UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

DOUGLAS ALEXANDRE RODRIGUES

INVESTIGAÇÕES SOBRE OS SISTEMAS AXIOMÁTICOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Rio Claro - SP
2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

DOUGLAS ALEXANDRE RODRIGUES

INVESTIGAÇÕES SOBRE SISTEMAS AXIOMÁTICOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Irineu Bicudo.

Rio Claro - SP
2014

516.2 Rodrigues, Douglas Alexandre
R696i Investigações sobre os sistemas axiomáticos na geometria euclidiana / Douglas Alexandre Rodrigues. - Rio Claro, 2014
60 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Irineu Bicudo

1. Geometria euclidiana. 2. Lógica. 3. Matemática - Fundamentos da. 4. Educação matemática. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

FOLHA DE APROVAÇÃO

DOUGLAS ALEXANDRE RODRIGUES

INVESTIGAÇÕES SOBRE SISTEMAS AXIOMÁTICOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Prof. Dr.Irineu Bicudo (orientador)
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Rio Claro

____
Prof. Dr. Henrique Lazari
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Rio Claro

____
Prof. Dr. Carlos Roberto de Moraes
Centro Universitário Hermínio Ometto de Araras – Uniararas - Araras

Rio Claro, SP______ de ____________________ de __________.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Irineu Bicudo pela orientação e considerações durante esta trajetória acadêmica. Sou-lhe grato pela paciência dispensada e pelas críticas construtivas durante esse período.

Aos familiares.

Aos professores membros da banca de qualificação e de defesa.

Ao Instituto Federal do Paraná – Campus Jacarezinho/PR pela liberação parcial para execução deste trabalho.

Aos colegas professores do Instituto Federal do Paraná – Campus Jacarezinho/PR pela paciência que tiveram comigo nos momentos de dificuldade.

Aos colegas e professores do programa de pós-graduação, principalmente aqueles que incentivaram a trilhar este longo caminho.

Às secretárias e funcionários do Departamento de Matemática.

“ Não é que o mundo se revele volúvel*, mobile quale la donna,* apenas nós mudamos as regras de nosso jogo e, com elas, nossa forma de vida, isto é*,* nós mudamos*.”*

(Bento Prado JR., 2004, p. 37)

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar o desenvolvimento histórico da obra clássica de geometria, *Os Elementos*, de Euclides e os fundamentos da geometria proposto por David Hilbert em seu livro *Grundlangen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria), estudando a estrutura axiomática da geometria abordada por cada autor. O rigor dedutivo utilizado por Euclides, apoiado na lógica clássica de Aristóteles, recebeu diversas críticas de matemáticos modernos no que tange a lacunas no seu sistema dedutivo. As diversas incertezas em relação ao sistema axiomático ameaçavam seu desenvolvimento lógico e especificamente, tratando-se da geometria, surgiram muitas discussões sobre a aceitação do quinto postulado de Euclides. Somente no final do século XIX os sistemas axiomáticos alcançavam níveis profundos nos fundamentos da geometria e, na tentativa de completar a axiomática da geometria, Hilbert publica os *Grundlangen der Geometrie*, abordagem axiomática mais amplamente adotada na geometria euclidiana. Neste contexto, discutimos as diferentes concepções dos sistemas axiomáticos clássicos e modernos, estudando seus significados lógicos e suas relações com os objetos da geometria. Como parte das reflexões finais, o presente trabalho destaca algumas considerações sobre o conceito de movimento em geometria e uma possível abordagem axiomática da mesma.

Palavras-chave: Lógica. Geometria. Fundamentos da Matemática. Sistemas Axiomáticos.

ABSTRACT

The objective of this research is to analyze the historical development of the classical work of geometry named The Elements and written by Euclid and the foundations of geometry Grundlangen der Geometrie (Foundations of Geometry) written by David Hilbert by studying the axiomatic structure of geometry dealt with by each author. The deductive rigor used by Euclid, which is based on the classical logic of Aristotle, has received several criticisms from modern mathematicians with regard to the gaps in its mathematical deductive system. The various uncertainties regarding the axiomatic system threatened its logical development and in the specific case of geometry, many discussions arose on the acceptance of the Euclid's fifth postulate. Only in the late nineteenth century, axiomatic systems reached deeper levels in the foundations of geometry and, in an attempt to complete the axiomatic geometry, Hilbert publishes “Grundlangen der Geometrie”, which is the axiomatic approach more widely adopted in the Euclidean geometry. In this context, we discuss the different concepts of classical and modern axiomatic systems , studying their logical meanings and its relations with the objects of geometry . As part of the final thoughts , this paper highlights some considerations on the concept of motion in geometry and a possible axiomatic approach to it.

Keywords: Logic. Geometry. Foundations of Mathematics. Axiomatic System.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8
2 A GEOMETRIA DE EUCLIDES E O PROCEDIMENTO DEDUTIVO 11
2.1 Origem do Raciocínio Empírico 11
2.2 Aristóteles e a Ciência Demonstrativa 14
2.3 Características dos Sistemas Axiomáticos 19
2.4 Estrutura Axiomática dos Elementos de Euclides e as Divergências 21
3 SISTEMAS AXIOMÁTICOS MODERNOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA 27
3.1 Surgimento das geometrias não euclidianas 27
3.2 Concepção moderna de axiomatização da geometria 30
3.3 Axiomatização de Hilbert 33
3.4 Axiomas de incidência 35
3.5 Axiomas de ordem 35
3.6 Axiomas das Paralelas 37
3.7 Axiomas de congruência 38
3.8 Axiomas da continuidade 39
3.9 Propriedades da estrutura axiomática moderna 41
3.10 Algumas considerações sobre os axiomas de Hilbert 45
3.11 Comentários sobre a compatibilidade dos axiomas 47
3.12 O conceito de movimento na geometria euclidiana 49
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 55
REFERÊNCIAS 58

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos sistemas axiomáticos na Geometria Euclidiana surgiu de uma necessidade de compreender as relações existentes entre os objetos geométricos e suas relações lógicas durante minha trajetória acadêmica e profissional e, posteriormente, devido à falta de referências específicas sobre o tema.

As diferentes interpretações dadas aos fundamentos da geometria no âmbito de seus sistemas axiomáticos geravam muitas inquietações sobre aquilo que se entendia por Geometria Euclidiana.

As primeiras dificuldades começaram no curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Geometria Euclidiana, especificamente durante as demonstrações geométricas. Muitas deduções pareciam ser apoiadas na visualização de figuras, gerando dúvidas no decorrer da demonstração. A diferença entre as apreensões perceptivas e discursivas é, para Duval (1998), um dos problemas centrais na compreensão dos conhecimentos geométricos por meio das figuras, pois nem sempre é possível visualizar todas as informações que um enunciado estabelece em sua representação figural. A figura geométrica pode-se destacar como um obstáculo, pois ao mesmo tempo em que contribui na exploração de conceitos na obtenção de uma demonstração, ela nem sempre facilita "enxergar" as propriedades atribuídas à hipótese de um enunciado. A falta de compreensão dos significados de uma demonstração na Geometria Euclidiana pode constituir um obstáculo na percepção da sequência lógica envolvida no processo de demonstrar.

Assim, entendo que uma aula de Geometria Euclidiana que leve em conta a investigação do seu processo dedutivo não se constitui uma tarefa simples de ser realizada, ou seja, não se espera que o professor mude sua prática, mas que seja dado a ele momento de formação que possibilite ao mesmo repensar sua prática de ensino atrelada, neste caso, a exposição dos diferentes sistemas axiomáticos da Geometria.

Mesmo durante a Graduação, não conhecendo a obra *Os Elementos* de Euclides, acreditava que toda a estrutura da Geometria Euclidiana era baseada em "definições", "postulados" e "teoremas".

Todo esse emaranhado de conceitos, apenas confirmava uma real necessidade de realizar um estudo mais aprofundado sobre o tema, pois ao lecionar Geometria Plana para os alunos, as demonstrações geométricas pareciam estar apoiadas em figuras e, além disso, a utilização do conceito de medida impossibilitava explorar de uma forma ampla a axiomática da geometria.

Ao iniciar o curso de Especialização na UNESP de Rio Claro, elaborei a Monografia com o título: “Um estudo dos movimentos no plano através de axiomas de reflexão”, sob a orientação da Profa. Dra. Nativi Viana Pereira Bertolo. Nesse estudo, pesquisamos a composição de reflexões em retas sem utilizar o conceito de medida de segmentos e ângulos. O trabalho foi dividido em dois grupos de axiomas: no primeiro, descreve as relações básicas entre os objetos geométricos tais como ponto, reta e plano. No segundo, trata dos axiomas de reflexão.

Ao realizar uma breve pesquisa sobre o primeiro grupo de axiomas, parecia-me algo novo, mesmo referindo-se à Geometria Euclidiana. Conceitos de “estar entre”, por exemplo, não condiziam com a “axiomática” que havia aprendido na disciplina Geometria Euclidiana.

No entanto, algumas inquietações oriundas da Graduação com relação aos conceitos da Geometria Euclidiana e, consequentemente na Especialização, ainda me impulsionavam a continuar a trajetória de pesquisas. Sendo assim, entendi que minhas inquietudes se inseriam em algo mais amplo, envolvendo uma investigação nos Fundamentos da Matemática.

Dessa maneira, o objetivo central da pesquisa analisa a estrutura axiomática e seu desenvolvimento histórico nas obras: Os *Elementos* de Euclides e os Fundamentos da Geometria proposto por David Hilbert em seu livro *Fundamentos da Geometria*.

As diferentes concepções dos sistemas axiomáticos são investigadas no decorrer da pesquisa, mostrando outras axiomatizações da Geometria Euclidiana.

As etapas da pesquisa foram elaboradas por meio de um levantamento bibliográfico do tema, leitura e reconhecimento, leitura seletiva, leitura reflexiva e redação da pesquisa, sendo o início a parte mais difícil, pois novas concepções de diferentes autores vão aparecendo a todo o momento.

O desenvolvimento da pesquisa iniciou com a leitura seletiva da obra *Euclid the thirteen books of The Elements* de Sir Thomas L. Heath (1956), o qual proporcionou um primeiro contato com o tema da pesquisa, selecionando o que é essencial na pesquisa, mostrando brevemente a transição do raciocínio empírico para o raciocínio dedutivo na geometria.

A partir desse ponto, apresentamos a estrutura axiomática dos *Elementos*, apresentando e analisando algumas características de seus postulados, de maneira a mostrar suas relações com o rigor lógico de Aristóteles. As diversas incertezas de matemáticos e lógicos em relação ao sistema axiomático, são investigados na primeira parte da pesquisa.

No segundo capítulo, começamos apresentando os primeiros sistemas axiomáticos modernos da geometria baseada na obra *Vorlesungen über neuere Geometrie*de Moritz Pasch e o livro *Grundlangen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria) de David Hilbert.

Nesta etapa fizemos uma leitura seletiva e reflexiva da obra *Foundations of Geometrie* (1971) e o livro *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics* (2000), proporcionando a seleção da investigação proposta.

A presente pesquisa constitui-se de dois capítulos, que envolvem a investigação das características dos sistemas axiomáticos na Geometria Euclidiana em momentos históricos diferentes.

Na primeira parte, apresentamos alguns aspectos relacionados ao desenvolvimento do processo dedutivo na geometria, partindo do raciocínio empírico utilizado pelas civilizações orientais. Em seguida tecemos algumas considerações sobre a ciência demonstrativa de Aristóteles e suas interpretações e, posteriormente, elencamos os aspectos da estrutura axiomática nos *Elementos* de Euclides, abordando suas características lógicas e as divergências nas demonstrações do quinto postulado.

Na segunda parte estudamos a noção moderna de sistemas axiomáticos na geometria, analisando os fundamentos da geometria proposto por David Hilbert. Apresentamos as propriedades dos sistemas axiomáticos e seus significados, investigando a relação entre os objetos geométricos e sua axiomática.

A nova abordagem dos sistemas axiomáticos alterou profundamente sua estrutura, resultando na caracterização sintática do método axiomático.

A axiomatização de uma teoria muitas vezes ocorre somente após ela ter sido analisada durante algum tempo, dificultando verificar alguns significados das propriedades do sistema. Após a formalização dos sistemas axiomáticos, estes apresentam importantes características em sua estrutura: consistência, independência, equivalência, categoricidade e completude.

No final do capítulo, abordamos o conceito de movimento geométrico e uma possível interpretação axiomática, utilizando axiomas de reflexão. Além disso, discutimos a ideia de congruência atrelada à concepção de movimento, assunto de muita importância na geometria euclidiana.

2 A GEOMETRIA DE EUCLIDES E O PROCEDIMENTO DEDUTIVO

2.1 Origem do Raciocínio Empírico

Antes de compreender a geometria a partir de Euclides e o seu desenvolvimento, comentaremos brevemente algumas práticas de mensuração feitas por civilizações que antecederam os Gregos. Afinal, tais práticas empíricas resultaram na noção daquilo que hoje conhecemos por geometria.

O aprimoramento das técnicas de medições, na antiguidade, deveu-se em grande parte às necessidades práticas daquelas culturas, as quais transformaram a interação entre o homem e o meio em que vive. Talvez essa reciprocidade seja a essência da trajetória rumo ao aperfeiçoamento dos conhecimentos matemáticos, fundamentais no processo evolutivo e, no âmbito da técnica, frutos de grandes invenções da humanidade.

A palavra geometria está associada a um tipo de procedimento ao se fazer medições significando "medida da terra". E a origem do termo se dá com as experiências em demarcações de terras feitas pela civilização Egípcia, após sucessivas inundações do rio Nilo, indicando um conhecimento intuitivo da geometria sem o uso de um processo dedutivo.

Também sobre condicionantes naturais, os Babilônios, assim como os Egípcios, encontravam formas de construir estruturas de irrigação e drenagem, controlando os fluxos dos rios Tigre e Eufrates. Apesar das semelhanças das técnicas utilizadas entre Egípcios e Babilônios, o procedimento empírico destes parecia ser mais refinado – talvez devido a instrumentos de cálculo utilizados na época.

Podemos destacar duas versões para o surgimento da geometria. Na primeira, segundo o historiador grego Heródoto[1], o Faraó Sesóstris III realizava as partilhas de terras, destinando a cada Egípcio uma porção igual, recolhendo todos os anos certo tributo de acordo com o tamanho do terreno. Se o rio Nilo transbordasse, invadindo parte da terra de alguém, o prejudicado procurava o rei. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução do lote, passando o dono a pagar menos tributo. Na versão de Aristóteles, o tempo de lazer da classe sacerdotal era dedicado aos estudos geométricos. As duas versões representam teorias opostas quanto à origem da geometria, um acreditando que fosse a necessidade prática, outro que a origem estivesse no lazer sacerdotal.

Sendo a base da estrutura matemática que conhecemos hoje, o raciocínio dedutivo

[1] Historiador grego, percorreu os caminhos anteriormente abertos por de Hecateu de Mileto, nascido no século V a. C., foi autor da história da invasão Persa na Grécia.

ainda não havia florescido nos procedimentos envolvidos nos aprimoramentos das antigas civilizações, sendo todo processo executado empiricamente por indução. Cotejando com a dedução, a indução é um raciocínio em que a conclusão obtida expressa uma conjetura empírica muito mais ampla do que a expressa pelos dados. Ao estabelecer, porém uma conclusão de caráter empírico, pelo menos um dos passos do raciocínio dever ser indutivo; uma conclusão empírica não poderia ser estabelecida jamais por meio de um raciocínio integralmente dedutivo. (BARKER, 1976, p. 19)

Este raciocínio, em que a conclusão de um fato é baseada em um número limitado de casos, é a base da indução. Conclusões empíricas podem ser obtidas por uma forma primitiva de indução, como o raciocínio por analogia – esta, útil em situações muito particulares, porém não para considerar estabelecida uma conclusão de aspecto geral. A analogia é considerada semelhança entre relações ou atributos como uma base de raciocínio, carecendo, como é de saber, de uma estrutura mais precisa no raciocínio. A respeito desta concepção, tal lacuna deveria ser preenchida em algum momento da história, devendo assim sugerir outra forma de raciocínio que contrastasse com processos indutivos e analógicos das civilizações orientais.

