#Frege #Teorema_de_Frege #número #logicismo #Los_fundamentos_de_la_aritmética

Guía para una primera lectura de *Los fundamentos de la aritmética* de Gottlob Frege

Francisco Manuel Saurí-Mercader
todeti@pm.me

Gottlob Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, traducción de Ulises Moulines.

1-Presentación

El presente texto es una guía para una primera lectura de los *Los fundamentos de la aritmética* de Gottlob Frege para estudiantes del grado de Filosofía.

No pretende hacer ninguna aportación a la investigación sobre Frege sino ofrecer los instrumentos para hacer una primera lectura mediante la recopilación y la ordenación de los textos relevantes de los estudiosos de Frege, especialmente de la literatura en inglés. En la mayor parte de los casos, las referencias a otros autores (Autorfecha) preceden a una traducción de los escritos referidos así como una unificación de la terminología, el recorte de lo no relevante y el añadido de las explicaciones pertinentes para hacer el texto accesible a un estudiante del grado de Filosofía. En el caso de que la cita justifique una afirmación que no se desarrolla, se verá precedida por la palabra "ver" dentro del paréntesis de la referencia.

El texto usado para las citas de *Los fundamentos de la aritmética* es la traducción de Ulises Moulines dado que el que esto escribe no sabe alemán. Las citas suelen tener inserciones entre corchetes que intentan favorecer la comprensión y reparar la poca caridad de Frege con el lector en la distinción entre uso y mención, así como entre las palabras y su referencia.

La guía no supone más matemáticas que las que se estudian en los cursos anteriores a la universidad. Sin embargo, es recomendable haber hecho un curso elemental de lógica matemática y teoría de conjuntos. La razón fundamental es que la formalización de ciertas proposiciones permite aclarar extremos que se hacen muy enojosos sin esos instrumentos.

2-La estructura de *Los fundamentos*

Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl o traducido *Los fundamentos de la Aritmética. Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número* (en adelante, *Los fundamentos*) fue publicado en 1884 y no fue especialmente bien recibido.

Los fundamentos se divide en lo que denominaremos secciones (marcadas por el signo "§") y apartados (sin numeración, ni marca), además de los capítulos (numerados en números romanos). Las secciones son 109, de las cuales 105 se inscriben en cinco capítulos, el último titulado "Conclusión". A esta secciones les precede una "Introducción" dividida tipográficamente en dieciséis párrafos. Entre la "Introducción" y el primer capítulo están las primeras cuatro secciones que no están inscritas en ningún capítulo.

- Introducción (dieciséis párrafos tipográficos)
- Secciones 1 a 4 (sin apartado)
- Capítulo I. Opiniones de algunos autores sobre la naturaleza de los enunciados aritméticos
  - ¿Son demostrables las fórmula numéricas? (sec. 5-8)
  - ¿Son las leyes de la aritmética verdades inductivas? (sec. 9-11)
  - ¿Son las leyes de la aritmética sintéticas a priori o analíticas? (sec. 12-17)
- Capítulo II. Opiniones de algunos autores sobre el concepto de número
  - Secciones 18 a 20 (sin apartado)
  - ¿Es el número una propiedad de las cosas externas? (sec. 21-25)
  - ¿Es el número algo subjetivo? (sec. 26-27)
  - El número como conjunto (sec. 28)
- Capítulo III. Opiniones sobre la unidad y el uno
  - ¿Expresa el numeral "uno" una propiedad de objetos? (sec. 29-33)
  - ¿Son las unidades iguales entre sí? (sec. 34-39)

3-La "Introducción" de *Los fundamentos*

Si escribimos:

1

y señalándolo, preguntamos ¿Qué es esto? Alguien puede sentirse tentado a decir que un uno o un número. En realidad, no es nada de eso sino un numeral, el nombre de un número, un signo que significa el número 1.

Frege comienza su "Introducción" (párrafo tipográfico 1) un paso más allá: "A la pregunta de qué es el número uno, o de qué denota el signo 1, se suele responder: pues una cosa."

Como señala Frege, con ello sólo estamos diciendo que el uno es algo, pero no se nos dice qué algo es, no se responde a la pregunta ¿Qué es el número 1? No se nos da una definición.

Podemos continuar el juego y decir que cuando señalamos diversas cosas individuales también son 1, una cosa singular: "quizá quien nos ha formulado la pregunta nos invitará a que escojamos una cosa cualquiera, a la que decidamos llamar uno"

La afirmación no deja de ser un tanto extraña y no creo que a nadie le parezca natural tal propuesta. Volveremos a ello al tratar el capítulo III de *Los fundamentos* (ver nuestra sección 13). En cualquier caso, Frege objeta que con ello no tenemos ningún significado común para 1. Y precisa que no estamos aquí hablando de variables en la Aritmética. El "1" no se comporta como una variable. Una variable puede ser sustituida por los elementos de un conjunto determinado; al conjunto se le denomina "dominio" y a sus elementos "valores". Así pues, decimos que la variable toma valores de un dominio. Así, en Aritmética, la variable "a" en la ecuación "a+a-a=a" se puede sustituir por un número natural cualquiera y la ecuación será verdadera; el dominio es el conjunto de los números naturales y los valores (los elementos del dominio) cada número natural.

Pero cuando aparece el "1" en una ecuación como "1+1=2" no se da el mismo comportamiento. Cuando sumamos dos cosas no es la misma cosa la que ocupa el lugar del "1": cuando sumo dos manzanas, tendré que sumar dos manzanas *distintas*.

Es verdad que en Aritmética no se utiliza sólo una variable sino muchas para poder expresar las relaciones entre los números. Por tanto, puede argumentarse que al número 1 le pasa lo mismo.

Pero Frege señala que el número 1 tiene propiedades distintas que el 2 o que el 3 o que el 400. Por ejemplo, 1 no varía al ser multiplicado por sí mismo. Y hay números naturales que son pares o impares, números primos o compuestos, cuadrados, etc. que tienen diferentes propiedades. Eso no ocurre con "a", no ocurre con ninguna variable. Dice Frege:

"1 x 1=1" no afirma nada de la Luna, ni del Sol, ni de Sahara, ni del Pico de Tenerife; en efecto ¿Qué sentido podría tener una afirmación semejante?

Para Frege la mayoría de los matemáticos no pueden ofrecer una buena definición de 1 y tampoco responder a la pregunta de "lo que es el número", no pueden definir "número" (párrafo 2).

Esto tiene dos problemas. El primero es de probidad intelectual: ¡Que los matemáticos no sean capaces de dar una buena definición de número no deja de ser un tanto sospechoso! El segundo es que los demás números se definen partiendo de los naturales: los números negativos, los números racionales, los complejos, etc. toman como punto de partida para su definición lo números naturales (ver nuestra sección 10).

A partir de aquí, Frege se dedica a argumentar repetidamente contra el psicologismo. Como dirá hacia el final de su "Introducción" (párrafo 12):

hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo

Frege dedica buena parte de su "Introducción" a señalar que una cosa es la psicología y otra la matemática y la lógica. Una cosa son las descripciones de cómo alguien llega a saber los números o tiene imágenes o sensaciones propioceptivas ligadas a los números y otra muy distinta el contenido de los conceptos y objetos lógicos y matemáticos, sus definiciones y demostraciones. Y esta tarea lógica es la que pretende hacer en su libro.

Por otra parte, la distancia que Frege quiere poner con la Psicología es inversa a la que quiere tener respecto de la Lógica. Frege mantiene que su definición de número se basará en "las leyes lógicas universales" (párrafo 4). Por otro lado, la matemática se basa en las demostraciones para establecer sus conocimientos y tanto estas como las propias definiciones están sometidas a la lógica. Frege quiere usar la lógica para evitar caer en contradicciones que se hayan pasado por alto al elaborar definiciones (párrafos 10 y 11).

Tradicionalmente, antes de Frege, la definición pertenecía a la lógica del concepto. La lógica se dividía en tres partes: la lógica del concepto, la lógica del juicio (el uso de una oración declarativa para establecer la verdad o la falsedad) y la lógica del raciocinio

(Sanguinetti1982). La última se ocupa de los razonamientos, en el caso de las matemáticas: las demostraciones. Por su parte, todo razonamiento usa oraciones declarativas (afirmativas o negativas): las premisas de un razonamiento, de una demostración, son oraciones declarativas; su conclusión también. Y las oraciones, entre otras cosas, se usan para relacionar cosas y conceptos, y estos entre sí.

Evidentemente, si el objetivo de Frege es definir "número", la lógica del concepto sería la parte de la lógica relevante aquí. Pero hay que llamar la atención de que el propio Frege insiste en que

el significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo el enunciado, nunca en las palabras aisladas (segundo principio al final de su "Introducción"):

Es lo que luego se denominó "Principio del contexto". Y además señala que en su enfoque para definir número se trata de "fijar el sentido [significado] de una ecuación" (párrafo 13, "Introducción")

Dicho principio tiene una clara influencia kantiana (Sluga1980). Kant, contra otros filósofos y lógicos, como Aristóteles o Leibniz, no veía los juicios como conceptos complejos sino como posibles predicados, esto es, como partes de una oración declarativa (nuestra traducción usa "enunciado"). Aristóteles o Leibniz veían la formación de conceptos como producto de la abstracción sobre cosas individuales y luego los conceptos entraban en combinación en los juicios. Frege seguirá a Kant en este aspecto.

Por otra parte, conviene no olvidar que en el momento que esto se escribe, Frege no distingue entre sentido y referencia y, por tanto, cuando habla de "significado" o "sentido" se refiere a todo o parte del significado de las expresiones lingüísticas (sentido y/o referencia).

Para completar el planteamiento de Frege falta el tercer principio que junto a los dos anteriores guían su investigación:

hay que tener siempre presente la diferencia entre concepto y objeto.

Este tercer principio está ligado a cuestiones de existencia matemática (ver secciones 94-97 de la "Conclusión") que aclararemos en su momento. Pero tanto este principio como los dos anteriores intervienen en la lógica que Frege crea para sus propósitos y que debemos repasar para entender su planteamiento.

4-La *Conceptografía*

En 1879, Frege publicó su primer libro. Se trataba de *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, traducido *Conceptografía. Un lenguaje de fórmulas para el pensamiento puro modelado sobre el de la Aritmética* (en adelante *Conceptografía*). Este libro le permitió enseñar en la Universidad de Jena con sueldo. Sin embargo, aunque marca el comienzo de la lógica contemporánea, pues contiene todos los elementos de la lógica matemática clásica, fue mal recibido y tuvo poco eco. No sólo es un libro fundamental, piedra fundacional de la lógica matemática, sino que es la base lógica sobre la que se asienta el libro objeto de nuestra lectura: *Los fundamentos*. Dividido en tres partes, en la primera ofrece un recorrido explicativo de las principales novedades que introduce. En la segunda y la tercera ofrece ejemplos concretos de demostraciones matemáticas siguiendo sus principios teóricos.

Recordaremos los aspectos relevantes de la lógica matemática para nuestra lectura siguiendo libremente la primera parte de la *Conceptografía* de Frege, entre otras cosas porque Frege sitúa claramente este trabajo en el contexto de su fundamentación de la aritmética.

En efecto, como Frege señala en el "Prefacio" de la *Conceptografía*, al acudir a la lógica para su tarea de fundamentación de la aritmética, tiene como propósito principal evitar huecos, supuestos no detectados en las demostraciones de las matemáticas.

Por otra parte, Frege es consciente de que los avances lógicos que va a exponer no pueden abarcar todos los usos del lenguaje ordinario; ni siquiera todos los razonamientos. Aunque tiene la esperanza de que sí sirva para los usos científicos.

En cualquier caso, Frege ofrece no solo una nueva teoría lógica que supone un gigantesco avance sobre lo que existía sino que, conscientemente, lo ofrece de una nueva forma. Esto es, no sólo ofrece una adecuada fundamentación a las inferencias matemáticas que no la tenían, sino una nueva forma de presentarlas y estudiarlas: los lenguajes formales, en concreto un cálculo lógico (ver nuestra sección 17). En efecto, Frege ofrece, en la línea de Leibniz aunque contra su aristotelismo, un *calculus raciocinator*

Porque, señala Frege, el lenguaje nos confunde y hay que centrarse en los aspectos relevantes para la inferencia matemática y dejar de lado aquellos que no juegan ningún papel ("Prefacio"). Con el uso del cálculo lógico, Frege trata de eliminar cualquier rastro del lenguaje natural y sustituirlo por series de signos al hacer demostraciones matemáticas.

En la presente exposición, usamos la terminología que ya se ha asentado después de cien años de lógica matemática. Por tanto, usaremos términos distintos de los que usa Frege. Igual ocurrirá con el lenguaje formal y el cálculo lógico que propone Frege y que tienen una apariencia diferente a los usados habitualmente en la actualidad. Veamos.

En matemáticas se hacen demostraciones. Una demostración es un texto argumentativo. Se trata de un texto argumentativo muy peculiar porque refleja una intención muy particular por parte de quien lo formula: si aceptas que mis premisas son verdaderas, tienes que aceptar que la conclusión es verdadera.

Esto es lo que se denomina un razonamiento deductivo y los razonamientos deductivos son los únicos que existen en las demostraciones matemáticas. En matemáticas, si las premisas son verdaderas, la conclusión *tiene* que ser verdadera.

Conclusión y premisas se presentan mediante lo que en gramática se denomina oraciones declarativas. Cuando se usa de manera pertinente, una oración declarativa puede ser verdadera o falsa. Frege se cuida de destacar que dos oraciones así utilizadas puede diferir de dos maneras: puede ocurrir que sea posible deducir las mismas consecuencias de cada oración o que no. En ejemplo de Frege:

Los griegos derrotaron a los persas en Platea
Los persas fueron derrotados por los griegos en Platea

En estos dos casos difieren según en el primer caso. Se pueden deducir las mismas posibles consecuencias en cada caso a pesar de las diferencias de significado, y eso es lo que tiene interés desde el punto de vista de la inferencia correcta, lo relevante del significado del uso de la oración en cuestión para la verdad o la falsedad (secciones 2-4). Frege llama a ese significado "contenido judicativo" o "contenido conceptual", según traducción. Aquí usaremos "proposición" (ver Smith2020 7.1-7.5). En la *Conceptografía* tenemos ya en acción el primer principio de la "Introducción" de los *Fundamentos*:

hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo.

Sin solución de continuidad (secciones 5-7), Frege pasa a señalar cuáles son los primeros aspectos relevantes del uso de las oraciones declarativas en la realización de demostraciones. Frege comienza con los que denomina negación, condicionalidad, conjunción y disyunción. En el lenguaje natural existen diversas palabras para representar dichos aspectos cuyo significado común, para seguir una costumbre actual, llamaremos "operadores lógicos". En términos de la gramática, lo que Frege está diciendo es que los tipos de oraciones declarativas relevantes para analizar las demostraciones son las oraciones simples y sus negaciones, así como las compuestas subordinadas adverbiales condicionales, las oraciones coordinadas copulativas y disyuntivas y las negaciones de todas ellas. No hay otros tipos de oraciones que haga falta considerar. Incluso de las oraciones compuestas basta con las condicionales (y negativas), como señalará correctamente.

En dichos tipos de oraciones ¿Qué hacen esos operadores lógicos que dan nombre a los tipos de oraciones señalados? En cualquier razonamiento deductivo (que es el caso de las demostraciones matemáticas), lo que ocurre es que si las premisas son verdaderas, la conclusión tiene que ser verdadera. Esa es una característica definitoria de una deducción. Y lo que hacen los operadores lógicos citados es determinar si una proposición (recordemos la definición de más arriba) es verdadera o falsa en función de la verdad o falsedad de las proposiciones de las oraciones simples. Porque las proposiciones simples serán verdadera o falsas dependiendo de los hechos, de la realidad. Pero, para Frege, la verdad o falsedad de las proposiciones compuestas señaladas depende de la verdad o falsedad de sus proposiciones simples y los operadores lógicos que las combinan (esto es lo que se denomina carácter veritativo-funcional y que es característico de la lógica matemática clásica). Finalmente, la verdad de la conclusión de una demostración depende, además de la forma lógica del razonamiento, de los valores de verdad de las proposiciones que intervienen: si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión tiene que ser verdadera.

Para cualquier par de proposiciones simples (pongamos A y B) involucradas en una proposición compuesta, pueden darse los siguientes casos y sólo estos:

1. A es verdadera y B es verdadera ;
2. A es falsa y B es verdadera;
3. A es verdadera y B es falsa;
4. A es falsa y B es falsa.

La teoría lógica nos dice que podemos agrupar las proposiciones simples de una proposición compuesta en bloques de dos (o sea, se cumple la propiedad asociativa: si una proposición está compuesta, pongamos, de cinco proposiciones simples, podemos tratarla como si estuviese compuesta de pares).

La pregunta que debemos hacernos ahora es si una proposición compuesta determinada que nos ocupe es verdadera o falsa en cada uno de los casos anteriores. Y eso depende de cada tipo de operador lógico (de cada tipo de oración que estemos usando: negativa, condicional, etc.)

Vayamos directamente al caso de una proposición condicional; en su forma más típica comenzará por un "si" seguido de una oración simple, y a continuación un "entonces" seguido de otra oración simple.

Si bebes, (entonces) coge un taxi.
Tendrías más dinero, si no gastases tanto (si no gastases tanto, entonces tendrías más dinero).
Si no hubiese habido un temporal tan fuerte, Felipe II habría invadido Inglaterra.

Representemos el operador de condicionalidad así: $\rightarrow$; lo llamaremos, obviamente, condicional. Frege usa una notación completamente distinta. Pero nuestro objetivo es ceñirnos al máximo a los usos que ya se han asentado en la actualidad para expresar las aportaciones de Frege. Así pues, una proposición condicional será representada así en nuestro cálculo lógico:

$A \rightarrow B$

Esta expresión se lee: Si A entonces B.

Pues bien, el condicional representa la proposición compuesta en la que el caso (3) hace la proposición falsa y los casos (1), (2) y (4) verdadera.

El lector puede leer alguna literatura sobre el tema, si se percata de que no todas las oraciones condicionales se usan con las consecuencias de verdad y falsedad que aquí se señalan. El propio Frege es consciente de que está seleccionando determinados casos que son útiles para el razonamiento matemático y por ello está utilizando un lenguaje formal y un cálculo lógico; de esta manera se fija en la parte del significado o los usos relevantes para sus propósitos.

Frege está en lo cierto, aunque no lo demuestra, al señalar que el condicional y la negación son suficientes para expresar todas las proposiciones compuestas desde un punto de vista lógico (sección 7). Habrá, pues, que añadir el signo correspondiente a la negación: el negador $\neg$.

$\neg A$

Esta expresión se lee: No es el caso que A o, simplemente, no A. El uso habitual de la negación nos proporciona directamente el significado de este signo: Si A es verdadera ¬A es falsa; si A es falsa, ¬A es verdadera.

Conviene pararse en lo que hace Frege. Frege está usando un lenguaje formal (recordemos, él lo llama "lenguaje de fórmulas"), esto es, escoge un alfabeto, aquí los signos habituales en matemáticas más los que ahora estamos añadiendo (recordemos, Frege usa otros) y da a cada signo y series de signos un significado preciso. Es lo que se denomina formalizar; las series de signos se llaman fórmulas. Las fórmulas son la contraparte de las proposiciones en el lenguaje formal. Así, se formaliza el lenguaje de las demostraciones matemáticas para expresar estas demostraciones mediante un lenguaje formal. Y lo que hemos hecho hasta ahora es fijar el significado de dos operadores lógicos, el condicional y la negación; los operadores lógicos fijan la verdad o falsedad de las proposiciones compuestas en las que intervienen (no hay una tercera posibilidad para Frege; su lógica es una lógica bivalente). Y recordemos que para que una deducción sea válida si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión tiene que ser verdadera.

Con todo lo anterior, Frege está resucitando el trabajo lógico que los primeros filósofos estoicos habían hecho en la Grecia Antigua (ver Zalta2023) y además, logrará integrar esta lógica de los operadores lógicos con la lógica de los cuantificadores que veremos más abajo y está ligada a Aristóteles y los peripatéticos. Esto es, Frege ha comenzado con el análisis de cómo las proposiciones simples se combinan para formar proposiciones compuestas y cómo todas ellas se articulan para generar deducciones válidas frente a la forma tradicional de origen aristotélico que comenzaba con el análisis de las proposiciones simples (ver más abajo en esta misma sección). Esto no es gratuito si recordamos el segundo principio metodológico de Frege en la "Introducción" de *Los fundamentos*: las oraciones son más fundamentales que las palabras, las proposiciones más fundamentales que los conceptos.

Pero Frege también tiene otro objetivo para el uso de un cálculo lógico. Trata de proporcionar instrumentos para garantizar que las inferencias cumplen la condición que las hace válidas (si las premisas son verdaderas, la conclusión tiene que serlo) que sean más fiables, que eviten los huecos en las deducciones. Pensemos en situaciones en las que hay una demostración matemática con muchas proposiciones involucradas. El método de calcular los valores de verdad y aplicar la definición de validez de una deducción sería inmanejable.

Frege echa mano de lo que ahora se denomina cálculo lógico (ver nuestra sección 17). Para que el lenguaje formal sea un cálculo lógico hace falta añadir al lenguaje formal unas reglas de manejo de los signos que nos permitan reproducir las inferencias que se encuentran en las demostraciones. En un cálculo lógico, a cada signo de un operador lógico le deberá corresponder al menos una regla para poder convertir las demostraciones en derivaciones (las contrapartes de las demostraciones en lenguaje formal).

En el caso del condicional, la regla es la siguiente: si en un paso de la derivación hay una expresión de la forma $A \rightarrow B$ y en otro paso hay otra expresión de la forma A, entonces podemos escribir un nuevo paso de la derivación en el que figure B.

Recordemos que Frege considera también la conjunción y la disyunción (sección 7) aunque señala que no es necesario usarlas para justificar las inferencias. En términos de la lista de casos, una conjunción de proposiciones es verdadera solamente en el caso (1); en los tres casos restantes es falsa. El signo es el conjuntor, que vamos a representar así: $\wedge$

$A \wedge B$

La expresión se lee: A y B. Y es equivalente a: $\neg(A \rightarrow \neg B)$. El uso de los paréntesis es obvio aquí.

Igualmente para la disyunción, el disyuntor lo representaremos así: $\vee$

$A \vee B$

La expresión se lee: A o B. Y es equivalente a: $\neg A \rightarrow B$ (Ojo: el negador afecta a A, no a toda la fórmula; comparar con la equivalencia del conjuntor).

En cuanto a la verdad de una proposición compuesta mediante la disyunción (inclusiva: esto o lo otro, o las dos cosas), Frege señala que será verdadera en los casos (1), (2) y (3). Y falsa en el (4).

El lector aficionado a la combinatoria habrá colegido que, dados los cuatro casos de más arriba, podrían proponerse más operadores lógicos. Es así, pues podría haber hasta dieciséis, exactamente; pero no vamos a entrar en ello en este momento, porque además, como se ha dicho ya, con los que se ha señalado es posible definir los demás.

La sección 8 habla de la igualdad o identidad (que podemos obviar por ahora; ver nuestra sección 15) y en las secciones 9 y 10 se ocupa de analizar las proposiciones simples.

En efecto, Frege nos ha explicado cómo debemos analizar las proposiciones compuestas y sus combinaciones. Pero las proposiciones simples también tienen en su estructura elementos relevantes para la deducción. Para explicar lo que hace Frege, volvamos a la gramática. Una oración está formada por un sujeto y un predicado. El sujeto es la parte que dice (significa) de qué se habla en la oración (eso incluye quién o qué pueda realizar ciertas acciones) y el predicado la parte de la oración que dice (significa) lo que se dice del sujeto en la oración.

Además, denominamos “términos singulares” a los nombres propios (“Pedro”, “Sandra”), demostrativos y expresiones como “tu perro”, “esta mesa” y similares. Por otra parte, se llaman “términos generales” a las palabras y expresiones que son nombres comunes (“perro”, “pájaro”), adjetivos (“blanco”, “cariñoso”), verbos (“volar”, “amar”). Toda oración debe tener, al menos, un término general que hace de predicado gramatical y puede o no tener uno o más términos singulares, pues los términos generales pueden funcionar como sujetos.

Recordemos ahora el ejemplo de Frege de los persas y los griegos que nos sirvió para introducir la idea de "proposición" como la parte del significado de oraciones declarativas en la medida que es relevante para la verdad y la falsedad. De la misma manera que hemos distinguido las partes de la oración declarativa e introducido diversos vocablos para ello, hay que introducir sus contrapartes en la proposición. Por un lado tenemos sujeto y el predicado gramaticales que son partes de la oración; por otro, tendremos el sujeto y el predicado lógicos que son partes la proposición.

Para Frege "un concepto es un predicado posible de un contenido de juicio [una proposición] singular; objeto es un sujeto posible de un contenido [proposición] tal."(sección 66, nota 9, de *Los fundamentos*). Lo que Frege denomina "objeto" se suele denominar habitualmente "individuo" (también "particular"). Por su parte, lo que Frege denomina concepto es lo mismo que en la lógica actual se denomina "predicado" (lógico).

Está claro que la terminología no ayuda porque no solo se usa "sujeto" y "predicado" para la gramática y la lógica sino que el uso que hace Frege de "objeto" también nos puede enredar. La palabra "objeto" puede usarse como término genérico para entidad o, como hace Frege, para referirse a individuos (llamados también "particulares"). Igualmente, conviene no perder de vista que concepto y predicado lógico es lo mismo para Frege, por lo que no se debe identificar un concepto en sentido fregeano con algo que tenemos en nuestra mente, algo psicológico.

