$' und ist insbesondere kontinuierlich im Sinne dieser Ordnung. Die Relation „Eine Momentanwelt *x* ist *ganz früher* als eine Momentanwelt *y*" liefert uns also die Kontinuität der zeitlichen Ordnung von Momentanwelten, ohne diese ausdrücklich über ein Axiom zu postulieren. Wie ist das möglich?

Vergegenwärtigen wir uns dazu zusammenfassend den Aufbau unserer Theorie um *‚T'* bis hin zu *‚Z*'*. Ausgangspunkt oder Grundlage für die Systematisierung zeitlicher Verhältnisse ist eine Theorie des Gegenstandes auf der Basis des mereologischen Teilbegriffs *‚P'*. Mit den Axiomen zu *‚T'* werden die Gegenstände zeitlich in „frühere" und „spätere" eingeteilt, wobei u.a. die Dichte der zeitlichen Beziehungen (Ax2) gefordert wird. Der Übergang von *‚T'* zu *‚Z'* erfolgt mit Hilfe des Begriffs des momentanen Gegenstandes. In den betreffenden Axiomen wird die Dichte der momentanen, nicht koinzidierenden Gegenstände postuliert (Ax5) und ein Zusammenhang zwischen den Gegenständen in der Zeit und ihren momentanen Teilen hergestellt (Ax4). Die Relation *Z* beschränkt sich nun bei dem hier vorgelegten Aufbau auf momentane Gegenstände und verschärft zugleich die zeitliche Ordnung im Sinne von „ganz früher". Die weitere Einschränkung von *Z* auf Momentanwelten zusammen mit der Forderung Ax6, dass es keine früheste und keine späteste Momentanwelt gibt, führt dann schließlich zur Relation *Z**, die uns das zeitliche Kontinuum liefert.

Es ist offensichtlich, dass die Eigenschaften von *Z** in den Axiomen angelegt sein müssen. Und hier wiederum sind es vor allem die Axiome der Dichte der zeitlichen Beziehungen zwischen Gegenständen, die den Nachweis der Kontinuität der zeitlichen Ordnung zwischen Momentanwelten ermöglichen. Zu diesem Ergebnis kommt auch Tarski, wenn er ausführt:

> If the situation is examined more closely it is seen that, thanks to the theory of the concept 'P', the continuity of temporal order of momentary things (more exactly: of momentary world-sections) is

> reduced to the compactness of the temporal relations between things in general.
>
> (Tarski 1937, 169)

Das zeitliche Kontinuum von Momentanwelten wird also laut Tarski letzten Endes zurückgeführt auf die über Ax2 vermittelte Dichte der zeitlichen Beziehungen zwischen den Gegenständen im Allgemeinen.

§ 3.5 Momentanphasen

In diesem Paragraphen betrachten wir momentane (Aus-)Schnitte einzelner Gegenstände. Solche Ausschnitte nennen wir mit Kleinknecht „Momentanphasen“[17]. Ein momentaner Gegenstand *x* ist eine Momentanphase eines Gegenstandes *y* im Sinne der folgenden Definition:

D6 Momentanphasen

Ein Gegenstand *x* ist genau dann eine *Momentanphase* eines Gegenstandes *y*, wenn *x* momentan ist, *x* ein Teil von *y* ist und alle Teile von *y*, die mit *x* koinzidieren, Teile von *x* sind.

$$\forall x,y(xmPhy \leftrightarrow_{\text{def.}} mom(x) \wedge xPy \wedge \forall z(zCx \wedge zPy \rightarrow zPx))$$

Eine Momentanphase *x* eines Gegenstandes umfasst somit alle mit *x* koinzidierenden Teile dieses Gegenstandes. Im Wesentlichen mit Hilfe der Definitionen D6 und D2 erhalten wir folgende Theoreme:

T37 Sind *x* und *y* Momentanphasen von *z*, dann sind *x* und *y* miteinander identisch oder sie sind voneinander getrennt[18].

---

[17] Reinhard Kleinknecht, „Mereologische Strukturen der Welt“, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin*, *Reihe Geistes- und Sozialwissenschaften* 41 (1992), 52. – Die momentanen Ausschnitte eines Gegenstandes heißen bei Tarski 1937, 169, „slices“.