A civilização grega não aceitava uma simples afirmação recebida pelo divino ou pela experiência, mas apreciava explicações concebidas pela razão. Existem muitas hipóteses na tentativa de esclarecer o motivo que os levou a pensar desta forma, uma delas seriam o surgimento da democracia e o refinamento das discussões retóricas apoiadas nos argumentos. Muitas discussões sobre este tema ocorreram ao longo da história, não havendo indícios de que existia um sistema dedutivo em alguma cultura pré-helênica, no entanto, tais discussões fogem do objetivo central deste trabalho, que visa investigar o desenvolvimento do rigor dedutivo na geometria.

O procedimento dedutivo surge com o aprimoramento do pensamento grego e, provavelmente, a geometria, sendo o ponto de partida, estabelece a transformação na forma de pensar sistematicamente de maneira clara e concisa (BARKER, 1976, p. 29).

Um trabalho importante sobre a geometria grega foi a História da Geometria, de Eudemo, um discípulo de Aristóteles. Apesar de tal obra ter desaparecido, uma parte é resgatada por Proclus[2], que viveu no século V a. D., sendo a principal fonte de informação sobre a geometria grega.

Ainda no que tange a Eudemo, citamos parte do Sumário de Eudemo ou o Catálogo dos geômetras, preservada pelo comentador Proclus:

---

[2] Proclo Lício foi um filósofo neoplatônico grego do século V, c, escreveu um *comentário* sobre o Livro I dos *Elementos* de Euclides, sendo uma das principais fontes de informação sobre a história da geometria grega.

> E Tales, primeiramente tendo ido ao Egito, transportou para a Grécia essa teoria e, por um lado, descobriu muitas coisas, e, por outro lado, mostrou os princípios de muitas para depois dele, aplicando-se a umas de modo mais geral, a outras, de modo mais sensível. E depois desse, Mamerco, o irmão do poeta Stesichorus, o qual é mencionado como tendo tido uma ligação de zelo em relação à geometria, e Hippiasde Elis relatou-o como tendo adquirido uma reputação na geometria. E depois desses, Pitágoras mudou a filosofia sobre ela em uma forma de educação livre, examinando do alto os princípios dela, explorando os teoremas tanto de um modo imaterial quanto intelectual, o qual então também descobriu a disciplina dos irracionais e a construção das figuras cósmicas. E depois desse, Anaxágoras de Clazomente ligou-se a muitas coisas das relativas à geometria e Oinopedes de Quios, sendo por pouco mais jovem do que Anaxágoras, os quais também Platão mencionou nos Rivais comom tendo adquirido uma reputação nas matemáticas. Depois dos quais, Hipócrates de Quios, o que descobriu a quadratura da lúnula, e Teodoro de Cirene tornaram-se ilustres com relação à geometria. Pois Hipócrates também compôs Elementos, o primeiro dos que são mencionados. E Platão, tendo nascido depois desses, fez tomar muito grande progresso tanto as outras coisas matemáticas quanto a geometria, pelo zelo relativo a elas, o qual, é evidente, tanto de algum modo tendo tornado freqüente as composições com os discursos matemáticos quanto despertado por toda parte a admiração relativa a elas dos que se ligam à filosofia. E nesse tempo eram tanto Leodamas de Thasos quanto Árquitas de Taranto quanto Teeteto de Atenas, pelos quais os teoremas foram aumentados e avançaram para uma organização mais científica. E Neocleides, mais jovem do que Leodamas, e o discípulo desse, Léon, os quais resolveram muitas cosas em adição às dos antes deles, de modo a Léon compor também os Elementos de maneira mais cuidada tanto pela quantidade quanto pela utilidade das coisas demonstradas, e descobrir distinções, quando o problema procurado é possível e quando é impossível. (BICUDO, 2009, p. 37).

De acordo com o Sumário de Eudemo, a matemática grega parece iniciar com o trabalho de Tales de Mileto que viveu por volta de 600 a. C., sendo talvez um dos primeiros a utilizar um método dedutivo em matemática. Outro notável matemático grego mencionado no Sumário de Eudemo, provavelmente influenciado por fontes orientais, foi Pitágoras de Samos que nasceu em 572 a. C., fundador da escola Pitagórica.A filosofia da escola Pitagórica baseava-se na concepção mística dos números e construção de figuras cósmicas, influenciando os membros dessa sociedade na busca de propriedades matemáticas. Segundo Proclo, os pitagóricos consideravam a matemática como dividida em quatro partes: uma metade, eles distinguiam por estar preocupada com a quantidade e a outra metade com a magnitude. Prosseguiam dizendo que a quantidade pode ser considerada, com relação ao seu caráter, sozinha ou em relação a outra quantidade e as magnitudes como estacionárias ou em movimentos. Numa dessas partes, estava a aritmética, preocupada com a quantidade em si (GONÇALVES, 1997, p. 10).

A aritmética pitagórica representava números por objetos ou pontos. Não sabemos ao certo qual seria o verdadeiro tipo de representação usado na época, o que podemos afirmar é que uma representação por pontos seria mais apropriada ao associar números com a geometria. Com isso, ao associar a geometria com a aritmética, operações de adição, subtração, multiplicação e extração de raízes, na qual "conhecemos" atualmente como operações aritméticas, se obtinha o primitivo tratamento pitagórico da geometria.

Neste sentido, os pitagóricos, parecem tentar "aritmetizar" a geometria, criando uma espécie de método aritmético da mesma, baseado no significado de números pares e ímpares, que para os gregos correspondia à possibilidade ou não de repartir determinadas figuras em partes iguais. Um pouco sobre o objeto de aritmética e geometria aparece na breve passagem dos Segundos Analíticos:

> O efeito será idêntico para o geômetra se ele supor a verdade não universalmente, mas somente no que respeita a grandezas, e para o aritmético se ele supor apenas no tocante a números. Também são peculiares a cada ciência os sujeitos cuja existência ela supõe e cujos predicados essenciais ela estuda, como a aritmética estuda as unidades, e a geometria pontos e linhas. Desses sujeitos se supõe tanto a existência quanto o significado, mas dos seus predicados essenciais somente se supõe o significado. Por exemplo, a aritmética supõe o significado de ímpar ou par, quadrado ou cubo, e a geometria o significado da incomensurabilidade, do desvio ou da inclinação. Mas sua existência é demonstrada por meio dos princípios comuns e a partir de conclusões já demonstradas. O mesmo ocorre com a astronomia. (ARISTÓTELES, 76b1, p. 270).

Na filosofia matemática de Platão[3] os objetos matemáticos são distintos dos objetos do mundo sensível, mas Aristóteles, discípulo de Platão, não compartilhava das mesmas ideias. Aristóteles não admitia a existência transcendente de ideias e formas matemáticas. As formas geométricas e numéricas existem apenas como aspectos e coleções de objetos reais. "De fato, a matemática se ocupa apenas com as formas: ela não tem a ver com os substratos; pois ainda que as propriedades geométricas sejam propriedades de certo substrato, não é enquanto pertencentes ao substrato que ela as mostra" (ARISTÓTELES, I, 13).

Apesar das divergências entre Platão e Aristóteles, os tratados lógicos aristotélicos exerceriam forte influência entre filósofos da época, servindo como ferramenta fundamental em diferentes campos de pesquisa. Sua principal influência está demonstrada na estrutura lógica organizada nos Elementos de Euclides.

2.2 Aristóteles e a Ciência Demonstrativa

Uma das características interessantes no que tange à organização lógica do trabalho de Euclides é seu método axiomático, sendo o primeiro exemplo que chegou até nós de um sistema axiomático-dedutivo. Os Elementos de Euclides ainda respondem a um ideal

[3] Filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga, viveu por volta de 430 a. C., autor de diversos diálogos filosóficos e fundador da Academia, em Atenas.

aristotélico de ciência dedutiva, sendo esta entendida como um edifício logicamente estruturado sobre bases evidentes (SILVA, 2007, p. 50).

No decorrer de nossa investigação veremos que a noção aristotélica de sistema axiomático esteve diretamente relacionada com a geometria de Euclides, no momento, destacaremos alguns aspectos sobre a lógica aristotélica, principalmente aquilo que Aristóteles entendia por demonstração e a noção de conhecimento científico.

Aristóteles, nascido na cidade de Estagira, em 384 a. C., estudou na academia de Platão, escrevendo sobre vários assuntos, porém sua principal contribuição foi no campo da lógica. Os escritos sobre lógica foram organizados pelos seus discípulos na obra conhecida como *Organon*, que significava instrumento da ciência. O *Organon* é dividido em cinco livros: *Categoriae* (Categorias), *Topica* (Tópicos), com o apêndice *De Sophistics Elenchis* (Sobre os argumentos sofísticos), *De interpretatione* (Interpretações), *Analytica Priora* (Primeiros Analíticos) e *Analytica Posteriora* (Últimos Analíticos)

Nos Primeiros Analíticos é desenvolvida a teoria do silogismo, sendo um conjunto de regras e técnicas para decidir sobre o caráter dedutivo ou não de certo tipo de argumento. Logo no início do Livro I, Aristóteles menciona a estrutura de seu objeto de estudo, distinguindo demonstração de ciência demonstrativa. Em seguida, Aristóteles define o significado de premissa, termo e silogismo, e separa entre um silogismo perfeito e um imperfeito (KNEALE, 1991).

Comparando com os significados atribuídos pelo estagirita[4], recorremos ao dicionário, para a definição dos seguintes termos: silogismo e dedução. Silogismo é um raciocínio dedutivo estruturado formalmente a partir de duas proposições, ditas premissas, das quais, por inferência, se obtém necessariamente uma terceira, chamada conclusão. Dedução é um processo de raciocínio através do qual é possível, partindo de uma ou mais premissas aceitas como verdadeiras (p.ex., A é igual a B e B é igual a C) a obtenção de uma conclusão necessária e evidente (HOUAISS, 2000).

Na estrutura do argumento, uma proposição é uma sentença que pode ser adjetivada como verdadeira ou falsa, juntamente com um conjunto de evidências. Em suma, um argumento é uma série de proposições, das quais uma é a conclusão do argumento e as outras são as premissas do argumento, ou seja, as proposições oferecidas em apoio à conclusão.

Segundo Kneale (1991), a intenção de Aristóteles era agrupar frases declarativas em pares tais que a segunda seja a negação da primeira, combinando a distinção universal com a

[4] Estagira é uma antiga cidade da Macedônia, situada hoje na Grécia, na região da Calcídica, no golfo do rio Estrimão.

distinção entre sentença, obtém-se uma classificação quaternária de um silogismo.Assim um silogismo é um argumento composto de três proposições: a conclusão e duas premissas. De forma sucinta, o silogismo é figurado em quatro esquemas de proposição:

1. Particular afirmativo:Alguns *X* são *Y*;
2. Particular negativo:Alguns *X* não são *Y*;
3. Universal afirmativo:Todos *X* são *Y*;
4. Universal negativo:Nenhum *X* é *Y*.

Por convenção, desde a lógica escolástica, esses tipos de proposições são designados pelas letras *I*, O, A e E, respectivamente. Segundo Aristóteles as proposições também podem ser distinguidas em termos de modalidade, por exemplo, "A é necessariamente B" e "é possível que A seja B" são modalidades identificadas por ele. No entanto, essas distinções de modalidade em nada modificam seus métodos para decidir a validade de um silogismo. Mesmo não sendo o objetivo aqui discutir os diferentes métodos para determinar a validade de um argumento, verifiquemos as diferentes interpretações de alguns lógicos modernos sobre o silogismo aristotélico. Segundo Lukasiewicz[5] (1951 apud RIBEIRO, 2011, p. 9), os silogismos são proposições verdadeiras ou teses do sistema dedutivo, e a silogística passa a ser entendida como um sistema de proposições verdadeiras concernentes as constantes A, E, I e O. De acordo com ele, os silogismos da primeira figura, chamados por Aristóteles de silogismos perfeitos, seriam os axiomas e, juntamente com as regras da lógica proposicional, constituiriam a lógica de fundo da teoria axiomática aristotélica. Os demais silogismos ou teoremas do sistema, por sua vez, seriam deduzidos e provados a partir de axiomas, mediante as regras de lógica proposicional. Lukasiewicz parecia convencido de que uma compreensão da silogística só seria possível quando se estivesse consciente da existência de um sistema de lógica mais fundamental que a silogística, a saber, a lógica de proposições, uma vez que, muito embora Aristóteles não tivesse suspeitado da existência desse outro sistema, teria utilizado, intuitivamente, as leis de lógica proposicional em suas provas Lukasiewicz (1951 apud RIBEIRO,2011,p. 12).

Outra nova interpretação da silogística, proposta por John Corcoran[6] (1974 apud RIBEIRO, 2011, p. 13) diz respeito ao fato de que, se a silogística deve ser interpretada como propõe Lukasiewicz, por meio de um sistema axiomático, cuja lógica subjacente teria sido

[5]Jan Lukasiewicz (1878-1956) foi um lógico polonês reconhecido pelo desenvolvimento da lógica polivalente e difusa, além de seus estudos sobre a história da lógica, particularmente sua interpretação da lógica aristotélica.

[6] John Corcoran, nascido em 1937, é um eminente lógico e filósofo americano, conhecido por seu trabalho sobre questões centrais da lógica tais como: a natureza da inferência, a relação entre lógica e epistemologia e aplicações da teoria da demonstração e dos modelos na lógica.

desconhecida pelo autor, Aristóteles não mais merecia o título de fundador da lógica, mas sim os Estóicos. Na interpretação de Corcoran, a silogística aristotélica deve ser compreendida não como uma ciência axiomática, mas como uma lógica subjacente das ciências demonstrativas, essas sim axiomáticas. Resumidamente, na interpretação de Corcoran, aquilo que Aristóteles entenderia por silogismo perfeito, no que se refere ao "perfeccionismo" de um silogismo, seria a adição de proposições nos silogismos imperfeitos expressos por uma cadeia de raciocínio das premissas para a conclusão. Segundo Corcoran, os silogismos de primeira figura são resultados da aplicação de regras de inferência (Corcoran 1974 apud RIBEIRO, 2011, p.15), enquanto os silogismos imperfeitos são aperfeiçoados ou por meio de uma prova ostensiva ou por meio de uma prova por redução ao impossível, esta última, a técnica estabelecida para decidir a validade de um silogismo, verificando se uma contradição é derivada da negação da conclusão e de uma das premissas. Em ambos os casos, cadeias de raciocínios são construídas a partir das premissas do argumento, acrescentando sentenças adicionais resultantes da aplicação das regras de inferência, até que se deduza a conclusão do argumento.

As diferentes interpretações da lógica aristotélica nos Primeiros Analíticos representam concepções distintas sobre a mesma, além de dois caminhos alternativos do desenvolvimento em sua vertente moderna. No primeiro caso levanta-se a questão se a lógica é concebida como a ciência das verdades ou uma distinção da lógica como ciência e a lógica como um sistema subjacente às ciências axiomáticas. Parece existir aí uma distinção entre a ferramenta silogística e a demonstração enquanto conhecimento científico. De acordo com Aristóteles, "toda demonstração é um tipo de silogismo, mas nem todo silogismo é uma demonstração", mostrando claramente que uma dedução não é o mesmo que prova silogística. Nos Segundos Analíticos, de forma bem geral, o estagirita expõe a noção de explicação científica nas demonstrações. No livro I, em 71b 16-19, por exemplo, faz referência ao conhecimento científico, afirmando que "se há outro modo de se conhecer algo cientificamente será investigado depois, mas que de fato conhecemos através de demonstração". Assim existiriam dois tipos de conhecimento científico, um demonstrativo e outro que, sendo dos princípios, devem ser ausentes de demonstração.