Recordemos que nuestro objetivo era analizar las proposiciones simples con Frege. Para ello, vamos a basarnos en el ejemplo sobre la masa de la Luna que pone Frege en la sección 70 de *Los fundamentos* dado que no está muy afortunado en los ejemplos que pone en la *Conceptografía*.

(1) La Tierra // es redonda
(2) La Tierra // tiene más masa que la Luna

Tomando como referencia //, a mano izquierda del lector los sujetos, a mano derecha los predicados, según un análisis gramatical. Usando el lenguaje formal tendríamos

(1') Qa

donde "a" representa a la Tierra y Q "ser redonda", respectivamente un término singular y un término general cuyos significados respectivos son un objeto (individuo o particular) y un concepto.

Se puede sustituir "a" por "b", "c" o "d", que podrían ser los objetos Mercurio, Venus, Marte o cualquier cosa redonda.

Frege lee (1') así:

a cae bajo el concepto Q.

En la actualidad lo leeríamos:

Q de a.

"Q" se refiere a un concepto y "a" se refiere a un objeto o individuo.

En (2), Frege señala que si separamos "la Tierra", obtenemos el predicado (lógico; concepto en sentido fregeano) "tener más masa que la Luna". Si, en cambio, separamos "la Luna", obtenemos "tener menos masa que la Tierra". A primera vista puede resultar un poco confuso pues nos habla de "tener MÁS masa", "tener MENOS masa", pero tiene la virtud de señalar que el análisis lógico que realizamos al formalizar puede depender de los objetivos.

En cualquier caso, Frege quiere ir a parar a que si separamos "la Tierra" y "la Luna" *a la vez* en (2) obtenemos "tener más masa que" que es un concepto relacional. En el lenguaje formal

Ras

donde R representa "tener más masa que" y "a" a la Tierra y "s" a la Luna. la Tierra y la Luna podrían sustituirse, respectivamente, por el Sol y la Tierra o Alfa Centauro y el Sol, la Torre de El Miguelete y mi casa, etc.

Frege leería: a y s caen bajo R

Nosotros, en la actualidad: R de a y s.

Esto supone alejarse del análisis gramatical pues en él se distingue entre UN sujeto y UN predicado. En el análisis lógico también puede darse ese caso. Pero en el último ejemplo de Frege ya tenemos DOS sujetos y UN predicado. Y pueden ser más sujetos a la vez. Como señala Frege, en el caso del concepto relacional cada uno de los pares de objetos relacionados está enlazado con el concepto relacional de manera análoga a como lo está el objeto individual con el concepto bajo el cual cae. Esos conceptos relacionales son lo que actualmente se denominan en lógica "predicados poliádicos", y los "predicados monádicos" serían los que se dicen de un solo sujeto cada vez.

También en la sección 70 de *Los fundamentos*, Frege destaca que los predicados poliádicos se pueden sacar a la luz gracias al lenguaje formal, pero en algunos casos puede manifestarse en el lenguaje natural cuando la relación se expresa de determinada manera. Si decimos que (3) "Peleo y Tetis eran los progenitores de Aquiles", (3) es, gramaticalmente, una oración compuesta coordinada copulativa: "Peleo era progenitor de Aquiles y Tetis era progenitora de Aquiles". Sin embargo Frege señala que su análisis lógico, su análisis con vistas a destacar lo relevante en un razonamiento deductivo, aconsejaría analizarla en función de una proposición simple con concepto relacional:

Lst

Sólo así, podrían explicarse las inferencias realizadas sobre el árbol genealógico de Aquiles (ver más abajo, en esta misma sección, el ejemplo de la cabeza de caballo).

Por otra parte, podemos representar el hecho de que el predicado puede decirse de varios sujetos en ocasiones distintas utilizando variables, como cuando hemos dicho "cualquier cosa redonda" (aunque esto requiere más precisiones; ver más abajo en esta sección). Así podemos escribir Qx, o también Ryz, donde x, y, z son variables de individuo que pueden ser sustituidas por las constantes a, b, c, etc.

Es relevante señalar que lo primero (sección 1) que hace Frege en su *Conceptografía* es distinguir entre dos tipos de signos que se usan en aritmética. El primero consiste en letras que representan o bien un número que se deja indeterminado o bien una función que se deja indeterminada. Esta indeterminación permite expresar la verdad universal de una proposición matemática, como en

$(x+y)z=xz+yz$.

El otro tipo de signos consiste en signos tales como "+", "-", "0", "1", "2", que tienen un significado concreto. En términos actuales, diríamos que el primer grupo son las (letras) variables y en el segundo las (letras) constantes (recordemos que la distinción ya había aparecido en la explicación de la "Introducción" de *Los fundamentos* en nuestra sección 3).

Nos falta señalar cómo se determina la verdad de una proposición simple cuando está analizada en sujeto(s) y predicado. La respuesta intuitiva, en la que nos vamos a quedar, es que una proposición en la que se dice un predicado (lógico) de uno o varios sujetos (lógicos) es verdadera si y solo si el predicado conviene a los sujetos. Una proposición en la que se dice un predicado poliádico de varios sujetos será verdadera si y solo si se da la relación establecida entre ellos por el predicado. En el caso de un predicado monádico, la proposición será verdadera si y solo si establece correctamente una característica del sujeto.

Tenemos ya varios elementos determinantes en las novedades que Frege aporta a la lógica. En primer lugar, el uso del cálculo lógico que busca la precisión en el significado (formalización mediante lenguaje formal) y en las inferencias (las reglas del cálculo lógico). Frege propone un nuevo análisis semántico y, ligado a ello, unas nuevas reglas de inferencia deductiva. Específicamente, la posibilidad de expresar las relaciones en su lenguaje formal y de nuevo, como vamos a ver, la introducción de nuevas reglas para realizar inferencias con ellas. Para ello es necesario, además de lo visto, el uso de variables junto a un análisis de los cuantificadores en las oraciones, así como una nueva forma de determinar el sujeto en ciertos tipos de proposiciones que no se limita a las proposiciones relacionales y, consiguientemente, una nueva interpretación lógico-semántica de los sujetos y predicados. Empecemos por los cuantificadores (secciones 11 y 12).

Recordemos que en gramática se nos explica que los cuantificadores son pronombres o adjetivos (aunque algunos tienen variantes adverbiales) que expresan la cantidad. Lo pueden hacer de manera precisa, como los numerales (uno, dos, tres, tercero, quinto, centésimo, etc.) y de manera imprecisa: todo, todos, casi todos, todas, algún, alguno, algunas, ninguna, ningunas, nadie, nada, etc.

Frege propone que para las matemáticas basta con "todo", "todos", "todas" que representaremos mediante $\forall$, y "algún", "alguno", "algunas" que representaremos mediante $\exists$. Cuando el cuantificador más importante de una oración simple es "todos" la oración (o la proposición) se denomina "oración (o proposición) universal". Cuando el cuantificador más importante de una oración (proposición) simple es "algún", la oración se denomina "oración (proposición) particular". (¡Cuidado! Una "oración singular" es la que tiene como sujeto un particular; la terminología, de nuevo, no ayuda.)

Veamos ahora a qué se refiere Frege cuando se trata de ir más allá en su nueva forma de determinar el sujeto de las proposiciones (sección 9). Nos pide que comparemos:

El número 20 puede representarse como la suma de cuatro cuadrados

y

Todo entero positivo puede representarse como la suma de cuatro cuadrados

Está claro que "ser representable por la suma de cuatro cuadrados" sería un predicado y se representaría, pongamos, por la letra "Q". Pero si bien es correcto representar al número 20 por una constante individual (pongamos "h"), no se puede hacer lo mismo con el significado de "todo entero positivo". Porque lo que se puede afirmar del número 20 no se puede afirmar en el mismo sentido de "todo entero positivo". Frege señala que ambos significados no pertenecen al mismo rango.

Ontológicamente esto es obvio. En el primer caso se habla de un número concreto, el 20. En el segundo caso se habla de un conjunto de números, el conjunto de todos los enteros positivos. El tercer principio metodológico de Frege en la "Introducción" de los *Fundamentos* se había plasmado ya aquí:

hay que tener siempre presente la diferencia entre concepto y objeto.

Veamos. Frege se está enfrentando aquí la lógica tradicional que durante mucho tiempo realizaba un análisis que permitía la distinción anterior y que sí lograba fundamentar determinados tipos de deducciones. Se trata de la silogística que Aristóteles estudió en los *Analíticos primeros* y que hasta el siglo XIX constituyó el modelo de teoría lógica pese a que no era capaz de explicar las mayoría de las deducciones matemáticas (ver al final de esta sección).

Veamos los siguientes razonamientos donde las letras mayúsculas representan predicados (Smith2020, 26-27 y 271 y ss):

(a) Algunos F son G; ningún G es H; por tanto, algunos F no son H.
(b) Algunos F son G; algunos H son F; por tanto, algunos G son H.
(c) Todos los F son G; algunos F son H; por tanto, algunos H son G.
(d) Ningún F es G; algunos G son H, por tanto, algunos H no son F.
(e) Ningún F es G; ningún H es G; por tanto, algunos F no son H.
(f) Todos los F so G; ningún G es H; por tanto, ningún H es F.

Este tipo deducciones se denominan silogismos (no todos los de la lista son deducciones válidas). Como se puede comprobar, cada silogismo está formado por tres proposiciones, que puede tomar una de las siguientes cuatro formas:

Todos los G // son H
Ningún G // es H
Algunos G // son H
Algunos G // no son H

Según el análisis gramatical, tomando como referencia //, los sujetos gramaticales a nuestra izquierda, predicados gramaticales a nuestra derecha. Y dado lo dicho, cada silogismo está formado por dos premisas y una conclusión. Como primera condición para que los silogismos sean deducciones válidas, el sujeto y el predicado de la conclusión (los términos de la conclusión) ocurren en premisas separadas y hay un tercer término, el término medio, que se repite en las premisas pero que desaparece en la conclusión. Y los cuantificadores sólo están en los sujetos.

Frege señala que hay que olvidarse de la manera gramatical de distinguir entre sujeto y predicado y optar por una diferente. Ya hemos visto que hay que considerar la posibilidad de varios sujetos. Ahora veamos un nuevo cambio. Para una oración del tipo

Todos los G son H; por ejemplo: Todos los lógicos son sabios.

El lenguaje formal le asignaría la siguiente fórmula (G es "ser lógico" y H es "ser sabio"):

$\forall x(Gx \to Hx)$

que se leería: para todo x, si x es G entonces x es H.

Algunos G son H; por ejemplo: Algunos lógicos son sabios.

El lenguaje formal le asignaría la siguiente fórmula

$\exists x(Gx \land Hx)$

que se leería: existe algún x, tal que x es G y x es H.

Las razones de esa formalización son las siguientes:
(i) Formalizar "Todos los lógicos son sabios" como $\forall x(Gx \wedge Hx)$ es obviamente equivocado porque la fórmula dice que todos son lógicos y sabios.
(ii) Formalizar "Algunos lógicos son sabios" como $\exists x(Gx \rightarrow Hx)$ también es equivocado porque dice que hay alguien que si es lógico es sabio o sea hay alguien que o no es lógico o es sabio o no es lógico pero es sabio. Ni rastro de algunos lógicos son sabios.
(iii) Intuitivamente sabemos que "No todos los lógicos son estúpidos (no-sabios)" equivale a "Algunos lógicos son sabios". La formalización de ambas también debe ser equivalente. Tenemos $\neg\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$ que equivale a $\exists x\neg(Gx \rightarrow \neg Hx)$. En lógica proposicional tenemos que $\neg(A \rightarrow \neg B)$ equivale a $A \wedge B$. Por tanto, $\exists x\neg(Gx \rightarrow \neg Hx)$ equivale a $\exists x(Gx \wedge Hx)$.

Con lo que se acaba de decir se justifica la coherencia interna del enfoque de Frege para las oraciones que intervienen en silogismos. Pero queda por saber si dicho enfoque permite una mayor potencia en el análisis lógico. Y, en efecto, la teoría de Frege permite fundamentar también las deducciones de los silogismos relevantes para las matemáticas, aunque queda por saber si ofrece algo más. Y sí lo hace: la potencia del enfoque de Frege ofrece un análisis lógico de las proposiciones del tipo anterior aplicado a los predicados poliádicos del tipo Qxyz y que expresan relaciones, algo fundamental en las demostraciones matemáticas y que la silogística no lograba abarcar.

Augustus De Morgan en su *Formal Logic* (citado por Garrido1983) señalaba que la lógica aristotélica no podía explicar la validez de la siguiente deducción que parece intuitivamente correcta:

Todo caballo es un animal. Por tanto, la cabeza de un caballo es la cabeza de un animal.

Apliquemos la lógica silogística. Pero lo haremos con los medios formales de la lógica matemática pues en este punto no hay diferencias.

Cx x es un caballo
Ax x es un animal
Dx x es la cabeza de un caballo
Ex x es la cabeza de un animal

La premisa es: $\forall x(Cx \rightarrow Ax)$. Y de ella no sigue la conclusión: $\forall x(Dx \rightarrow Ex)$.

La clave es que "cabeza de caballo" y "cabeza de animal" no deben considerarse dos predicados distintos de una plaza, sino una relación.

Cx x es un caballo
Ax x es un animal
Dyx y es la cabeza de x.

Tenemos que la formalización de "ser la cabeza de un caballo" será x es un caballo e y su cabeza: $Cx \wedge Dyx$; y "ser la cabeza de un animal" será x es un animal e y su cabeza: $Ax \wedge Dyx$.

El argumento se puede formalizar así:

premisa: $\forall x(Cx \rightarrow Ax)$
conclusión: $\forall x \forall y(Cx \wedge Dyx \rightarrow Ax \wedge Dyx)$

Veamos cómo sería la derivación en el cálculo lógico:

1 $\forall x(Cx \rightarrow Ax)$, PREMISA.
2 $Ca \rightarrow Aa$, eliminación del cuantificador universal en 1.
----3 $Ca \wedge Dba$, inicio de una introducción del condicional.
4 Ca, eliminación del conjuntor en 3.
5 Aa, eliminación del condicional en 2 y 4.
6 Dba, eliminación del conjuntor en 3.
----7 $Aa \wedge Dba$, introducción del conjuntor en 5 y 6; fin de la introducción del condicional.
8 $Ca \wedge Dba \rightarrow Aa \wedge Dba$, introducción del condicional 3-7.
9 $\forall x \forall y(Cx \wedge Dyx \rightarrow Ax \wedge Dyx)$, introducción del cuantificador universal en 8; CONCLUSIÓN.

Finalmente consideremos una última aportación de Frege a la lógica. De nuevo, hay que recordar su principio de la introducción de *Los fundamentos*:

hay que tener siempre presente la diferencia entre concepto y objeto

Y hay que ligarlo a las consideraciones que hace en la "Conclusión" de *Los fundamentos*, secciones 94-102. Podemos crear los conceptos (predicados lógicos) que queramos. Es necesario incluso poder hablar de todos los conceptos aunque sean contradictorios. Pero que un concepto no es contradictorio, dice Frege (sección 95), solo puede establecerse mostrando que algo cae bajo él. Es obvio que si tenemos un objeto que cae bajo un concepto, pongamos Pa, es fácil pasar a la proposición $\exists x Px$. La cosa se pone bastante complicada para justificar pasar de $\exists x Px$ a que ese x sea tal o cual objeto determinado, pongamos a y especialmente si los predicados son poliádicos. Que la lógica ofrezca las reglas que gobiernan este tipo de inferencias de instanciación existencial, también se debe a Frege.

Precisar que, obviamente, la metalógica posterior (conceptos de consistencia, completitud, decidibilidad) permitió otra forma de demostrar la ausencia de contradicciones. Pero sólo accesible a la lógica de primer orden que sólo es una parte de la lógica de Frege.

Resumiendo, estas son las novedades que Frege aporta a la lógica y que forman el punto de partida para su fundamentación de la aritmética. En primer lugar, el uso del cálculo lógico que busca la precisión en el significado (formalización mediante lenguaje formal) y en las inferencias (las reglas del cálculo lógico). Por otro lado, la posibilidad de expresar las relaciones en su lenguaje formal y la introducción de reglas para realizar inferencias con ellas, así como ofrecer las reglas para las inferencias que conllevan la existencia de individuos. Para ello es necesario el uso de variables junto a un análisis de los cuantificadores en las proposiciones, así como una nueva forma de determinar el sujeto en ciertos tipos de proposiciones que no se limita a las proposiciones relacionales y una nueva semántica-lógica que articule todas las novedades sobre sujetos, predicados y proposiciones que ha introducido.

5-El contexto filosófico

La muerte de Hegel en 1831 no solo es el final de la vida de este filósofo sino del fin del poder del Idealismo alemán en la cultura alemana (Sluga1980). Con ello terminaba la hegemonía de una tradición que había comenzado con Leibniz.

La tradición filosófica alemana que generó una figura como la de Leibniz estuvo marcada por un aristotelismo conservador y el propio Leibniz no vio los defectos de la lógica de Aristóteles. Los intereses del Idealismo alemán desviaron la atención a otros menesteres más especulativos y la lógica se mantuvo, desde los estándares actuales, en la indigencia técnica.

Los cambios económicos, sociales y culturales barrieron la estructura cultural imperante a principios del siglo XIX y la caída en desgracia del Idealismo alemán arrastró con él a la filosofía en general. Sólo en el último tercio del siglo XIX volvió a recuperarse y lo hizo como investigación de la estructura lógica de la ciencia, la matemática y el lenguaje mediante el Neokantismo. Mientras tanto imperó un naturalismo cientificista poco sólido. En filosofía de las matemáticas, los partidarios de este último pudieron ver una aliado en el empirismo de John Stuart Mill.

El Neokantismo dominó la filosofía alemana hasta el fin del primer tercio del siglo XX. Su centro de origen fue la Universidad de Jena, donde Frege había desarrollado su carrera académica anteriormente. El Neokantismo dio origen al Empirismo Lógico, así como a la Fenomenología de Husserl y Heidegger. Ortega y Gasset se formó en el Neokantismo.

A la par que las matemáticas se desarrollaban vertiginosamente a lo largo del siglo XIX, la filosofía de las matemáticas tenía como referencia a Kant de tal manera que cualquier planteamiento debió realizarse en sus términos a lo largo del siglo XIX.

6-Kant y Frege

El vocabulario kantiano era el punto de referencia para hablar de filosofía de las matemáticas en el siglo XIX. Frege entra dentro de esta corriente principal y comparte los intereses meta-teóricos de otros matemáticos.

En *Los fundamentos* la figura de Kant aparece por primera vez en la sección 3 de las cuatro que preceden al capítulo I, y que están fuera de la "Introducción". Ahí Frege se hace eco de las distinciones entre juicios a priori y a posteriori y juicios analíticos y sintéticos.

Frege afirma: "Su objetivo [el de la pregunta por cuál es la razón última en que está basada la justificación de tener un enunciado por verdadero], pues, es encontrar la prueba y retrotraerla hasta las verdades originarias. Si por este camino se llega a leyes lógicas generales y a definiciones, entonces se tiene una verdad analítica, para lo cual se presupone que también se toman en consideración los enunciados en los que se basa la admisibilidad de una definición. Si, por el contrario, no es posible llevar a término la demostración sin utilizar verdades que no son de naturaleza lógica general, sino que están relacionadas con un campo particular del saber, entonces el enunciado será sintético. Para que una verdad sea *a posteriori* se exige que su prueba no pueda ser validada sin alguna apelación a los hechos; es decir, a verdades indemostrables y sin universalidad, que contienen aseveraciones sobre objetos particulares. Si, por el contrario, es posible llevar a cabo la prueba partiendo de leyes generales únicamente, que no pueden ni precisan ser demostradas, entonces la verdad es *a priori*."

En la primera nota de la sección 3, Frege pretende que sus definiciones se ajustan a Kant pero en realidad se distancia de este y Frege es consciente de este distanciamiento pese a utilizar su terminología. Como Frege dice en la sección 87, segunda de la "Conclusión": "Parece que Kant cree que el concepto viene definido por las características que se le asocian; pero éste es uno de los modos menos fructíferos de formar conceptos. Si se echa una ojeada a las definiciones dadas más arriba [a lo largo de *Los fundamentos*], apenas se hallará ninguna de este tipo."

El diagnóstico de Frege es certero pero exige explicación. Veamos cuál era el pensamiento de Kant en los aspectos relevantes aquí.

Kant identifica lo racional de las ciencias con los conocimientos a priori que éstas incluyen. La lógica es meramente formal y, consiguientemente, es completamente a priori. Pero Kant señala que hay conocimientos sobre el mundo de la experiencia, sobre el mundo empírico, que son a priori y no tienen nada de empírico (no solo son a priori sino puros a priori). Por tanto, para Kant tenemos conocimientos sobre la experiencia que no se obtienen de la experiencia: son los juicios sintéticos a priori. Es el caso de la totalidad de la matemática; en la física esto sólo ocurre en parte.

Para entender estas tesis, debemos entender cómo Kant articula las relaciones entre tres pares de tipos de juicios: los juicios singulares y universales, necesarios y contingentes, analíticos y sintéticos y, finalmente, a priori y a posteriori. Cuando se hable de "juicios" se toma en el sentido objetivo de la palabra equivalente a "proposición" (para los ejemplos y los tópicos de filosofía de la ciencia, Díez1999).

Juicios singulares y juicios universales

Establecer regularidades siempre se ha considerado un conocimiento deseable del mundo porque nos permiten saber a qué atenernos, prever cómo se comportan las cosas. Ejemplos de regularidades son:

1A la noche le sigue el día; 2. Los objetos sólidos no atraviesan paredes si no las rompen; 3. Juan fuma; 4. Los pájaros son aves que vuelan; 5. Tu perro muerde; 6. La velocidad media de un cuerpo es el espacio recorrido dividido por el tiempo transcurrido; 7. Mi gato es cariñoso; 8. La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos (teorema de Pitágoras); 9. Pedro y Sandra se aman; 10. El pez grande se come al chico; 11. Esta mesa de la derecha es mayor que esta otra de enfrente; 12. Este muro es alto; 13. El yeso sin aditivos es blanco.

Las regularidades anteriores nos permiten saber que no debo intentar salir de la habitación si no es por la puerta, que más vale no acercarse al perro de Fulano, mientras que acercarse a mi gato no ofrece peligro, que si cogí el coche a las tres y llegué a las seis e hice 300 Km., la velocidad media de mi coche fue de 100 Km/h, etc.

Las regularidades de nuestra lista, podemos dividirlas en dos clases. Por un lado, tenemos aquellas regularidades que se refieren a cosas concretas (3, 5, 7, 9, 11, 12). Esas cosas concretas, individuos, objetos o particulares: a una o varias personas (Pedro y Sandra, Juan), a animales (mi gato, tu perro) o a cosas (la mesa de la derecha y la mesa de enfrente, este muro, etc.); por el otro, están las regularidades que se refieren a tipos de cosas (1, 2, 4, 6, 8, 10, 13). En el caso de estas últimas, cuando decimos "Los pájaros vuelan", no hablamos de ese o aquel pájaro sino de todos los pájaros, de todo aquello que es un pájaro; y lo mismo pasa con los días y las noches, y los objetos sólidos y las paredes. Al hablar del yeso puro, estamos hablando de todos los trozos de yeso puro. En el caso 10, no estamos hablando de un pez grande y otro chico, sino de los peces grandes y pequeños en general. Podemos denominar a estas regularidades "regularidades generales". Las regularidades generales se formulan en juicios universales y las regularidades sobre cosas concretas se formulan en juicios singulares.

Por supuesto, que si tenemos que resolver un problema nos interesan las cosas concretas y no solo las regularidades generales. Por ejemplo, podemos querer resolver el problema de la medida que debe tener un tablón de madera de modo que apoyándolo sobre un muro nos permita subir a él empujando una carretilla. Pero el que la resolución sea rápida y sencilla dependerá de que quien debe resolverlo sepa un poco de geometría y sepa cuál es la inclinación óptima para poder empujar una carretilla cuesta arriba. Y saber geometría implica conocer ciertas verdades generales sobre rectas, círculos, triángulos, etc. que aplicaremos en el caso concreto que nos interesa.

Juicios necesarios y juicios contingentes

Además la ciencia y la filosofía se fijan en un tipo concreto de regularidades: las regularidades necesarias. Durante milenios, las explicaciones del mundo estuvieron ligadas a los mitos con dioses, espíritus y otras entidades más o menos personales que actúan caprichosamente. Descartada la intervención de aquéllos, la Naturaleza aparece como estructurada en regularidades necesarias, las cuales se formulan mediante juicios necesariamente verdaderos (juicios necesarios para abreviar).

Son ejemplos de regularidades necesarias de la naturaleza :

19.Todos los metales se dilatan al calentarlos; 20. Todos los cuerpos cargados eléctricamente con cargas del mismo signo se repelen con una fuerza proporcional al producto de sus cargas; 21. Nadie puede levantarse tirándose de los cordones de los zapatos; 22. Todas las esferas de uranio tienen menos de 1m de radio.

Estas regularidades necesarias de la naturaleza se denominan regularidades nómicas o, también, leyes de la naturaleza. Igualmente se dice que las leyes de la naturaleza son nómicamente necesarias. Aquí "necesario" significa que no puede ser cambiado, que siempre es así y no puede ser de otra manera, que no hay alternativas, no hay otras posibilidades. Observemos nuestro ejemplo (22): "Todas las esferas de uranio tienen menos de 1m de radio". No puede ser de otra manera, nunca podrá haber una esfera de uranio de más de un metro de radio, es algo permanente. Porque cuando se acumula cierta cantidad de uranio se produce una reacción nuclear. Por eso, desde un punto de vista lógico, "es necesario que p" (p es una proposición) se define como "no es posible que no p", es decir, p no puede no ser verdadera. Por tanto, un juicio es nómicamente necesario cuando y sólo cuando su negación implica una contradicción, evidentemente suponiendo que las leyes naturales que creemos conocer lo son.