[18] Zwei Gegenstände *x* und *y* heißen voneinander *getrennt* (in Zeichen: $x \int y$) genau dann, wenn kein Gegenstand ein Teil sowohl von *x* als auch von *y* ist. (Vgl. Ridder 2002, 69, T1 D2)

$$\forall x,y,z(xmPhz \wedge ymPhz \rightarrow x = y \vee x \int y)$$

T38 Ist x eine Momentanphase von y und x ein Teil von z, dann ist x mit z identisch oder z ist keine Momentanphase von y.

$$\forall x,y,z(xmPhy \wedge xPz \rightarrow x = z \vee \sim zmPhy)$$

Momentanwelten erweisen sich als Spezialfälle von Momentanphasen, nämlich als Momentanphasen der gesamten Welt. So gilt:

T39 Ein Gegenstand x ist genau dann eine Momentanwelt, wenn x eine Momentanphase der Welt ist.

$$\forall x(mw(x) \leftrightarrow xmPhW)$$

Bew.: D3, D4, D6, Def. W, Def. Σ und Existenz von $\Sigma\alpha$ für $\alpha \neq \emptyset$.

Zu jeder Momentanphase eines Gegenstandes gibt es eine Momentanwelt, die geschnitten mit Gegenstand gerade die Momentanphase ergibt. Auf diese Weise lässt sich der allgemeinere Begriff der Momentanphase auf den spezielleren Begriff der Momentanwelt beziehen.

T40 Ein Gegenstand x ist genau dann eine Momentanphase eines Gegenstandes y, wenn es eine Momentanwelt z gibt, so dass x das mereologische Produkt[19] von y und z ist.

$$\forall x,y(xmPhy \leftrightarrow \exists z(mw(z) \wedge x = \Pi\{z,y\})$$

Bew.: D4, D6, Def. Π, wähle $z = mw(y)$ und Existenz von Π.

Mit Hilfe der letzten beiden Theoreme lassen sich für die Momentanphasen viele Resultate gewinnen, die denen für die Momentanwelten erzielten analog sind. Die Beweise der analogen Theoreme entsprechen sich dabei vollständig. Um die für die Momentanphasen entsprechenden Theoreme zu erhalten, ersetzen wir ‚Momentanwelt x' (‚$mw(x)$') durch ‚Momentanphase

[19] Unter dem mereologischen *Produkt* zweier Gegenstände x und y verstehen wir die mereologische Summe der Klasse derjenigen Gegenstände, die Teile von x und von y sind. (Vgl. Ridder 2002, 76f.)

x eines Gegenstandes z' (‚$xmPhz$') und ‚x ist momentaner Gegenstand' (‚$mom(x)$') durch ‚x ist momentaner Teil von z' (‚$mom(x) \wedge xPz$'). Wir erhalten so u.a.:

T41 Zwei Momentanphasen desselben Gegenstandes sind genau dann identisch, wenn sie miteinander koinzidieren.

$$\forall x,y(xmPhz \wedge ymPhz \rightarrow (x = y \leftrightarrow xCy))$$

T42 Ist x ein momentaner Gegenstand und ein Teil von z, dann ist die Summe der Gegenstände y, die mit x koinzidieren und Teil von z sind, sowohl identisch mit der Momentanphase y von z, die mit x koinzidiert, als auch mit der Momentanphase y von z, wovon x ein Teil ist.

$$\begin{aligned}\forall x(mom(x) \wedge xPz \rightarrow \Sigma\{y: yCx \wedge yPz\} &= (\iota y)(ymPhz \wedge yCx)\\ &= (\iota y)(ymPhz \wedge xPy))\end{aligned}$$

T43 Die Summe aller Momentanphasen eines Gegenstandes x ist mit x identisch .

$$x = \Sigma\{y: ymPhx\}$$

Im Folgenden schränken wir das Feld der Relation Z auf die Momentanphasen eines Gegenstandes ein. Wir erhalten so für jeden Gegenstand z eine Relation Z_{mPhz} zwischen Momentanphasen von z in der nachfolgenden Weise:

D7 Die Relation Z_{mPhz}

Seien x und y zwei Momentanphasen eines Gegenstandes z, dann ist x genau dann ganz früher als y, wenn x eine Momentanphase von z und y eine Momentanphase von z und x ganz früher als y ist.

$$\forall x,y(xZ_{mPhz}y \leftrightarrow_{\text{def.}} xmPhz \wedge ymPhz \wedge xZy)$$

Z_{mPhz} ist eine Kette, d.h. streng geordnet und linear:

T44 Z_{mPhz} ist asymmetrisch, transitiv und konnex, d.h. (1) ist eine Momentanphase x eines Gegenstandes ganz früher als eine Momentanphase y desselben Gegenstandes, dann ist y nicht ganz früher als x, (2) sind u, v und w Momentanphasen desselben Gegenstandes und ist u ganz früher als v und v ganz früher als w, dann ist auch u ganz früher als v, und (3) von zwei Momentanphasen eines Gegenstandes ist einer ganz früher als der andere oder beide sind identisch.