Conhecer algo cientificamente desde o termo grego acarreta distintas interpretações, mas que convergem para um tipo especial de conhecimento que exige ferramentas específicas para explicá-lo. Inúmeras hipóteses foram atribuídas para se perguntar em que consistia a teoria demonstrativa apresentada pelo filósofo grego nos Segundos Analíticos, não sendo o objetivo aqui discutir possíveis respostas a esse fato, prosseguimos em uma breve investigação sobre sua estrutura lógica. No que concerne à ciência demonstrativa, Aristóteles diz começar por princípios indemonstráveis, caso contrário os passos da demonstração podem ficar intermináveis. Desses princípios indemonstráveis alguns são comum a toda ciência, chamados axiomas, e outros peculiares a uma ciência em particular (HEATH, 1956, p.119). Deste modo Aristóteles parece distinguir claramente entre princípios indemonstráveis, hipóteses e definições. Compactuando com uma das interpretações que dá sentido a teoria demonstrativa como uma teoria axiomática das ciências, esta estabelecida sobre um conjunto finito de proposições, dividido em axiomas e teoremas, citamos o artigo de Heinrich Scholz[7], "Die Axiomatik der Alten", publicado em 1930. Segundo Scholz (1930, apud RAGGIO, 2003) defende a correspondência da teoria demonstrativa com uma teoria axiomática da ciência, determinando as principais características da noção aristotélica de um sistema axiomático:

a) uma ciência no sentido aristotélico é um conjunto de enunciados relativos a um mesmo domínio, que possui as seguintes propriedades:
   - os enunciados se dividem em axiomas e teoremas;
   - os conceitos que compõem os enunciados se dividem em conceitos fundamentais e derivados;

b) os axiomas devem ser:
   - imediatamente evidentes, e por essa razão indemonstráveis;
   - suficientes para que se possa deduzir a partir deles, utilizando unicamente as regras da lógica, todos os teoremas;

c) os conceitos fundamentais devem ser:
   - imediatamente compreensíveis e, por essa razão, indefiníveis;
   - suficientes para que se possa definir a partir deles, segundo as regras da lógica, todos os conceitos derivados;

d) os axiomas devem ser enunciados necessários.

Após percorrermos alguns caminhos direcionados ao conhecimento dedutivo, notamos que tanto o problema de saber se o domínio de objetos possui as condições que satisfazem os axiomas quanto o de determinar quais são os instrumentos teóricos para provar qual é a natureza que forma o domínio mencionado são deixados de lado na axiomática, que se centraliza somente na análise do conhecimento dedutivo. Muitas discussões poderiam ser

---

[7] Neste artigo, Scholz defende a ideia que influenciaram diversos interpretes da ciência de Aristóteles, mostrando que a teoria demonstrativa corresponderia a uma teoria axiomática da ciência.

feitas sobre o caráter implícito da lógica que conduziram a uma revisão fundamental dos sistemas hipotético – dedutivos, porém uma discussão mais aprofundada foge de nosso campo de estudos.

2.3 Características dos Sistemas Axiomáticos

Como mencionamos anteriormente, os sistemas axiomáticos possuem características de uma ciência demonstrativa, no sentido aristotélico, partindo de um número finito de primeiros princípios indemonstráveis. O critério de finitude e a evidência dos primeiros princípios evitam a regressão ao infinito estabelecendo alguma verdade para demonstrar outra. Embora Aristóteles não defina o que é dedução lógica, as demonstrações partiam dos primeiros princípios chegando aos teoremas através da dedução lógica, exposta basicamente no silogismo aristotélico. Para os Estóicos[8], o axioma é verdadeiro ou falso no sentido básico e um axioma simples e definido diz-se que é verdadeiro 'quando o predicado pertence à coisa que é referida pelo demonstrativo'. Diógenes dá uma explicação mais simples através de um exemplo. O axioma significado por 'É dia' é verdadeiro se é dia; se não é dia é falso. Esta explicação é muito semelhante à de Aristóteles com a diferença de que é enunciada por um exemplo. (KNEALE, 1962, p.156).

A geometria de Euclides, como vimos, forneceu o campo para o estudo das noções axiomáticas, contribuindo para o desenvolvimento da lógica. As análises da lógica aristotélicas feitas por lógicos e matemáticos modernos, incentivou o surgimento de diferentes concepções sobre a estrutura lógica. Apresentaremos aqui breves considerações sobre os significados de um sistema axiomático e a estrutura de um sistema formal.

De acordo com Shoenfield (1967), os matemáticos podem definir certos conceitos em termos de outros, porém os primeiros conceitos que usamos não podem ser definidos. Portanto, temos certos conceitos, chamados de conceitos básicos, que são deixados não definidos; os conceitos restantes, chamados de conceitos derivados, são definidos em termos daqueles. Temos um critério para conceitos básicos semelhantes àquele para axiomas: devem ser tão simples e claros para que possamos entendê-los sem uma definição precisa. Tais sistemas são chamados de sistemas axiomáticos modernos em contraposição com os sistemas axiomáticos clássicos, discutidos anteriormente. A diferença não está na estrutura do sistema

[8] A lógica dos estóicos assumia duas categorias: a retórica, que era a ciência do discurso contínuo e sem contradição, e a dialética, que era a ciência do discurso exercida através da contradição. A dialética estóica prevê um esboço da teoria da linguagem quando define a gramática como a ciência das palavras e a lógica gramatical como ciência que se ocupa do significado das palavras.

axiomático, mas na intenção do que concebe o sistema.

Neste sentido, se faz importante estudar axiomas e teoremas como sentenças, especialmente por duas razões, na primeira, a escolha conveniente da linguagem para expressar o axioma, a estrutura da sentença resultará de certa forma no significado do axioma. Já na segunda, devido aos conceitos matemáticos serem abstratos, uma sentença, sendo um objeto concreto, permite abordar o abstrato por meio do concreto (SHOENFIELD, 2003).

Por meio dessa ideia, demonstrações que lidam com objetos concretos de uma forma construtiva possuem características finitárias. Outra descrição sugerida por Kreisel[9], é esta: uma demonstração é finitária se pudermos visualizá-la. É claro que nenhuma das descrições é muito precisa; mas podemos aplicá-las em muitos casos para decidir se uma particular processo demonstrativo é ou não finitário. Uma vez apreciada a diferença fundamental entre objetos concretos e abstratos, uma variedade de questões é sugerida que pode ser respondida pelo estudo das demonstrações finitárias (SHOENFIELD, 2003).

No sistema axiomático, o estudo de axiomas e teoremas é chamado de estudo sintático e, os significados de suas sentenças, é um estudo semântico. Assim, sempre consideraremos axiomas e teoremas como sentenças, e consequentemente objetos sintáticos; quando estudá-los semanticamente, abordaremos o significado do axioma ou teorema.

De uma forma geral, um sistema formal é a parte sintática de um sistema axiomático e sua primeira parte é chamada de linguagem, escolhida de modo que a estrutura da sentença refletirá seu significado, especificando seus símbolos. A sequencia finita de símbolos é uma expressão da linguagem e certas expressões são designadas como fórmulas da linguagem. Neste sentido, Shoenfield define claramente a estrutura de um sistema formal:

> Consideramos uma linguagem como completamente especificada quando os seus símbolos e fórmulas o sejam. Isso torna uma linguagem um objeto puramente sintático. É claro que a maioria das nossas linguagens terá um significado (ou vários); mas, o significado não é considerado como uma parte da linguagem. Designaremos a linguagem de um sistema formal F por L(F). A parte seguinte de um sistema formal consiste nos seus axiomas. Nossa única exigência nisso é que cada axioma seja uma fórmula da linguagem do sistema formal. Necessitamos de uma terceira parte de um sistema formal que nos habilite a concluir teoremas a partir dos axiomas. Isso é provido pelas regras de inferência que frequentemente chamamos apenas de regra. Cada regra de inferência enuncia que, sob certas condições, uma fórmula, chamada a conclusão da regra, pode ser inferida de certas outras fórmulas, chamadas hipóteses da regra. (SHOENFIELD, 2003, tradução nossa).

De um modo geral, essas são as características dos sistemas axiomáticos quanto ao seu

[9] Georg Kreisel, nascido em 1923, é um matemático e lógico austríaco, trabalhando em várias áreas da lógica e, especificamente em teoria da demonstração.

significado e, tratando-se dos sistemas axiomáticos modernos que será investigado no decorrer de nosso estudo, apresentamos as propriedades do conjunto de axiomas que deve possuir certas propriedades, citemos as principais (AABOE, 2001, p. 59):

i. Completude – significa que tudo que será usado na teoria está apropriadamente contido nos axiomas, de maneira que não haverá hipóteses tácitas, ou seja, de forma implícita;
ii. Consistência – significa que é impossível deduzir dois teoremas contraditórios a partir dos axiomas;
iii. Independência – significa que nenhum dos axiomas é uma consequência dos outros.

A axiomatização de uma teoria muitas vezes ocorre somente após sua exploração durante algum tempo, sendo uma boa maneira de assegurar-se de que os axiomas são significantes. Essas observações são sobre os sistemas axiomáticos modernos, sendo que para a maioria dos antigos os axiomas se apresentavam sob um aspecto diferente, como afirmativa de fatos e de verdades evidentes por si próprias, que todos poderiam aceitar. No entanto, não é inconveniente perguntar como os axiomas de Euclides cumprem as exigências modernas, pois a axiomática moderna é uma descendente direta de seus esforços.

2.4 Estrutura Axiomática dos Elementos de Euclides e as Divergências

A estrutura do método axiomático nos Elementos de Euclides apresenta certas semelhanças com a exposição lógica de Aristóteles, dividindo-se em dois grupos: primeiros princípios e proposições (teoremas). No entanto, Euclides divide os primeiros princípios em definições, postulados e noções comuns, pois segundo o comentador Proclo, Aristóteles e os geômetras consideravam como a mesma coisa. Sobre os postulados, Szabo afirma que a correspondência entre "postulados" no sentido de Euclides e "postulados", sendo considerado como hipótese, no sentido de Aristóteles, não é idêntica (SZABÓ, 1913). Assim como os princípios indemonstráveis, axiomas e definições são distintos de hipótese, um postulado possui a mesma distinção. Heiberg comenta que não há nenhum traço em Aristóteles dos Postulados de Euclides, e que "postulado" em Aristóteles tem um diferente significado (HEATH, 1956, p. 120-121).

O comentador Proclo relata que a distinção entre axiomas e postulados tem semelhança com a distinção entre teorema e problema, segundo a concepção de Gemino.

Na exposição de Gemino, axioma é aquilo que se entende facilmente, enquanto postulado como aquilo que é fácil de desenhar. Por outro lado, Aristóteles admite axioma como o que não pode ser demonstrado e postulado como aquilo que pode ser demonstrável. Segundo Proclo, o axioma refere-se a um princípio geral e o postulado um princípio para a geometria. O primeiro aceito por ser auto-evidente, o segundo admitido por simples construção de objetos geométricos.

A obra de Euclides trata de outros temas além da geometria, constituída de livros, dividido nas seguintes partes:

- *Pseudaria*: Trata da geometria plana elementar e parece estar ligada aos Elementos;
- *Os Data*: Trata de geometria elementar com definições de magnitude, linhas, figuras retilíneas e círculos;
- *Sobre Divisões*: Trata de divisões de figuras;
- *Porisma*: Refere-se a proposições que estariam entre as concepções de problema e teorema;
- *Lugar da Superfície*: Trata de lugares geométricos;
- *As Cônicas*;
- *Phaenomena*: Trata especificamente de astronomia;
- *Ótica* : Trata de geometria aplicada à Física;
- *Elementos de Música*: Trata da teoria musical devido aos Pitagóricos.

Os *Elementos* de Euclides, composto por treze livros, é o resultado de uma organização lógica em sua estrutura.

- Livro I: trata da geometria plana elementar, especificamente sobre paralelogramos.
- Livro II: trata da álgebra geométrica.
- Livro III: trata das relações entre círculos, retas e suas propriedades.
- Livro IV: trata de inscrições e circunscrições de polígonos.
- Livro V: trata da razão e proporção entre segmentos.
- Livro VI: trata da razão e proporção entre segmentos.
- Livro VII, VII e IX: tratam da teoria dos números.
- Livro X: trata da classificação de magnitudes incomensuráveis.
- Livro XI: trata da geometria espacial e suas relações.
- Livro XII: trata de sólidos geométricos e suas propriedades.
- Livro XIII: trata da construção dos sólidos regulares.

A forma de abordagem caracterizada por Euclides deixa evidente seu método didático contemplando, ao mesmo tempo, a aritmética e a geometria, fazendo com que a última justifique a primeira.

O comentário de uma obra funcionava como uma espécie de instrumento pedagógico utilizado nas escolas medievais, enriquecendo o conhecimento através de diferentes pensamentos (BICUDO, 2009, p. 63).

Proclo faz seu comentário ao Livro I dos *Elementos*, dividido em três partes, expondo sistematicamente cada uma. A primeira contém as duas partes de um longo Prólogo, a segunda as definições, os postulados e as noções comuns e a terceira contendo as proposições. A última faz referência aos problemas e teoremas, fundamentada na concepção aristotélica, concluindo que problemas e teoremas são distintos, assim como axioma e postulado.

Os problemas são aquelas proposições que têm por objetivo produzir, trazer à vista, ou construir o que, em algum sentido, não existe. Por outro lado, os teoremas são as que visam a ver, identificar e demonstrar a existência ou a não existência de um atributo. Assim, por um lado os problemas exigiriam a construção de uma figura, ou colocá-la em um lugar, ou aplicá-la a uma outra: por outro lado, os teoremas teriam por empresa abarcar firmemente e ligar por uma demonstração, os atributos e propriedades dos objetos que são a matéria da geometria.

O primeiro livro dos *Elementos de Euclides* trata da geometria plana elementar, especificamente sobre paralelogramos e se organiza da seguinte forma:

- Definições – numeradas de 1 a 23
- Postulados – numerados de 1 a 5
- Noções Comuns – numeradas de 1 a 9
- Textos constituindo-se de enunciados e suas respectivas demonstrações – enumeradas de 1 a 48

No comentário de Proclo, a ordem acima é mantida, porém, as noções comuns são denominadas axiomas e os quarenta e oito enunciados como proposições.

O entendimento de postulado na concepção de Proclo, como foi visto, refere-se a algo que nos conduzisse à ação, ao uso de instrumentos para construção de objetos geométricos.

Vejamos os postulados do primeiro livro dos *Elementos* e suas características:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

Este postulado trata da geometria e nos conduz a ação, garantindo a existência da reta. Outro fato que podemos notar é que não se postula a unicidade de um segmento de reta entre dois pontos, mas é admitido na proposição 4 do primeiro livro, o que originou a noção comum 9, com a seguinte afirmação: “E duas retas não contêm uma área”.

No entanto, a unicidade da reta surge da junção desse postulado com a definição de reta (HEATH, 1956, p.195 e 196).

2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

Essa afirmação se caracteriza na concepção de postulado e a não finitude da reta garante sua existência.

3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

Esse terceiro postulado garante a existência do círculo, se enquadrando nas concepções de postulado. Os três primeiros postulados já deviam ser conhecidos antes da época de *Euclides*.

4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

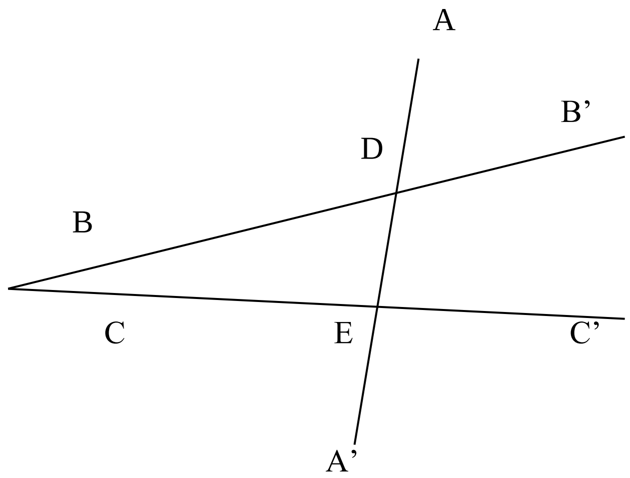
O quarto postulado parece não representar a ideia de ação, apesar de interpretado como garantia de igualdade da ação o fato de igualar dois ângulos adjacentes. Se dois ângulos são retos, parece óbvio que sejam iguais. Se Euclides tivesse dito que todos os ângulos retos são ângulos retos, teria, de fato, afirmado algo tão trivial que o postulado seria dispensável. A observação seria verdadeira apenas em virtude de sua forma lógica, sendo uma verdade lógica, e não uma verdade geométrica (BARKER, 1969, p.31).