Por otra parte, necesario se opone a contingente. A diferencia de lo necesario, que no tiene alternativas, lo contingente es aquello que puede o no ocurrir. Son los casos de regularidades accidentales o accidentes. Por ejemplo, son regularidades accidentales:

23.Todas las esferas de oro tienen menos de 1m de radio; 24. Todos los bípedos implumes son humanos; 25. Todos los cuervos son negros; 26. Siempre que voy a ver al Levante UD, éste pierde.

Esta distinción que hacemos entre leyes científicas y accidentes es muy evidente en el caso de las esferas de oro y uranio, ejemplos (22) y (23). El que no exista una esfera de oro de 1m es algo accidental: si tuviésemos el tiempo, dinero y paciencia para reunir todo ese oro, bien pudiera ocurrir que construyésemos tal esfera. Sin embargo, eso no podría ocurrir con la esfera de uranio porque las leyes naturales lo impiden: como ya sabemos, cuando se reúne cierta cantidad de uranio, éste comienza una reacción nuclear. Por tanto, hay en las regularidades nómicas algo que no hay en las regularidades accidentales. Eso es lo que intenta recoger el concepto de necesidad. Así, en el ejemplo (26) nadie dirá en serio que el Levante UD perderá siempre que vaya a verlo. Por eso "es contingente que p" (p representa una proposición) se define como "ni es necesario que no p ni es necesario que p", esto es, puede ocurrir tanto que p como que no p.

Los conceptos como necesario o contingente se denominan conceptos modales, pues se refieren al modo en que los juicios son verdaderos o falsos. Así, cuando un juicio es necesariamente verdadero, su verdad tiene una "fuerza" especial de la que carece el juicio contingente.

El problema con la distinción entre juicios necesarios y juicios contingentes, en el contexto en el que se han introducido, es cómo saber que un juicio es necesario. En los ejemplos anteriores hemos dado por sabido que tales o cuales juicios eran necesarios porque así lo podemos inferir de lo que nos han dicho los científicos al establecer que son leyes de la naturaleza. Aunque qué es una ley de la naturaleza no es un problema pequeño en filosofía; pero no es ahora nuestro objetivo.

Los conceptos modales, necesidad y contingencia, los hemos introducido atendiendo a la necesidad que muchos filósofos suponen que existe en el mundo físico. Pero también existen otras nociones de la necesidad. En lo que aquí nos interesa conviene tratar la necesidad conceptual, lo que vamos a hacer a continuación.

Juicios analíticos y juicios sintéticos

Consideremos ahora algunos ejemplos de nuestras regularidades entre tipos de cosas, formuladas en juicios universales, junto a algunas formulaciones alternativas que seguramente consideraremos que tienen un significado equivalente:

2.Un objeto sólido no atraviesa una pared si no la rompe; 2bis. Los objetos sólidos no atraviesan paredes si no las rompen 4. Un pájaro es un ave que vuela; 4bis. Los pájaros son aves que vuelan 10. El pez grande se come al chico; 10bis. Los peces grandes se comen a los peces chicos 13. El yeso sin aditivos es blanco; 13bis. Los trozos de yeso sin aditivos son blancos 14. Un ave es un animal; 14bis. Las aves son animales; 15. Un soltero no está casado; 15bis. Los solteros no están casados16. Ser hermano de alguien es tener el mismo padre y la misma madre; 16bis. Los hermanos tienen el mismo padre y la misma madre 17. Lo verde está coloreado; 17bis. Las superficies verdes son coloreadas.

Tanto las formulaciones de los ejemplos 2-17, como las formulaciones alternativas 2bis, 4bis, etc, podemos interpretarlas fácilmente como que dicen, más o menos, lo mismo. Sin embargo, otras interpretaciones pueden introducir dos matices distintos. Consideremos los ejemplos 4 y 4bis. Cuando digo que los pájaros son aves que vuelan o que un pájaro es un ave que vuela, puedo querer destacar que los individuos que se clasifican como pájaros hay que incluirlos en el conjunto de aquellos animales que se denominan aves pero que tienen la peculiaridad de volar, frente a otras aves que no vuelan, como por ejemplo, los pingüinos o las avestruces. Sin embargo, también puedo querer destacar cuáles son los rasgos que hacen que algo sea un pájaro o que podamos aplicarle el nombre común "pájaro". Pensemos que (4) es la respuesta correcta a la pregunta ¿Qué es un pájaro? para alguien que habla en castellano. Igualmente, a la pregunta ¿Qué es ser soltero? parte de la respuesta correcta es no estar casado.

Habitualmente, cuando hacemos preguntas del tipo ¿Qué es un X? en el caso de que X es un caso de término general, preguntamos por la descripción o caracterización de las cosas a las que puede aplicarse el término general X. Pero también podemos decir que preguntamos por la definición o significado del término general X. Como es habitual referirse al significado de un término general como un concepto, que es lo que Frege hace, entonces la respuesta a ¿Qué es un X? nos proporciona el concepto de algo: el concepto de pared, de fumar, de solidez, de amar, de gato, de velocidad, de mesa, de morder, de noche, de cuadrado, etc. No son conceptos Pedro, Sandra y Juan; y tampoco lo son mi gato, ni este muro, ni tu perro o esta mesa; son personas, animales o cosas concretos, es decir, individuos o cosas particulares. El conjunto de las cosas a las que puede aplicarse un concepto se denomina "extensión" del concepto correspondiente. Mientras que la caracterización del significado del término general o la definición del concepto se denomina la "intensión" o "comprensión" del concepto; mediante ella formulamos el contenido del concepto analizándolo en otros conceptos (que se pueden denominar "rasgos", "notas", "características" o "marcas").

Así por ejemplo, en el caso de la intensión, si queremos explicar qué es ser soltero diremos que es alguien que no está casado; o si nuestro primito, que es de corta edad e hijo único, nos pregunta qué quiere decir que Fulanito es hermano de Sotanito, le diremos que Fulanito y Sotanito tienen los mismos papá y mamá. Igualmente en el caso de los pájaros como aves que vuelan.

Volvamos a Kant. Tal como él lo formula, un juicios es analítico cuando el predicado está incluido en el sujeto. En un juicio analítico, el predicado despliega alguno de las características del sujeto. Por ejemplo, si digo que los pájaros son aves que vuelan, entonces estoy diciendo algo que es un rasgo del concepto pájaro: ser ave. Porque hay otros animales que vuelan pero no son aves. Por ejemplo, los murciélagos.

Si, por el contrario, yo dijese que un murciélago es un ave estaría haciendo un juicio falso porque los murciélagos son mamíferos. De la misma manera, una ballena no es un pez, sino un mamífero marino, un cetáceo. Como Kant señala, en un juicio analítico averiguo su verdad o falsedad aplicando el principio de no contradicción. Pongamos el caso del murciélago; se extraen todas las características del concepto ave y las comparamos con el concepto correspondiente a la especie zoológica del murciélago y vemos que hay contradicciones. Algunas de las características anatómicas, fisiológicas y genéticas de un murciélago contradicen las de un ave. De este modo, los juicios analíticos verdaderos son conceptualmente necesarios, su negación es contradictoria.

Veamos el ejemplo de Kant. "Todos los cuerpos son extensos" es un juicio analítico porque el concepto de cuerpo en física tiene los rasgos de extensión, impenetrabilidad, figura, etc. Pero el juicio "Todos los cuerpos son pesados" no es un juicio analítico. No entra dentro del concepto de cuerpo el que sea pesado. Los físicos nos pueden decir que un cuerpo no pesa si no es bajo la acción de un campo gravitatorio; si está fuera del alcance de cualquier otro cuerpo no pesará, aunque tenga masa (recordemos la distinción entre masa y peso de la física).

El ejemplo anterior puede resultar poco clarificador sin el trasfondo de la definición kantiana de juicio analítico. La definición de juicio analítico de Kant está calcada de la concepción del juicio *en general* de la filosofía de Wolff que tiene su origen en Leibniz (AndersonRL2015). Para esta tradición, lo que Kant llama juicio analítico es la que caracteriza todo juicio verdadero, si no fuera por la limitación de nuestro intelecto; Dios puede ver todos juicios como analíticos tal como los ha definido Kant. Para estos autores, los juicios analíticos verdaderos describen correctamente la articulación de los conceptos y las consecuencias que podemos extraer lógicamente (mediante la silogística). Partimos de la verdadera articulación de los conceptos y sacamos consecuencias. Si lo hacemos bien, las proposiciones resultantes serán verdaderas. Si no, darán como resultado juicios contradictorios.

Evidentemente, para esta tradición filosófica, la articulación de los conceptos y sus características es algo que existe objetivamente y el proceso por el que se descubre la verdadera articulación de los conceptos es un proceso que requiere esfuerzo científico. Además esos conceptos están organizados sistemáticamente en términos de la concepción de la definición y de la lógica aristotélicas.

Respecto a la definición, hay que usar los términos "género próximo" y "especie". Son términos relativos que designan la relación de subordinación lógica del segundo concepto, la especie, al primero, el género. La definición se genera citando la diferencia específica (un concepto A) y su género próximo, esto es, el concepto P que abarca la diferencia específica en cuestión (el concepto A) y otras (conceptos B, C, D, etc.) que caen bajo P y que dan lugar a otras especies de P. Cada especie de P tiene el contenido de P más el concepto A , B o C, etc, según la especie correspondiente. De este modo, cada género próximo contiene sus especies además de su extensión y los concepto A, B, C, etc están subordinados al concepto P. Las especies (los conceptos lógicamente subordinados) que forman cada género lo agotan y todas las especies de un género son disjuntas.

El resultado es un sistema conceptual articulado dicotómicamente que tiene una estructura jerárquica que culmina hacia arriba en los géneros supremos (categorías aristotélicas) y hacia abajo en las múltiples especies en las que se agruparían los individuos del mundo. Con la precisión de que para Leibniz, a los ojos de Dios, los individuos (los objetos fregeanos) no son diferentes lógicamente de los conceptos. Somos nosotros, intelectualmente imperfectas criaturas, quienes hacemos la distinción.

Respecto a la lógica, desde este punto de vista, se interpreta la silogística aristotélica como una manera de conectar dos conceptos y mediante esto se relacionan varios juicios. La inferencia silogística compara conceptos que carecen de una obvia o inmediata relación entre sus contenidos al encontrar una relación indirecta mediante el uso del término medio, que es un concepto que se relaciona con los dos conceptos de partida (ver nuestra sección 4). El papel fundamental de la lógica aristotélica conlleva que, dado lo dicho sobre ella, este enfoque carece de los recursos para establecer relaciones entre los conceptos más allá de la de subordinación de un concepto a otro o tener un género común con otro, así como la incapacidad de expresar la cuantificación múltiple, las inferencias ligadas a los operadores lógicos y la instanciación existencial. Evidentemente, Kant no podía formularlo de esta manera, pero no deja de ser relevante también para lo que se dirá a continuación.

Analiticidad y matemáticas en tiempos de Kant

Kant introduce la distinción entre juicios analíticos y juicios sintéticos porque, en primer lugar, se encuentra que no todo el conocimiento puede formularse en juicios analíticos, esto es, no todo conocimiento puede formularse en juicios que respondan a las características con las que los describen los filósofos de la tradición de Leibniz y Wolff. Además, en segundo lugar, Kant ofrece otro tipo de juicios que tienen unas características diferentes de los analíticos y que permiten explicar los que se resisten a ser analíticos y que Kant denomina juicios sintéticos.

Las matemáticas juegan aquí un papel importante (AndersonRL2015), porque el propio Wolff intentó demostrar que las matemáticas eran formulables en los juicios que Kant llamó analíticos. Kant piensa que Wolff no lo consigue. Por tanto, si un conocimiento como el matemático en el que todos piensan como modelo de conocimiento no es posible formularlo en juicios analíticos, la filosofía de Wolff queda en entredicho. Veamos como Kant argumenta contra la posibilidad de expresar en términos de juicios analíticos la aritmética.

En primer lugar, en las igualdades de la aritmética, nos encontramos que cualquier número natural puede ser igualado a un infinito número de operaciones aritméticas: 7=4+3 ó 7=12-5 ó 7=14/2, etc. Por tanto, cabe preguntarse cuál es el concepto que corresponde a 7 de toda esa infinitud de posibilidades o si lo serán todos esos conceptos. Además, en segundo lugar, cuando la igualdad tiene como términos dos operaciones aritméticas diferentes (por ejemplo, 5+3=12-4) tenemos un dilema. O las maneras de calcular el número a cada lado del signo "igual", los dos términos, son conceptualmente diferentes o no son diferentes; si son diferentes, entonces los dos términos no pueden ser conceptualmente equivalentes, por lo que la igualdad matemática no es una verdad analítica; si no son diferentes la igualdad matemática no está logrando representar la equivalencia de diferentes procedimientos para calcular el número y, por tanto, no tienen una expresión puramente conceptual, una expresión mediante juicios analíticos.

En tercer lugar, Kant hubiera podido alegar también contra la forma de Leibniz de demostrar las igualdades aritméticas, lo cual es relevante por lo que luego veremos en Frege (sección 6 de *Los fundamentos*). En los *Nuevos Ensayos*, Leibniz justifica mediante un caso que las igualdades numéricas son demostrables. Podemos demostrar, por ejemplo, que no es una verdad autoevidente que 2 y 2 son 4. Para ello, supongamos que 4 significa 3 y 1. Y las siguientes definiciones: (1) 2 es 1 y 1, (2) 3 es 2 y 1, (3) 4 es 3 y 1 ("es" debe interpretarse como "es igual a"). Y el axioma: si se reemplaza una cosa por otra igual, la igualdad se mantiene. La demostración sería así:

2+2=2+1+1=3+1=4, donde cada igual es justificado sucesivamente por las definiciones (1), (2) y (3).

Por el axioma, tenemos: 2+2=4, que es la conclusión que queríamos obtener.

Se puede suponer que Kant veía las definiciones como no analíticas porque no consiguen representar las relaciones de subordinación lógica entre dos números, pongamos, el concepto <1> y el concepto <2>. Veamos. Para responder a las preguntas ¿Cuántos? o

¿Cuánto? hace falta partir de la representación de lo que los objetos sobre los que se pregunta tienen en común. Ni más ni menos esto es lo que hacemos con los conceptos: cuando una serie de cosas caen bajo el mismo concepto podemos contarlos o medirlos. Podemos preguntar cuantas naranjas o cuantos plátanos hay en el frutero, pero también cuántos frutos; o cuantas moscas posadas sobre él. Igualmente, no es lo mismo medir longitudes de paredes o su altura o su anchura, por no hablar de caminos y carreteras, pero todos son longitudes. Sin embargo, a la hora de medir o contar, eso sólo es la primera parte. Porque una vez se consigue separar los objetos pertinentes (unidades, longitudes, superficies, etc.) hay que excluir las diferencias específicas, conceptuales (peras y manzanas o longitud del camino y largo de pared) sin eliminar la diferencia numérica para así poder obtener una cantidad. Y es que cuando añadimos una cantidad a otra se suman: dos peras y tres peras son cinco peras. Pero cuando añadimos una cualidad a otra, un concepto a otro, no pasa lo mismo. O bien tenemos otro concepto o tenemos el mismo concepto. Si al concepto de animal le añadimos el concepto racional tenemos el concepto de animal racional, un tipo de animal que no es ni una vaca, ni un cangrejo. Pero sin al concepto animal racional le añado otra vez el concepto de animal, no tenemos un ser humano doblemente animal (a no ser que estemos hablando en sentido figurado). Las cantidades y las cualidades no se componen igual. Las cantidades se suman: 1 y 1 son 2. A un concepto C al que se añade otro concepto, le pueden pasar dos cosas: o bien se le añade un concepto D diferente de los que componen C y, entonces, tenemos un concepto diferente a C, o bien se le añade un concepto D' igual a alguno de los que componen C, con lo que nada ha cambiado, seguimos teniendo el concepto C. Si estipulo que el concepto <1 y 1> equivale al concepto <2>, la relación con <1> no se manifiesta; si al concepto <1> le añado el concepto <1> obtengo de nuevo <1>. Por tanto, las definiciones de Leibniz interpretadas analíticamente no consiguen las relaciones de subordinación lógica que se supone deberían ofrecernos.

Por otra parte, y como Wolff es el filósofo embarcado en el proyecto antedicho, conviene remarcar que mantenía que son las relaciones de contenido las que establecen la identidad y equivalencia para los conceptos; se trata, por tanto, de un enfoque intensional. Además, para Wolff, la diferencia de contenido entre varios conceptos conlleva una extensión diferente para cada uno de dichos conceptos y viceversa. Pero así las cosas surgen problemas Si queremos llegar a 2 con 1+1, no podemos tomar las ocurrencias de "1" y "1+1" como términos cuyo papel sea mencionar o referirse al concepto <1>. Las dos ocurrencias de "1" son idénticas, por lo que la segunda no añade ningún contenido conceptual a la primera. Combinando las dos podemos llegar a algo distinto de <1> solo porque "1" está por un tipo distinto de representación. Si esto es así, se sigue que en "1+1=2" los términos de un lado de la igualdad no pueden tener el mismo contenido conceptual, el contenido de "1+1" lo da el uso del concepto <1>, mientras 2 cae bajo <2>. Naturalmente, deben tener la misma extensión, pues de lo contrario la igualdad no lo sería. Por tanto, de hecho, extensión e intensión están separadas: dos contenidos conceptuales distintos señalan la misma extensión. Y con ello Wolff estaba equivocado.

En conclusión, dado que la matemática es una ciencia de la que no cabe duda que obtiene conocimiento, ante estos argumentos en contra de que todos los juicios de la aritmética serían analíticos, Kant rechaza tal posición y ofrece su concepción alternativa: la de los juicios sintéticos para explicar el conocimiento matemático.

Para Kant, un juicio sintético exige captar particulares (individuos, objetos fregeanos) y no solo conceptos. Para Kant, podemos ser afectados por objetos, cuyo efecto se denomina sensación y el objeto fenómeno; nuestra capacidad de ser afectados es la sensibilidad. Para Kant, captar un particular y tener una experiencia sensible es lo mismo: tenemos experiencia sensible al captar particulares y captamos particulares solamente en la experiencia sensible. Además, Kant denomina intuir a captar una cosa individual y al resultado de intuir lo llama intuición. Así pues, es lo mismo decir captar particulares que tener una intuición y, para Kant, eso ocurre siempre en la experiencia sensible, en las percepciones en el sentido psicológico de la palabra. Por tanto, todas nuestras intuiciones son sensibles, pertenecen a la experiencia sensible, todas son intuiciones empíricas. Por ejemplo, ver este árbol, oír la campana de la iglesia cercana, ver este capullo de rosa, etc.

Un juicio sintético se formulará basándose en una intuición en el sentido técnico de Kant: un juicio es sintético cuando para hacerlo necesitamos acudir a la captación un particular (un particular u objeto concreto). Un juicio analítico se formulará basándose solamente en conceptos. Queda pendiente comprobar si Kant tiene razón en que los juicios sintéticos sí pueden explicar los juicios de las matemáticas. Pero previamente debemos atender a otra distinción entre juicios.

Juicios a priori y juicios a posteriori

La distinción semántica entre juicios analíticos y juicios sintéticos la inventa Kant ligada a una distinción epistemológica ya existente. Se trata de la distinción entre juicios a priori y juicios a posteriori. Recordemos que, en una posible interpretación de los textos de Platón, este mantenía que nuestro mundo físico, conocido mediante la experiencia sensible, era una copia imperfecta de otro mundo de donde procede el alma humana y los modelos de las cosas del mundo físico, a los cuales denomina ideas o formas (cuidado: no hay que confundir "idea" en el sentido de Platón, con el sentido mental de "idea", usado por nosotros y por los filósofos modernos). Nuestra alma porta con ella el conocimiento de las ideas que son olvidadas en el nacimiento, por lo que conocer es recordar ese conocimiento que, aunque olvidado, permanece en nuestra alma.

Evidentemente, Platón no está queriendo decir que la percepción, la experiencia sensible, no nos informe de nada. Lo que está queriendo decir es que la estructura auténtica de la realidad, sus leyes, las verdades necesarias que podemos decir de ella, no las vamos a encontrar en la experiencia sensible como quien encuentra una piedra, sino en las ideas o formas. Son estas las que explican porqué el mundo físico es como es.

Las matemáticas proporcionan un argumento en favor de esa posición. Un círculo, por ejemplo, se define en geometría como una figura plana compuesta por puntos que equidistan de uno dado. Pero nadie ha visto en realidad esa figura ni se podrá ver jamás. La forma circular exacta de los geómetras no se encuentra entre los objetos sensibles. Lo que vemos con frecuencia son figuras –un plato, una rueda, la luna llena–, objetos materiales que también llamamos círculos y que resultan ser, en la forma, aproximaciones al círculo definido en geometría, pero no ese círculo mismo. Podemos interpretar que Platón extrae entonces la conclusión de que la forma de círculo ha de existir, no en el mundo físico, sino en el mundo de las formas.

De esta manera, Platón introduciría una distinción epistemológica entre dos tipos de juicios. Se trata de una distinción platónica cuya terminología, sin embargo, no procede de Platón sino de la Edad Media. Un juicio cuya verdad o falsedad sólo se puede conocer a partir de la experiencia sensible es un juicio cuya verdad se conoce a posteriori: a posteriori de la experiencia, es decir, después de la experiencia; para abreviar el juicio se conoce a posteriori o, simplemente, es un juicio a posteriori. Un juicio cuya verdad puede obtenerse independientemente de la experiencia sensible, de la percepción, se dice que es un juicio a priori. Obsérvese que la distinción, tal como acaba de formularse, no nos habla de cómo de hecho hemos llegado a saber la verdad de un juicio o proposición sino cómo se puede justificar su verdad. Si yo llego a la conclusión de que tres y dos son cinco contando canicas (a posteriori) no quita para que se pueda demostrar matemáticamente que tres y dos son cinco. Si acepto esto último el juicio "tres y dos son cinco" es a priori (ver final de la sección 8 de *Los fundamentos*).

En cualquier caso, el conocimiento a priori no ha sido aceptado por todos los filósofos. Así, para Aristóteles, no hay juicios a priori que puedan suministrar conocimiento sobre el mundo físico, el cual solo nos proporciona la experiencia sensible. El conocimiento parte de la experiencia y se desarrolla por un proceso que podemos denominar de “maduración”: gracias a la experiencia sensible, hay juicios que se llegan a saber de forma inmediata merced a nuestra capacidad natural. Es algo que compartimos con los animales y que Aristóteles llama (trasliterado del griego) "epagogé", palabra traducida, habitualmente, por "inducción" pero que en él no significa lo mismo que en los textos actuales de filosofía de la ciencia. "Epagogé" denomina la capacidad de percibir que produce sensaciones que perduran un tanto y cuya repetición constante lleva a superponerlas y a sistematizarlas en la memoria. De ahí se formulan ciertos juicios sobre las cosas, llamados primeros principios o axiomas, y el resto del conocimiento se desarrolla deductivamente a partir de ellos.

Durante el siglo XVII y principios del XVIII, los filósofos reprodujeron la fractura platónico - aristotélica. Los filósofos racionalistas (Descartes, Spinoza, Leibniz) pensaban que ciertos conocimientos básicos eran juicios a priori. Muchos filósofos racionalistas que si no eran cristianos, sí eran teístas, suponían que los juicios a priori dependían de ideas innatas que Dios ponía en nuestra mente. Nuestra razón contiene ideas innatas y de ellas se pueden hacer ciertos juicios que se constituyen como principios o axiomas. De este modo, la razón para estos autores era la capacidad de razonar sumada a esas ideas innatas. Por el contrario, los filósofos empiristas (Bacon, Locke, Berkeley, Hume) pensaban, como Aristóteles, que los primeros principios se basaban en la experiencia y la razón sólo era la capacidad de razonar; y rechazaban la existencia de ideas innatas porque no era posible ofrecer pruebas de su existencia.

Podemos dar por sentado que todos los juicios analíticos verdaderos son a priori, si damos por supuesto que conocemos la articulación verdadera de los conceptos. Si eso es así, no necesitamos acudir a la experiencia sensible para hacer juicios analíticos y, por tanto, éstos son a priori. Hasta aquí, racionalistas y empiristas coincidirían. Sin embargo, el empirismo sometió a feroz crítica la doctrina de las ideas innatas y, por consiguiente, la posibilidad de conocimiento de la articulación verdadera de los conceptos. Para el empirista, los juicios analíticos no son más que trivialidades lingüísticas.

Por su parte, el empirismo se enfrentaba a dificultades a la hora de explicar el conocimiento científico como el propio Kant destacó. La primera dificultad se pueden formular en términos de la concepción de las leyes científicas y se encuentra en las consecuencias que Hume sacó del empirismo desde una postura irreprochablemente coherente. Pensemos en lo que se ha dicho más arriba sobre la distinción entre las regularidades nómicas (las leyes de la naturaleza) y las regularidades accidentales. ¿Qué distingue la “fuerza” de la verdad del juicio sobre la esfera de uranio (22) de la “fuerza” de la verdad del juicio sobre la esfera de oro (23)? Si, como Hume, aceptamos un empirismo sin concesiones, entonces no hay nada empírico, nada observable que permita establecer la diferencia entre una regularidad necesaria y otra contingente: de este modo, se pierde la distinción necesario - contingente en la naturaleza y con ella la distinción entre leyes y accidentes. Así, la única necesidad sería la conceptual, la propia de los juicios analíticos. Pero cualquier científico diría que es absurdo no hacer la distinción entre leyes y accidentes.