(1) $\forall x,y(xZ_{mPhz}y \rightarrow \sim yZ_{mPhz}x)$
(2) $\forall u,v,w(uZ_{mPhz}v \wedge vZ_{mPhz}w \rightarrow uZ_{mPhz}w)$
(3) $\forall x,y(xZ_{mPhz}y \vee yZ_{mPhz}x \vee x = y)$

Nun lässt sich zeigen:

T45 Sind x und y zwei verschiedene Momentanphasen von z, dann ist x ganz früher als y oder y ganz früher als z.

$$\forall x,y,z(xmPhz \wedge ymPhz \wedge x \neq y \rightarrow xZy \vee yZx)$$

Viele der charakteristischen Theoreme, die für die Kette Z^* gelten wie T34, T35 und T36, können nicht auf Z_{mPhz} ausgedehnt werden. Das liegt daran, dass die Eigenschaften von Z_{mPhz} von dem speziellen Gegenstand z abhängen und deshalb je nach dessen Beschaffenheit voneinander differieren können.

§ 3.6 Die Kardinalität von Momentanwelten

Das bisher betrachtete mereo-chronologische Axiomensystem bildet kein kategorisches System, d.h. ein Axiomensystem, in dem je zwei Modelle isomorph sind.[20] Um diesen „Mangel“ zu beheben, reicht es aus, ein einziges Axiom hinzuzufügen, das die Kardinalität der Momentanwelten festlegt. Dazu ist folgende Frage zu beantworten: Wieviele Punkte koinzidieren hinsichtlich der Zeit mit einem gegebenen Punkt? – Akzeptiert man die gewöhnlichen Annahmen der Geometrie und Physik,

[20] Vgl. Tarski 1937, 170.

dann ist jede solche Momentanwelt gleichmächtig zur Klasse der reellen Zahlen. Das neue Axiom lässt sich dann folgendermaßen formulieren:[21]

Ax7 Sei x ein gegebener Punkt, dann ist die Mächtigkeit der Klasse der Punkte, die früher und später als x sind, gleich der Mächtigkeit der reellen Zahlen.

$$\forall x(Pkt(x) \rightarrow card\{y{:}\ Pkt(y) \wedge yTx \wedge xTy\} = 2^{\aleph_0}$$

Mit diesem Axiom lassen sich mit Hilfe der Kardinalzahlarithmetik weitere Aussagen über die Anzahl aller Punkte, aller momentanen Gegenstände und aller Gegenstände im Allgemeinen gewinnen.

§ 4 Organisierte Einheiten

Das undefinierte Zeichen *‚org'* bezeichne die Klasse aller organisierten Einheiten ihre zeitliche Dauer hindurch. Elemente dieser Klasse sind z.B. Körperzellen, Pflanzen oder ein menschlicher Organismus jeweils in ihrer gesamten Lebensdauer. Organisierte Einheiten sollen eine gewisse Lebensdauer haben, d.h. keine momentanen Entitäten sein. Darüber hinaus erscheint es sinnvoll, für organisierte Einheiten einen Anfangs- und einen Endpunkt zu fordern, sowie davon auszugehen, dass sich zwischen zwei Momentanphasen einer organisierten Einheit jeweils eine dritte befindet.

Ax8 Organisierte Einheiten sind keine momentanen Gegenstände.

$$\sim\exists x(org(x) \wedge mom(x))$$

D8 Eine Momentanphase x einer organisierten Einheit z ist genau dann ganz früher als eine Momentanphase y von z, wenn z eine organisierte Einheit ist, x und y Momentanphasen von z sind und x ganz früher als y ist.

$$\forall x,y(xZ_{mPhorg(z)}y \leftrightarrow_{\text{def.}} org(z) \wedge xmPhz \wedge ymPhz \wedge xZy)$$

[21] Vgl. ebd., 171, Axiom 2·81.

T46 Die Relation ‚$Z_{mPhorg(z)}$' ist eine strenge lineare Ordnung, d.h. asymmetrisch, transitiv und konnex.

(1) $\forall x,y(xZ_{mPhorg(z)}y \rightarrow \sim(yZ_{mPhorg(z)}x))$
(2) $\forall u,v,w(uZ_{mPhorg(z)}v \wedge vZ_{mPhorg(z)}w \rightarrow uZ_{mPhorg(z)}w)$
(3) $\forall x,y(xZ_{mPhorg(z)}y \vee yZ_{mPhorg(z)}x \vee x = y)$

Bew.: T44.