Euclides prefere postular, o fato que todos os ângulos retos são iguais e Proclo não o classificam como postulado, mas como axioma e, diferente dos três primeiros, possibilita alguma construção (HEATH, 1956, p.200).

5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que os dois retos, sendo prolongadas as duas retas ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

O quinto postulado, também conhecido como das paralelas, não é tão simples como os demais. As diferentes tentativas de demonstrações deste postulado, afirma que poderia ser considerado como um teorema. Durante nossa investigação, trataremos dos questionamentos sobre este postulado. Inicialmente, vejamos como Barker (1976) enuncia o postulado:“suponhamos que temos três retas AA’, BB’ e CC’. O postulado diz que se AA’ cortar BB’ e CC’ de modo que os ângulos CEA e BDA’, somados, resulta em um ângulo menor do que dois ângulos retos, então BB’ e CC’ irão se interceptar, desde que suficientemente prolongadas”.

Figura 1



Fonte: BARKER, 1976, p. 33

Como observamos, esse postulado apresenta uma dificuldade de interpretação, possuindo características de um teorema. Na proposição 28 do livro I dos *Elementos*, Euclides faz uma demonstração para o caso dos ângulos internos e do mesmo lado serem iguais a dois retos.

Muitos geômetras discutiam sobre o quinto postulado acreditando ser mesmo um teorema, surgindo as chamadas geometrias não euclidianas. Com tais geometrias, vários questionamentos surgiram sobre a validade das novas geometrias indagando se seriam verdadeiras. Por exemplo, Proclo assevera que o quinto postulado era um teorema com diversas complicações e, acrescenta, que Ptolomeu o teria demonstrado, utilizando definições e outros teoremas. O comentador também afirma que o inverso do postulado havia sido demonstrado pelo próprio Euclides, não sendo questionada a veracidade do quinto postulado, e sim a natureza do enunciado.

Todo esse processo, no sentido de demonstrar o quinto postulado, em inúmeras tentativas fracassadas, levou os matemáticos a perceberem que o mesmo é, de fato, independente. Se não existem contradições no uso de uma de suas negações com os demais postulados, então ele é independente. Com isso, a noção de axiomatização euclidiana foi se alterando ao longo do tempo, aparecendo novos sistemas hipotéticos – dedutivos conhecidos como sistemas formais.

As divergências dos Elementos eram uma maneira de tentar melhorar aquilo que já era confirmado como verdadeiro, sem indagar sobre a verdade de um teorema, mas a forma que se podia organizar a veracidade na demonstração dos teoremas.

Outras geometrias partem de diferentes concepções de objetos geométricos, como é o caso da geometria não euclidiana, não sendo este o foco de nosso estudo, mas sim a axiomátização de concepções clássicas dos objetos geométricos.

A consistência das ditas geometrias não euclidianas relativa às consistências da geometria de Euclides fez com que se revisasse o sistema dedutivo da geometria de Euclides. Tal reformulação mostrou falhas lógicas nos *Elementos* de Euclides, motivando novas axiomatizações para a geometria dos *Elementos.*

3 SISTEMAS AXIOMÁTICOS MODERNOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

3.1 Surgimento das geometrias não euclidianas

O método axiomático contido nos Elementos de Euclides suscitou admiração desde o seu surgimento, devido a seu rigor lógico e a sua coerência. Neste aspecto, durante séculos, a geometria de Euclides ficou inquestionável acerca das evidências dos axiomas, sendo exemplo de construção de uma teoria sem contradições.

Muitos matemáticos e lógicos cogitavam que o quinto postulado era, na verdade, um teorema, e que por sua vez poderia ser demonstrado, sendo que as trinta e uma primeiras proposições do livro I de Os Elementos podiam ser provadas usando somente os quatro primeiros postulados. As indagações sobre o quinto postulado influenciariam alguns matemáticos no século XIX e seria o início do surgimento de diferentes interpretações dadas à geometria euclidiana. O quinto postulado de Euclides é, muitas vezes, enunciado de outra maneira: para toda reta r e todo ponto *P* fora de *r*, pode-se traçar uma única reta paralela a*r* que passe por *P*. Esse enunciado foi elaborado por John Playfair em 1795 (GREENBERG, 2001, p. 90). Para mostrar que o quinto postulado é um teorema, tentaram construir uma demonstração por redução ao absurdo, negando seu resultado. Essa atitude fez surgir outros tipos de geometrias com resultados e interpretações próprias, mas que não tiraram o mérito da grande obra de Euclides. Entretanto, questões levantadas anteriormente permaneciam: existia alguma contradição na axiomática de Euclides?

As contribuições do padre jesuíta e lógico Girolamo Saccheri (1733), no que tange a este tipo de demonstração, foram mais importantes do que as anteriores. Na obra intitulada *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides livre de toda mácula), Saccheri considerou outras hipóteses não trabalhadas por Euclides. Ao ler os Elementos de Euclides, utiliza seu conhecimento de lógica e faz as demonstrações pelo método citado, pois Saccheri já havia publicado um importante trabalho em lógica chamado *Lógica Demonstrativa* (1627).

Saccheri utiliza os quatro primeiros postulados e as vinte e oito primeiras proposições de Euclides em sua demonstração. Traçando um segmento *AB* e levantando duas perpendiculares iguais: *AC* e *BD*, Provou que os ângulos do topo *ACD* e *BCD* são iguais, restando três hipóteses: os ângulos do topo são retos, obtusos ou agudos. O caso da hipótese do ângulo reto poderia ser desconsiderado, pois o quinto postulado foi considerado falso. A diferença do método de Saccheri relativamente aos outros foi o fato de tirar as consequências de cada hipótese, diferente da hipótese do ângulo reto, obtendo assim os resultados de uma geometria não euclidiana. Na Proposição 9, por exemplo, diz que a soma dos ângulo internos de um triângulo varia de acordo com a hipótese. A soma é igual a dois retos na hipótese do ângulo reto, maior que dois retos na hipótese do ângulo obtuso e menor que dois retos na do ângulo agudo.

Sendo válida a hipótese do ângulo obtuso, ele prova que vale o quinto postulado euclidiano (Proposição 14), chegando a uma contradição.

O matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky, desde 1820, estava convencido da possibilidade de uma geometria sem a necessidade do quinto postulado ser demonstrado. No ano de 1829 publicou seu trabalho sobre geometria não euclidiana, *Sobre os princípios da geometria*, inicialmente chamada de geometria imaginária.

Entre 1823 e 1825 Lobachevsky voltou sua atenção para a geometria independente da hipótese de Euclides. O principal fruto do seu novo estudo é a obra *Exposition Succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles* (Uma breve exposição dos princípios da geometria incluindo uma demonstração rigorosa do teorema das paralelas)lido em 1826 no Departamento de Física Matemática da Universidade de Kazan (BONOLA, 1955, p.85). A exposição continha certa ironia com relação a demonstração rigorosa, pois baseado em dados experimentais seria impossível determinar se a geometria euclidiana ou a imaginária poderia descrever melhor o mundo real.

Com essas ideias, surge um novo tipo de geometria chamada geometria hiperbólica, substituindo o postulado das paralelas pela seguinte afirmação: para toda reta r e todo ponto P fora de r, existe pelo menos duas paralelas distintas a r que passam por P.

Após esta introdução, Lobachevsky apresenta um grupo de quinze teoremas independente do postulado das paralelas, servindo de base para compreensão das suas ideias alternativas à geometria.

No início da década de 30 do século XIX, uma descoberta semelhante foi anunciada por Johann Bolyai (1802-1860), oficial húngaro do exército austríaco e filho de Wolfgang Bolyai.

Se por um lado Lobachevsky atribuiu à Geometria Imaginária um desenvolvimento analítico, por outro J. Bolyai aprofundou mais na situação de dependência ou independência dos teoremas da geometria relativos ao quinto postulado. Enquanto aquele procurou construir um sistema geométrico sob a negação do postulado de Euclides, este contribuiu no sentido de ressaltar as proposições e construções que na geometria elementar são independentes do postulado. Tais proposições, consideradas absolutamente verdadeiras, pertencem a geometria absoluta do espaço. As proposições desta ciência podem ser encontradas comparando-se a geometria de Euclides com a de Lobachevsky. A parte que elas possuem em comum pertence a geometria absoluta, porém J. Bolyai não percorreu este caminho. Ele mostrou, diretamente, que independentemente do quinto postulado, as suas proposições são verdadeiras. Tanto Lobachevsky quanto J. Bolyai reinvidicaram que, matematicamente, a Geometria não – euclidiana era possível.

As publicações de Lobachevsky em francês e alemão contribuíram para a divulgação dos trabalhos sobre geometria não–euclidiana, difundindo aos poucos a Geometria Hiperbólica.

Carl Friedrich Gauss publicou muito pouco sobre esta nova geometria, chamada, inicialmente, de geometria anti-euclidiana e, posteriormente, de geometria astral e, finalmente de geometria não-euclidiana. A maior parte dos registros históricos desses estudos está nas cartas que trocava com outros matemáticos. Desde 1792, ele estudava a possibilidade de uma geometria que negasse o quinto postulado de Euclides (BONOLA, 1955, p. 65). Em uma carta datada de 1817 ao amigo Heinrich Wilhelm Olbers, Gauss escreve que estaria convencido que o postulado não poderia ser provado.

É nítido que o resultado da correspondência estabelecida por Gauss resultou em sua atenção voltada para as geometrias não-euclidianas, mas devido à falta de tempo e a preocupação em apresentar um trabalho de qualidade, levaram-no a adiar a publicação de seus estudos.

No ano de 1824, em outra correspondência com o matemático Franz Taurinus (1794 – 1874), Gauss comenta que a hipótese de a soma dos três ângulos internos de um triângulo ser menor que 180° leva a uma geometria alternativa, diferente da euclidiana, porém totalmente consistente.

Ao escrever para outro matemático, Friedrich Wilhelm Bessel, em 1829, Gauss dizia que temia os gritos do Beócios, caso publicasse seus estudos sobre a nova geometria (GREENBERG, 2001, p. 182). Ao evitar a sua publicação, demonstrava aversão ao debate público e às controvérsias. Além disso, ele preferia analisar suas provas e aprofundar suas exposições até alcançar uma obra sem falhas.

Após sua morte, houve informações de que ele havia investigado este tema, sendo confirmado por sua correspondência com Schumacher, publicada entre 1860 e 1868, porém o nome de Gauss não conseguiu despertar interesse no estudo das geometrias não-euclidianas.

Um modelo do sistema axiomático pode ser definido como uma interpretação dos conceitos primitivos no qual os axiomas se transformam em proposições verdadeiras. Neste caso, busca-se a interpretação em termos de uma teoria já conhecida, facilitando a verificação das proposições estabelecida. Os modelos da Geometria Hiperbólica foram fundamentais para a sua aceitação, principalmente no que tange à consistência, esta sendo uma das características dos sistemas axiomáticos. Eugênio Beltrami (1835 – 1900), propôs o seguinte teorema: Se a geometria euclidiana for consistente, então a geometria hiperbólica também será, logo a consistência da geometria é relativa à outra, não havendo necessidade de verificar a consistência da geometria euclidiana.

3.2 Concepção moderna de axiomatização da geometria

Podemos perceber que a relação entre a geometria euclidiana e a não-euclidiana no aspecto axiomático foi importante para estabelecer critérios básicos que permitissem visualizar as diferenças entre ambas e, consequentemente, caracterizá-las ou até mesmo reconstruir os primeiros axiomas escolhidos pelo homem para formalizar a geometria de Euclides. Em outros termos, a questão era estabelecer os axiomas mais simples e suficientes para deduzir os teoremas da geometria e estabelecer quais deles eram responsáveis pela experimentação.

Muitos matemáticos do século XIX buscavam as premissas básicas necessárias para provar as consistências das geometrias, cada um buscando esse objetivo em sua respectiva área de atuação, havendo um esforço para que a teoria fosse desenvolvida sem contradições.

As diversas geometrias partem do princípio de diferentes concepções dos objetos geométricos clássicos. No caso da geometria não-euclidiana, reta e plano se situam de uma forma não convencional comparada com a geometria euclidiana, exigindo um método axiomático diferenciado. Assim o surgimento de outras geometrias foi fundamental para o desenvolvimento dos sistemas axiomáticos, porém seu estudo mais detalhado foge de nosso tema de investigação, sendo assim, chamamos a atenção apenas para as axiomatizações da geometria euclidiana voltada aos objetos clássicos.

Na reformulação da axiomática da geometria algumas falhas lógicas são identificadas nos *Elementos* de Euclides, motivando o surgimento de uma nova concepção de sistemas axiomáticos. Resumidamente podemos dizer que uma geometria é euclidiana quando os objetos geométricos de um sistema axiomático são compreendidos da mesma forma que a geometria de Euclides, ou seja, os objetos possuem as mesmas características de sua estrutura.

A base da estrutura axiomática de Euclides está fundamentada na relação de demonstrabilidade na qual os enunciados, além de verdadeiros, deveriam garantir uma inteligibilidade superior aos demais. Esta é a essência da concepção clássica dos sistemas axiomáticos na consideração de demonstração como um instrumento de conhecimento. A demonstração pode ser justificada em parte por meio de um procedimento capaz de reconhecer a verdade de proposições que não contassem com a clareza e a inteligibilidade dos axiomas e postulados.

É possível notar a grande dificuldade que os sucessores de Euclides tiveram na tentativa de compreender o significado e a função dos diferentes elementos na axiomatização da geometria.

Na concepção moderna, a natureza conceitual da estrutura axiomática euclidiana sofre algumas alterações em sua interpretação. O sistema axiomático não explicita os significados previamente dados, mas articula um corpo de conhecimento formal sobre domínios materialmente indeterminados, não necessariamente pré-existentes. Por exemplo, os axiomas da teoria de grupos, expressos como sentenças não – interpretadas (nenhum significado é atribuído ao símbolo de operação binária ou ao símbolo de constante, nem é predeterminado o conjunto de objetos em que esses símbolos serão interpretados) não explica o que é um grupo; eles definem uma estrutura formal pelas suas propriedades formais (independentes de significados determinados), que valem em todos os grupos, não importa quais ou quantos objetos eles contenham. Enquanto sistemas axiomáticos clássicos explicam, esclarecem ou explicitam conceitos ou contextos matemáticos previamente dados, sistemas modernos definem ou caracterizam estruturas formais às vezes livremente concebidas. As caracterizações formais providas por sistemas axiomáticos modernos, no entanto, podem ser variações de teorias materialmente determinadas abstraídas de seus conteúdos materiais: foi a geometria euclidiana tradicional, imbuída dos seus significados, que, abstraída de seus conteúdos e reduzida à sua pura forma, forneceu o material a partir do qual foram criadas, por generalizações, as geometrias não-euclidianas ou as abstratas geometrias (SILVA, 2010, p. 26).

O caráter conceitual dos axiomas é modificado, sendo examinados em grupos e o conceito de evidência deixa de ser considerado, surgindo diversas desconfianças sobre a intuição na teoria axiomática. Do ponto de vista dedutivo, a prova adquire um formato algébrico, evitando-se os significados dos termos na busca de maior rigor nas demonstrações.

A nova abordagem de um sistema axiomático começa a ser considerado do ponto de vista estritamente dedutivo, baseado fundamentalmente em símbolos e suas relações.

Um dos pioneiros ao elaborar esse novo sistema axiomático para a geometria foi o matemático alemão Moritz Pasch (1843-1930), exibindo as bases fundamentais da geometria projetiva plana em uma perspectiva empirista, na sua obra *Lições de geometria moderna*, publicada em 1882. Pasch acreditava que somente com a exposição do homem à natureza o permite conceber as noções primitivas.

Em seu tratado de geometria euclidiana, Pasch faz um reconhecimento da importância da distinção entre definição implícita e explícita. O conceito de definição explícita parece mais familiar, sendo este tipo de definição mais empregada. Na definição explícita, um novo termo é representado pelo significado do termo que já foi aceito no vocabulário. A definição implícita, por outro lado, é relativamente não familiar, embora tal noção seja indispensável na estrutura lógica.