Los racionalistas resolvían el problema acudiendo a los juicios a priori: son los juicios a priori los que nos proporcionan los juicios necesarios. Nuestra razón puede acceder, cuando está bien constituida y adecuadamente guiada, a las ideas innatas que contienen las esencias o naturalezas de las cosas. Postular ideas innatas tiene sus propios problemas que criticaron los empiristas, como se ha dicho. Así, y usando la terminología de Kant, Hume rechaza los juicios a priori si no son analíticos. Por tanto, para un empirista radical como Hume, no hay conocimiento de la estructura necesaria del mundo, solo hay necesidad conceptual en el sentido explicado. Y, por consiguiente, la postura del empirismo radical de Hume trae unas consecuencias que, en opinión de Kant, indican que el empirismo no explica la ciencia correctamente. Este sería para Kant, el primer error del empirismo.

Pero además, según Kant, el empirismo comete un segundo grave error en su análisis de la ciencia física. Kant mantiene que si analizamos el proceder de los físicos, podemos llegar a la conclusión de que suponen una estructura necesaria en el mundo de la experiencia sensible. Kant mantiene que ha dado con esa estructura porque su propuesta es la única que permite explicar cómo funciona la ciencia. El conocimiento de dicha estructura necesaria del mundo de la experiencia sensible se puede resumir así:

1-El mundo está contenido en el espacio y el tiempo. Kant entiende el primero como un contenedor en el que las cosas individuales se distinguen unas de otras por su posición en

él. El tiempo es entendido en el sentido tradicional de línea temporal en una única dirección que permite caracterizar el proceso de cambio de una cosa individual.
2- Los fenómenos que ocurren en el mundo se pueden medir (son magnitudes) y el mundo está formado por un conjunto de objetos que interactúan causalmente con arreglo a patrones permanentes.

Por tanto, Kant estaría más cerca de Platón y Descartes que de Hume en las ciencias empíricas. Igualmente ocurre con las matemáticas.

La matemática siempre ha sido el candidato preferido de los filósofos para encontrar ejemplos de juicios a priori. Recordemos el caso de Platón. Un círculo, por ejemplo, se define en geometría como una figura plana compuesta por puntos que equidistan de uno dado. Pero nadie ha visto en realidad esa figura ni se podrá ver jamás. La forma circular exacta de los geómetras no se encuentra entre los objetos sensibles. Lo que vemos con frecuencia son figuras –un plato, una rueda, la luna llena–, objetos materiales que también llamamos círculos y que resultan ser, en la forma, aproximaciones al círculo definido en geometría, pero no ese círculo mismo. Podemos extraer entonces la conclusión de que la forma de círculo ha de existir, no en el mundo físico, sino en el mundo de las formas, sea eso lo que sea.

Una versión de platonismo matemático que nos interesa es la de los filósofos pertenecientes al racionalismo moderno clásico (s. XVII) que es tributaria de un platonismo cristianizado. Un ejemplo de racionalista clásico es René Descartes. A grandes rasgos, para Descartes, como para los racionalistas clásicos en general, el mundo de las ideas de Platón se imagina como la mente de Dios y nuestra alma es creada por éste con ciertas ideas innatas que nosotros podemos encontrar en nuestra mente con el debido entrenamiento. Un racionalista diría que la idea de círculo, de número o de triángulo son ideas innatas, puestas por Dios en nuestra mente, y que lo que hacemos es analizarlas para obtener los axiomas y de ahí deducir teoremas.

Precisamente podemos encontrar una justificación de la conclusión platónica acudiendo a Descartes. En la "Sexta meditación" de sus *Meditaciones metafísicas* afirma que "cuando imagino un triángulo, aun no existiendo acaso una tal figura en ningún lugar, fuera de mi pensamiento, y aun cuando jamás la haya habido, no deja por ello de haber cierta naturaleza, o forma, o esencia de esa figura, la cual es inmutable y eterna, no ha sido inventada por mí y no depende en modo alguno de mi espíritu; y ello es patente porque pueden demostrarse diversas propiedades de dicho triángulo" E insiste en que "Y nada valdría objetar en este punto que acaso dicha idea del triángulo haya entrado en mi espíritu por mediación de los sentidos, a causa de haber visto yo alguna vez cuerpo de figura triangular; puesto que yo puedo formar en mi espíritu infinidad de otras figuras, de las que no quepa sospechar ni lo más mínimo que hayan sido objeto de mis sentidos, y no por ello dejo de poder demostrar ciertas propiedades que atañen a su naturaleza".

Descartes, por tanto, apunta a dos características que hacen que el saber matemático sea peculiar. En primer lugar, que no puede ser producto de la actividad de mi mente, pero tampoco, en segundo lugar, producto del mundo físico percibido. La razón es, para lo primero, el carácter demostrativo de las matemáticas complementado con la autoevidencia de los axiomas de partida. Para lo segundo, la creatividad matemática que supera lo que el mundo de los sentidos me pueden ofrecer.

Así pues, como característica general, el platonismo en matemáticas, también denominado realismo matemático, sostiene básicamente dos cosas: primera, que las matemáticas son independientes de la mente humana por lo cual los seres humanos no inventan las matemáticas, sino que las descubren; segunda, que ese descubrimiento no se hace mediante la experiencia sensible sino mediante otra forma de contacto con los entes matemáticos. El resultado son juicios a priori.

El empirismo moderno, como era de esperar, fue epistemológicamente más aristotélico. En su *Tratado de la Naturaleza Humana* (Libro I, Parte II), Hume mantiene que nuestros sentidos dan lugar a las impresiones que son copiadas por nuestras ideas, las cuales son reorganizadas por nuestra actividad mental dando lugar a ideas complejas. Un tipo de idea compleja son las relaciones y dentro de ellas Hume destaca aquellas que dependen enteramente de la comparación de ideas: la semejanza, los grados de cualidad y las proporciones de cantidad. De ellas tratan las matemáticas que, para Hume, son básicamente la geometría y la aritmética.

Sin embargo, dicha reorganización que da lugar a las ideas complejas hace que éstas no sean una fiel reproducción de las impresiones recibidas. Hume introduce cierta creatividad de la mente mediante la imaginación a la hora de producir las ideas complejas de las matemáticas, las figuras y los números. Para Hume, ambos se originan a partir de lo inexacto de la percepción sensible (Tratado SB 45 y ss.) mediante el mismo proceso que conduce a que creamos en la existencia continua de los cuerpos (Tratado SB 198). Para Hume, por tanto, las ideas matemáticas son producto, en buena medida, de nuestra actividad mental y pueden estar muy alejadas de ser una representación fiel de la experiencia que las motivó. Aunque conviene no olvidar que para Hume las matemáticas conservan su carácter deductivo; lo dicho se refiere al origen de los axiomas desde los que se deducen el resto de proposiciones matemáticas.

Si se recuerdan las objeciones de Descartes está claro que este planteamiento de Hume se arriesga a caer en ellas. Las matemáticas poseen un carácter demostrativo (recuérdese también el origen autoevidente de la verdad de los axiomas), y por tanto objetivo, del que carecerían nuestros inventos mentales. Si los juicios matemáticos estuviesen basados en nuestra inventiva, en nuestra imaginación, nada garantiza su objetividad, porque está claro que, si las ideas no son fieles copias de la realidad según Hume, entonces las conclusiones que saquemos a partir de ellos tampoco lo serán.

Evidentemente es una conclusión que se puede discutir. Pero está claro que para el racionalista el empirismo no permite explicar el conocimiento ni empírico ni matemático. Por otra parte, como hemos visto, el racionalismo se muestra incapaz de explicar los juicios aritméticos en términos analíticos y el resto de conocimientos se basa en la doctrina de las ideas innatas desacreditada por las críticas empiristas.

Kant ofrece unos juicios que supuestamente superan tanto las dificultades empiristas (son a priori), como racionalistas (son sintéticos): los juicios sintéticos a priori. Así, Kant cree que puede recuperar la objetividad de las matemáticas (y de las ciencias, pero ahora no es nuestro asunto) manteniendo la experiencia como fuente fundamental del conocimiento.

Recordemos que, para Kant, la intuición es el resultado de captar un particular y eso ocurre siempre en la experiencia sensible. Por tanto, todas nuestras intuiciones son sensibles, son intuiciones empíricas. Pero para Kant, toda intuición tiene dos partes: la forma de la intuición y la materia de la intuición. La forma de la intuición la constituye el espacio y el tiempo. El espacio es el marco en el cual situamos los particulares que intuimos y a la vez el conjunto de las relaciones espaciales que guardan entre ellos. Con el tiempo pasa algo parecido; en él situamos los acontecimientos: unas cosas ocurren antes y otras después. (Kant señala que sólo podemos representarnos el tiempo espacialmente, por lo cual lo que digamos del espacio podemos extenderlo al tiempo.)

Conviene precisar que el espacio y el tiempo ni son meras relaciones, ni son cosas independientes en el sentido habitual. Se puede hablar de relaciones espaciales y temporales, pero el espacio y el tiempo no se reducen a ellas porque constituyen dos totalidades: hay un solo espacio y hay un solo tiempo, son particulares. Pero además, el espacio y el tiempo no pueden presentarse como dos cosas independientes al lado de los entes físicos. El espacio y el tiempo aparecen con las cosas físicas, con los particulares y éstos siempre aparecen en el espacio y el tiempo.

El espacio y el tiempo hacen posible la objetividad en cada intuición. Si queremos decir algo objetivo de un hecho de la experiencia concreto, sólo podemos hablar de las relaciones que las cosas mantienen en el espacio y el tiempo. Así, las relaciones de posición (por ejemplo, esta mesa está delante de mí) o temporales (esto ocurrió antes que lo otro) son objetivas. Por el contrario, forman parte de la materia todos los aspectos de la intuición que no tienen un carácter espacial o temporal: los colores, los olores o los sabores; la materia de la intuición no puede ser objetiva. Para Kant, toda intuición tiene su forma, y la forma de una intuición no puede no estar y todas las intuiciones tienen su forma.

Para contextualizar las afirmaciones de Kant sobre el lugar en su filosofía del espacio y el tiempo, conviene no perder de vista que la epistemología kantiana está condicionada por los logros de la física matemática de Newton en la que el espacio es el contenedor universal y, junto al tiempo, son las dos magnitudes que permiten explicar la física (tanto la cinemática como la dinámica). Y que parte del enfoque de Kant es justificar racionalmente el éxito de tal física. La otra parte es proporcionar alternativa a la fallida manera de explicar el conocimiento matematico de Wolff y el papel de los juicios sintéticos a priori en ambos proyectos.

Volvamos al conocimiento según Kant. Para que haya conocimiento, científico o matemático, hacen falta juicios y para estos hacen falta conceptos. Para Kant los conceptos pueden proceder del entendimiento o de la sensibilidad aunque los genera siempre el entendimiento. En el primer caso se extraen del propio entendimiento, en el segundo de intuiciones. Nuestro concepto del espacio y nuestro concepto del tiempo son conceptos (conceptos de unos particulares) que se extraen de la sensibilidad, en concreto de la parte pura de la sensibilidad, del espacio y el tiempo.

Kant no se entretiene en describir el concepto de espacio y el concepto de tiempo. Pero todo juicio que se haga exclusivamente sobre el espacio o sobre el tiempo será sintético porque el espacio y el tiempo son intuiciones, esto es, algo individual. Y también a priori porque hay juicios sobre el espacio o sobre el tiempo que son necesarios y universales y para Kant, la necesidad y la universalidad son señales de aprioridad.

Por tanto, tenemos que las dos formas de la intuición, el espacio y el tiempo, son los dos individuos que permite hacer, respectivamente, juicios espaciales y temporales. El entendimiento extrae del espacio y el tiempo una serie de conceptos. Y cuando nuestros juicios se refieren a esa espacialidad y temporalidad exclusivamente, estamos haciendo juicios sintéticos (se basan en algo individual: el espacio y el tiempo) y a priori (son universales y necesarios).

Son también juicios sintéticos a priori el principio de causalidad, el principio de inducción o el que los fenómenos físicos se organicen en objetos o sean magnitudes (se puedan medir). No es este nuestro tema, por lo que pasamos directamente a la aritmética.

"En relación con el sentido externo, el espacio constituye la imagen pura de todas las magnitudes, mientras que el tiempo lo es de todos los objetos de los sentidos. [...] El número no es [...] otra cosa que la unidad de síntesis de lo diverso de una intuición homogénea en general, unidad obtenida al producir yo el tiempo mismo en la aprehensión de la intuición" (A142-A143=B182)

Veamos una posible interpretación. Consideremos una serie de objetos diferentes numéricamente pero iguales en lo demás, pongamos que una serie de barras, donde el primer miembro de la serie es la unidad y cada miembro subsiguiente se construye por concatenación de una unidad adicional que sea una copia del miembro previo. Por ejemplo |||||||. Si tenemos la serie anterior podemos verla como que contiene otra, digamos |||||. Pero ese "contener a" se da de manera muy diferente al como el concepto <mamífero> contiene . <Mamífero> contiene como uno de sus caracteres o marcas, esto es, los mamíferos son una especie de animales. Por el contrario, "|||||||" contierne "|||||" como una parte propia. "|||||||" no es un tipo de "|||||". Las barras tienen identidad específica y mantienen su diferencia numérica. Y eso permite representar las igualdades aritméticas.

Por ejemplo, "|||||||+|||||=||||||||||||", podemos leer "||||||||||||" como construida mediante un grupo de 7 barras y de 5 barras de acuerdo con la regla de la adición. La regla nos dice que pongamos en la serie de la derecha del igual una barra por cada barra de todas las que están a la izquierda. Asi, la suma sirve como una regla de construcción de las doce barras.

Cabe preguntarse si hacían falta tantas alforjas para este viaje. Lo que dice Kant sobre la aritmética no parece ser muy prometedor. En realidad, Kant se centra más en la geometría porque era la parte de la matemática que funcionaba como fundamento del resto de las matemáticas de su época y Wolff, consiguientemente, había centrado sus esfuerzos para formular la matemática en juicios analíticos en la geometría. El resultado de su propuesta de juicios sintéticos para la geometría (de nuevo AndersonRL2015) es bastante más jugosa que lo que se acaba de decir sobre la aritmética y se puede considerar que ofrece una alternativa viable a la analiticidad de la geometría sostenida por Wolff. Pero recordemos que nos interesa todo esto para entender *Los fundamentos* de Frege y que Frege, como casi todos en su época, se expresa en el marco kantiano, de ahí la necesidad de profundizar en ello.

Desde un punto de vista estrictamente lógico, se ha señalado (ver Hintikka1973) que la forma de la intuición en Kant, el espacio y el tiempo, funciona como una alternativa a la inexistencia de la regla de instanciación existencial en la lógica de Kant. Recordemos que hay que esperar a Frege para que esa regla, fundamental en muchas demostraciones matemáticas, fuese incorporada a la lógica, pues no podía ser justificada mediante la silogística. A este respecto, se puede considerar la filosofía de la geometría de Kant como una epistemología de *Los elementos* de Euclides. Sin embargo, las afirmaciones de Kant sobre la espacialidad y la temporalidad (en la "Estética trascendental") son independientes de la geometría euclídea.

En cualquier caso, Kant no nos ofrece en aritmética mucho con lo que trabajar. Además, aunque las críticas de Kant al enfoque de Wolff son históricamente valiosas, desde el momento en que aparece la lógica matemática con Frege, desaparece la necesidad de la intuición del espacio y el tiempo para justificar las demostraciones con instanciaciones existenciales. Dicho de otra manera, la cuestión del carácter sintético de los juicios matemáticos se convierte en una cuestión irrelevante más allá del establecimiento de la historia del asunto (otra cosa es que estudiemos el quehacer matemático diagramático que la geometría de Euclides supone y del que se puede considerar una epistemología la filosofía de Kant).

Por otra parte, el carácter a priori de los juicios matemáticos, no es establecido por Kant, independientemente de que esa sea una posición corriente sobre el tema. Kant mantiene que los juicios matemáticos son necesarios y universales y por lo tanto, son a priori. Esta afirmación, Kant no la argumenta. Y aquí hay que tener presente que no es lo mismo, por un lado, que un análisis digamos, fenomenológico, nos invite a considerar la espacialidad y la temporalidad como horizontes irrebasables de la experiencia humana y, por otro lado, que consideremos epistemológicamente que los juicios matemáticos son a priori. Son dos cosas distintas y para establecer lo último, Kant no sirve de ayuda (ver Bostock2009).

Frege y Kant

Como ya hemos visto, Frege cita a Kant por primera vez en la sección 3 de *Los fundamentos*:

"Su objetivo [el de la pregunta por cuál es la razón última en que está basada la justificación de tener un enunciado por verdadero], pues, es encontrar la prueba y retrotraerla hasta las verdades originarias. Si por este camino se llega a leyes lógicas generales y a definiciones, entonces se tiene una verdad analítica, para lo cual se presupone que también se toman en consideración los enunciados en los que se basa la admisibilidad de una definición. Si, por el contrario, no es posible llevar a término la demostración sin utilizar verdades que no son de naturaleza lógica general, sino que están relacionadas con un campo particular del saber, entonces el enunciado será sintético. Para que una verdad sea *a posteriori* se exige que su prueba no pueda ser validada sin alguna apelación a los hechos; es decir, a verdades indemostrables y sin universalidad, que contienen aseveraciones sobre objetos particulares. Si, por el contrario, es posible llevar a cabo la prueba partiendo de leyes generales únicamente, que no pueden ni precisan ser demostradas, entonces la verdad es *a priori*."

Frege establece la distinción entre los dos pares de tipos de proposición en términos de demostración, esto es, deducción. Interpretando lo que dice Frege tenemos:

Proposiciones *a priori*: se deducen de proposiciones autoevidentes (no precisan ser demostradas) y universales. Las proposiciones *a priori* se deducen de proposiciones que se caracterizan pues, por un rasgo epistemológico, muestran su verdad por ellas mismas y otro lógico, son proposiciones universales.
Proposiciones *a posteriori*: se deducen de proposiciones cuya verdad depende de los hechos y desde el punto de vista lógico, son proposiciones singulares.

Proposiciones analíticas: se deducen de leyes lógicas generales y definiciones
Proposiciones sintéticas: se deducen de verdades que se refieren a un campo particular del saber.

Frege no habla de las características de las proposiciones que actúan como premisas. Además, su caracterización no es lo suficientemente extensa para establecer firmemente su posible posición al respecto. Habitualmente se interpreta que una proposición es analítica en sentido fregeano si es una ley lógica o se deduce de ellas con las definiciones que se necesiten. Las leyes lógicas exigen distinguir en el lenguaje la forma lógica de las proposiciones: recordemos lo dicho la hablar de la *Conceptografía*. Había una serie de partes de la oración cuyo significado jugaba un papel especial a la hora de usar la oración para expresar la verdad: los operadores lógicos, los cuantificadores, etc. Y ello nos permitía dar con la forma lógica de una proposición de la manera que vimos. La anterior definición de analiticidad es la que se suele dar por sentado en Frege y en la primera filosofía analítica sin entrar en más detalles epistemológicos.

Por otra parte, hasta Kripke, era usual aceptar sin discusión el criterio kantiano para las proposiciones *a priori*: si las proposiciones son universales y necesarias, entonces son *a* *priori*. Pero la necesidad puede ser conocida *a posteriori*, por ejemplo que el agua es H_2O. Si a ello unimos, lo dicho antes sobre la interpretación de Hintikka de los juicios sintéticos *a priori*, los dos pares de distinciones parecen colapsar en uno solo: proposiciones cuya verdad depende del mundo (*a posteriori*, sintético) y proposiciones cuya verdad depende de la "articulación del lenguaje" (*a priori*, analítico). Esta caracterización, mayoritaria en la primera filosofía analítica, enfrenta sus problemas tanto debido a la pregunta qué sea la forma lógica, como el estatuto de las definiciones que suponen los conceptos de significado y sinonimia con sus propias cuitas. Por otra parte, otros autores pueden señalar que los juicios sintéticos a priori se pueden mantener despojándolos de todo el aparato lógico y semántico kantiano que los apoya y quedando como mera etiqueta para señalar análisis fenomenológicos de estructuras básicas de la realidad como las que nos ofrecen la Estética y Analítica Trascendentales y que se formularían en proposiciones que son verdades sobre el mundo que no establecemos con medios empíricos.

En cualquier caso, Frege reconoce que se aleja más de Kant de lo que declara al principio de *Los fundamentos* como se puede comprobar por lo que dice en la sección 87, segunda de la "Conclusión" al hablar de las definiciones: "Parece que Kant cree que el concepto viene definido por las características que se le asocian; pero éste es uno de los modos menos fructíferos de formar conceptos. Si se echa una ojeada a las definiciones dadas más arriba, apenas se hallará ninguna de este tipo."

En la sección 5, ya dentro del capítulo I, Frege comenta el pasaje de Kant donde este introduce los "Axiomas de la intuición" (A162=B202 y ss). El principio de los axiomas de la intuición es que todas las intuiciones son magnitudes extensivas. Dicho en términos actuales, a todas las intuiciones se les pueden aplicar conceptos métricos. Por su parte, los Axiomas de la intuición son los axiomas de la geometría y niega que la aritmética los tenga. Pero luego Kant se refiere a las igualdades aritméticas, lo que Frege y Kant llaman fórmulas numéricas, como "proposiciones evidentes de la relación numérica" que son sintéticas pero al no ser universales sino singulares, no se pueden considerar a priori porque la marca del a priori es la necesidad y la universalidad; por lo tanto no pueden ser axiomas. Estas fórmulas numéricas son casos de juicios sintéticos para Kant y las utiliza para justificar el carácter sintético de los juicios matemáticos, aunque de manera poco clara.

Además Kant dice que las fórmulas numéricas son "evidentes". Frege señala entonces: "Y, por lo demás, ¿es acaso evidente que 135.664+37.863=173.527. ¡No! Y es precisamente esto lo que lleva a Kant a sostener el carácter sintético de estos enunciados." Frege se refiere a B16 de la *Crítica de la razón pura* y la sección 2 apartado (a) de los *Prolegómenos a toda metafísica del porvenir que haya de poder presentarse como una ciencia*. Partiendo del mismo ejemplo (7+5=12), Kant afirma que "la proposición aritmética es siempre sintética, lo cual se apreciará más claramente si se toman números algo mayores."

En la medida en que, como hemos visto, Kant intenta desacreditar que todos los juicios aritméticos sean analíticos, parece que es más lógico interpretar que Kant piensa que números algo mayores permitan visualizar que no hay descomposición del concepto para hallar la suma. Entonces, Frege atribuiría a Kant un razonamiento que no hace pero cuya conclusión le interesa para establecer el carácter deducido de las fórmulas numéricas.

Aunque pertenece a otro ámbito, no deja de ser relevante señalar que la discrepancia de Frege con Kant es más profunda de lo que Frege declara. En el capítulo III, en la sección 40 dice Frege: "El tiempo es solamente una necesidad psicológica para poder contar, pero no tiene nada que ver con el concepto de número. Si se utilizan puntos espaciales o temporales para representar objetos no espaciales o atemporales, esto puede ser quizá ventajoso para el proceso de contar; pero, en lo fundamental, en ello se presupone la aplicabilidad del concepto de número a lo no espacial y también, a lo atemporal."

Frege termina de medirse con Kant en el último apartado del capítulo I, que titula "¿Son las leyes de la aritmética sintéticas "a priori" o analíticas?", para responder, contra Kant, que son analíticas. Frege está de acuerdo con Kant en que son a priori, pero no que sean sintéticas. Para ello, previamente ha rechazado la posición de Mill que representa la posición de quienes creen que son a posteriori (ver nuestra sección 7).

Lo dicho más arriba puede servir para entender el texto de Frege en la sección 12 del citado apartado. Al final de esta afirma: "Pero en este sentido [captar un particular], la intuición no puede servir como fundamentación de las leyes aritméticas". En la sección 13, justifica tal afirmación: la geometría y la aritmética no se pueden comparar epistemológicamente porque los puntos y los números son distintos. Todos los puntos son iguales, pero cada número es diferente. Este argumento lo ha presentado antes al criticar a Mill por lo que insistiremos en él en nuestra sección 7 al tratar del autor empirista.

En esta sección se hacen referencias al número como magnitud que retomaremos en el siguiente capítulo de este trabajo al hablar de la sección 19 del capítulo II de *Los fundamentos*.

En la sección 14, puede comprobarse cómo Frege interpreta a su manera el concepto de juicio sintético de Kant (que definió en la sección 3). "Para el pensamiento conceptual se puede aceptar siempre el opuesto de este o aquel axioma sin que uno entre en contradicciones consigo mismo, cuando saca conclusiones de tales hipótesis contrarias a la intuición [en geometría]. Esta posibilidad muestra que los axiomas geométricos son independientes entre sí y de las lógicas primitivas; o sea, que son sintéticos." Ya sabemos que ese no es el concepto de juicio sintético de Kant.

Resumiendo, la postura de Kant es que existe un ámbito objetivo de conceptos que es posible investigar y conocer. La silogística y la teoría de la definición aristotélicas ofrecen las articulaciones más generales. Especialmente, no hay que perder de vista que los conceptos están organizados dicotómicamente y por un lado terminan en las especies más concretas (bajo las que caerían los individuos o particulares) y por otro en los géneros supremos. La silogística no tiene medios para explicar la mayor parte de las inferencias matemáticas (por ejemplo, las que involucran relaciones), pero Kant da una alternativa epistemológica parcial a este problema lógico mediante los juicios sintéticos a priori; estos permiten salvar epistemológicamente algunas inferencias que involucran una instanciación existencial.