Ax9 Die Relation ‚$Z_{mPhorg(z)}$' ist dicht, d.h. zwischen zwei Momentanphasen einer organisierten Einheit z gibt es stets eine dritte.

$$\forall x,y(xZ_{mPhorg(z)}y \rightarrow \exists r(xZ_{mPhorg(z)}r \wedge rZ_{mPhorg(z)}y)$$

Ax10 Organisierte Entitäten haben eine momentane Anfangs- und Endphase.

$$\forall x(org(x) \rightarrow \exists z(zmPhx \wedge \forall r(rmPhx \rightarrow zTr) \wedge \exists z(zmPhx \wedge \forall r(rmPhx \rightarrow rTz)$$

Aus den Axiomen lassen sich leicht folgende Theoreme deduzieren:

T47 Sei x eine organisierte Einheit, dann existiert ein Teil von x, der früher ist als x, und ein weiterer Teil von x, der später ist als x.

$$\forall x(org(x) \rightarrow \exists z(zPx \ \wedge zTx) \wedge \exists z(zPx \ \wedge xTz)$$

T48 Sei x eine organisierte Einheit, y momentan und y ein Teil von x, dann existiert genau eine Momentanphase von x, wovon y ein Teil ist.

$$\forall x,y(org(x) \wedge mom(y) \wedge yPx \rightarrow \exists!z(zmPhx \wedge yPz)$$

T49 Ist y Teil einer organisierten Einheit x, dann existiert eine Momentanphase z, die sich mit y überschneidet[22].

[22] Zwei Gegenstände x und y überschneiden sich genau dann, wenn sie einen gemeinsamen Teil haben. (Vgl. Ridder 2002, 82, L6 D2)

$\forall x,y(org(x) \wedge yPx \rightarrow \exists z(zmPhx \wedge y \circ z)$

T50 Ist *x* eine organisierte Einheit, dann ist *x* die Summe seiner Momentanphasen.

$\forall x(org(x) \rightarrow x = \Sigma\{y: ymPhx\}$

Unter der Lebensdauer einer organisierten Einheit *x* lässt sich nun die Klasse aller *x* schneidenden Momentanwelten verstehen.

D9 Lebensdauer

Die *Lebensdauer einer organisierten Einheit x* ist die Klasse aller Momentanwelten, die Teile von *x* enthalten.

$\forall x(org(x) \rightarrow Ld(x) = \alpha_{org(x)} = \{u: mw(u) \wedge \exists r(rPx \wedge rPu)\}$

Mit Ax10 lässt sich zeigen:

T51 Die Lebensdauer einer organisierten Einheit ist ein abgeschlossenes Intervall in der Folge aller Momentanwelten.

$\forall x(org(x) \wedge \alpha = \{u: mw(u) \wedge \exists r(rPx \wedge rPu)\} \rightarrow \exists y,z(mw(y) \wedge mw(z) \wedge yZz \wedge \alpha = \{y\} \cup \{z\} \cup \{r: mw(r) \wedge yZr \wedge rZz\}))$

§ 5 Weitere zeitliche Relationen

Die mereologisch fundierten zeitlichen Beziehungen zwischen Gegenständen wurden in den vorhergehenden Paragraphen auf der Grundlage der undefinierten Zeitrelation *‚T'* entwickelt. Stattdessen ließe sich eine analoge zeitliche Systematisierung auch auf der Grundlage einer Relation „ganz früher“ zwischen beliebigen Gegenständen durchführen.[23] Wir definieren im Folgenden diese Relation auf Tarskis Vorschlag hin[24] und

[23] Vgl. zu einer solchen Vorgehensweise z.B. Woodger 1937, Kap. III, Abschnitt 1, 53-68, oder Kleinknecht 1992, 50-53, oder Bowman L. Clarke, „Individuals and Points“, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 26 (1985), 69 -74.
[24] Siehe in diesem Aufsatz Fußnote 12.

geben dann mit Hilfe dieser Relation einige weitere denkbare zeitliche Relationen zwischen Gegenständen an. Die Relation ‚$x < y$' bedeute in informeller Lesart, dass der Gegenstand *x* ganz früher als der Gegenstand *y* ist.

D10 Die Relation ‚ganz früher' (‚<')

Ein Gegenstand *x* ist genau dann *ganz früher* als ein Gegenstand *y*, wenn es keinen Teil von *y* gibt, der früher als ein Teil von *x* ist.

$$\forall x,y(x < y \leftrightarrow_{\text{def.}} \sim\exists z(\exists r(rPx \wedge zTr) \wedge zPy))$$

Zwei Gegenstände heißen nun *kopräsent*, wenn sie einen gemeinsamen zeitlichen Teil besitzen.