Considerando a tentativa de Euclides de classificar as definições explícitas em termos de reta, ponto e plano, por exemplo, Pasch aceita estas como sendo primitivas, ou termos irredutíveis em seu desenvolvimento da geometria euclidiana; ele utiliza somente definições implícitas nas proposições básicas que assumiu como postulados em seu tratamento. Apesar da origem das proposições básicas, descritas como núcleos, estabelecem uma consideração empírica, Pasch enfatiza que estes são enunciados sem considerar qualquer significado empírico (EVES, p.80, 1990).

Outro ponto interessante na abordagem de Pasch está na forma como concebe a Geometria Projetiva, a partir de seus termos, tomando um cuidado especial em não se apoiar nas propriedades dos diagramas, trabalhando somente com inferências dedutivas obtidas pelos axiomas. Segundo Pasch, o significado dos axiomas é de natureza puramente geométrica, nunca totalmente formal, tornando seu significado incompreensível na ausência de uma figura geométrica associada a ele.

> Pasch’s analysis relating to the order of points on a line and in the plane is both striking and pertinent to its understanding. Every student can draw diagrams and see that if a point B is between A and a point C, then C is not between A and B, or that every line divides a plane into two parts. But no one before Pasch had laid a basis for dealing logically with such observations. These matters may have been considered too obvious; but the result of such neglect is the need to refer constantly to intuition, so that the logical status of what is being done cannot become clear.(A. Seidenberg, Biography in Dictionary of Scientific Biography, New York 1970-1990)

Como comentamos, na interpretação empírica da geometria, Pasch obtém os axiomas após observação do mundo exterior classificando-os em: proposições concernentes à reta e ao plano. Estes dois grupos estabelecem a base das geometrias projetiva e afim. No grupo das figuras congruentes, obtém-se a geometria ordinária e, por fim, estabelece uma relação de ordem a partir de pontos sobre uma reta.

Pasch mostra que as geometrias são construções obtidas pelo homem, podendo ter alguma relação com o mundo real, mas não servindo de modelo representativo para ele. Neste aspecto, concluiu que a geometria euclidiana necessitava de uma reforma em diferentes aspectos, caso a mesma ainda quisesse ser o ponto inicial para a concepção de outras geometrias.

Apesar de apresentar a primeira exposição axiomática da geometria, seu modelo não possuía regras lógicas de forma explícita e, além disso, existia uma mistura entre empirismo e formalismo. Um dos seguidores de Pasch, o matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) apresentou, em 1889, um novo desenvolvimento postulacional da geometria de Euclides. Assim como Pasch, baseou sua axiomática em certos termos primitivos, dentre os quais estão objetos chamados de “ponto” e a relação “entre pontos” designada por “estar entre”. Uma boa parte do trabalho de Peano é uma tradução da obra de Pasch, usando a notação de uma lógica simbólica a qual Peano introduz nos conceitos matemáticos.

Na versão de Peano, nenhum sinal de empirismo é encontrado, pois sua geometria é puramente formal em virtude de sua construção baseada nos cálculos das relações entre variáveis. Ele concebe a ideia de simbolizar os termos primitivos e o processo lógico dos conceitos geométricos, sua análise lógica da geometria como um sistema dedutivo-hipotético com nenhum conteúdo intrínseco antes empregado pelos postulados.

Outro matemático italiano, Mario Pieri (1860-1904), estabeleceu em 1899, um novo tratamento axiomático, distinto de seus predecessores. “Pieri considerava o objeto de seu estudo como sendo um agregado de elementos indefinidos chamados ‘pontos” e um conceito indefinido de “movimento”.

Pieri apresenta um grupo de cinco postulados, designando a importância do conceito de movimento em geometria.

3.3 Axiomatização de Hilbert

A abordagem axiomática mais amplamente adotada na geometria euclidiana foi elaborada pelo alemão David Hilbert (1862-1943), em 1899, em um curso dado na Universidade de Göttingen, e publicada sob o título de “Grundlagen der geometrie” (Fundamentos da Geometria).

Em seu sistema dedutivo, Hilbert desenvolve um conjunto de postulados no plano e espaço da geometria euclidiana, não se distanciando muito da reconhecida proposta de

Euclides, empregando um mínimo de simbolismo. O matemático alemão logrou êxito sendo mais convincente em seu sistema dedutivo-hipotético de natureza geométrica. Sua forma de representar a geometria, simbolicamente, difere dos trabalhos de Pasch e Pieri, os quais possuíam um simbolismo de difícil compreensão, dificultando o entendimento dos conceitos geométricos envolvidos. Considerando que Euclides fez uma distinção entre “postulados” e “noções comuns”, os matemáticos modernos consideram esses dois termos sinônimos e designam a derivação lógica de enunciados de um sistema formal.

Em nossa investigação, apresentaremos o conjunto de axiomas relacionados à geometria do plano, mostrando os termos primitivos na axiomática de Hilbert e ressaltando que sua necessidade é semelhante ao primeiro princípio aristotélico: evitar um regresso ao infinito. No sistema axiomático de Hilbert, as definições são elaboradas a partir dos termos primitivos e por não terem uma definição, os termos primitivos possuem significados determinados exclusivamente pelos axiomas.

Neste sistema, o matemático alemão percebe que o termo primitivo pode ser de dois tipos: a) objetos da geometria; b) e as relações entre os objetos. Ao classificar os termos de forma diferente, ele escolhe os três objetos considerados fundamentais na geometria: ponto, reta e plano. Tais objetos se interagem através de relações, escolhendo três como sendo indefinidas: incidência, ordem e congruência.

É importante notar que a discussão não é apoiada nos objetos da geometria, mas sim no grupo de relações acrescentadas por paralelismo e continuidade, sendo esse conjunto de regras responsável por obter afirmações logicamente verdadeiras, ou seja, os teoremas.

Para Hilbert, todo sistema de objetos, entre os quais existem relações que podem ser manipuladas a fim de dar a futuros enunciados um valor de verdade, é uma geometria. Mesmo que a geometria possua elementos diferentes, se elas estão sob a mesma estrutura, elas possuem os mesmos valores semânticos lógicos, ou seja, teoremas decorrentes de deduções lógicas terão o mesmo resultado, independente dos objetos.

A axiomatização tem como objetivo deduzir afirmações a partir de uma quantidade finita de passos, apoiando-se nos axiomas que caracterizam e definem uma estrutura. Como os axiomas caracterizam um modelo, eles são suficientes para moldar um objeto e descrever suas relações dentro da estrutura. Os axiomas se caracterizam por serem admitidos como determinações implícitas, segundo Hilbert.

Apresentaremos os grupos de axiomas e um breve comentário sobre as características de cada axioma e suas consequências.

3.4 Axiomas de incidência

Estes axiomas possuem alguma semelhança com o primeiro e o segundo postulado de Euclides, indicando a existência de uma reta. No enunciado dos dois primeiros axiomas iremos observar que se referem a uma geometria plana ao relacionarem apenas retas e pontos.

Os axiomas de incidência partem de pontos, retas e suas intersecções, sendo os dois primeiros considerados objetos indefinidos (HARTSHORNE, 2000, p. 66).

Os axiomas de incidência são:

1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.
2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.
3. Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

De acordo com os axiomas podemos obter a seguinte definição: Se um ponto P pertence a uma reta *r*, dizemos que P está em *r*, ou *r* passa por *P*.

Com a definição acima e os três axiomas de incidência podemos esperar resultados interessantes, mostrando como provar os teoremas baseados nesses axiomas.

Proposição 1. Duas retas distintas podem ter no máximo um ponto em comum.

Demonstração: Sejam duas retas suponhamos que ambas contém os pontos A e B, com $A \neq B$. Pelo axioma 1, existe uma única reta contendo A e B, mas a reta r deve ser igual à m.

3.5 Axiomas de ordem

Aqui são apresentados os axiomas relacionados ao conceito de “estar entre” os quais relacionam a ordem entre os pontos na reta. Esses axiomas formam uma parte importante de um novo fundamento para a geometria (HARTSHORNE, 2000, p. 73). É pressuposta uma relação entre conjuntos de três pontos *A*, *B*, *C* designado por “ *B* está entre *A* e *C*”, sendo essa relação sujeita aos seguintes axiomas (HILBERT, 1971, p. 6):

1. Se um ponto *B* está entre *A* e *C*, então os três pontos pertencem a uma mesma reta e *B* está entre *C* e *A*.
2. Para quaisquer dois pontos distintos *A* e *C*, existe pelo menos um ponto *B* pertencente à reta *AC* tal que *B* está entre *A* e *C*.
3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um deles está entre os outros dois.
4. Quaisquer pontos *A*, *B*, *C*, *D* de uma reta sempre podem ser arranjados de maneira

que o ponto B esteja entre o *A* e o *C* e também entre o *A* e o *D*, além disso, de maneira que o ponto C esteja entre o *A* e o *D* e também entre o *B* e o *D*.

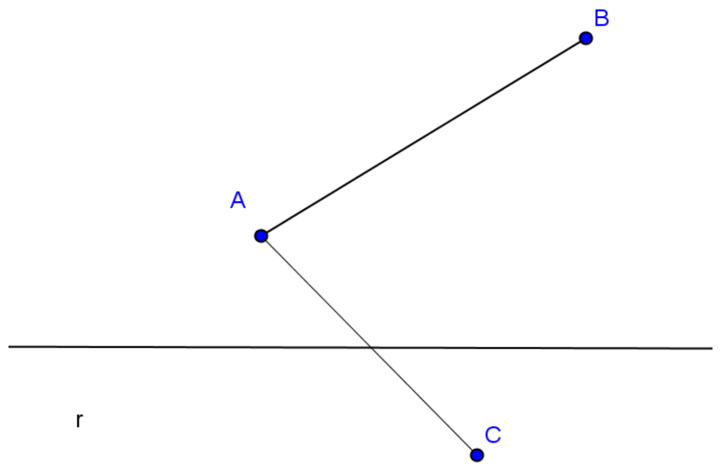
5. (Pasch) Sejam *A*, *B* e *C* três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja r uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se r intercepta o segmento *AB*, ela também intercepta o segmento *AC* ou o segmento *BC*.

Se *A* e *B* são pontos distintos, definimos um segmento de reta $\overline{AB}$ como sendo o conjunto consistindo de pontos *A*, *B* e os pontos compreendidos entre eles.

Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ são considerados os mesmos pelo axioma 1 e os pontos extremos *A* e *B* são unicamente determinados pelo segmento $\overline{AB}$.

Alguns resultados interessantes podem ser obtidos com a definição acima juntamente com o axioma de Pasch. Consideremos uma reta *r* e dois pontos distintos, *A* e *B*, não pertencentes a *r*. Dizemos que os pontos *A* e *B* estão em um mesmo lado da reta *r* se o segmento *AB* não a intercepta. Caso contrário, dizemos que *A* e *B* estão em lados opostos da reta *r*.

Figura 2



Fonte: HILBERT, 1971

Considerando os axiomas de ordem de 1 a 4, Hilbert obtém o seguinte teorema: entre dois pontos de uma reta, existem infinitos pontos (HILBERT, 1971, p. 7). Observamos que os axiomas de 1 a 4, são axiomas de linearidade, pois representam pontos de uma única reta, por outro lado, o axioma 5, trata da geometria plana. Hilbert faz algumas definições e, consequentemente, os teoremas decorrentes do sistema axiomático dos dois grupos apresentados: ordem e incidência. Com os conceitos de segmento ele define "linha quebrada" mostrando a definição de polígono, vértice de um polígono, tipos de polígonos, entre outros.

Através do teorema visto anteriormente, os elementos do espaço são apresentados, mostrando os fatos mais importantes com relação a sequência e ordem de tais elementos. O interessante é que esses fatos partem desses axiomas, sem a necessidade de inclusão de qualquer outro axioma do espaço no grupo de axiomas de ordem.

3.6 Axiomas das Paralelas

No terceiro grupo de axiomas, Hilbert enuncia o quinto postulado de Euclides. Existe uma semelhança da versão do matemático alemão com o enunciado de Playfair. O axioma é apresentado da seguinte forma (HILBERT, 1971, p. 11):

1. Em um plano α pode ser traçada de qualquer ponto *A*, que esteja fora da reta *r*, uma e somente uma reta que não corta a reta *r*. Essa reta é chamada de paralela à reta *r* através do ponto *A* dado.

Esse axioma diz respeito à Geometria Plana, contendo duas partes, uma sobre a condição de existência e a outra sobre unicidade da paralela. Hilbert mostra na primeira parte que a existência é consequência dos axiomas do grupo um, dois e quatro. Com esse axioma temos ainda o seguinte resultado: se duas retas *a* e *b* de um plano não encontram uma terceira reta *c*, do mesmo plano, então elas não se encontram.

Segundo a afirmação de Hilbert, a partir desse teorema pode-se provar o enunciado original do quinto postulado euclidiano. No que tange a esse axioma, como mencionamos anteriormente, gerou muitas controvérsias ao saber se ele era decorrente dos demais axiomas ou podia ser considerado um axioma independente do sistema.

Os Fundamentos da Geometria elaborada por Hilbert também tratava das geometrias não-euclidianas, sendo esta uma consequência dos questionamentos sobre o quinto postulado e sua independência:

> Os *Grundlagen der Geometrie* não se resumiam à geometria euclidiana, mas consideravam também as chamadas geometrias não euclidianas. Essas geometrias

> nasceram da tentativa de se demonstrar que o quinto postulado de Euclides, o postulado das paralelas, era dependente dos restantes (sendo assim um teorema demonstrado, não um axioma, uma verdade auto evidente). Essas tentativas duraram séculos, mas, pelo início do século XIX, ficou claro que não apenas o postulado das paralelas era de fato independente, mas que era possível substituí-lo por axiomas contrários a ele *sem contradição.* (SILVA, 2007, p. 188).

De uma forma bem sucinta, apresentamos como Hilbert caracterizou a independência do axioma. Primeiramente, para demonstrar a consistência dos axiomas, ele construiu pontos, retas e planos representados aritmeticamente, considerando esses objetos construídos em uma esfera fixada. Depois, define a congruência dessa geometria com uma transformação linear e a partir daí, afirma que essa nova geometria obedece todos os axiomas do sistema, exceto o axioma das paralelas.

3.7 Axiomas de congruência

O quarto grupo corresponde aos axiomas de congruência. Esses axiomas representam o significado de "congruente" e "deslocamento", relacionando dois segmentos.

Os axiomas são os seguintes (HILBERT, 1971, p. 12):

1. Se A e B são dois pontos em uma reta r, e se C é um ponto sobre a mesma reta, ou em uma outra reta s, então sobre um lado dado de C na reta s, podemos sempre encontrar um, e somente um, ponto D de forma que o segmento AB (ou BA) é congruente ao segmento CD. Indicamos essa relação de congruência por $AB \equiv CD$. Todo segmento é congruente a ele mesmo; isto é, sempre teremos $AB \equiv AB$.
2. Se um segmento AB é congruente à um segmento $A´B´$ e também ao segmento $A´´B´´$, então o segmento $A´B´$ é congruente $A´´B´´$; isto é, se $AB \equiv A´B´$e $AB \equiv A´´B´´$.
3. Sejam AB e BC dois segmentos de uma reta r que não tem pontos em comum além do ponto B, e, além disso, sejam $A´B´$ e $B´C´$dois segmentos da mesma ou de uma outra reta $r´$que tenha, da mesma forma, nenhum ponto além de $B´$em comum. Então, se $AB \equiv A´B´$e $BC \equiv B´C´$, temos $AC \equiv A´C´$.

Hilbert define alguns conceitos de ângulo, raio do vértice e região interior e exterior de um ângulo, antes de prosseguir com os axiomas. Na definição, considera α um plano qualquer e h, k raios de mesmo vértice. O sistema formado por esses dois raios h, k é um ângulo, representado por (h, k) ou (k, h). Com essas definições ele inicia o quarto axioma (HILBERT, 1971, p. 14):

4. Seja um ângulo (h, k) dado em um plano α e seja um reta $a´$dada em um plano $\alpha´$.

Suponha também que, em um plano α, um lado definido da reta *a* ´seja marcado. Denota-se por *h* ´uma semi-reta da reta *a´* que parte de um ponto *O´* desta reta. Então no plano α´existe uma e somente uma semi-reta *k* ´tal que o ângulo *(h, k)* ou *(k, h)*, é congruente ao ângulo *(h´, k´)*e ao mesmo tempo todos os pontos interiores do ângulo *(h´, k´)* estão sobre o lado dado de a´. Essa relação é representada pela notação *(h, k)*≡ *(h´,k´)*. Todo ângulo é congruente a ele mesmo; ou seja, *(h, k)*≡ *(h, k)* ou *(h, k)* ≡ *(k, h)*.