Frege descarta la organización de los conceptos tal como la veían Kant y sus predecesores. No debemos partir de un ámbito objetivo de conceptos que puede ser objeto de un estudio independiente y formularse mediante sus definiciones basadas en los subconceptos que los forman (véase la ya citada sección 88 en la "Conclusión" de *Los fundamentos*) y luego formular proposiciones, sino que el contenido de los conceptos ha de establecerse por el significado de las palabras que los denotan al usar las oraciones declarativas (proposiciones). Es verdad que Kant dio un primer paso en esta forma de ver los conceptos al concebir estos como predicados posibles, pero el estado de la lógica en su tiempo no permitió llegar más allá.

Frege propone una nueva lógica que es imposible de formular en el sistema kantiano. Y además, Frege entiende la lógica como aquello que es máximamente general y conviene a todo lo que podemos expresar mediante el lenguaje. Por decirlo de alguna manera, la lógica en la que piensa Frege tiene el mismo estatuto que los predicados trascendentales respecto a todo ente: gobierna todo lo que se puede decir. Con ello sólo se pretende sugerir el lugar de la lógica para Frege, pues recordemos que en la *Conceptografía* Frege reconocía que la lógica a la que había dado a luz no podía tener un estatuto universal para todo el lenguaje, aunque confiaba en que sí tuviese ese estatuto para el lenguaje científico.

7-Mill y Frege

A lo largo del capítulo I, Frege considera la epistemología de las proposiciones aritméticas. Se fija en Leibniz y Kant, de los cuales ya hemos hablado y también en Mill, de quien nos ocupamos ahora.

Previamente, conviene vislumbrar hacia dónde caminaba Frege matemáticamente y luego de dónde venía. Lo primero se puede resumir en la axiomatización de la aritmética. Lo segundo es la aritmética de *Los elementos* de Euclides.

Una formulación cualquiera en matemáticas de los axiomas para la aritmética es la siguiente:

A-1) Hay un elemento especial $0 \in N$.

A-2) Para todo $n \in N$ existe un único elemento $n' \in N$ llamado el sucesor de n.

A-3) Para todo $n \in N$, $n' \neq 0$.

A-4) Si $n \in N$ y $m \in N$ y $n' = m'$ entonces $n = m$.

A-5) Si

1. $0 \in S$,

2. Si para todo $n \in S$ entonces $n' \in S$,
   entonces
   $N \subseteq S$

El conjunto de estos axiomas se denomina Axiomas de Peano. No vamos a entrar en las cuestiones técnicas que plantea cualquier axiomatización de la aritmética y cuyos desarrollos culminaron en los Teoremas de Indecidibilidad de Gödel. Solo recordaremos que tales axiomas tienen su origen en un trabajo paralelo al de Frege sobre los números naturales de Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916): "¿Qué son y para qué sirven los números?" ("Was sind und was sollen die Zahlen?") publicado en 1901. Dedekind volverá a aparecer más adelante. Lo que conviene destacar es que la formulación axiomática de la aritmética en términos de la función sucesor (A-2) y el Principio de inducción matemática (A-5) convierte la aritmética en un objeto por derecho propio, no solo en lo que respecta a los cálculos lógicos involucrados sino también porque genera una serie de estructuras matemáticas en sentido propio.

De este modo, la aritmética que los matemáticos estudiaron a partir de sus axiomatizaciones había dejado de ser solo el conocimiento de los números primos, perfectos, cuadrados, etc. que veíamos ya en los pitagóricos y que exige ser descrita para entender de qué hablaban los filósofos y matemáticos cuando hablaban de aritmética antes de finales del XIX. Así pues es relevante también para entender a Mill y Kant remontarse a *Los elementos* de Euclides.

La aritmética de Euclides

Los libros aritméticos de *Los elementos* de Euclides (libros VII, VIII y IX) pueden considerarse una fundamentación de la aritmética de manera parecida a como el libro I fundamenta la geometría (Mueller1981). Sin embargo, no hay axiomas específicos para la aritmética ni en esos libros, ni en ningún otro lugar de la obra de Euclides. El principio del libro VII contiene 23 definiciones. De la 3 a la 23, define diversos tipos de números de entre los que ahora llamaríamos naturales (define número par, impar, primo, etc.) para lo que también define la multiplicación (definición 16). Pero no define y da por entendida la expresión "medir a" aplicada a dos naturales y que por el contexto se ve que es equivalente a nuestro "dividir a".

La segunda definición que presenta Euclides es digna de mención: Definición 2. Un número es una pluralidad compuesta de unidades. El interés de esta definición es que tiene la consecuencia de que el 0 y 1 no son números. Y se pueden encontrar demostraciones distintas de la misma proposición en los libros aritméticos que nos ocupan para 1 y para los otros números, aunque otras veces Euclides ignora la distinción (el 0 no se considera). Conviene tener esto presente cuando abordemos el capítulo III de *Los fundamentos* (ver nuestras secciones 9 y 13).

Pero hay más peculiaridades en la aritmética griega. En términos actuales, si partimos del 1 aplicamos reiteradamente la operación sucesor para ir obteniendo el 2, el 3, etc. Pero nada de esto hay en Euclides. Para él hay indefinidamente muchas unidades que se pueden combinar indefinidamente de muchas maneras. Por tanto, no hay un único 2, 3 o 4, etc. Cualquier par de unidades será un 2, no existe "el 2", cualquier trío de unidades será un 3 y no existe "el 3" etc. (y esto no es trivial, según veremos que señala Frege).

Así pues, Euclides da por sentado que hay muchas "unidades" y que ello hace que podamos encontrar una selección finita (en nuestros términos, un número natural) que cumple ciertas condiciones. En consecuencia, Euclides da por supuesto un axioma que afirma tres cosas: (a) la existencia de una multiplicidad o agregado que contiene una unidad sola; (b) para cada número natural k, la existencia de otro natural l que contiene todas las unidades de k más al menos una más; (c) cualquier n unidades constituyen un número natural, digamos k.

El anterior axioma implícito sirve para justificar, por ejemplo, la existencia del resultado de k multiplicado por l; recordemos que Euclides define nuestro equivalente a la multiplicación en la definición 16. Pero cuidado, porque si somos formalmente cuidadosos aquí no existe lo que entendemos por operación de multiplicación en nuestro sentido. Dado que no existe el 2, el 3, el 4 etc., como ya se ha dicho antes.

Y esto está ligado al punto más relevante que diferencia la aritmética de Euclides de la nuestra: que no hay Principio de inducción que juegue un papel "estructural". Euclides no tiene una concepción de los números naturales como un conjunto con una estructura de orden, dado que el concepto de sucesor no juega ningún papel en los números de los libros aritméticos de Euclides, como hemos visto más arriba, ni tampoco el Principio de inducción matemática, que aunque se usa implícitamente, no es *constitutivo* del conjunto de los números naturales como conjunto.

La filosofía de la aritmética de Mill

Lo primero que hay que constatar es que la aritmética y la geometría que tiene delante Mill es la de *Los elementos* de Euclides y la lógica básicamente es la silogística, pese a tratar la lógica de proposiciones (Skorupski1989). Por tanto, se aplican todas las limitaciones de ambos ámbitos que hemos ido viendo (ver el comienzo de esta sección y la sección 4)

Por otra parte, no sólo Mill afirma que las verdades de la lógica, la aritmética y la geometría no son analíticas, sino que tampoco son *a priori*; son *a posteriori*, se establecen inductivamente. Pero, cuidado porque la geometría y la aritmética son ciencias *deductivas*. El punto de partida último de estas deducciones son los axiomas. La verdad de los axiomas, en efecto, se obtiene mediante la experiencia, mediante la inducción (Mill, B. I, c. VI, s. 1), de la misma manera que las reglas y axiomas lógicos. Pero el resto de trabajo matemático es deducción. Estamos pues, según vimos, ante una posición claramente empirista que cabe retrotraer a Aristóteles y que tiene su representante británico más egregio en Hume.

Los teoremas de la geometría euclidiana en Mill no son directamente verdaderos del espacio físico sino que expresan la posibilidad permanente de construir ciertos objetos. Esa posibilidad expresa aquí la consistencia con las leyes de la naturaleza. Los objetos construidos permiten tratar las cosas materiales como aproximaciones de las que las figuras geométricas son límites a los que se acercan sin llegar a identificarse con ellas nunca. Una ilustración aunque ajena a las matemáticas, serían las llamadas leyes de los gases perfectos en física.

En la misma línea, los teoremas de la aritmética expresan, como los de la geometría, una posibilidad: la posibilidad permanente de agregación de objetos. Cada numeral n tiene como referencia un fenómeno físico y tiene como sentido una propiedad física, la propiedad de un agregado o multiplicidad de estar n-numerado. Mill formula una serie de axiomas para la aritmética en la línea de la aritmética de Euclides y cuyo contenido no nos interesa pues no consiguen lo que pretenden. En cuanto a los números se generan a la manera de Leibniz, que Frege expone en la sección 6 de *Los fundamentos* y ya hemos citado.

Dado lo dicho sobre la aritmética de Euclides, Mill claramente está en la misma línea. Veámoslo en las tres ideas clave de la posición de Mill en sus propias palabras (Mill, B. I, c. VI):

(1) "Sin embargo, este caso aparentemente decisivo no es un caso en realidad; hay en cada paso de un cálculo aritmético o algebraico una inducción real, una inferencia real de hechos a hechos; y que lo que oculta la inducción es simplemente su naturaleza comprehensiva, y la consiguiente extrema generalidad del lenguaje. *Todos los números deben ser números de algo: no hay tales cosas como los números en abstracto*. Diez debe significar diez cuerpos o diez sonidos, o diez latidos del pulso. *Pero aunque los números deben ser números de algo, pueden ser número de cualquier cosa*. Las proposiciones concernientes a números, por tanto, tiene la remarcable peculiaridad de que son proposiciones concernientes a cualquier cosa; todos los objetos, todos los existentes de cualquier tipo conocidos por nuestra experiencia. Todas las cosas tienen cantidad; consisten en partes que pueden numerarse; y en ese carácter poseen todas las propiedades que se llaman propiedades de los números" (mío el subrayado)

(2) "La expresión "dos piedras y una piedra" y la expresión "tres piedras", están, por supuesto, por el mismo agregado de objetos, pero no están por el mismo hecho físico. Son nombres para los mismos objetos, pero de esos objetos en dos estados diferentes: aunque denotan las misma cosas, su connotación es diferente. Tres piedras en dos lotes separados y tres piedras en un lote, no producen la misma impresión en nuestros sentidos; y la afirmación de que las mismas piedras pueden, por cambio de lugar o de disposición, producir bien este conjunto de sensaciones, bien el otro, aunque es una proposición familiar, no es una [proposición] idéntica. Es una verdad que nos es conocida por experiencia temprana y constante: una verdad inductiva; y tales verdades son el *fundamento* de la ciencia del número." (mío el subrayado)

(3) "Y así podemos llamar "Tres es dos y uno" una definición de tres; pero los cálculos que dependen de esta proposición no se siguen de la definición misma, sino de un teorema aritmético que se supone, esto es, que las colecciones de objetos existen, lo cual impresiona los sentidos así [dibujo: tres círculos, dos sobre uno], pueden separarse en dos

partes así [dibujo: dos círculos, un espacio, y un tercer círculo]. Supuesta esta proposición, llamamos a todas estos casos "treses", después de lo cual la enunciación del hecho mencionado más arriba servirá también como una definición de la palabra "tres"."

Mill, Euclides y Frege

Para una visión condicionada por los Axiomas de Peano, la posición de Mill no es muy prometedora. Pero si comparamos lo que dice Mill con lo que hemos visto en Euclides, la posición de Mill se puede entender. La idea de que los objetos que nos rodean pueden ser las unidades de Euclides, el que esas unidades no constituyan un conjunto infinito, pero sí que podemos obtener tantas como necesitemos; la idea de que no hay números en abstracto sino múltiples "números", la inexistencia de una estructura del conjunto de los números (nada de función sucesor o Principio de inducción matemática) o las igualdades aritméticas como producto de una generalización, puede ser discutible pero no descabellado. Y además, lo que no se puede pedir es que Mill haga una epistemología para una aritmética que desconoce.

Por su parte, Frege no entiende a Mill y lo cita mal. Frege, como es lógico, se rasga las vestiduras al no encontrar el hecho físico que corresponda al 0 o al 1 (secciones 7 y 8). Si bien es obvio que podemos hablar de la ausencia de la propiedad en cuestión para el primer caso y no es infrecuente encontrar una cosa y solo una para ciertos tipos de cosas.

Frege cita mal a Mill (sección 7), pues refiriéndose a la cita (3) afirma que Mill dice "Los cálculos no se siguen de la definición misma, sino de los hechos observados" pero Mill dice (véase la cita (3)) "los cálculos que dependen de esta proposición no se siguen de la definición misma, sino de un teorema aritmético que se supone, esto es, que las colecciones de objetos existen, lo cual impresiona los sentidos así [y sigue el ejemplo de los circulitos]". Por tanto, es razonable interpretar que Frege debería haber dicho que Mill dice: "Los cálculos no se siguen de la definición misma, sino de la existencia de colecciones de objetos". Esa es la venerable doctrina de los libros aritméticos de *Los elementos* de Euclides.

Igualmente, Frege apela a los números grandes (sección 7), aunque nada que no pudiera criticarse a Euclides. Dice Frege: "No es suficiente decir: hay grandes colecciones de cosas que pueden ser descompuestas; pues con ello no se ha dicho que existan colecciones exactamente del tipo que se exigen para la definición del número 1000000, por ejemplo, y tampoco se detalla el modo de descomposición.". En esto último se puede apelar a Euclides y sus definiciones sobre múltiplos, divisores, etc. Pero es que Frege se deja lleva por la mala interpretación del autor empirista: Mill mantiene que hay unos axiomas, unos puntos de partida que se establecen inductivamente, no que todo número se establezca inductivamente.

Así pues, lo que dice en la sección 8 no se puede estar refiriendo a Mill: "Si a una proposición se la llama empírica porque hayamos tenido que hacer observaciones para hacernos conscientes de su contenido, entonces es que no se emplea el término "empírico" en el sentido de opuesto a lo a priori."

Tras el apartado "¿Son demostrables las fórmulas numéricas?", Frege pasa al apartado "¿Son las leyes de la aritmética verdades inductivas?". Y sigue malentendiendo a Mill.

Con "leyes de la aritmética", Frege se refiere a afirmaciones como "las sumas de iguales son iguales". Según Mill, esta afirmación es equivalente a "lo que está compuesto de partes, está compuesto de partes de estas partes", equivalencia que, en efecto, Mill no justifica.

En cualquier caso, Frege se queja (sección 9, primera del apartado que nos ocupa) de que Mill parece que pretende sustituir el axioma de Leibniz "si se reemplaza una cosa por otra igual, la igualdad persiste" por una verdad inductiva. Y cita favorablemente el innatismo de Leibniz (sección 11, final del apartado que nos ocupa): "las verdades de los números están en nosotros"

Y además, Frege afirma:

"Pero para poder llamar a las verdades aritméticas leyes naturales, Mill les atribuye un sentido que no tienen. Dice, por ejemplo, que la igualdad "1=1" podría ser falsa porque una pesada de una libra no tiene siempre exactamente el mismo peso que otra. Pero no es eso lo que afirma la proposición "1=1"."

Y tampoco es lo que dice Mill. En el libro II, capítulo VI, sección 3, lo que está diciendo Mill es que una cosa es la aritmética y otra su aplicación que debe hacer caso omiso de ciertas inexactitudes para poder ser aplicada. Frege se equivoca, pues, al decir (en la sección 9) que "Mill confunde siempre las aplicaciones que se pueden hacer de una proposición aritmética, las cuales frecuentemente son físicas y presuponen hechos observados, con la proposición puramente matemática misma."

El último apartado del capítulo I, titulado "¿Son las leyes de la aritmética sintéticas "a priori" o analíticas?" ya ha sido traído a colación al hablar de Kant. Sin embargo, Frege, de nuevo, realiza una serie de consideraciones sobre Mill en las secciones 16 y 17. Es especialmente relevante lo que dice en la sección 17, la final del capítulo I.

Frege comienza la sección con lo que parece una aceptación de las tesis empiristas de Mill a modo de supuesto para desarrollar su argumento. No lo dice así, pero cabe pensar que la redacción de la sección 17 podría haber comenzado: "Vamos a suponer que la verdad de las proposiciones sólo se puede establecer por medios empíricos." Podríamos continuar parafraseando a Frege y decir: "Pero el que sea así, no quiere decir que se nos exima de la tarea de extraer las proposiciones que se siguen de ellos mediante la deducción."

Para ello, mantiene Frege ya en sus propias palabras, en vez de hechos hay considerar contenidos que actuarían como condiciones. Cabe entender que esos contenidos serían contenidos proposicionales, proposiciones. El resultado serían juicios analíticos y Frege señala: "La observación entonces debería decidir, en último término, si se cumplen las condiciones contenidas en las leyes así fundamentadas". Esto sería un empirismo aceptable para Frege por lo que dice en la nota 23.

Pero esta posición, según Frege, no permite la generalidad propia de las matemáticas: "[...] (el método de Frege) conduce a una proposición general, que no tiene por qué ser sólo aplicable exactamente a los hechos presentes". Por eso Frege prefiere el logicismo: que las verdades de la aritmética fuesen a las de la lógica lo que los teoremas son a los axiomas de la geometría. Sólo así se preserva la generalidad.

Aquí hay un error de interpretación de Frege. Recordemos de nuevo que para Mill, la aritmética es una ciencia deductiva, cuyos axiomas se extraen de la experiencia inductivamente. Y el resultado de una inducción no tiene porqué ser una proposición singular, puede ser una proposición universal y en todo caso, los hechos no tienen porqué ser hechos presentes.

La discrepancia de Frege con Mill puede ponerse en términos de la disputa entre racionalistas y empiristas que vimos al hablar de Kant. Mill es claramente empirista y Frege racionalista porque suscribe las afirmaciones de Descartes sobre el saber matemático (ver nuestra sección 6). En primer lugar, el saber matemático no puede ser producto de la actividad de mi mente, lo cual implica que es algo subjetivo, pero tampoco, en segundo lugar, producto del mundo físico percibido. La razón es, para lo primero, el carácter demostrativo de las matemáticas en conexión con la auto-evidencia de los axiomas de partida. Para lo segundo, la creatividad matemática que supera lo que el mundo de los sentidos me pueden ofrecer. Así, para Frege, citando a Leibniz, los números son innatos, están en nosotros (sección 11) pero cabe entender que su procedencia no es la mente subjetiva sino algo que no se acierta a concretar (y esto vale también para las verdades lógicas). Mill piensa que todo el conocimiento, incluyendo la lógica y las matemáticas, es fruto de la elaboración del material empírico. En el caso de las matemáticas y la lógica, elaboramos unos axiomas mediante el procedimiento de inducción y de ahí deducimos el resto de verdades lógicas y matemáticas.

En realidad, la crítica de Frege podría haber sido más clara si él mismo no hubiera tomado posición y se hubiera limitado a afirmar que el concepto de número debe proceder del análisis lógico del lenguaje que utilizamos, independientemente del origen de ese lenguaje y los compromisos ontológicos correspondientes. Esto resulta sorprendente porque hay que esperar a la sección 62 para que Frege haga explícita esta posición y Frege es el padre de la filosofía analítica y del giro lingüístico consiguiente.

8-La argumentación del capítulo I

Hemos puesto en su contexto las posiciones de Frege sobre la filosofía de la matemática atendiendo en el capítulo I de *Los fundamentos* a su posición respecto a Kant y Mill.

Volvemos al capítulo I "Opiniones de algunos autores sobre la naturaleza de los enunciados aritméticos" pero ahora para centrarnos en el esquema de la argumentación de Frege para situar su posición sobre las proposiciones matemáticas en las dicotomías *a priori* / *a posteriori* y analítico / sintético, sin preocuparnos si Frege hace justicia a quienes cita.

El capítulo tiene tres apartados:
¿Son demostrables las fórmulas numéricas? (secciones 5 a 8)
¿Son las leyes de la aritmética verdades inductivas? (secciones 9 a 11)
¿Son las leyes de la aritmética sintéticas "a priori" o analíticas? (secciones 12 a 17)

La primera distinción que no hay que perder de vista es la que hay en los "enunciados aritméticos". Por un lado, las "fórmulas numéricas" que en una terminología más cercana llamaríamos "igualdades aritméticas" (2+3=5). Por otro lado, las "leyes generales de la aritmética" que valen para todos los números; por ejemplo, el principio de inducción matemática o la propiedad asociativa de la suma.

Además, conviene llamar la atención sobre los números a los que se va a referir Frege. Recordemos que estamos todavía en un periodo de la historia de las matemáticas en el que se están estableciendo las relaciones entre los tipos de números que nos han enseñado en el colegio y el instituto: números naturales, enteros, irracionales, complejos, etc. Cuando Frege habla de números en *Los fundamentos*, hasta la sección 94 (Capítulo "Conclusión" de *Los fundamentos*), habla de lo que ahora llamamos "números naturales" pero que él llama "números finitos" (sección 83).

Los números naturales ya se vislumbran en época de Frege como una base sobre la que construir el resto de números. Pero esa es una tarea por hacer cuando Frege publica la obra que nos ocupa y a la que Frege va a contribuir.

En la sección 5, Frege se une al rechazo general de que las fórmulas numéricas sean autoevidentes. La razón que él ofrece es que introduce una distinción entre números grandes (el 135664, p. e.) y pequeños (el 5) que es arbitraria por imprecisa. Además, según Frege, si las fórmulas numéricas no son autoevidentes tienen que ser sintéticas o demostrables (deducibles de otras). Pero si optamos porque una fórmula numérica es una proposición sintética volvemos al problema de la distinción entre números grandes y pequeños. Además, Frege anticipa que rechaza que las matemáticas sean empíricas (sobre esto volverá Frege en la sección 7).

Frege pues, está revelando sus cartas sobre las fórmulas numéricas: se deducen de otras proposiciones matemáticas. En la sección 6, Frege muestra su opinión favorable a la manera en que Leibniz demuestra las fórmulas numéricas. Leibniz parte de la definición de cada número y de leyes aritméticas (por ejemplo, la propiedad asociativa de la suma). Como se puede ver la idea que ofrece Leibniz es sumar 1 reiteradamente y aplicar otras verdades. La aparente simplicidad del método oculta pasos que no se hacen explícitos y que Frege quiere hacer explícitos.

Así señala un defecto en esa demostración y es que no hace explícito el uso de un caso de la propiedad asociativa de la suma:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

Frege señala que "cualquiera de las infinitas fórmulas numéricas puede ser demostrada a partir de algunos enunciados generales".

Frege cita a matemáticos reputados de su época como H. Grassmann y H. Henkel en apoyo a la anterior afirmación. Pero objeta que, por ejemplo el primero, no demuestra que existen los números a y b (y así, la suma sería un símbolo vacío) o que hubiera varios pares de números que cumplen la propiedad. Lo que Frege está señalando es la necesidad de rigor (ver la sección 1 de *Los fundamentos*) cuando se tratan las cuestiones de fundamentación, esto es, de ofrecer instrumentos conceptuales precisos, matemáticamente precisos, que eviten huecos en las demostraciones. Huecos que son rellenados habitualmente por discusiones psicológicas más o menos bienintencionadas, pero igualmente poco rigurosas y que, por tanto, pueden hacernos creer en la corrección de un *non sequitur*.

Las dos siguientes secciones, la 7 y 8, vuelven a insistir contra la tesis de que "la definición de cada uno de los números afirme uno hecho físico particular" (cuarto párrafo de la sección 7). No es posible, dice Frege, que a partir de cierto tamaño de los números, podamos apelar a lo que podemos saber de la física para hablar de las características de un número grande. Y, para Frege, el cero no puede justificarse partiendo de la física.

Pero la clave del argumento de Frege se encuentra en el último párrafo de la sección 8. Frege señala correctamente que la distinción *a priori / a posteriori* es una distinción que se refiere a la justificación de la verdad de las proposiciones o juicios en cuestión y no al origen en la mente de las personas de los conceptos, objetos y juicios involucrados. Puede que nuestros conceptos y juicios aritméticos estén *motivados* por la experiencia, pero la verdad de las proposiciones matemáticas no depende de la experiencia, aunque algunas personas obtengan la verdad de algunas proposiciones matemáticas mediante la experiencia eso no las hace empíricas, *a posteriori*.

Por tanto, resumiendo, la respuesta a la pregunta del apartado *¿Son demostrables las fórmulas numéricas?* (secciones 5 a 8) es "sí". Y la razón que ha dado Frege es que las fórmulas numéricas que involucran números grandes no pueden obtener su verdad de la experiencia pero pueden ser demostradas. Además, las fórmulas numéricas con números pequeños también pueden ser demostradas. Por tanto, todas las formulas numéricas pueden ser demostradas. No se puede decir que el argumento de Frege sea muy contundente pese a la retórica que lo ha adornado.

El siguiente apartado plantea la pregunta *¿Son las leyes de la aritmética verdades inductivas?*. En el apartado anterior, Frege ha justificado la demostración de las fórmulas numéricas y, con precisiones, ha aceptado el método de demostración de Leibniz. Dicho método incluye leyes aritméticas, como la denominada propiedad asociativa de la suma u otra verdad de estatuto más oscuro hasta su tratamiento mediante la lógica matemática como la indiscernibilidad de los idénticos: "si se reemplaza una cosa por otra igual, la igualdad persiste".