D11 Kopräsenz (‚□')

Zwei Gegenstände *x* und *y* sind genau dann *kopräsent*, wenn *x* nicht ganz früher als *y* und *y* nicht ganz früher als *x* ist.

$$\forall x,y(x \Box y \leftrightarrow_{\text{def.}} \sim x < y \wedge \sim y < x)$$

Ist ein Gegenstand *x zeitlicher Teil* eines anderen Gegenstandes *y*, so sagen wir auch, dass *x während y* ist.

D12 Zeitlicher Teil/während (‚$\leq_w$')

Ein Gegenstand *x* ist genau dann *zeitlicher Teil* oder *während* eines Gegenstandes *y*, wenn alles, was mit *x* kopräsent ist, auch mit *y* kopräsent ist.

$$\forall x,y(x \leq_w y \leftrightarrow_{\text{def.}} \forall z(z \Box x \rightarrow z \Box y))$$

Gleichzeitigkeit zweier Gegenstände *x* und *y* bedeutet nun, dass sowohl *x* während *y* als auch *y* während *x* ist.

D13 Gleichzeitigkeit (‚$=_z$’)

Ein Gegenstand x ist genau dann *gleichzeitig* mit einem Gegenstand y, wenn x zeitlicher Teil von y und y zeitlicher Teil von x ist.

$$\forall x,y(x =_z y \leftrightarrow_{\text{def.}} x \leq_w y \wedge y \leq_w x)$$

Ein *echter zeitlicher Teil* eines Gegenstandes ist dann ein zeitlicher Teil, der nicht gleichzeitig mit diesem Gegenstand ist.

D14 Echter zeitlicher Teil (‚$<_w$’)

Ein Gegenstand x ist genau dann ein *echter zeitlicher Teil* eines Gegenstandes y, wenn x während y, aber y nicht während x ist.

$$\forall x,y(x <_w y \leftrightarrow_{\text{def.}} x \leq_w y \wedge \sim(y \leq_w x))$$

Momentane Gegenstände können nicht kopräsent sein mit zwei Gegenständen, von denen einer ganz früher ist als der andere.

D15 Momentaner Gegenstand

Ein Gegenstand x ist genau dann *momentan*, wenn es keine Gegenstände y und z gibt derart, dass x mit y und z kopräsent ist und y ganz früher als z ist.

$$\forall x,y(mom(x) \leftrightarrow_{\text{def.}} \sim\exists y\exists z(x \square y \wedge x \square z \wedge y < z))$$

Koinzidierende Gegenstände sind momentan und kopräsent.

D16 Koinzidenz

Ein Gegenstand x *koinzidiert* genau dann mit dem Gegenstand y, wenn x und y momentan und kopräsent sind.

$$\forall x,y(xCy \leftrightarrow_{\text{def.}} mom(x) \wedge mom(y) \wedge x \square y)$$

Abstract

On the basis of the primitive dyadic time relation "earlier than" we develop subsequently temporal relations and orders of things in mereological terms. The basic mereological relation is the relation of part to whole, which permits the whole as part of itself. Starting point of the mereo-chronological systematization is Alfred Tarski's development of the characteristics of the relations of part and time and their correlations in the appendix E of Henry Woodger's application of mathematical and logical methods in biology in "The Axiomatic Method in Biology" (1937). Tarski's reasoning is modified and expanded in different ways. Modifications are made with respect to the following three items: the choice of the postulated axioms and cited theorems, the transscription of the axioms and theorems formalized by Tarski in *Principia Mathematica*-notation in symbolism of modern First-Order Predicate Logic and the detailed proofs of the theorems. The intended meaning of the axioms and theorems is given in common everyday language and – if possible – illustrating diagrams are added.

Things in time and momentary things are introduced (§ 2) and their relations to things in general are contemplated (§ 3.1). By means of the relation of temporal coincidence certain relations between momentary things are dealt with (§ 3.2). For momentary things another time relation "wholly earlier" is defined (§ 3.3), which leads together with the definition of momentary worlds to a corresponding relation between them (§ 3.4). This relation eventually gives us a temporal order of momentary worlds, which is isomorphic to the continuum of real numbers (§ 3.4). Momentary phases as "slices" of single things (§ 3.5), the fundamental concept of an organized (biological) unity and the relation "wholly earlier" between momentary phases of an organized unity have the result that the duration of life of an organized unity can be modelled as a closed interval in the sequence of momentary worlds (§ 4). Finally by means of a dyadic time relation "wholly earlier" between things introduced by Tarski in the appendix E the time relations of copresence, of temporal part, of simultaneousness and of genuine temporal part are defined (§ 5).