5. Se o ângulo *(h, k)* é congruente ao ângulo *(h´, k´)* e ao ângulo *(h´´, k´´)*, então o ângulo *(h´, k´)* é congruente ao ângulo *(h´´, k´´)*. Isso é o mesmo que dizer que, se *(h, k)* ≡*(h´, k´)* e *(h, k)* ≡*(h´´, k´´)*, então *(h´, k´)* ≡ *(h´´, k´´)*.
6. Se em dois triângulos *ABC* e *A´B´C´*, as congruências *AB* ≡ *A´B´*, *AC*≡*A´C´*, ângulo *ABC* ≡ ângulo *A´B´C´* e ângulo *ACB* ≡ ângulo *A´C´B´* também se verificam, então as congruências ângulo *ABC* ≡ ângulo A´B´C´ ângulo *ACB* ≡ ângulo *A´C´B´* também se verificam.

Nesse grupo, os três primeiro são lineares e os demais de geometria plana. Hilbert enuncia as definições de ângulo reto, ângulo suplementar, entre outras. Dentre os teoremas, ele prova a congruência de triângulos, apresentando outros dois, também sobre congruência de triângulos, além de outros teoremas. Hilbert não mostra a maioria dos teoremas, mas nesse grupo quase todos são provados. Seu décimo quinto teorema é o quarto postulado de Euclides, o qual é demonstrado por Hilbert.

Antes de irmos para o último grupo de axiomas de Hilbert, vejamos como a existência da paralela é decorrência dos axiomas, sendo assim, é necessário postular apenas a unicidade, mas a redação do axioma não ficaria conveniente se não usasse o vocábulo "existe". Devemos destacar que o termo "existe" se refere a existência da unicidade, e não da reta. Podemos prosseguir da seguinte forma para verificar se a existência procede dos axiomas: ligue o ponto *A*, que está fora da reta a, até um ponto *B* qualquer da reta a, formando um segmento *AB*. Marque um ponto *C* qualquer na reta a e a partir do ponto a, sobre o segmento *AB* e do lado oposto ao ponto *C*, construa um ângulo igual ao ângulo *ABC*. Essa reta que passa por *A*e faz ângulo *ABC* com o segmento *AB* não corta a reta a em ponto algum, logo, ela é paralela.

3.8 Axiomas da continuidade

Antes de iniciar com o quinto grupo de axiomas, Hilbert ressalta que devemos entender a igualdade de segmentos como uma congruência, ou seja, define "igual" como a correspondência entre segmentos congruentes. Em conformidade com essa convenção, Hilbert introduz o axioma de Arquimedes com o seguinte enunciado (HILBERT, 1971, p. 25):

1. Seja A_1 qualquer ponto sobre uma reta entre os pontos A e B escolhidos arbitrariamente. Tome os pontos A_2,A_3,A_4, ... de forma que A_1 esteja entre A e A_2, A_2 entre A_1 e A_3, A_3 entre A_2 e A_4, etc. Além disso, sejam os segmentos AA_1 , A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... um igual ao outro. Então, dentre esta série de pontos, sempre existe um ponto A_n tal que B está entre A e A_n.

O axioma de Arquimedes é considerado um axioma linear. Nesse grupo, Hilbert não faz nenhum tipo de demonstração, apresentando apenas um axioma que não é puramente geométrico e chamado de axioma de completude. Neste axioma, para um sistema de pontos, retas, e planos, é impossível adicionar outro elemento tal que do jeito que o sistema considerado formará uma nova geometria obedecendo aos cinco grupos de axiomas, ou seja, esse axioma diz que os elementos da geometria formam um sistema o qual não é suscetível de extensão, se considerarmos os cinco grupos de axiomas como válidos.

Alguns fatos importantes podem ser destacados após o estudo do grupo de axiomas de Hilbert. Após uma breve análise, do ponto de vista geométrico, verificamos que Hilbert organiza os grupos de axiomas de acordo com as relações dos objetos geométricos em cada axioma, porém existe um outro grupo que é mencionado como grupo relacionado à dimensão. Assim temos o grupo dos axiomas lineares, axiomas planos e espaciais.

Outra condição que pode ser observada sobre sua axiomatização é que nem todos os axiomas só tratam de objetos indefinidos, como é o caso do quinto axioma do segundo grupo (ordem), o primeiro, segundo e terceiro do quarto grupo (congruência), o axioma do quinto grupo (continuidade) os quais usam o objeto "segmento". O quarto, o quinto, o sexto axioma do grupo quatro (congruência), usam o objeto ângulo, além do objeto semi-reta utilizado no quarto grupo. Assim, temos três objetos definidos: segmento, ângulo e semi-reta os quais compõem os axiomas.

O objetivo principal de Hilbert era provar a consistência da geometria, ou seja, provar que na geometria não é possível obter dois enunciados contraditórios.

Provando-se a consistência da aritmética dos números reais, também ficaria provada a consistência da geometria, já que ele foi capaz de construir interpretações numéricas dos termos modernos e fazer assim as geometrias falarem de números (SILVA, 2007, p. 189).

O estudo da consistência dos números reais não faz parte de nossa investigação, porém, cabe tecer alguns comentários acerca da consistência da teoria, ou seja, o primeiro passo é axiomatizar esse conhecimento como um sistema formal.

O matemático alemão apresentou, em 1900, a aritmética dos números reais como um sistema formal, num artigo chamado *Überden Begriff der Zahl* (Sobre o conceito de número). Na segunda etapa, demonstrar a consistência desse sistema foi uma tarefa mais complicada, pois na época, o método de demonstração da consistência consistia em interpretar os termos da teoria de modo que tornassem verdadeiros os axiomas.

A demonstração da consistência feita por Hilbert tinha um caráter relativo, mas esta deveria ser uma demonstração absoluta de consistência da aritmética dos números reais, pois assim a consistência dessa teoria e de todas as teorias cujas consistências estão na sua dependência, estaria definitivamente demonstrada.

Além da consistência, outras características dos sistemas formais são importantes para a investigação da axiomática de Hilbert, aprimorando o conhecimento sobre os fundamentos da geometria e sua base lógica.

3.9 Propriedades da estrutura axiomática moderna

A maneira mais eficiente para estabelecer a consistência de um conjunto de axiomas é o método dos modelos. Como vimos, um modelo de um sistema axiomático é obtido interpretando ou atribuindo significado concreto aos termos primitivos, convertendo os axiomas em afirmações verdadeiras sobre esses conceitos, existindo dois tipos de modelos: materiais e ideais.

Um modelo é dito material se os significados dados aos termos primitivos são objetos e relações do mundo real, enquanto que no modelo ideal, os significados dados aos termos primitivos são objetos e relações adaptadas de um outro sistema axiomático.Na exposição de um modelo material, podemos ter a ideia de estabelecer a consistência absoluta de nosso sistema axiomático, posto que, se teoremas contraditórios puderem ser derivados dos axiomas, então afirmações correspondentes contraditórias deveriam valer também no modelo concreto material, porém, contradições no mundo real não devem ser possíveis.

Construir um modelo concreto de um sistema axiomático nem sempre é possível. Se o conjunto de postulados englobar um número infinito, por exemplo, de elementos primitivos, pode ser impossível encontrar no mundo real um modelo material para tal sistema. Nessas circunstâncias tentamos construir um modelo ideal, associando aos termos primitivos de um sistema axiomático (denotado por A) conceitos de algum outro sistema (denotado por B) de maneira que as interpretações dos axiomas do sistema A sejam consequências lógicas dos axiomas do sistema B.

No teste da consistência, não é permitida a prova absoluta da consistência, mas somente um teste relativo. Então, o que podemos dizer é que os axiomas do conjunto A são consistentes se forem consistentes os axiomas do conjunto B, reduzindo a consistência do sistema A à do sistema B (EVES, 1990, p. 155).

A prova da consistência pelo método dos modelos é um processo indireto. É concebível que a consistência absoluta possa ser estabelecida por um processo direto que visa mostrar, seguindo regras de inferência dedutiva, que não podemos chegar, partindo dos axiomas, em teoremas contraditórios.

Hilbert atacou o problema de garantir a consistência do sistema de números reais, como mostramos anteriormente, utilizando o método direto e obtendo um êxito parcial. Como o método dependia das regras de inferência lógica, qualquer mudança nas regras desestabeleceria a prova de consistência previamente estabelecida.

A descoberta e prova da consistência da Geometria de Lobachevsky, como vimos no início do capítulo, estabeleceu a independência do postulado das paralelas, não sendo exagero dizer que as considerações históricas sobre o quinto postulado de Euclides foram responsáveis pelo início do estudo das propriedades dos conjuntos de postulados e, portanto da formulação do moderno método axiomático.

A maneira que foi demonstrada a independência do Postulado das Paralelas fornece um teste geral para se demonstrar a independência de um axioma em outros sistemas axiomáticos. O teste consiste em encontrar significados para os termos primitivos do sistema axiomático que deixam falso o postulado que se quer demonstrar a independência, mas que transformam em verdadeiro todos os restantes. Caso tenhamos sucesso em encontrar tais significados, então o axioma em questão não poderá ser uma consequência lógica dos demais, pois tais significados, uma vez convertendo os restantes em proposições verdadeiras, deveriam também converter em verdadeiro o postulado em questão, se ele pudesse ser deduzido dos outros postulados do sistema.

De acordo com Wilder (1965), existe uma definição formal para a independência de axiomas. Ele denota por Σ um sistema de axiomas e considera A sendo um dos axiomas de Σ. A negação de A é representado por ($\sim A$) e $\Sigma - A$ representa a subtração do axioma A do sistema Σ. Se S é alguma sentença no sistema $\Sigma, \Sigma + S$ representa o sistema contendo os axiomas de Σ e S como um novo axioma. Sendo assim, podemos dar a seguinte definição: Se Σ é um sistema axiomático e A é um dos axiomas de Σ, então A é dito independente em Σ, se ambos, Σ e o sistemas axiomáticos $(\Sigma - A)$+$(\sim A)$ são satisfeitos.

Geralmente seria preferível ter todo axioma independente, porém se algum axioma acaba não sendo independente, o sistema não é invalidado. Um exemplo disso é o a formulação original do conjunto de axiomas para a geometria de Hilbert.

A propriedade de completude, por outro lado, é um pouco mais elaborada que as propriedades já discutidas. Admitiremos, hipoteticamente a possibilidade de construir um sistema de axiomas para a Geometria Euclidiana Plana, selecionando inicialmente os termos primitivos.

Tais termos devem constituir uma coleção de termos técnicos da geometria, sendo que outros termos devem ser definidos por meio deles.

O próximo procedimento que devemos executar é formular uma lista crescente de afirmações mutuamente compatíveis sobre os termos primitivos, sendo esses os axiomas. Surge logo uma questão: em qual momento devemos parar de acrescentar a lista de axiomas?

Obviamente queremos que o conjunto de postulados seja amplo o suficiente para implicar a “verdade” ou a “falsidade” de qualquer afirmação possível da geometria euclidiana plana, ou seja, queremos ter um número suficiente de axiomas de forma que S é uma sentença qualquer relativa aos termos primitivos, então ou S ou sua negação (~S) seja implicada pelos nossos axiomas. Caso o conjunto de axiomas não seja suficientemente amplo, certamente algumas afirmações da geometria não poderão ser demonstradas a partir dos axiomas, nem mesmo a negação de tais afirmações (EVES, 1990, p. 160).

Na geometria euclidiana, se tivéssemos proposto um sistema de axiomas sem o postulado das paralelas, nesse sistema incompleto, não poderíamos decidir se a soma dos ângulos internos de um triângulo é ou não 180°, pois nosso sistema incompleto está relacionado tanto à geometria euclidiana quanto à geometria de Lobachevsky.

Os axiomas serão suficientemente amplos se atingirmos o ponto em que se tornaria impossível acrescentar novas afirmações ao conjunto de axiomas que seja independente e consistente com os axiomas já formulados. Caso essa situação seja alcançada, então teremos um conjunto de axiomas completo para a geometria.

Podemos dizer que um conjunto consistente de axiomas é completo se for impossível adicionar ao conjunto, sem ampliar a coleção de termos primitivos, um outro axioma que seja independente e consistente com os axiomas dados.

Ainda segundo Wilder (1965), temos a seguinte definição formal de completude dos axiomas: um sistema axiomático Σ é completo se não existe uma proposição em Σ, tal que A é um axioma independente no sistema $\Sigma + A$, ou seja, ambos os sistemas $\Sigma + A$ e $\Sigma + (\sim A)$ são satisfeitos.

Tanto a definição de completude, como a de consistência, não são facilmente testadas em um dado sistema de axiomas. De uma forma geral, vimos que um teste de consistência poderia ser feito usando-se interpretações para o conjunto de axiomas. Um teste para completude pode ser realizado se conhecermos o conceito de categoricidade, que apresentaremos a seguir.

Uma interpretação de um sistema de axiomas Σ consiste em um conjunto não vazio *D*, chamado o domínio da interpretação e em uma atribuição que a cada relação Σ faz corresponder uma relação de mesma aridade em *D*, a cada operação em Σ, uma função de mesma aridade de *D* em *D* e a cada constante em Σ, um elemento de *D*, de modo que os axiomas de Σ sejam transformados em sentenças verdadeiras em *D*.

Consideremos duas interpretações do mesmo sistema axiomático:

a) Uma interpretação ω, com elementos constantes α's, relações constantes $r_{1,}$, $r_{2,}$, ...e operações constantes θ_1, θ_2,...
b) Uma interpretação ω', com elementos constantes β's relações constantes $r'_{1,}, r_{2,}{}'$, ...e operações constantes $\theta'_1, \theta_2{}'$, ...

As interpretações ω e ω' são isomorfas, se for possível estabelecer uma correspondência bijetora entre os elementos α de ω e os elementos β de ω' que preserve as relações e as operações.

Se duas interpretações ω e ω' de um mesmo conjunto de axiomas P são isomorfas, então qualquer proposição verdadeira (ou falsa) na interpretação ω se tornará correspondentemente uma proposição verdadeira (ou falsa) na interpretação ω', trocando as constantes de acordo com sua interpretação correspondente.

Então, um conjunto de axiomas P é categórico, se todas as possíveis interpretações de P forem isomorfas no sentido descrito acima. Obtemos assim, o seguinte resultado: se um sistema axiomático *P* é consistente e categórico, então ele é completo.

Estabelecer a completude de um conjunto de axiomas torna-se difícil numa situação prática. Para mostrar a incompletude, no entanto, basta produzir as interpretações não isomorfas do conjunto de axiomas. Algumas vezes a completude de um sistema pode ser determinada mostrando-se que qualquer interpretação do conjunto dado é isomorfa a alguma interpretação.

Hilbert utilizou este processo para provar que sua axiomática da geometria euclidiana era completa: mostrou que qualquer interpretação de sua axiomática era isomorfa à geometria analítica.

Na construção de uma teoria pelo método axiomático é desejável introduzir os axiomas um a um ou em conjuntos relacionados de modo a tornar claro como os teoremas em estudo dependem dos axiomas. Por exemplo, os teoremas comuns da geometria euclidiana e da geometria hiperbólica seguem da axiomática de Hilbert, retirando-se o postulado das paralelas, sendo o conjunto de axiomas obviamente incompleto pois admite interpretações não isomorfas.

Outra propriedade relacionada aos sistemas axiomáticos é a equivalência, relativa a duas estruturas postulacionais. Neste caso, sejam P^1 eP^2 sistemas axiomáticos equivalentes, nos quais os termos primitivos de cada um deles podem ser definidos em termos do outro e os axiomas de cada um deles podem ser deduzidos a partir dos axiomas do outro. Verificando que os dois sistemas são equivalentes, então as estruturas abstratas são as mesmas, pois estamos tratando da mesma coisa de maneiras diferentes.