Pero esas leyes aritméticas no se pueden considerar leyes físicas. En la sección 9, Frege señala que nadie ha logrado deducir la indiscernibilidad de los idénticos de una ley natural. En todo caso, Frege aceptaría, como no puede ser menos, que dicha ley puede estar *motivada* empíricamente, pero su verdad no se *deduce* de ninguna ley natural. Los intentos de hacerlo juegan con analogías inexactas en las palabras involucradas que, cuando se analizan con precisión muestran su error; por ejemplo, el intento de basar el significado del símbolo "+" en las relaciones entre las partes de un cuerpo físico.

En la sección 10 analiza el intento, no de deducir las leyes aritméticas de leyes físicas, sino de obtener inductivamente dichas leyes aritméticas. Frege señala correctamente (tercer párrafo) que "Siempre que un enunciado que se refiere a una especie [zoológica] se fundamenta por inducción, se suele tener ya toda una serie de propiedades comunes, a partir tan sólo de la definición del concepto de la especie [zoológica].". En otras palabras, hay que partir de un concepto adecuado para poder hacer una inducción.

Por tanto, a la pregunta *¿Son las leyes de la aritmética verdades inductivas?* la respuesta es "no" porque no tenemos el concepto de número y sin este no se podría hacer una inducción empírica que es la que se utiliza al obtener las leyes en las ciencias naturales. Pero Frege continúa porque hay más dificultades.

Frege se permite añadir dos párrafos después que "el procedimiento mismo de la inducción [empírica] sólo puede justificarse mediante leyes generales de la aritmética [porque la teoría de la probabilidad presupone la aritmética], si es que por inducción no se entiende un simple hábito [como en el caso de Hume]". Esto es, no sólo no tenemos el concepto de número para poder realizar una supuesta inducción empírica sino que si queremos tener claridad lógica, la inducción no estará sólidamente asentada hasta que lo esté la aritmética.

La propuesta de Frege para determinar las leyes de la aritmética va a ser la siguiente: "los números son realmente creados por la adición continuada del uno, estando así su naturaleza completamente determinada. Ahora bien, esto sólo puede significar que, por el modo como ha surgido un número, por ejemplo, el 8, por adición de 1, se pueden deducir ya todas sus propiedades. Con ello se reconoce, en el fondo, que las propiedades de los números se siguen de sus definiciones, y se abre la posibilidad de demostrar las leyes generales de los números a partir del modo de generarse que les es común, mientras que, por otro lado, las propiedades particulares de cada uno de ellos se seguirían del modo particular con que han sido creados por adición continuada del uno." (sección 10, penúltimo párrafo).

Frege precisa que este método nada tiene que ver la inducción empírica sino las relaciones de posición de unos números respecto a otros como ocurre en la relación entre las capas del terreno cuando se hace un pozo: unas estaban antes que las otras.

Es claro que lo que Frege está estableciendo es que el concepto de número se obtendrá por medio de unas definiciones convenientes, tanto del número en general como de cada número en particular y en ambos casos debe tenerse en cuenta las relaciones entre ellos.

Habrá que esperar al capítulo IV para que veamos qué quiere decir esto en concreto para Frege, pero ya se puede adelantar que apunta a algo análogo a lo que ya hemos visto: los axiomas de Peano.

Así pues a la pregunta *¿Son las leyes de la aritmética verdades inductivas?* La respuesta de Frege es "No". La justificación que ha dado es contundente. Las leyes de la aritmética no pueden ser obtenidas inductivamente (en el sentido de las ciencias de la naturaleza) porque, primero, hace falta un concepto de partida de la especie sobre cuyos individuos se hace la inducción, aquí el concepto de número, y segundo, la inducción empírica se basa en la teoría de la probabilidad y esta en la aritmética. La alternativa que da Frege es proporcionar las definiciones convenientes.

El apartado final del capítulo pregunta *¿Son las leyes de al aritmética sintéticas* a priori *o analíticas?* La respuesta es que son analíticas, pero analíticas en el sentido definido por Frege (ver nuestra sección 6, al final). Para la breve discusión sobre número y magnitud que ofrece Frege aquí, remito a lo que digo más adelante sobre la sección 19 del capítulo II (ver nuestra sección 10).

En los últimos párrafos de la sección 12, Frege argumenta contra la intuición de los números. Si la intuición es empírica, nos comprometemos con el carácter empírico de las leyes aritméticas que ya se ha rechazado. Pero si nos quedamos con una intuición no empírica y la postulamos de un número grande, tampoco puede servir como fundamento de la inducción porque, parece insinuar Frege en conexión con lo que ya ha defendido sobre números grandes y pequeños, no existe tal intuición.

La sección 13 insiste en el argumento de la sección 10. Y la sección 14 muestra la diferencia entre la geometría y la aritmética usando sus propias definiciones de analítico y sintético. La geometría formula proposiciones sobre el ámbito geométrico; la aritmética sobre lo numerable, que es cualquier cosa.

(Para lo que dice en la sección 15, recuérdese lo dicho sobre las distinciones ya vistas y lo que diremos en nuestra sección 10. Para lo que dice del formalismo en la sección 16, véase lo que diremos en nuestra sección 11.)

Consecuentemente, Frege afirma que "las aseveraciones de Leibniz sólo pueden interpretarse a favor de la naturaleza analítica de las leyes numéricas" Y así "para él [y para Frege, habría que añadir] lo *a priori* coincide con lo analítico". Tengamos en cuenta lo que ya hemos dicho sobre todas estas distinciones y cómo las utiliza Frege; sólo así tiene sentido lo que dice (sección 17) contra el menosprecio a los juicios analíticos. Por otra parte, recordemos que también había citado favorablemente a Leibniz en la sección 11 cuando mantenía que los números están en nosotros.

La sección 17 tiene una curiosa estructura como ya hemos visto al hablar de Mill. Frege comienza la sección con lo que parece una aceptación de las tesis empiristas a modo de supuesto para desarrollar su argumento. Frege viene a decir que supongamos que la verdad de las proposiciones sólo se puede establecer por medios empíricos, mediante los hechos. Frege piensa que las proposiciones apoyadas en los hechos carecen de la generalidad necesaria, sólo se aplican a los hechos presentes.

Esto es una interpretación muy estrecha de Frege de la inducción empírica y de cualquier empirismo. Ya hemos señalado antes su compromiso con alguna forma de racionalismo. Y es en esta interpretación estrecha de corte racionalista en la que Frege justifica su preferencia por el logicismo, esto es, que las verdades de la aritmética sean a las de la lógica lo que los teoremas son a los axiomas de la geometría.

Pero eso deja a la propia lógica huérfana de fundamentación. Porque, a partir de lo que mantiene Frege, de la lógica sólo podemos decir lo mismo que Frege nos recuerda que decía Leibniz de los números: están en nosotros (sección 11). La lógica también estaría en nosotros, o al menos en el lenguaje, pero Frege no ofrece nada que pueda ir más allá de esa vaga afirmación.

Frege termina el capítulo I: "Teniendo en cuenta el impresionante desarrollo de los estudios aritméticos y sus múltiples aplicaciones, ya no se podrá sostener, evidentemente, el menosprecio, tan ampliamente difundido, hacia los juicios analíticos y la leyenda de la esterilidad de la lógica pura." Pero la afirmación de Frege supone sus definiciones de analiticidad y la deducción de la aritmética a partir de la lógica, cosa que está por demostrar. Y de ello es perfectamente consciente Frege por cómo termina la sección y con ella el capítulo I.

9-Esquema de los capítulos II y III

Veamos el esquema de la argumentación que Frege seguirá en los capítulo II y III.

¿Cuál es el sujeto de las proposiciones que dan un número?

Capítulo II (comparar con el principio de la sección 45 del capítulo III)

Refutación 1. El número no es una proporción geométrica o magnitud (sección 19)

Refutación 2. El número no es una propiedad de las cosas externas y no se abstrae de la realidad externa (secciones 21-25). (a) Porque, por ejemplo, cosas externas como los colores se aplican distributivamente y los números colectivamente (sección 22). (b) Debemos saber qué estamos contando, porque según sea, daremos un número u otro; es el caso del paquete de mazos de cartas en el que se puede contar el número de mazos, el número de cartas, el número de palos, etc. (secciones 22 y 23). (c) El número no solo se aplica a cosas externas sino a cosas como ángeles, demostraciones, etc. (sección 24). (d) El número se aplica a lo no sensible y si fuese algo sensible sería sorprendente porque el número es algo intelectual (sección 24).

Refutación 3. El número no es algo subjetivo. Esta posición vendría sugerida por el carácter intelectual del número. Pero Frege descarta los procesos psicológicos como relevantes y hace hincapié en la objetividad del número (secciones 26 y 27).

Refutación 4. El número no es un agregado, grupo, montón o reunión de cosas (sección 28) (ver nuestra sección 7; también el principio de la sección 39de *Los fundamentos*). (a) La forma en que el número se identifica con esas ideas carece de exactitud (sección 28).

Capítulo III

Refutación 2 (continuación). (e) El significado de "uno" tiene una relación extensión - intensión extraña; no sirve para añadir más determinaciones al objeto (sección 29). (f) El significado de "uno" funciona como un objeto (individuo, particular) y no como un concepto (predicado lógico) (sección 29).

Refutación 4 (continuación). (b) El intento de generar el número en una pluralidad mediante el uso de conceptos conduce siempre a una unidad conceptual sin número (secciones 34-35). (c) El intento de generar el número partiendo de símbolos que expresen la unidad conduce siempre a una pluralidad irreductible e inconexa (secciones 36-39). (d) El intento de mantener la diversidad mediante el espacio o el tiempo en el agregado que hay que contar presupone el concepto de número (sección 40).

Propuesta 1. Los números son particulares abstractos (sección 38).
Propuesta 2. En las proposiciones sobre números, el sujeto lógico es un concepto (sección 46).
Propuesta 3. La lógica matemática y su ontosemántica (secciones 49-54)

10-El número como magnitud

El capítulo II de *Los fundamentos* comienza con una sección dedicada a situar el capítulo. Tras los desarrollos epistemológicos sobre la aritmética del capítulo I toca ahora ocuparse del concepto general de número del que se deducirían las leyes de la aritmética. En la sección 18, Frege recoge la conclusión del anterior capítulo. Cada número concreto es deducible; y para esas deducciones hacen falta leyes generales que formulen el concepto general de número. Ese concepto general hay que buscarlo en el uno y la adición que se usa para generar los demás números. Sin embargo, Frege deja esto para el capítulo IV. Los capítulos II y III, en el contexto de la investigación sobre el concepto general de número, van a responder a la pregunta de qué se dice o predica un número.

El capítulo II, tras la sección 18 de introducción, continúa con dos secciones que no están dentro de ningún apartado. La primera, la 19, rechaza "el intento de concebir el número geométricamente, como proporción de longitudes o superficies". La sección 20 se limita a rechazar la indefinibilidad del número.

Vamos con la sección 19. Lo que va a hacer Frege es rechazar la vía en la que hasta el siglo XIX se había intentado conseguir un concepto unificado de número y cuyas bases fueron *Los elementos* de Euclides (ver nuestra sección 7). Dicha vía fue cultivada, entre otros, por Descartes, Newton, Leibniz y Kant (para éste ver Sutherland2022). Con ello, Frege iba en la dirección de los matemáticos de su época que desembocó en la manera contemporánea de articular los números, sus tipos y el resto de las matemáticas rechazando la tradición de Euclides. Para ofrecer un vislumbre de lo que estaba fraguándose, conviene dar varios rodeos teóricos e históricos .

Dos mundos matemáticos

En la actualidad, los fundamentos de las matemáticas empiezan con los números naturales que sirven para construir el resto de números (enteros, reales, etc.), además del uso de un lenguaje basado en la lógica matemática y la teoría de conjuntos. Esta concepción comenzó en la época de Frege quien fue unos de los responsables de esta visión.

Así pues, la articulación actual de los números hace de los números naturales una base sobre la que se construyen el resto de los números. Qué quiere decir eso de construir los números lo ilustraremos con un poco más de concreción más adelante en esta sección. Pero el resultado es que la construcción de un tipo de números supone que los que sirven de base para la construcción quedan incluidos como subconjuntos en el nuevo conjunto construido. El conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros como enteros positivos. Y en el conjunto de las fracciones como aquellas que tienen como denominador el 1. Las fracciones son una forma de expresar los números racionales (positivos y negativos). Los números racionales junto a los irracionales forman el conjunto de los números reales. Los números naturales se designan por **N**, lo enteros por **Z** ("Zahl", número en alemán), los racionales por **Q** ("Quotient", cociente en alemán) y los reales por **R**. Existen más tipos de números que se pueden construir, por ejemplo, los números complejos. Pero nuestra enumeración puede detenerse en los números reales porque con su aclaración teórica por el ya citado Dedekind,
se clausuró la tradición de la teoría de las razones entre magnitudes originada en *Los elementos* de Euclides y en cuyo seno se había intentado articular lo que ahora formulamos hablando de distintos tipos de números.

La teoría matemática de la Grecia Antigua veía la geometría como el fundamento de la matemática y el uso de la regla (sin marcas de longitud) y el compás para construir las figuras geométricas. La mayor parte de *Los elementos* se centra en esta tarea.

Por otro lado, se pensaba que había un solo tipo de números, lo que ahora llamaríamos los números naturales. Son los que la escuela pitagórica tenía fama de haber estudiado y que se incorporaron a *Los elementos* de Euclides en los libros VII a IX, como ya hemos visto. En nuestra sección 7, ya hemos comprobado que la concepción teórica de dichos números estaba muy alejada de lo que ahora entienden los matemáticos por número natural. Actualmente, concebimos los números naturales como un sistema de objetos que se comportan con arreglo a los Axiomas de Peano o similares. Especialmente relevantes son la función sucesor y el Principio de inducción matemática que actúan de armazones del sistema. Nada de esto hay en Euclides.

Pitagorismo y números. Magnitudes conmensurables

Sin embargo, los números de los que habla Euclides entroncan claramente con lo que llamamos números naturales, aquellos que sirven para contar. En efecto, los orígenes del concepto de número podrían residir en la idea de pluralidad y en que dichas pluralidades o colecciones podrían emparejarse y compararse en tamaño (Bostock2009 y Bell1999).

Desde esta perspectiva, los números se asignan a colecciones contándolas, esto es, emparejando los elementos de una colección sucesivamente con la serie ascendente de los números. El reconocimiento de que ese procedimiento de contar puede ser realizado sin contar algo en concreto, puede que fuera el instrumento para establecer la universalidad del concepto de número.

Como ya se ha señalado, los pitagóricos tienen la fama de ser los iniciadores del estudio teórico de los números naturales. Clasificaron los números en pares e impares, primos, compuestos, perfectos, etc. Son los creadores de la idea de números figurales. Tal idea surge de relacionar el número de vértices de una figura geométrica con dicha figura. Así hay números triangulares, cuadrados, rectangulares, pentagonales, etc. Se pueden establecer relaciones entre dichos tipos de números que pueden seguirse inmediatamente de la contemplación de las figuras involucradas.

También se atribuye al pitagorismo la demostración del teorema de Pitágoras, teorema ya conocido por los babilonios. Seguramente, tal demostración estaba ligada a procedimientos constructivos de figuras que permitían "ver" el resultado.

Igualmente se les atribuye a los pitagóricos el descubrimiento de la correspondencia entre los intervalos musicales y las razones simples de longitudes de las cuerdas pulsadas. Al pulsar una cuerda tensada se obtiene un sonido. El sonido obtenido dependerá de la longitud de la cuerda. Cuando la cuerda pulsada se divide en porciones de una longitud determinada, entonces surgen los sonidos de las distintas notas de una escala musical. Los intervalos entre notas se corresponden con razones como la octava 1:2, la quinta 2:3 o la cuarta 3:4.

Pero este uso de las razones en la teoría musical no debe hacer olvidar que estas tenían una función práctica fundamental: medir. En la actualidad, pensamos que los números reales se aplican a las cosas en la medida en que la naturaleza tiene ciertas propiedades a las que los conceptos métricos son aplicables y que estos últimos están ligados a los números reales. Dichas propiedades tradicionalmente se han denominado magnitudes.

Conviene precisar que si bien en la actualidad, una magnitud es una propiedad física que puede ser medida y consiguientemente, supone el uso de conceptos métricos ligados a los números reales, en el contexto de la Grecia Antigua, una magnitud se reduce todavía a una palabra que abarca longitud, superficie, volumen o ángulo. No hubo un desarrollo teórico de qué fuese una magnitud en general.

Intuitivamente, podemos decir que al medir las magnitudes lo hacemos mediante una razón: las razones en aritmética nos permiten comparar la cantidad de una cosa con la cantidad de otra. Veamos el ejemplo de una longitud. Si cogemos una vara de medir calibrada en metros --habitualmente la gente que las utiliza las llama simplemente un metro--, y medimos la longitud de un muro, podemos obtener que mide 10 metros. Sin embargo, y esto sería especialmente válido si no existiesen unidades universalmente aceptadas, podemos coger el muro y decir que mide como 3 veces la pared con ventana de mi comedor o la mitad del muro oeste del bar del pueblo. Aquí el muro de marras está a razón de 1 a 3 (1/3 o 1:3) con la pared con ventana de mi comedor o de 2 a 1 (1/2 o 1:2) con el muro oeste del bar del pueblo. Y al fin y al cabo, los 10 metros que mide mi muro son 10:1, donde 1 es la unidad de medida, el metro.

Lo que es lógico, dados los ejemplos anteriores, es pensar que cualquier razón que nos encontremos se pueda formular mediante un par números naturales articulados en una fracción. Esto permitiría asentar en sólidas bases matemáticas la medida y las operaciones de suma, resta, etc. de estas mediante el uso de fracciones.

Veamos como ejemplo el caso de las longitudes. La igualdad entre dos segmentos q y p se define mediante lo que en geometría se denomina técnicamente congruencia y que para abreviar explicaciones puede considerarse como lo que informalmente llamarnos una longitud igual. La suma de q y p se obtendría poniendo un segmento a continuación de otro. Además, podemos coger un segmento y sumarlo a sí mismo tantas veces como queramos. El segmento q se puede convertir en $3q$ o en $43q$; o sea, nq. El número natural n antepuesto al nombre de segmento simboliza la operación de repetir la adición n veces: la multiplicación. La inversa de la multiplicación es la división. Dado un segmento q y un número natural n, existe un único segmento p tal que $np = q$. Se denota por q/n y es el segmento que se obtiene de dividir q en n partes iguales.

Se da por supuesto que la división se puede llevar a cabo siempre, no importa lo grande que sea n, lo cual implica que las magnitudes (aquí la longitud) se supone que son continuas, esto es, no tienen partes tan pequeñas que no puedan ser divididas subsiguientemente.

Dado que la multiplicación y la división se pueden combinar, podemos usar m para representar el número que multiplica y n para el que divide con lo que tenemos $mq/n = p$. Y a partir de aquí se pueden definir las operaciones con fracciones que nos explican en el colegio, así como las condiciones de su igualdad .

$$(m/n = p/q) \leftrightarrow (mq = np)$$

$$(m/n).\,(p/q) = mp/nq$$

$$m/n + p/q = (mq + np)/nq$$

Esto marca la conducta de todas las fracciones. Y, por otra parte, ya nos enseñaron en la escuela que todo número natural es equivalente a una fracción en la que el denominador es 1. Ya hemos construido las fracciones. Y es lógico suponer que los griegos pensaron que todas las magnitudes (longitud, superficie, volumen y ángulo), si se elige adecuadamente la unidad de medida, podría expresarse siempre mediante razones de números enteros. En eso consiste ser conmensurable: poder ser medido mediante razones. Todas las magnitudes serían conmensurables.

Las fracciones, tal como han sido presentadas, no tienen en cuenta las fracciones negativas. Para completar el proceso de construcción de los números racionales hace falta incluirlas. Para ello se comienza introduciendo los números enteros negativos. Y este fue un paso que desde el punto de vista de la teoría se hizo mucho después de la Grecia clásica. En cualquier caso, ahora recordemos que los números naturales se identifican con los enteros positivos. Ilustraremos la construcción de los enteros negativos para obtener el conjunto completo de los enteros y luego habría que reproducir el proceso anterior para obtener todos los racionales, pero incluyendo los racionales negativos.

Supongamos que a un segmento a se le asigna un sentido. Por tanto, la igualdad entre dos segmentos a y b no sólo debe considerar la congruencia sino también el sentido. La suma de a y b se obtendrías como sigue: si a y b tienen el mismo sentido $a+b$ es el segmento obtenido juxtaponiéndolos. Si tienen sentidos opuestos y diferentes longitudes: el más grande establece la orientación y se le quita la longitud del más pequeño. Finalmente si tienen orientaciones opuestas pero longitudes identicas, resultado es el segmento 0 (aquél que al sumarlo a cualquier segmento da el mismo segmento).

Ahora podemos definir na para cada número natural n y cada a. Esto permite definir el símbolo $-n$ estipulando que $-na = (na)^*$, donde, para cada segmento x, x^* denota el segmento obtenido invirtiendo la orientación de x. El símbolo $-n$ significa pues la operación "repite la adición n veces e invierte la orientación". Claramente, para todo número natural n y segmento a tenemos

$$na + (-na) = 0$$

Introducimos el símbolo 0 definiéndolo como la operación aplicada sobre cualquier segmento x que reduce al segmento 0

$$0x = 0$$

Tenemos así los símbolos: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... que en nuestra ilustración denotarían cierta operación sobre los segmentos. La adición y la sustracción se define estipulando que, para cada par p y q, las operaciones $p+q$ y $p-q$ son las únicas tales que, para todo x,

$$(p+q)x = px + qx$$

$$(p-q)x = px + (qx)^*$$

La multiplicación se define como en las fracciones, componiendo las operación correspondientes, esto es, estipulando que, para todo x

$$(p.\,q)x = p(qx)$$

Con lo dicho, ya tenemos construidos los números enteros positivos y negativos. Para completar la construcción de los números racionales, habría que repetir el proceso de construcción de las fracciones no a partir de los números enteros positivos (o lo que es equivalente, a partir de los números naturales) sino a partir de todos los enteros.

La articulación anterior entre diversos tipos de números era desconocida para los antiguos griegos. Pero la exposición pretende dar una idea aproximada, desde nuestro punto de vista en la concepción de los números, de los medios técnicos con los que llegó a contar esta tradición a la hora de tratar con números, aunque no tuviesen una teoría completa sobre el asunto.

Magnitudes inconmensurables

Con los mimbres anteriores, puede verse que la tradición de la cosmología pitagórica era muy prometedora. Números, figuras geométricas, razones, magnitudes, música, astronomía se podían combinar para dar lugar a lujosas especulaciones que hacían teoría de aplicaciones claramente usadas en la práctica. La articulación de las matemáticas según los pitagóricos sería así:

- Lo discreto
  - lo absoluto: aritmética
  - lo relativo: música
- Lo continuo
  - lo estático: geometría
  - lo móvil: astronomía

Ese esquema es el origen del Quadrivium medieval. Sin embargo, la cosa se había torcido mucho antes cuando los propios pitagóricos decubrieron a finales del siglo V a.n.e. las magnitudes inconmesurables.

Los pitagóricos descubrieron que no es posible encontrar una unidad de longitud suficientemente pequeña para medir tanto la hipotenusa como los catetos (o una diagonal y un lado de un pentágono) y que dé como resultado un número entero. No existe ninguna razón entre enteros que de cuenta de la relación entre tales segmentos.

Para demostrarlo vamos a usar el Teorema de Pitágoras, pero vamos a empezar por una demostración algebráica y no geométrica, a diferencia de las que hacían los griegos. Supongamos que tenemos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 cada uno. Aplicando el Teorema:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Sin embargo, vamos a demostrar que *x no puede ser racional*, porque no hay número racional m/n tal que $(m/n)^2 = 2$

La demostración de tal afirmación requiere el Teorema fundamental de la aritmética que los griegos conocían: para todo número natural existe una factorización única en números primos.

Por ejemplo,

$$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

2, 3 y 5 son primos.

Además, necesitamos otro teorema que dice que si factorizamos un número natural en sus primos y lo elevamos al cuadrado, cada primo ocurrirá un número par de veces. En nuestro ejemplo:

$$360^2 = (2^3 \times 3^2 \times 5)^2 = 2^6 \times 3^4 \times 5^2,$$

los índices 6, 4 y 2 son pares.

Vamos ahora con la demostración de que m/n en la igualdad $(m/n)^2 = 2$ no puede ser racional.

Para esa demostración hay que seguir la estrategia de reducción al absurdo: supondremos que m/n sí es racional, llegaremos a una contradicción y en consecuencia concluiremos que no es racional.

(1) Suponemos que m/n en $(m/n)^2 = 2$ es racional.
Eso quiere decir que tanto m como n son naturales, para $n \neq 0$ (la división no esta definida en este caso).

(2) Igualmente, suponemos que nuestra fracción m/n ha sido reducida a su equivalente más simple.

(3)

$$(m/n)^2 = m^2/n^2 = 2$$

(4)

$$m^2 = 2n^2$$

(5) eso quiere decir que m^2 es par. La razón es que la definición de número par es la siguiente "z es par si y solo si $z = 2k$", k es cualquier número natural. Esto conlleva que p también es par, porque solamente el cuadrado de un número impar es impar.

(6) Apliquemos la definición $m = 2k$, para un número natural k en (4).

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

(7) Por tanto,

$$2n^2 = 4k^2$$

Que es lo mismo que

$$n^2 = 2l$$

para $l = k^2$. Lo cual cumple la definición de número par.
Así pues, n^2 es par y también lo será n.

(8) De este modo, hemos llegado a que m es par (ver 5) y también lo es n (ver 7).

(9) Pero (8) contradice a (2). Porque si en una fracción, numerador y denominador son pares, tienen en común un divisor que es 2, dada la definición de número par en (5).