A ideia de sistemas axiomáticos equivalentes apareceu desde antigamente, com a insatisfação do quinto postulado de Euclides, tentando substituí-lo por outro equivalente e mais aceitável. Os modernos estudos da geometria euclidiana, com suas diferentes bases postulacionais, mostram claramente que um sistema axiomático não é unicamente determinado pelo estudo em foco, mas depende de quais termos técnicos são escolhidos como primitivos e quais afirmações são tomadas sem prova (EVES, 1990, p. 154).

Como um dado estudo pode ser construído sobre mais de um possível sistema axiomático, surge uma questão sobre qual desses sistemas é melhor. Baseando-se na economia, um conjunto de axiomas que contenha menos termos primitivos parece ser o melhor, entretanto o mesmo não pode ser aplicado aos axiomas, pois podemos, utilizando conectivos, juntar vários postulados em um único maior.

3.10 Algumas considerações sobre os axiomas de Hilbert

Ao expormos os grupos de axiomas de Hilbert e ao analisarmos sua estrutura lógica, verificamos que sua abordagem marca a transição para o método axiomático moderno. Apesar de a geometria tratar de objetos nos quais utilizamos a intuição, não se faz necessário ter significado explícito para os conceitos envolvidos. De acordo com Hilbert, não havia a necessidade de tratar dos objetos geométricos para construir suas demonstrações, pois objetos do cotidiano podem substituir os termos primitivos da geometria de modo que a construção e o valor lógico permaneçam válidos. Como constatamos nos grupos de axiomas, a discussão não se baseia nos objetos, mas na relação entre eles.

Uma das propriedades citadas anteriormente, a consistência, foi discutida por diversos matemáticos referentes aos postulados de Euclides, e notaram que sendo insuficientes para provar os teoremas conhecidos e outros que viessem a ser considerados no futuro necessitavam de ferramentas lógicas e matemáticas para “corrigir” as falhas na estrutura axiomática.

No desenvolvimento dos fundamentos da matemática, Hilbert se manifesta através do formalismo em todo seu método axiomático, principalmente porque a análise matemática já consolidava os números reais como uma estrutura algébrica de corpo ordenado completo.

Um exemplo dessa afirmação é a própria forma com que o matemático alemão organizou e intitulou os cinco grupos de axiomas: evidenciou as relações entre os objetos geométricos, a possibilidade de ordenação, define que objetos congruentes (ângulos e segmentos) coincidem por superposição, mostra a possibilidade de construção de uma única reta paralela a uma reta dada por um ponto fora dela e aponta a necessidade de explorar o conceito de continuidade.

No axioma de Arquimedes, notamos que é possível encontrar sobre uma reta que passa pelos pontos A e por B distintos, um ponto tão próximo de B quanto se queira. Isso ocorre com o conjunto dos números racionais na reta enumerada, pois sabemos que o princípio arquimediano para os números racionais não é suficiente para garantir a continuidade no conjunto dos números reais, porém admitindo que a união dos números racionais com os irracionais forma os reais, podemos garantir que qualquer ponto da reta possui coordenadas reais. O axioma de completude diz que partindo de uma estrutura que satisfaz determinadas propriedades fundamentais de ordem linear e de congruência, resultado dos axiomas anteriores, e de Arquimedes, é impossível juntar à esta estrutura novos objetos, de modo que a nova estrutura formada satisfaça aos primeiros axiomas de maneira análoga àquela antes da inserção de novos objetos à estrutura. Este resultado recupera a concepção intuitiva de espaço.

É possível fazer também uma tradução das propriedades geométricas do espaço em termos de relações aritméticas, obtendo um sistema de fácil aceitação dos axiomas precedentes. Mas ainda não conseguiríamos representar o espaço intuitivo, pois nele existiriam lacunas. A função do axioma de completude na axiomática de Hilbert é caracterizar a continuidade própria dos números reais ou dos pontos do espaço infinito, garantindo restrições da axiomatização a modelos isomorfos.

Após investigarmos o grupo de axiomas, podemos ainda destacar alguns fatos importantes encontrados no primeiro capítulo.

Observamos que a existência de retas coplanares sem intersecção não é resultante dos axiomas de incidência. Ela é demonstrada como consequência dos axiomas de ordem e de congruência. Além disso, o terceiro axioma de ordem mostra a diferença fundamental entre pontos alinhados e não alinhados a partir de retas concorrentes: de três retas coplanares concorrentes, uma delas sempre vai cruzar as outras duas. É interessante notar que este axioma exclui a dualidade, e consequentemente, a presença da geometria projetiva.

Nos enunciados de Hilbert, o conceito de "igualdade" está muitas vezes associado à noção de medida e não à noção geométrica de "congruência", como geralmente é considerada nos objetos geométricos. Para ele, figuras congruentes possuem determinadas igualdades numéricas e, para igualdade de segmentos, a noção somente é consolidada no início do capítulo 3, quando Hilbert introduz sinais algébricos aos segmentos, para se diferenciarem no sistema de eixos cartesianos. Posteriormente, com a exposição dos axiomas de congruência, estas definições se misturam e Hilbert define a congruência entre figuras planas como um caso particular de relação de equivalência.

Nos axiomas de congruência, é garantida a existência de segmentos e ângulos e suas propriedades são verificadas: unicidade, reflexividade, simetria, transitividade e a possibilidade de efetuar operação de adição. Outra evidência no quinto axioma de congruência é sobre a congruência de dois triângulos, presente na maior parte dos teoremas seguintes. Sem ele, tais proposições poderiam ser apresentadas como axiomas.

Muito brevemente, apresentamos a ideia principal do método axiomático de Hilbert, exemplificamos a sua utilização na demonstração de teoremas e destacamos seu formalismo como a base do pensamento Hilbertiano no que tange aos fundamentos da geometria, investigando os grupos de axiomas que definem a estrutura. Resta perguntarmos sobre alguns pontos que aparentemente passaram despercebidos em nossa investigação.

3.11 Comentários sobre a compatibilidade dos axiomas

Hilbert defende claramente uma abordagem diferente da axiomática, considerando a consistência como problema central no controle dos procedimentos dedutivos, apresentando em sua obra demonstrações de consistência para seu sistema. Uma solução possível foi a construção de dois modelos nos quais os axiomas se verificariam.

Um dos modelos, a criação de uma geometria analítica, cujo domínio é formado pelos números algébricos Ω, garantiu a equivalência lógica com a geometria euclidiana. Estes números são obtidos através das coordenadas (0,1) e resultantes das quatro operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação, divisão, além de uma quinta operação na qual Hilbert define como $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$, um número finito de vezes. Nesta expressão, ω também é um número obtido através de cinco operações descritas.

As representações de pontos no plano cartesiano e a definição de reta obtida analiticamente estabelece convenções nas quais os axiomas de ordem são sempre válidos. Tais convenções são as expressões analíticas utilizadas no domínio **Ω**, sem conflitar com os resultados da geometria euclidiana, além da escolha das sequencias de operações entre os elementos de **Ω** (HILBERT, 1959, p. 27).

A originalidade do pensamento de Hilbert e a sua geometria analítica mostravam que ele parecia saber onde queria chegar, lembrando que esta última difere da geometria de Descartes pelo fato de estar toda embasada nos conceitos de estruturas algébricas e análise matemática envolvendo os números reais.

As relações de incidência, ordem, congruência e de paralelismo foram definidas analiticamente e mostrou-se, posteriormente, que as relações apresentadas dessa maneira satisfazem todos os axiomas dos diversos grupos destacados. Para garantir os resultados, muitas reformulações foram feitas para consolidar os conceitos. Assim, por exemplo, para dar sentido ao quarto axioma de ordem, o axioma de Pasch, Hilbert mostrou a necessidade de decidir quais pontos estão "sobre" a reta ou do "lado esquerdo" ou do "lado direito" da reta. Acordo feito de conforme o critério de ordem dos pontos sobre a reta e as operações entre segmentos e ângulos efetuadas de acordo com os métodos da geometria analítica.

Uma translação de segmentos e de ângulos ou uma simetria em torno do eixo x são representadas respectivamente pelas igualdades:

$$x' = x + a,\ y' = y + b \text{ ou } x' = x,\ y' = -y$$

No capítulo 2, Hilbert destacou que a rotação de um ângulo $C\hat{O}E$, onde C tem coordenadas cartesianas (a, b), O é a origem do sistema e E tem coordenadas (0, 1), "leva" pontos interiores a $C\hat{O}E$ de coordenadas cartesianas (x, y), a pontos de coordenadas (x', y') de modo que :

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y \text{ e } y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y$$

Nesta parte podemos compreender porque é utilizado números do domínio de **Ω**. Ao mostrar que o número real $\sqrt{a^2 + b^2} = b.\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}$ pertence ao domínio, notamos que as convenções citadas por Hilbert na obra original são admitidas para garantir a validade dos axiomas de congruência (inclusive congruência de triângulos) e o axioma de Arquimedes (HILBERT, 1959, p. 29).

Ele chama a atenção para o fato de que o único axioma que não é satisfeito no domínio Ω é o axioma de completude, porém isso não ocorre se considerarmos o conjunto dos números reais, pois desta forma obtemos a geometria plana clássica, onde está incluso o axioma de completude.

Vejamos, por exemplo, como é possível mostrar a validade do axioma de Pasch de acordo com o método proposto por Hilbert:

> Seja a equação da reta que passa pelos pontos distintos *A* e *B* de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2), respectivamente pode ser escrita como $\frac{x-x_1}{x-x_2} = \frac{y-y_1}{y-y_2} = \mu$. O fato de considerarmos os pontos da reta distintos nos permite concluir que o parâmetro variável μ é diferente de 1. Para os pontos sobre *AB*, μ é negativo e positivo para pontos, diferentes de 1, para pontos da reta exterior ao segmento *AB*. Seja um triângulo ABC de coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) respectivamente e uma reta d tal que *d*: $mx+ny+p = 0$. As equações paramétricas da reta que contém um ponto qualquer A_jB_k podem ser escritas como: $x = \frac{x_j - \mu_{jk}x_k}{1-\mu_{jk}}$ e $y = \frac{y_j - \mu_{jk}y_k}{1-\mu_{jk}}$. A intersecção da reta *d* :$mx + ny + p = 0$ com a reta descrita acima na forma paramétrica o parâmetroμ_{jk}será $\mu_{j,k} = \frac{mx_j+ny_j+p}{mx_k+ny_k+p}$ e o produto dos parâmetros correspondentes as três intersecções é $\mu_{1,2} \cdot \mu_{2,3} \cdot \mu_{3,1} = 1$. Se a reta *d* encontra o triângulo, um dos μ_{jk}é um número negativo, já que o produto é positivo. Desta maneira, conclui-se que dois de seus parâmetros são negativos e a reta d encontra dois e somente dois, lados do triângulo.(HILBERT, 1971, p. 45).

Tomando por base a aritmética de domínio Ω, Hilbert afirma que todas as possíveis contradições geradas a partir dos axiomas de incidência, ordem, congruência, paralelas e o primeiro axioma de continuidade deverão aparecer. Hilbert continua descrevendo a compatibilidade dos axiomas, concluindo que há uma infinidade de geometrias que satisfazem aos grupos de axiomas proposto por ele e que a geometria cartesiana é a única em que o axioma da completude é aplicável.

3.12O conceito de movimento na geometria euclidiana

A ideia de movimento em geometria remonta aos gregos, aparecendo na obra *Os Elementos* de Euclides, quando este enuncia a noção comum 7 – *e as coisas que se ajustam uma a outra são iguais entre si* - no qual está implícita a noção de superposição. Euclides não faz nenhuma referência a essa noção, apenas utiliza a concepção de movimento. Intuitivamente, podemos dizer que duas figuras são congruentes quando uma corresponde à outra através de um movimento. De acordo com essa ideia, qual seria a superposição ou movimento que "leva" uma figura na outra?

Diversas discussões foram feitas sobre o significado da noção comum 7, dos *Elementos*, ou seja, apesar de não estar explícito, Euclides teria a intenção de explorar a noção de superposição? Alguns historiadores acreditam que Euclides teve a intenção de afastar a ideia de movimento na geometria, colocando o conceito de congruência. Apesar das discussões, muitas considerações podem estar distorcidas

O primeiro teorema sobre congruência é enunciado do seguinte modo: caso dois triângulos tenham os dois lados iguais aos dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais ao ângulo, também terão a base igual a base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um, sob os quais se estendem os lados iguais(BICUDO, 2009, p.99).

Nessa exposição, Euclides utiliza a ideia de superposição para comprovar o teorema, mas é nítido que este procedimento não condiz com o objetivo de seu trabalho que é apresentar a geometria no seu aspecto lógico - dedutivo, sendo que ele não menciona nada com relação a transporte de ângulo, motivo pelo qual o terceiro lado continua sendo uma reta após o transporte.

O matemático alemão Felix Christian Klein (1849 – 1925) estabeleceu conexões entre a teoria de grupos e geometria, possibilitando uma nova estruturação das diferentes geometrias que surgiram durante o século XIX. As características de um conjunto de figuras que permaneçam invariantes por T, onde T é um grupo de transformações, que constituem uma classe de características do grupo, determinada por Klein de uma geometria.

Esta propriedade de invariantes das transformações geométricas constitui a proposta de Klein em sua obra denominada *Vergleichend Betrachtungen überneuere geometrische Forschungen* (Considerações Comparativas sobre Recentes Investigações Geométricas), que ficou conhecida como o famoso *Erlanger Program*, em 1872, quando Klein assumiu o cargo de professor titular da Faculdade de Filosofia da Universidade de Erlanger. Este trabalho, baseado na pesquisa desenvolvida por ele e Sophus Lie (1842 – 1899), em teoria de grupo, conclui com a definição de geometria dada por Klein representada pelo estudo das propriedades de um conjunto *S* que permanecem invariantes quando se submetem os elementos de S às transformações de algum grupo de transformações *T*.

Ainda sobre a crítica relacionada ao significado de movimento em geometria, Klein afirma que Euclides supunha implicitamente a possibilidade de movimentos de figuras sem alteração de suas medidas e forma, argumentando que a demonstração do teorema do primeiro teorema de congruência leva-nos a aceitar que Euclides considerava legítima a idéia de movimento, mas parece estranho que este não tenha mencionado nos *Elementos*. Ao aceitar tal ideia, na elaboração da primeira e segunda construção, necessitariam da noção de movimento (KLEIN, 1931, p. 268).

A primeira – *construir um triângulo eqüilátero sobre a reta limitada dada* – e a segunda – *pôr, no ponto dado, uma reta igual à reta dada*, Euclides admite a interseção de circunferências, de circunferências e retas e de retas, sem haver mencionado sobre a existência dos pontos de interseção. Para a garantia da existência de tais pontos, seria necessário algo como o postulado da continuidade, que foi dado posteriormente por R. Dedekind (1831 – 1919).

Na definição do grupo de transformações *T*, Klein considera o conjunto *P* de todos os pontos no plano e o conjunto *T* como sendo as rotações, as translações e as reflexões em torno de retas. Como o produto de quaisquer duas dessas transformações e a inversa de cada uma delas sempre estão em *T*, podemos afirmar que *T* é um grupo de transformações. Considerando *G(P, T)* e utilizando a notação algébrica, temos uma geometria em que os elementos são os pontos de *P* e as operações que se pode fazer com estes pontos são as transformações *T*. As transformações que compõem o conjunto T, quando citadas da forma como mencionamos acima, são ditas geometria métrica euclidiana plana.

Na representação da transformação geométrica *G(P, T)*, ao modificar o conjunto de elementos de *P*, e o conjunto de transformações *T*, a cada combinação temos um outro tipo de geometria. Um aspecto importante desta abordagem é que certas geometrias incluem outras, podendo ocorres um encadeamento entre as geometrias.