(10) En conclusión, m/n en $(m/n)^2 = 2$ no es racional. O dicho de otra forma $(m/n) = \sqrt{2}$, no es racional.

Para formularlo de una manera más cercana a nuestra sensibilidad matemática, aunque tal vez anacrónicamente, los pitagóricos descubrieron que había más números de los que pensaban, los números que ahora llamamos irracionales. Podemos decirlo de otra manera, si prestamos atención a esa distinción que nos explicaron en el colegio entre la parte entera y la parte decimal de un número (por ejemplo, 2.575843284......; 2 parte entera, 575 etc. parte decimal) una fracción puede representarse mediante un número con su parte entera y su parte decimal. Pero hay fracciones que cuando las representamos mediante un número con su parte entera y su parte decimal, esta última no termina nunca. La representación del número mediante una razón evita ese inconveniente. Lo que los pitagóricos descubrieron, desde nuestro punto de vista, es que había números que se diferenciaban en su parte decimal y que no eran expresables en fracciones. Son los números que llamamos ahora irracionales, porque no pueden expresarse mediante razones, mediante fracciones de números naturales.

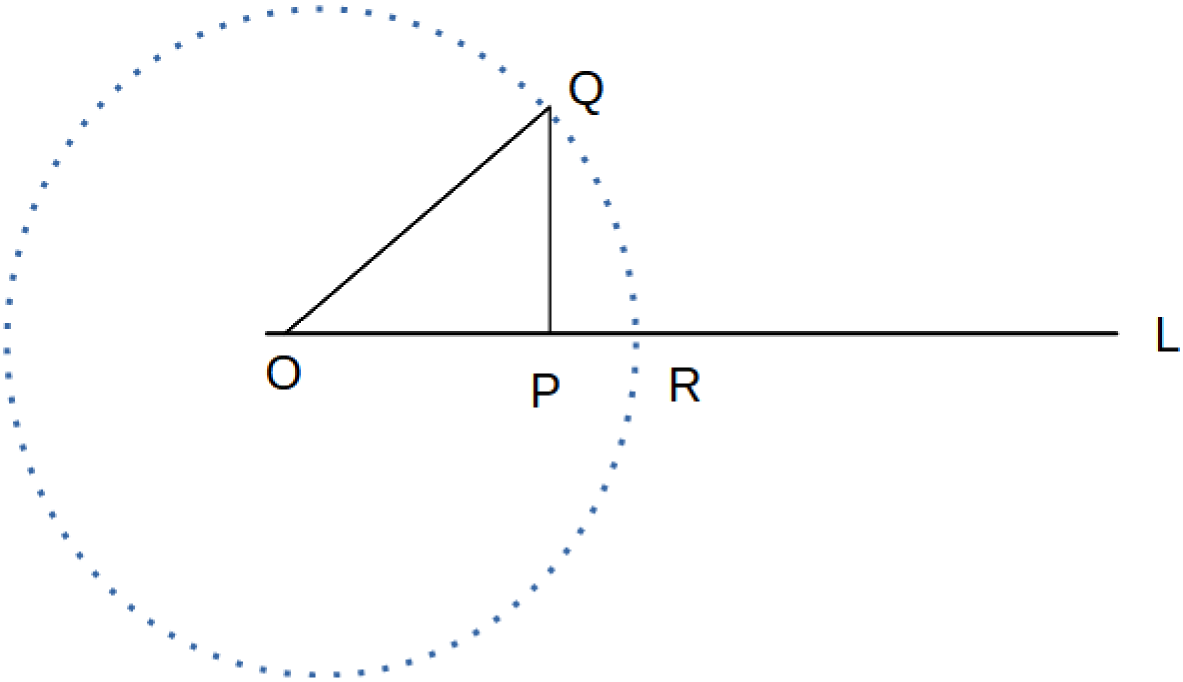
Pensemos en lo sorprendente del asunto. La práctica de la medida obedece a unos procedimientos y posibilita unas operaciones (sumar, dividir, etc.) que, aparentemente, no ofrece problemas. Pero cuando pasamos a la teoría las cosas no funcionan del todo. El problema aparece también cuando se desarrolla el estudio de la resolución de ecuaciones. Está claro, por lo dicho sobre$\sqrt{2}$, que cuando hay por medio expresiones de la forma x^2 podemos no encontrar la solución en los números racionales.

Inconmensurabilidad y recta real

La exposición anterior no ha hecho justicia a la manera geométrica en la que todos estos razonamientos se presentaron. Pero conviene dejar constancia de un significado geométrico de la inconmensurabilidad debido a la manera en la que en la actualidad seguimos representando los números reales: la denominada "recta real" o "continuo" (continuo geométrico; recordemos que hemos visto más arriba que las magnitudes son continuas).

Es útil pensar los racionales como puntos de una línea en la que los racionales positivos están a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda del 0 y la línea es divisible de manera tan fina como deseemos. Por ejemplo, para representar todos los racionales de la forma $m/10^9$ como puntos en una línea, dividimos el intervalo (0,1) de la línea entre 0 y 1 en un millardo de partes iguales; igualmente para otros intervalos (1, 2), (2, 3), ... Y los puntos de subdivisión entonces se corresponde a fracciones de la forma $m/10^9$. Ya que el denominador de estas fracciones puede ser arbitrariamente grande, 10^{10}, 10^{100}, o cualquiera, se puede suponer que haciendo subdivisiones cada vez más finas es posible capturar todos los puntos de la línea. Además, no cabe duda de que con lo dicho, los posibles pruritos teóricos sobre la medición parecen fácilmente solucionables. Y eso es lo que supusieron los pitagóricos al principio.

Pero ellos mismos, como ya hemos visto, descubrieron que no es así. Como se puede ver en la figura de abajo, construyamos un triángulo rectángulo sobre la línea L. partamos de dos líneas perpendiculares OP y PQ (los catetos) de longitud 1 y usemos el compás para marcar sobre la línea L una línea OR de la misma longitud que OQ (la hipotenusa). Ya hemos visto que se puede demostrar que OP y OQ son inconmensurables, por tanto, como se ve en la figura también lo serán OP y OR, puesto que OQ y OR tienen la misma longitud (OR se ha trazado así mediante el compás). Recordemos que número asociado con el punto R es $\sqrt{2}$. Por tanto, $\sqrt{2}$ es irracional, o sea, no puede ser expresado mediante razones. Si queremos seguir hablando de números, hace falta construir los números reales que contienen los racionales e irracionales.



Existen diversos métodos pero sólo veremos la ilustración de uno de ellos. Se trata de la extensión de la representación decimal de los números racionales. Lo primero que hay que recordar es que una fracción representa un número racional precisamente cuando es periódico, esto es, muestra un patrón repetido indefinidamente después de cierto momento; además, que los decimales finitos los vemos como casos especiales de los periódicos. Por ejemplo, 6 y $5/8 = 6,625$ tiene decimales finitos. Y, por su parte, $3/7 = 0.428571428571\ldots$ repite el patrón 428571.

Veamos la razón de eso. Consideremos la división de M/N. Los únicos posibles restos en cada paso de la división serán $1, 2, \ldots, N-1$ (por lo que hay $N-1$ posibilidades como máximo) dado que el divisor es N y si el resto es N, entonces el siguiente resto será 0. Si se da este caso, entonces tenemos un decimal finito. Si no se da ese caso, ocurrirá que después de, como máximo, N pasos de la división, uno de los restos debe repetirse, pues de lo contrario estaríamos en el caso anterior con resto 0. Por tanto, ya que cada resto está determinado únicamente por su predecesor, los restos subsiguientes y también la parte decimal misma deben repetirse (Y claramente el bloque que se repite debe tener como máximo $N-1$ dígitos).

Conversamente, cualquier decimal periódico representa un número racional. Por ejemplo, consideremos

$$r = 0.9090909090\ldots$$

Esto puede convertirse en fracción así

$$100r = 90.909090\ldots = 90 + r$$

y substrayendo: obtenemos $99r = 90$, así que $r = 90/99 = 10/11$.

Este procedimiento puede aplicarse a cualquier periódico decimal: si el bloque que se repite contiene m dígitos podemos multiplicar por 10^m y sustraer justo como hemos hecho arriba.

Se sigue de esto que cualquier decimal no periódico debe representar un número irracional; es fácil dar ejemplos de esto, por ejemplo el siguiente decimal que contiene un número de ceros que se incrementa:

$$0.101001000100001000001\ldots$$

Pero además, no hay ninguna regla simple para construir la representación decimal de irracionales familiares como $\sqrt{2}$.

Los números reales se definen como el conjunto de todos los decimales finitos o infinitos (positivos o negativos): geométricamente considerados, los números reales constituyen el continuo geométrico o recta real. Y un número real requiere infinitos enteros para ser representado.

Lo dicho ilustra como se pueden definir los números reales, pero obviamente se depende de la base 10 de numeración. Y por otro lado hace falta justificar que a cada punto de la recta real le corresponde un número real. Para establecer esto es necesario establecer que no hay "huecos" en nuestro conjunto de números reales y qué significa exactamente que no hay "huecos". Esto es lo que hizo Dedekind en el siglo XIX en conexión con los problemas teóricos que el cálculo diferencial o análisis matemático tenía (ver nuestra sección 14).

Concepción geométrica de número

Pero los griegos siguieron una solución que, por así decir, se quedaba a mitad de camino de la construcción de los números reales. Dicha solución se atribuye Eudoxo de Cnido y parece ser la fuente del libro V de *Los elementos* de Euclides. Y es esa concepción a la que Frege se refiere con la expresión "concepción geométrica del número" o el número "como magnitud" o "como proporción".

El punto de partida es el mismo que hemos seguido al hablar de las razones y las fracciones. Pero para entender la posición griega conviene destacar la fundamental diferencia que hay entre las razones y las fracciones. Que la identificación de ambas sea correcta en determinados contextos, no la hace correcta para todos como el caso del descubrimiento de magnitudes inconmensurables demuestra. Una razón es una *relación* entre cantidades; una fracción es un objeto: un número.

Al descubrir los números irracionales, o en términos griegos, las magnitudes inconmensurables, los griegos no avanzaron hacia la generación de nuevos números de la manera que se ha explicado antes y que es lo que hacemos ahora. El autor del libro V de *Los elementos* se inclinó por construir una teoría de las razones que hacía un papel bastante aceptable como sustituta del sistema de los números reales y que de alguna manera lo anticipaba.

Veamos un atisbo de lo que quiere decir esto. Sea "$a : b$" para la razón de a a b. Por ejemplo, una razón de longitudes. Igualmente, sea "$c : d$" para la razón de c a d. Recordemos ahora cómo nos planteaban en el colegio problemas en los que se hacía uso de razones y proporciones. La dificultad básica de esos problemas era reconocer la estructura general: a es a b como c es a d:

$$a : b :: c : d$$

La definición del concepto de razón supone que cualquier magnitud puede multiplicarse por un número natural. Supongamos una longitud a. "n·a" será una longitud que es n veces tan larga como la longitud a. Entonces, donde "n" y "m" varían sobre los números naturales, la definición de que una longitud a es menor / igual/ mayor ($\lesseqgtr$) que b será:

$$\forall nm(n \cdot a \lesseqgtr m \cdot b \leftrightarrow n \cdot c \lesseqgtr m \cdot d)$$

Si se reformula en términos de división en vez de en términos de multiplicación tenemos:

$$\forall nm(\frac{a}{b} \lesseqgtr \frac{n}{m} \leftrightarrow \frac{c}{d} \lesseqgtr \frac{n}{m})$$

La expresión anterior es tramposa. Porque si bien "$\frac{n}{m}$" es realmente una fracción y por tanto un número, "$\frac{a}{b}$" y "$\frac{c}{d}$" no lo son: son razones. Pero precisamente la clave del asunto es pensarlas como números, como otros números diferentes de los racionales.

Por tanto, pensemos "$\frac{a}{b}$", esto es la razón de a a b, como un número real, y análogamente con "$\frac{c}{d}$". Entonces la definición dice que los número reales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son el mismo número si y solo si tienen las mismas relaciones con el número racional $\frac{n}{m}$. Esto es: cualquier número racional más grande que uno es más grande que el otro; cualquier número racional igual a uno es igual al otro; cualquier número racional menor que uno es menor que el otro.

O en términos acuñados por Dedekind en 1872: los números reales en cuestión son los mismos si y solo si cada uno hace la misma "cortadura" en los números racionales. De tal modo que cada cortadura separa los números racionales en dos conjuntos no vacíos: los menores que están a la izquierda y los mayores que están a la derecha de la cortadura que hace el número real y que actúa como límite superior de los menores y como límite inferior de los mayores. La teoría de Dedekind resulta mucho más potente y completa que la del libro V de *Los elementos*, pero la más antigua hizo su papel.

Las críticas de Frege al "intento de concebir el número geométricamente, como proporción" son básicamente dos. La primera que hay que relacionar los números que usamos para contar, los números de la vida cotidiana. La segunda, que está claro que los números naturales tienen el papel básico en el sistema de los diferentes tipos de números que se ha explicado antes. Evidentemente, esto último depende de una determinada concepción de los distintos números como producto de su construcción a partir de otros.

Frege habla de los números y los conjuntos, cuestión a la que retorna en la última sección del capítulo II que a la vez actúa como apartado con el título *El número como conjunto*. El asunto tiene su continuación en el capítulo III titulado "Opiniones sobre la unidad y el uno". Por supuesto, la mención a los conjuntos en Newton u otros autores (excepto el propio Cantor, hacia el final del capítulo IV) nada tiene que ver con la Teoría de conjuntos de Cantor sino con los números naturales a la manera de Euclides.

11-La estructura del capítulo II

Tras las tres primeras secciones del capítulo II que hemos explicado y que no forman parte de ningún apartado, Frege distingue los siguientes apartados:

¿Es el número una propiedad de las cosas externas?, secciones 21 a 25.
¿Es el número algo subjetivo?, secciones 26 y 27
El número como conjunto, sección 28

En la sección 21, la primera del primer apartado, Frege plantea la cuestión sobre la que va a extenderse a lo largo de los capítulos II y III. En el lenguaje, señala Frege en dicha sección, los números suelen aparecer en forma de adjetivos, como las palabras duro, difícil o rojo. Pero como veremos, Frege piensa que aquí el lenguaje nos engaña y los numerales desde un punto de vista lógico, de su lógica matemática, deberían considerarse nombres propios. Lo que Frege va hacer ir demoliendo las razones que podríamos tener para seguir la onto-semántica que nos propone el lenguaje ordinario.

Para ello, Frege comienza planteando si los numerales, como las palabras duro, difícil o rojo se refieren a propiedades de las cosas externas. Pero la respuesta en las siguiente secciones va a ser que no.

En la sección 22, Frege da dos razones que se entrelazan en el texto. Aunque Frege no empieza por aquí, señalaré en primer lugar la razón relativa a los numerales como adjetivos. Es verdad, dice Frege, que tal color y tal número se expresan mediante adjetivos. Pero mientras los colores se aplican distributivamente (las hojas verdes), los números se aplican colectivamente (1000 hojas del árbol, la *La Ilíada* como un poema, 24 cantos o miles de versos). Por tanto, los numerales no se aplican a cosas concretas sino a agrupaciones de ellas. Frege volverá al final del capítulo sobre este tema.

La siguiente razón en contra de que los numerales sean propiedades de las cosas, como es el caso del color, se expresa en primer lugar y se le dedica más espacio. Consiste en que depende de la concepción desde la que se considere el objeto u objetos en cuestión,

deberemos aplicarle uno u otro número. "Si le doy a alguien una piedra, diciéndole: determina el peso de esto, con ello le he dado el objeto de investigación. Pero si le entrego un paquete de barajas [de mazos] con las palabras: determina el número de esto, él no sabrá si yo quiero saber el número de cartas, o de juegos completos [mazos] o quizá las unidades de valor en el caso del tresillo [o el número de palos, por añadir un ejemplo más]."
En la sección 23, Frege insiste en lo mismo, debemos saber qué estamos contando para poder formular su número: "Un haz de paja, por ejemplo, puede descomponerse de tal modo que se partan en dos todas las briznas, o de modo que se separen las briznas una a una, o de modo que se obtengan dos haces. [...] El numeral "uno", en la expresión "una brizna de paja", no expresa, sin embargo, la manera como esta brizna esta compuesta de células o de moléculas."

La tercera razón (sección 24) que impide equiparar color y número reside en que el número se aplica no solo a las cosas externas sino a muchas otras: demostraciones, teoremas, ángeles, etc.

Y añade en cuarto lugar: "De hecho sería asombroso que una propiedad abstraída de cosas externas pudiera ser trasladada a sucesos, a imágenes, a conceptos, sin modificación de sentido. Sería exactamente como si se quisiera hablar de un suceso fundible, de una imagen azul, de un concepto salado, de un juicio rígido.
Es disparatado que en lo no sensible aparezca lo que, por su naturaleza, es sensible. Cuando vemos una superficie azul, tenemos una impresión peculiar, a la que corresponde la palabra "azul", y esa impresión la reconocemos de nuevo cuando vemos otra superficie azul. Si quisiéramos suponer que, del mismo modo, al contemplar un triángulo, a la palabra "tres" le corresponde algo sensible, *esto deberíamos reencontrarlo también en tres conceptos; algo no sensible contendría algo sensible*. Puede admitirse, sin duda, que a la palabra "triangular" le corresponde cierta especie de impresiones sensibles, pero en tal caso hay que tomar dicha palabra como todo. El tres que hay en ella no lo vemos inmediatamente, sino que vemos algo con lo que puede relacionarse una actividad intelectual, la cual, a su vez, lleva a emitir un juicio en el que entra el número 3." (sección 24; mío el subrayado).

Frege señala que el hecho de ser producto de una actividad intelectual puede sugerir el carácter subjetivo del número (sección 25). *¿Es el número algo subjetivo?* es el título del siguiente apartado.

Aquí Frege intenta deslindar lo objetivo fruto del intelecto de la imaginación. Frege descarta los procesos psicológicos como relevantes y hace hincapié en la objetividad del número. Los ejemplos sobre el mar del Norte, el eje terrestre y el espacio para otros seres racionales son destacables (sección 26).

Frege define: "Así entiendo por objetividad la independencia de nuestras sensaciones, intuiciones e imágenes, de la proyección de representaciones internas a partir de los recuerdos de sensaciones anteriores, pero no la independencia de la razón; pues responder a la pregunta de qué son las cosas independientemente de la razón significaría juzgar sin juzgar [hay una errata en la edición que usamos], lavar la piel sin mojarla." (final de la sección 27)

La última sección (28) que es la única del apartado *El número como conjunto* se refiere a la posible definición "como un conjunto, una multiplicidad o una pluralidad." Conviene no perder de vista que Frege no habla para nada de "conjunto" en el sentido de la Teoría de conjuntos. Aunque se refiere a otros autores, la idea de conjunto que se maneja aquí proviene de la aritmética de Euclides.

La crítica de Frege es, como otras veces, la falta de precisión de tales expresiones. E insiste en la segunda razón que ha dado más arriba: para poder asignar un número debemos primero dar una determinación desde la que se va poder contar y para ello hay que tener el concepto general de número.

Aquí quiero llamar la atención sobre dos cosas. La primera las palabras usadas aquí: "determinación", más arriba "concepción", que son la traducción castellana de las correspondientes en alemán. El lector puede preguntarse por qué no aparece la palabra "concepto" que es la que viene a la mente. Frege no usa la correspondiente palabra alemana. Como Dummett (ver Dummett1991, cap. 7) ha señalado, es ahí donde quiere ir a parar Frege, pero debe justificarlo porque hay que aceptar la sintaxis y la semántica que aquí subyace y que está ligada a la lógica matemática iniciada en la *Conceptografía*.

La segunda cosa sobre la que quiero llamar la atención remite a lo ya dicho más arriba sobre el carácter de los números en la aritmética de Euclides. Y es el desarrollo de esa venerable tradición el que va a atacar en el siguiente capítulo (ver nuestra sección 13).

12-Los compromisos ontológicos de Frege

En la primera sección, la 29, del capítulo III, Frege retoma el rechazo a que los números sean propiedades de las cosas. En este capítulo III, el enfoque es diferente y se refiere solo al número uno, aunque las consecuencias se extienden a los demás números.

El punto de partida es la palabra "unidad" ("monas", en griego trasliterado) que, según Frege, Euclides usa como sinónimo de una propiedad de un objeto que hay que contar y como nombre del número uno. Desmontar esta ambigüedad va a estar entrelazado con otra serie de argumentos contra la tradición de los libros aritméticos de *Los elementos* de Euclides. Pero en primer lugar vamos a ocuparnos de una serie de posiciones de Frege que están implícitas y que se manifiestan en el curso de su argumentación en la sección 29.

Frege señala que Euclides llama "unidad" a lo que va a ser contado, al objeto que tiene la propiedad de ser uno. Pero de manera oculta (lo veremos en nuestra sección 13) termina significando el número uno. Frege juega con la misma ambigüedad a lo largo de la sección 29, pese a la nota 2 del capítulo en la que señala que una cosa es el número uno y otra la unificación.

"Entonces, una unidad sería un objeto al que se le atribuye la propiedad [que llamamos] "uno", y [una unidad] sería a [la propiedad que llamamos] "uno" lo mismo que [aquel ser al que llamamos] "un sabio" es a [la propiedad que expresamos con el] adjetivo "sabio"."

Pero entonces, Frege recuerda las objeciones del capítulo anterior contra la consideración del número como propiedad de las cosas y añade una más: atribuir a cada cosa la propiedad uno es incomprensible.

"Únicamente por la posibilidad de que algo no sea sabio [alternativamente: algo no sea uno], tiene sentido la afirmación de que Solón es sabio [y eso no ocurre con la afirmación de que Solón es uno: cada cosa es uno]. El contenido [intensión] de un concepto disminuye cuando aumenta su extensión; si ésta lo abarca todo [si cada una de las cosas que existen son unidades], el contenido [la intensión] se habrá perdido totalmente [no añadimos nueva información]. No es fácil imaginar cómo llegaría el lenguaje a crea un calificativo [un predicado lógico] que no pudiera servir en absoluto para determinar con mayor precisión un objeto."

Pero no hacía falta dicho esfuerzo de imaginación. La doctrina de los trascendentales del aristotelismo proporciona dicho lenguaje. Y no conviene perder de vista esta cuestión pues manifiesta determinados compromisos ontológicos de Frege no siempre suficientemente explícitos, como la univocidad del ser (lo que es) y la crítica al "abstraccionismo". Comencemos con la concepción unívoca del ser de Frege; para ello debemos dar un rodeo por la doctrina de las propiedades trascendentales.

El concepto de propiedad trascendental del ente aparece en el capítulo segundo del libro IV de la *Metafísica* de Aristóteles cuando dice: "pues así como hay afecciones propias del número en tanto que número -por ejemplo: imparidad, paridad, conmensurabilidad, igualdad, exceso, defecto- que pertenecen a los números tanto por sí mismos como en virtud de sus relaciones recíprocas (e igualmente [otras pertenecen] a lo sólido, a lo inmóvil, a lo sometido a movimiento, bien sea ingrávido, bien sea pesado), así también lo que es [un ser], en tanto que algo que es [en tanto que es un ser], posee ciertas propiedades, y éstas son aquellas cuya verdad corresponde al filósofo examinar." (1004b 10 y ss.).

Aquí Aristóteles parece que se podría estar refiriendo a los géneros supremos, a las categorías (sustancia, cualidad, cantidad, relación, lugar, etc.). Esta sería la posición de un platónico (ver *El sofista* 254b-258e). Todas las cosas que son, la realidad, el mundo, formarían un todo; en términos actuales, el concepto que podemos llamar "todo lo que es" tendría una extensión que lo abarcaría todo. Y esa extensión se dividiría en subconjuntos que serían las categorías. Pero para Aristóteles no es así porque señala en el capítulo tercero del libro II que: "Éstos ["uno" y "lo que es"], en efecto, se predican máximamente de todas las cosas que son. Pero, sin embargo, no es posible que "uno" y "lo que es" sean géneros de las cosas que son. En efecto, de una parte, es necesario que las diferencias de cada género sean y que cada una de ellas sea una; pero, de otra parte, ni las especies del género ni el género sin sus especies pueden predicarse de las diferencias propias, de modo que si «uno» o «lo que es» fueran géneros, ninguna diferencia sería *una* ni *algo que es*." (998b 21 ss.)

O sea, dados los conceptos de género, especie y diferencia y los conceptos de uno y lo que es (ser), estos últimos no pueden funcionar ni como género, ni como especie. Por tanto, están más allá de los géneros supremos y pueden denominarse predicados transcendentes o transcendentales (la evolución de la terminología no es nuestro tema; continuaremos con predicados transcendentales).

Los filósofos medievales añadieron diversos trascendentales según fuese su posición teórica. Destacamos, además de ser (lo que es) y uno, verdadero (en relación con nuestro intelecto el ser es conforme al pensar) y bueno (en relación con la voluntad el ser es apetecible).

Aristóteles y quienes posteriormente elaboraron la doctrina de los trascendentales conjugaban co-extensionalidad con diferencia intensional. Así dice Aristóteles en el capítulo segundo del libro IV de la *Metafísica* que "lo que es" y "uno" son lo mismo y una misma naturaleza aunque se conceptualizan de manera diferente: "en efecto, 'un hombre, alguien que es hombre' y 'hombre' significan lo mismo, y nada distinto se da a conocer reduplicando la expresión '*un* hombre' y '*uno que es* hombre' (...); y lo mismo en el caso de 'uno'. Con que es evidente que el añadido expresa lo mismo en ambos casos, y que lo uno no es algo diverso de lo que es." (1003b 23–34)

Para hablar de los atributos transgenéricos fue fundamental el desarrollo del modo de predicación por analogía que tuvo su punto de partida en la idea de Aristóteles de que "lo que es" se dice de muchas maneras pero en relación a la entidad o sustancia (ver 1003b 34 y ss., comienzo del capítulo II del libro IV de la *Metafísica*). La distinción lógica, mediante la que hemos comenzado a hablar de las categorías para introducir los trascendentales, ha dejado de lado la vertiente ontológica que tiene para Aristóteles y que es fundamental para situar ontológicamente a Frege.