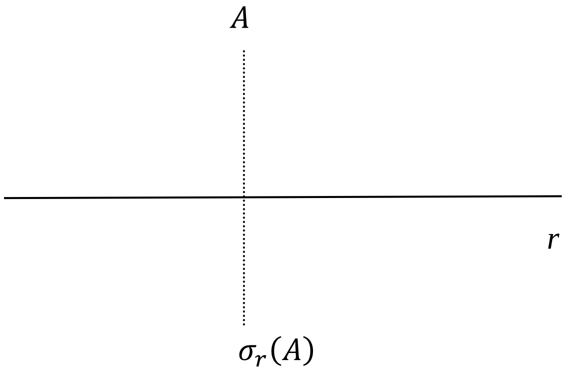
Klein identifica dois problemas ao tentar construir a base geométrica por meio de operações lógicas aplicadas a fundamentos elementares da geometria. O primeiro diz respeito à escolha dos elementos baseados na experiência intuitiva e o segundo, ao que pode ser deduzido logicamente daqueles conceitos fundamentais e axiomas, sem recorrer a intuição. De acordo com Klein, uma forma de diminuir estes problemas é iniciar o estudo da geometria pelos conceitos fundamentais da geometria projetiva, o ponto, a reta e o plano e os axiomas de determinação de ordem e de continuidade (KLEIN, 1931, p. 215).

Ao propor a construção da geometria plana baseada na noção de movimento, os axiomas deverão expressar as propriedades destes movimentos, baseados na representação intuitiva destes e as características bijetivas dos pontos com relação às retas. Conforme a abordagem dada aos movimentos no plano, sua axiomatização pode ser explorada de uma forma diferenciada caso não se utilize o conceito de medida de segmentos e ângulos.

No tratamento axiomático do movimento na geometria euclidiana, a escolha dos axiomas de reflexão e seus resultados são fundamentais para representar o conceito de rotação e translação, pois estes últimos podem ser obtidos através da composição de reflexões de pontos segundo uma reta.

De acordo com Guggenheimer (1967), a reflexão de um ponto A segundo uma reta r é uma função que associa qualquer ponto A a um ponto $\sigma_r(A)$ tal que r é perpendicular ao segmento $[A, \sigma_r(A)]$.

Figura 3



Fonte: GUGGENHEIMER, 1967, p. 8

A correspondência que a cada ponto A de um dos semi-planos determinados pela reta $r$associa o ponto $\sigma_r(A)$ do outro semi-plano, que coincide com a imagem pela reflexão do ponto inicial é uma correspondência que realiza a congruência. Os pontos do plano que pertencem à reta não são refletidos, matem-se fixos. Essas correspondências são funções do plano em si mesmo com certas características especiais.

Segundo Guggenheimer (1967), as propriedades de reflexões são descritas pelo seguinte grupo de axiomas:

Axioma 1. Para cada reta r existe uma função, σ_r, do plano em si mesmo que leva os pontos de um semi-plano associado a r sobre os pontos do outro semi – plano.

Axioma 2. Toda reflexão em reta r, σ_r, leva reta sobre reta.

Axioma 3. Toda reflexão é uma involução, isto é, para todo ponto X do plano $\sigma_r^2(X) = \sigma_r\sigma_r(X) = i(X) = X$.

Axioma 4. Os pontos da reta r são pontos fixos pela reflexão σ_r, ou seja, $\forall X \in r, \sigma_r(X) = X$.

Com o grupo de axiomas acima, seguem algumas propriedades importantes da reflexão, σ_r.

Proposição 1. As reflexões σ_r são funções bijetoras.

Demonstração. Devemos mostrar que a função σ_r é injetora e sobrejetora.

i) Injetora

Sejam A e B pontos no plano, mostraremos que $\sigma_r(A) = \sigma_r(B) \Longrightarrow A = B$. Consideremos $\sigma_r(A) = \sigma_r(B)$, como σ_r é uma função $\sigma_r(\sigma_r(B))$, pelo axioma 3 temos $\sigma_r^2(A) = \ \sigma_r^2(B) \Longrightarrow A = B$.

ii) Sobrejetora

Para que σ_r sejasobrejetora é preciso mostrar que para todo ponto B do plano existe A tal que $\sigma_r(A) = B$. Dado um ponto *B*, tomando $A = \sigma_r(B)$ temos que $\sigma_r(\sigma_r(B)) = \sigma_r(A) \Longrightarrow \sigma_r^2(B) = \sigma_r(A)$. Pelo axioma 3, $\sigma_r^2(B) = B$. Portanto, $\sigma_r(A) = B$.

Assim toda reflexão, σ_r, é uma aplicação bijetora do plano no plano. Logo é uma transformação geométrica, na qual a transformação de um conjunto é uma aplicação um a um que aplica o conjunto em si mesmo. Para concluir o conjunto de axiomas de reflexão, ainda necessitamos de algumas definições importantes.

Um ponto *P* sobre uma reta *r*, determina em *r* duas partes disjuntas tais que se *X* e *Y* estão em partes distintas, *P* está entre *X* e *Y* e, se *X* e *Y* estão na mesma parte, *P* não está entre *X* e *Y*. Cada uma dessas partes é chamada semi- reta e a reunião de cada uma delas com *P* é chamada de raio *r* com vértice *P*.

Durante o desenvolvimento dos conceitos, são apresentados axiomas, definições e teoremas, axiomatizando a estrutura relacionada às reflexões. Sendo assim, um movimento no plano é definido como a composição de um número finito de reflexões segundo retas desse plano.

Também podemos ressaltar que a forma de abordagem de uma estrutura axiomática altera aquilo que se pretende explorar na geometria euclidiana. Por exemplo, ao considerar o axioma de Pasch como um teorema, relacionado aos triângulos, pode-se obter diferentes resultados.

Teorema de Pasch. Se uma reta intercepta um dos lados de um triângulo e não contém nenhum de seus vértices, então ela intercepta necessariamente um e apenas um dos outros lados.

É claro que para se demonstrar esse teorema, devemos elencar um grupo de axiomas e definições importantes sobre os triângulos e utilizando um axioma que garanta a existência de uma reta, garantimos a existência de triângulos.

Esse é apenas um exemplo de como podemos explorar de uma forma rica os conceitos, investigando, refletindo e relacionando os objetos geométricos no sistema de axiomas. Na construção das demonstrações geométricas, ao considerarmos teoremas como axiomas, deixamos de investigar e, consequentemente, compreender significados importantes da geometria euclidiana.

Na concepção de Borsuk (1960), na construção de uma teoria axiomática, costuma-se utilizar outras axiomáticas, sendo que na base do sistema os termos primitivos devem estar bem claros. Isso caracteriza a essência dos fundamentos da geometria, baseada nos axiomas de Hilbert.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o surgimento da geometria nas civilizações antigas, muitas discussões desenvolvidas acerca do significado dos objetos geométricos e sua estrutura lógica estiveram diretamente relacionadas com o desenvolvimento dos fundamentos da matemática.

Apesar da gênese do pensamento geométrico estar alicerçado na necessidade empírica de civilizações, como a dos egípcios e babilônios, em aprimorar suas técnicas de medições, o método dedutivo, ao que apontam as pesquisas, ainda não havia sido explorado durante este período. Compreender este processo de criação matemática não parece ter sido um passo evidente, pois as conclusões empíricas eram obtidas por formas primitivas de raciocínio indutivo.

No início de nosso estudo, observamos este limite, pois apenas nos dois últimos séculos conseguimos soluções mais significativas para as questões dos fundamentos da matemática.

Um exemplo desta constatação é que a obra monumental dos *Elementos*, elaborada por Euclides, resistiu consideravelmente ao longo do tempo, configurando como uma das principais referências sobre a exposição de um método axiomático de forma sistemática. Podemos entender esta permanência devido à falta de ferramentas que completariam as lacunas estruturais no trabalho de Euclides de acordo com a época.

Com a mudança conceitual dos axiomas, considerados posteriormente como estipulações arbitrárias, levariam a sua concepção sintática, provocando uma ruptura nas bases das relações de demonstração e definição, colocando o problema da consistência como causa da formalização da axiomática. Em um determinado momento, a percepção de algumas lacunas na obra de Euclides apontou para uma nova abordagem da axiomática e não à complementação da concepção clássica.

No início do século XX, à medida que as abordagens fundamentais da matemática foram se solidificando, novas interpretações dos sistemas axiomáticos foram surgindo. Enquanto se entendia que a matemática estava arquitetada nos *Elementos*, foi-se também considerando que, para expandir o conhecimento geométrico, novos sistemas axiomáticos da geometria deveriam avançar consideravelmente. Isto se iniciou com os questionamentos do quinto postulado de Euclides, que gerou e tem gerado uma série de controvérsias sobre o tratamento dado à geometria euclidiana no que concerne a sua estrutura axiomática.

A busca pelo rigor e a nova abordagem dos sistemas axiomáticos resultaram na eliminação da noção de evidência dos axiomas, eliminando a intuição como base do conhecimento e os elementos semânticos da teoria axiomática.

A breve reconstrução histórica do surgimento das geometrias não euclidianas apresentada neste estudo levou muitos matemáticos a considerar que o postulado das paralelas seria um teorema, influenciando diretamente a forma como a nova geometria seria concebida. As indagações e, consequentemente, as interpretações dadas à geometria euclidiana, mostram claramente ser condições indispensáveis para a reformulação dos fundamentos da matemática.

Ainda seguindo esse ponto e, na tentativa de elucidar muitas questões apontando para o surgimento de sistemas axiomáticos modernos da geometria, expusemos os primeiros axiomas sobre a geometria de uma forma diferente. Entendemos que parte dos problemas em compreender um significado se origina no equívoco de achar que, ao se considerar conhecido certos conceitos matemáticos, pouco se investiga tais conceitos.

Historicamente, não foi assim que o homem aprendeu e ensinou matemática e não acreditamos ser esta a melhor maneira de comunicá-la às novas gerações. Nós pesquisadores dos fundamentos da matemática estamos interessados em entendê-la em suas diversas facetas: como se organiza, quais são os seus limites, o que dizer sobre sua consistência, quais dos problemas são resolúveis e quais são seus métodos. Defendemos que se houver nas pesquisas em Educação Matemática a preocupação de atender os objetivos elaborados pela área da fundamentação, certamente encontraremos um valor e uma beleza nos resultados. Neste caminho, buscamos entender a evolução dos fundamentos da matemática, mas, ao mesmo tempo, novos problemas são criados e novos procedimentos de abordagem são introduzidos, até porque o conhecimento humano sempre é inacabado.

Essa postura crítica antecipa um campo de estudos na Educação Matemática, na qual, o educador português, calcado na sua concepção dialética da história da ciência, argumenta com elegância:

> A ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições (CARAÇA, 1975, p XIII).

Em nossa investigação procuramos compreender como se desenvolveu e expusemos as características do método axiomático, verificando que estas sempre caminham juntas com os conceitos matemáticos. O sistema dedutivo de Hilbert, não se distanciando da proposta rigorosa de Euclides, sua forma de representar a geometria, considerando o mínimo de simbolismo e, enfatizando as relações entre os objetos geométricos, produz resultados interessantes.

Notamos que a discussão concernente ao seu sistema axiomático não é apoiada nos objetos da geometria, mas sim no grupo de relações acrescentadas por paralelismo e continuidade, resultando em teoremas importantes para seus fundamentos. Neste caso, todo sistema de objetos, entre os quais existem certas relações que podem ser manipuladas a fim de atribuir a futuros enunciados um valor de verdade, é uma geometria. Apesar de uma geometria possuir elementos diferentes, se estiver sob a mesma estrutura, elas possuem os mesmos valores semânticos lógicos, ou seja, teoremas decorrentes de valores lógicos terão o mesmo resultado, independente de seus objetos. No decorrer da pesquisa investigamos as características dos sistemas axiomáticos modernos, principalmente a consistência através do método dos modelos.

É interessante a forma como Hilbert demonstra a consistência da geometria, pois ele já havia construído interpretações numéricas dos termos modernos e, provando a consistência da aritmética dos números reais, também ficaria provada a da geometria. Além disso, se a geometria euclidiana fosse consistente, então a geometria não euclidiana também seria, ressaltando a importância de explorar a consistência.

Apesar das outras propriedades do sistema axiomático - independência, categoricidade, completude e equivalência – estarem relacionadas diretamente com o formalismo lógico, buscamos, sempre que possível, tecer comentários relacionados com a estrutura axiomática de Hilbert.

Finalmente, para ressaltar o conceito de movimento em geometria, algo que aparentemente Euclides considerou como superposição, elencamos alguns axiomas de reflexão aproximando o conceito intuitivo de congruência com uma possível axiomatização dos movimentos no plano.

A partir deste estudo esperamos despertar e motivar pesquisadores da Educação Matemática a explorar, investigar e refletir sobre novas abordagens da geometria euclidiana. Desta forma, faz-se um convite ao descortinamento dos aspectos da geometria aqui tratada.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

ANGIONI, L. *Aristóteles – Segundos Analíticos*, livro I (tradução, introdução e notas), Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência – Unicamp, col. Cadernos de História e Filosofia da Ciência, Série 3, v. 9, n. especial, 1999.

ARISTÓTELES, *Analíticos PosterioresI – 10*. Disponível em <http://classics.mit.edu/Aristotle/posterior.1.i.html>. Acesso em: 05 ago. 2012.

ARISTÓTELES, *Analíticos Primeiros, I*. Disponível em <http://classics.mit.edu/Aristotle/prior.1.i.html>. Acesso em: 05 ago. 2012.

BARKER, S. F. *Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.

BICUDO, I. Introdução e tradução. In: EUCLIDES, *Os Elementos*. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

BONOLA, R. *Non-Euclidean Geometry*: *a Critical and Historical Study of Its Development*. Tradução de H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.

BORSUK, K., WANDA, S., *Foundations of Geometry*: Euclidean and Bolyai – Lobachevskian Geometry Projective Geometry. Amsterdam, North – Holland Publishing Company, 1960.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gráfica Brás Monteiro Ltda, 1975.

CUNHA, A. G. da. *Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

DUVAL, R. Conversion et articulation des representations analogiques. In: Seminaires de Recherche "Conversion et articulation des representation" v. I Éditeur Raymond Duval, IUFM Nord-Pas de Calais, 1998.

EVES, H. *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Dover Publications, 1990.

GONÇALVES, C. H. B. *Os Livros Aritméticos de Euclides*.[Tese de Doutorado]- Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP, Rio Claro, 1997.

GREENBERG, M. J. *Euclidean and No-Euclidean Geometries: development and history.* 3 ed. New York: Freeman, 2001.

GUGGENHEIMER, H. W. *Plane Geometry and its groups*, San Francisco: Holden-Day, 1967.

HILBERT, D.*Foundations of Geometry*. La Salle, Illinois: Open Court, 2ed. 1971. Tradução da edição alemã Grundlagem der Geometrie, translatedby Leo Unger de 1899.

HEATH, T. L. *Thirteen Books of Euclid's Elements, The*. v. 1, 2 ed. New York: Dover Publications, INC, 1956.

HARTSHORNE, R. *Geometry: Euclid and Beyond*. New York, Springer, 2000.

HOUAISS, A. *Houaiss Eletrônico*. Rio de Janeiro: Editora Objetiva, 2009 CD-ROM.

KLEIN, F. *Matemática Elemental desde um punto de vista superior*. Trad. R. Fontanilla. Madrid: Biblioteca Matemática, v. 2, 1931.

KNEALE, KNEALE, M.,*O Desenvolvimento da Lógica*. Lisboa, Fundação CalousteGulbenkian, 1991.

PRADO, B. J., *Erro, Ilusão, Loucura*: Ensaios. São Paulo, Editora 34, 2004.

RAGGIO, A. *Evolução da Noção de Sistema Axiomático*, A. Philosophos. Goiás: UNB/ UFG, v. 8, n. 1, 2003.

RIBEIRO, F. M. *O Conhecimento Científico nos Segundos Analíticos de Aristóteles: Causa e Necessidade na Demonstração*.[Dissertação de mestrado] – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, UNICAMP, Campinas, 2011.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical Logic*, Association for Symbolic Logic, 1967.

SILVA, J. J. *Filosofias da Matemática*. São Paulo, Unesp, 2007.

SZABÓ, A. *A Beggining of Greek Mathematics, The*. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1923.

SEIDENBERG, A., *Pasch, Moritz*, New York, Biography in Dictionary, 1970-1990. <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830903301.html> Acesso em 4 Jan. 2013

WILDER, R. L. *Introduction to the Foundations of Mathematics*. 2. ed. New York: Wiley, 1965.