Aristóteles piensa que de todos los seres que existen los fundamentales son lo que pertenecen a la categoría de los individuos o particulares que él denomina entidades o sustancias (según diversas traducciones). Los seres de las demás categorías se llaman seres en relación a las sustancias. Ese "en relación a" es lo que los medievales desarrollaron mediante el concepto de analogía.

Las teorías medievales de la analogía fueron una respuesta a problemas en tres áreas: lógica, teología y metafísica. Los lógicos estaban interesado en el uso de palabras que tenían más de un sentido, bien completamente diferente o relacionado de alguna manera. Los teólogos estaban interesados en el lenguaje sobre Dios ¿Cómo podemos hablar sobre un ser trascendente y espiritual sin alterar el sentido de las palabras que usamos? Los metafísicos estaban interesados en el lenguaje sobre la realidad ¿Cómo podemos decir que las sustancias (p. e. Sócrates) y los accidentes (p. e. la barbosidad de Sócrates) existen cuando una depende de la otra? ¿Cómo podemos decir que tanto Dios como las criaturas existen, cuando estas son creadas por Dios? Los filósofos medievales reaccionaron a estos tres tipos de problemas siguiendo a Aristóteles en la división de las palabras en tres tipos. Las palabras unívocas son las que siempre se usan en el mismo sentido; las palabras equívocas se usan en sentidos completamente diferentes y las palabras analógicas son las que se usan en sentidos que están relacionados. "Ser" ("lo que es") y "uno" son palabras analógicas para Aristóteles, si usamos la terminología de los medievales.

La "analogía" en los medievales se referirá, en primer lugar, a la comparación de dos proporciones o relaciones. Se trata de la analogía de proporción. Así "principio" se dice que es un término analógico cuando se dice de un punto y de una fuente porque un punto se relaciona con una línea como una fuente se relaciona con un arroyo. Por su parte, la analogía de atribución se da cuando se relacionaban dos cosas en las que una actúa de primaria y otra de secundaria. Así "sano" es un término analógico cuando se dice de un perro y de su comida; primariamente se dice que un perro está sano y derivadamente que su comida es sana si contribuye a la salud del perro. Finalmente, tenemos la analogía de imitación o participación que usaron los teólogos para establecer semejanzas entre Dios y sus criaturas. Las criaturas son buenas o justas porque su bondad o justicia imita o refleja la bondad o justicia de Dios.

La discusión medieval tuvo como referencia la analogía de atribución porque fue central el tema metafísico de la división de la realidad en sustancias y accidentes por un lado y, por otro, en Dios y sus criaturas; en ambos puntos de vista, los dos tipo de seres están relacionados analógicamente. Esa es, por ejemplo, la postura del aristotélico Tomás de Aquino. Pero no todos los medievales aceptaron la analogía de "ser", así Juan Duns Escoto mantuvo la univocidad de "ser".

Y es que Aristóteles, y le siguió Tomás de Aquino, pensaba que la única capacidad con la que cuenta nuestro conocimiento es la abstracción que parte de los objetos sensibles. Si bien Tomás de Aquino había elaborado una doctrina que conciliaba esa posición con la posibilidad del conocimiento de Dios, el escocés ya vivía en un momento del pensamiento medieval en que la distancia entre el conocimiento sobre el mundo natural y sobre Dios se había agrandado mucho. Y Juan pretenderá dar una alternativa que implicará alternativas a ese conocimiento por abstracción en la experiencia. Y eso le conduce, via Ibn Sina (el Avicena de los latinos) a la univocidad del ser y una doctrina de la esencia y su concepto muy diferente a la tomista. No es el momento de profundizar en las doctrinas del Doctor Sutil, como se le apodaba a Juan Duns Escoto.

Pero obsérvese lo que dice Frege en la sección 49: "[Spinoza] se equivoca al suponer que el concepto sólo puede obtenerse por abstracción de varios objetos. Por el contrario, se puede llegar también al concepto partiendo de sus características; y, en tal caso, es posible que ninguna cosa caiga bajo este concepto. Si esto no ocurriera nunca, la existencia no se podría negar nunca, y con ello también perdería su contenido la afirmación de la existencia."

Frege rechaza lo que podemos denominar "abstraccionismo". Frege rechaza que la única capacidad con la que cuenta nuestro conocimiento es la abstracción que parte de los objetos sensibles. Como vamos a ver en nuestra sección siguiente, esto es una constante en la argumentación del capítulo III y muestra la unilateralidad racionalista de Frege.

La corriente dominante en la filosofía analítica sostuvo la univocidad y niega la tesis aristotélica de la analogía. Frege inaugura esta posición. Volvamos, pues, al capítulo III.

13-Opiniones sobre la unidad y el uno

Hemos tratado independientemente parte de la primera sección del primer apartado del capítulo III porque permitía extendernos sobre diversas posiciones de Frege. Es el momento de atender al conjunto del capítulo III y conectar el contenido de esa sección 29 con el resto del capítulo.

El capítulo III tiene los siguientes apartados:
¿Expresa el numeral "uno" una propiedad de objetos?, secciones 29 a 33
¿Son las unidades iguales entre sí?, secciones 34 a 39
Intentos de superar la dificultad, secciones 40 a 44
Solución de la dificultad, secciones 45 a 54

¿Expresa el numeral "uno" una propiedad de (un agregado de) objetos?

Recordemos (ver nuestras secciones 9 y 11) que, según Frege, el número no es algo físico y no se abstrae de la realidad externa (secciones 21-25 del capítulo II). Porque (a) por ejemplo, cosas externas como los colores se aplican distributivamente y los números colectivamente (sección 22). (b) Debemos saber qué estamos contando, porque según sea, daremos un número u otros; es el caso del paquete de mazos de cartas en el que se puede contar el número de mazos, el número de cartas, el número de palos, etc. (secciones 22 y 23). (c) El número no solo se aplica a cosas externas sino a cosas como ángeles, demostraciones, etc. (sección 24). (d) El número se aplica a lo no sensible y si fuese algo sensible sería sorprendente porque el número es algo intelectual (sección 24).

En la sección 29, en su primer párrafo, Frege ofrece una primera razón añadida (e) a las anteriores contra el número como propiedad de los objeto como ya hemos visto en nuestra sección anterior. No tiene sentido predicar el número 1 de algo porque eso no añade ninguna característica más a la cosa de la que se predica.

En el siguiente párrafo de la sección 29, Frege añade la segunda razón añadida (f) contra el ser el número propiedad de los objetos. Explícitamente, califica en la nota de la sección a "un"/"uno" como numeral y no un predicado. Frege, señala que en "Solón es uno" sólo tiene sentido si se usa "uno" en el sentido de unificación, de ser algo que forma un todo independiente de otras cosas y no en el sentido de numeral. Eso se muestra especialmente cuando usamos el plural: "Mientras que 'Solón era sabio' y 'Tales era sabio' pueden reunirse en 'Solón y Tales eran sabios', no puede decirse, en cambio, 'Solón y Tales eran un [uno; aquí como numeral]'. No se podría comprender la imposibilidad de esto, si 'un' fuera, igual que 'sabio', [palabras para nombrar] una propiedad tanto de Solón como de Tales."

Conviene observar cómo Frege supone en la primera razón que el numeral sea un predicado (el final del segundo párrafo de la sección 29), para luego sostener explícitamente (segunda nota de la sección 29) que no hablamos de un predicado cuando usamos "uno" sino de un particular (individuo, "objeto" en terminología de Frege contrapuesto a concepto). Si fuese un predicado sería un predicado raro (esa es la primera razón (e)) pero es que el significado de "uno" no se porta como la palabra que expresa un predicado sino como la palabra que expresa un individuo (esa es la segunda razón (f)). El lector puede añadir: a no ser que "uno" tenga el significado de unificación; Frege señala esto en la segunda nota de la sección 29, como hemos dicho, y en la sección 32.

En la sección 30, Frege señala que lo anterior se relaciona con la razón por la que no tenemos una definición de la propiedad uno (Frege ya ha dicho que no es un predicado): los objetos pueden ser uno y también no serlo según la concepción que tomemos. Recordemos el ejemplo de los mazos de cartas (ver Refutación 2, razón (b), en nuestra sección 11).

Y en la sección 31 rechaza que la idea de unidad sea identificada con la diferencia entre objetos físicos que, por ejemplo, los animales pueden detectar para no tropezar. Esa indivisión y delimitación no es lo esencial de nuestro concepto de uno porque este es algo intelectual (reitera la Refutación 2, razón (d), en nuestra sección 11)

Pero inmediatamente en la sección 32 señala que hay relación, precisamente al derivar "unido" de "uno". La palabra "unidad" tiene mejor aplicación como expresión de unificación, de un todo que es independiente de otras cosas.

Frege finaliza el apartado señalando en la sección 33 que cualquier propuesta de solucionar el problema de que la consideración de algo como unidad depende del enfoque que adoptemos (Refutación 2, razón (b)) no tiene solución con la consiguiente mancha de subjetividad que parece dejar sobre los números. Y no vale prescindir de la descomponibilidad porque hay problemas que la necesitan.

Frege concluye (al principio de la sección 34, ya en el siguiente apartado) que llamar a las cosas unidades para señalar que son contadas no ayuda en nada.

Así pues, la pregunta del primer apartado del capítulo III *¿Expresa el numeral "uno" una propiedad de objetos?* sigue teniendo una respuesta negativa. Pero además de añadir más razones para esa respuesta, señala que utilizar la palabra "unidad" para señalar lo que se va a contar no ayuda en nada. Sin embargo, ese uso señala que a la hora de contar hace falta agrupar o desagrupar las cosas.

¿Son las unidades iguales entre sí? (secciones 34 a 39),

Este segundo apartado aporta una razón para considerar unidades a las cosas contadas: hacerlas iguales. La última sección de dicho apartado (la 39) resume una faceta de su argumentación: "Si queremos producir el número como reunión de diversos objetos, obtendremos un amontonamiento que contiene los objetos precisamente con aquellas propiedades que los hacen distintos entre sí, y esto no es el número. Si, por otra parte, queremos constituir el número como reunión de lo igual, el resultado a acaba por ser siempre el uno, y nunca alcanzamos la pluralidad."

Respecto a esta última oración dice Frege: "Si yo, por ejemplo, al considerar un gato blanco y uno negro, prescindo de las propiedades por las que ellos se distinguen, obtengo quizá el concepto de gato. Si ahora los pongo a ambos bajo este concepto los llamo unidades, el gato blanco sigue siendo blanco y el negro sigue siendo negro. Incluso si no pienso en sus colores, o me propongo no sacar conclusiones de su diferenciación, no por ello se volverán los gatos sin color; permanecerán tan distintos como eran. El concepto de gato, que se ha obtenido de este modo por abstracción, ya no contiene, en verdad, las peculiaridades, pero precisamente por esto es sólo uno." (sección 34, al final; sustituyo "el concepto "gato"" por "el concepto de gato") Y continúa al principio de la siguiente sección: "Por procedimientos meramente conceptuales no se consigue hacer iguales cosas distintas; pero si se consiguiese, ya no se tendrían cosas, sino sólo *una* cosa."

Resumiendo. Si queremos constituir el número como reunión de lo igual, como reunión de unidades, caben dos posibilidades. En la primera, tales unidades son objetos; entonces podemos obtener un concepto común pero ese concepto común es uno. Supongamos ahora que las unidades a contar son conceptos; de nuevo, al buscar algo común obtenemos otro concepto, pero también un solo concepto. Por tanto, para contar hace falta que la pluralidad de cosas contadas sean diferentes al menos para poder distinguirlas y contarlas. Pero sigue siendo necesario hacerlas, de alguna manera, iguales. Si intentamos conseguir esa identidad en la diversidad usando conceptos, acabamos de ver que terminamos en una unidad sin pluralidad.

Así pues, la idea de que el número es un agregado, grupo, montón o reunión de cosas no conduce a ninguna parte si nos mantenemos en la manipulación de objetos y conceptos.

En las secciones 36 a 39, Frege prueba otro método que no se vale de conceptos. En vez de usar conceptos, lo intenta con símbolos. A la vez, Frege intenta deslindar los significados de "unidad" y la conveniencia de establecer significados precisos para "unidad" y "uno". La cuestión la resume así al principio de la sección 39:

"Si con [el numeral "1"] queremos designar cada uno de los objetos que hay que contar, esto es un error, porque lo diverso recibe el mismo signos. Pero si proveemos al [numeral "1"] de marcas diferenciadoras, este [numeral "1"] se hace inservible para la aritmética. La palabra "unidad" se adapta maravillosamente para ocultar esta dificultad; y este es el motivo -si bien inconsciente- por el que se la prefiere a las palabras "objeto" y "cosa". Se empieza por llamar unidades a las cosas que hay que contar, con lo que la diversidad mantiene sus derechos; luego viene la reunión, agrupación, unión, anexión o como quiera llamarse, pasándose al concepto de la adición aritmética, y el término conceptual "unidad" se transforma, sin que lo advirtamos, en el nombre propio "uno"."

Así, Frege explica como la equivocidad de la palabra "unidad" oscila entre la expresión del número uno y la del objeto que va a ser contado. Frege señala que la diferencia la marca (secciones 37 y 38) el que en el primer caso, cualquier palabra que lo exprese no tiene plural; en el segundo sí es posible. Porque los nombres de individuo no tienen plural y los nombres de conceptos sí. Podemos convenir que "uno" expresa siempre el número uno y "unidad" el objeto que va a ser contado.

Dos precisiones. Evidentemente pueden ser varias las cosas que van a ser contadas y tiene sentido hablar de "unidades" en plural. Pero cuidado porque en castellano se puede hablar de "unos" (Hay muchos "unos" en la pantalla) pero aquí estaríamos hablando de numerales. Si escribo en la pantalla o en el papel

1
1
1
1
etc

no hay varios unos sino varios numerales para 1 ("1"), de ahí el entrecomillado de "unos" en la frase *Hay muchos "unos" en la pantalla* que, obviamente, en el lenguaje habitual no se usa.

Todavía más importante es destacar una segunda precisión: que Frege está poniendo las bases para considerar a los números objetos (individuos, particulares). Dice Frege categóricamente: "En [el numeral "1"] tenemos un nombre propio que, en cuanto tal, no admite plural, como tampoco lo admiten "Federico el Grande" o "el elemento químico oro"." Esto contradice la gramática de los numerales que considera adjetivos a los numerales. Frege está diciéndonos que desde su punto de vista lógico, los numerales son nombres de (lo que ahora llamamos) particulares abstractos.

Intentos de superar la dificultad (secciones 40 a 44)

En este apartado, Frege reitera cosas ya dichas, pero la sección 40 da el golpe de gracia a cualquier vinculación con Kant: "El tiempo es solamente una necesidad psicológica para poder contar, pero no tiene nada que ver con el concepto de número. Si se utilizan puntos espaciales o temporales para representar objetos no espaciales o atemporales, esto puede ser quizá ventajoso para el proceso de contar; pero, en lo fundamental, en ello se presupone la aplicabilidad del concepto de número a lo no espacial y también a lo atemporal."

Solución de la dificultad (secciones 45 a 54)

Tras el resumen de lo logrado antes (sección 45), Frege propone que el sujeto de las afirmaciones sobre números tienen como sujetos a los conceptos (sección 46). En las secciones 47, 48 y 54, Frege señala las ventajas de esta concepción:

1. Se mantiene la objetividad.

2. Se explica la razón de que se puedan aplicar números diferentes a la misma cosa (recordar el ejemplo de las barajas).
3. El papel de la abstracción (cuando se da) reside no en obtener el número sino en dar lugar al concepto sobre el que se aplica el número.
4. Se explica el hecho de la aplicabilidad universal del número; el número se aplica a todo lo conceptualizable.
5. Se aclara el juego entre identidad y diversidad y el papel de la palabra "unidad". Bajo la unidad del mismo concepto caen las cosas que forman su extensión; pero esas cosas que forman la extensión son diferentes.

Las secciones 49 a 54 dan algunos retazos de la ontosemántica detrás de su lógica matemática:

a- la primera idea destacable puede expresarse de varias formas: los conceptos pueden tener una extensión vacía, puede no existir nada que caiga bajo ese concepto, no hay nada de lo que se pueda decir o predicar el concepto (sección 49).

b- una cosa es un individuo y otra cosa un concepto que solo se pueda decir de una cosa; en otros términos: una cosa es un individuo y otra la clase o conjunto que solo tiene un elemento (sección 51). Frege es extensionalista y asume en *Los fundamentos* que "concepto" y "extensión de un concepto" son expresiones que significan lo mismo (ver la importante nota al pie de la sección 68).

c- hay objetos y hay conceptos; y además hay conceptos de conceptos, conceptos de conceptos de conceptos, etc. O sea, las relaciones entre conceptos no se limitan a la subordinación (sección 53).

d- en relación con (a), la existencia no es una propiedad de las cosas al lado de otras (secciones 49 y 53).

En este último punto, la lógica matemática de Frege sigue la estela de Kant de que existir no es un predicado como todo los demás que nos permite distinguir diferentes tipos de cosas ("no es un predicado real"). Cuando digo de algo que es una máquina o de otra que es un animal, clasifico esas cosas en el tipo o conjunto de las máquinas o los animales, respectivamente. No es infrecuente decir que algo existe o que tal otra cosas no existe. Con una afirmación tal, parece que digo que hay un tipo de cosas que existe y otro tipo de cosas que no existe. Kant y Frege señalan que esta interpretación es un error. Veamos.

Cuando en un contexto no filosófico contraponemos existir a no existir, las cosas que no existen son fruto de una creación de nuestro cerebro, bien como ficciones bien como supuestas cosas que creíamos que podíamos encontrar en el mundo y ha resultado que no era así. En el primer caso, tenemos los personajes de ficción, pongamos, de una película: Indiana Jones, por ejemplo. El segundo caso puede ejemplificarse con la refutación científica, por ejemplo con la refutación de la teoría del calórico. Pero también en situaciones más cotidianas, como cuando buscamos un edificio en el número tal de la calle cual y resulta que tal edificio ya no existe.

Sin embargo, en un contexto filosófico, las cosas pueden ser más complicadas. Puedo optar por una versión más o menos análoga del sentido común y decir como Kant que una cosa es tener dinero en el bolsillo y otra pensar o imaginar o soñar que lo tengo. En el primer caso el dinero existe, en el segundo no. Y lo que no existe como mucho estará en la cabeza de alguien como pensamiento, imagen o sueño pero no será, en realidad, una cosa. Como lo expresa Frege, no hay nada que caiga bajo ese concepto o, en otros términos, el conjunto es vacío. Sin embargo, la doctrina que vimos de Aristóteles de la analogía del ser abre la posibilidad de que las cosas tengan varias maneras de ser, pueden ser existentes o pueden no ser existentes. Y entonces "ser" y "existir" no se entienden como sinónimos.

En esa línea, pero más próximo en el tiempo a Frege que Aristóteles, está Meinong. El autor de *Teoría de los objetos* fue objeto de los ataques de Russell cuando éste formuló su interpretación de las descripciones definidas en "Sobre la denotación" (1905). Recordaremos brevemente este trabajo de Russell porque permite situar a Meinong frente a Frege y a este en otra de sus posiciones implícitas. (Dejar claro que Frege no se implicó en la posibilidad de la reinterpretación de *todas* las descripciones definidas que Russell propuso en el artículo que nos ocupa.)

Las descripciones definidas son expresiones que empiezan con un artículo determinado en singular (el, la) y que funcionan como nombres propios señalando un objeto concreto, por ejemplo: "el coche grande de enfrente", "la ganadora del concurso" o "el actual rey de Francia".

En las oraciones declarativas "el coche grande de enfrente es hermoso" o "La ganadora del concurso es inteligente", la percepción del tamaño de un coche o la inteligencia de una persona siempre tienen algo de subjetivo, pero lo más probable es que estas dos frases no se alejen mucho de la realidad, a menos que se expresen con intención irónica. Las cosas se complican cuando se usa una descripción como "el actual rey de Francia" para construir una oración como, por ejemplo, "el actual rey de Francia es calvo", donde el predicado "es calvo" se dice de "el actual rey de Francia". La cuestión es que ahora no hay ningún rey de Francia. Por lo tanto, si las descripciones definidas funcionan como nombres propios pero no existe la cosa nombrada, es posible construir oraciones que en realidad no deberían tener significado y, por tanto, deberían ser ininteligibles. Sin embargo, las oraciones en que aparecen son perfectamente inteligibles. No en vano existen millones de páginas de novelas que narran hechos que nunca han sucedido sobre personajes que no han existido jamás.

Por tanto, en opinión de Russell, la oración "el actual rey de Francia es calvo" plantea la siguiente conjunción paradójica de afirmaciones: (1) tiene sentido, porque la gente la entiende; (2) tiene la forma lógica típica, según la cual se dice el predicado "es calvo" del sujeto "el actual rey de Francia"; (3) tiene sentido solo si "el actual rey de Francia" se refiere a algo que existe.

Una forma de sortear la contradicción es la que propuso el filósofo que ha motivado la introducción de este asunto: el austríaco Meinong. En términos del enfoque de Russell, la posición de Meinong consistió en interpretar la afirmación número 3, sobre que el sentido depende de la existencia. Meinong no ponía en duda que "el actual rey de Francia" se refiere a algo que no existe, pero, según él, se refiere a algo que "subsiste", esto es, que tiene otra forma de ser que no está en el mundo conocido como real. Meinong creía en la *subsistencia* de objetos como el cuadrado redondo, la montaña de oro o el actual rey de Francia.

Por el contrario, la solución de Russell fue rechazar la afirmación número 2, sobre cuál es la forma lógica de determinado tipo de oración o parte de la oración y eso es algo que ya hemos visto hacer a Frege: determinadas oraciones o partes de una oración aparentan tener una estructura lógica que en realidad no tienen. El británico reinterpretó la oración "El actual rey de Francia es calvo" como una conjunción de tres oraciones:

· Existe algo que ahora es rey de Francia
· Solo hay una cosa que ahora es rey de Francia
· Ese algo que es rey de Francia es calvo

Si se acepta ese análisis, entonces la oración compuesta puede ser falsa cuando una o varias de las tres oraciones simples que la componen son falsas: no hay un rey de Francia ahora o hay varios al mismo tiempo —puesto que son pretendientes que dicen serlo, pongamos por caso— o no es calvo. De esa manera ya no cabe la posibilidad de que haya falta de sentido porque la expresión problemática "el actual rey de Francia" ha desaparecido mediante su análisis lógico. Por otra parte, el análisis lógico obliga a pronunciarse sobre la existencia o no de ese algo que supuestamente es rey de Francia: las cosas existen o no (no hay medias tintas) y si no existen, no cuentan. Dicha posición se denomina extensionalismo.

Frege tiene una ontosemántica extensionalista. Una teoría ontosemántica es extensionalista cuando solo trata con entidades existentes (Audi1995, "Extensionalismo"). Para tal posición, no hace falta considerar que el dominio de cualquier teoría verdadera precise incluir entidades no existentes tales como objetos de ficción, imaginarios o imposibles, como Pegaso o los cuadrados redondos. La semántica extensional reduce el significado y la verdad a las relaciones entre las extensiones de los conceptos que se dan entre los términos de un lenguaje y los objetos que se consideran existentes y que forman parte de dichas extensiones o son denotados de alguna manera en el lenguaje. El enunciado "Todas las ballenas son mamíferos" es verdadera en la semántica extensional una vez sabido que no hay ballenas que no sean mamíferos, esto es, que no hay objetos existentes en la extensión del predicado "ballena" que no estén también en la extensión del predicado "mamífero". Los contextos lingüísticos son extensionales si: a) sólo hacen referencia a objetos existentes; b) admiten sustitución bajo términos que se refieren al mismo objeto o de proposiciones lógicamente equivalentes sin pérdida del valor de verdad; y c) es lógicamente aceptable cuantificar existencialmente sobre objetos a los que se hace referencia en ese dominio. Los contextos que no satisfacen estas condiciones son intensionales, no extensionales, o referencialmente opacos.

Frege precisa su posición señalando que la existencia no es una propiedad de las cosas sino que es una propiedad de los conceptos (sección 53), el que algo caiga o no bajo un concepto o, en otras palabras, se pueda predicar de algo o no. Esto se traduce en que en la lógica matemática la existencia se expresa mediante el cuantificador existencial. Y, en efecto, Frege solo admite como símbolo primitivo de su cálculo el cuantificador universal, pero es perfectamente consciente de la equivalencia entre el cuantificador existencial y el universal tal como se formula en la lógica matemática: $\forall x Fx \iff \neg\exists x \neg\, Fx$.

14-El contexto matemático

Como en el caso del contexto filosófico, Frege se mueve dentro de las tendencias propias de su época. En el siglo XIX un asunto fundamental era el cálculo diferencial e integral o análisis matemático cuya materia son los números reales (Potter2004). Había dos problemas pendientes de resolución en el análisis: los infinitésimos y liberarlo del recurso a la intuición.

La cuestión de los infinitésimos excede de lo que es posible ilustrar aquí aunque podemos recordar que Berkeley publicó un libro entero, *The Analyst*, para burlarse de la falta de rigor de los matemáticos al respecto. Diremos solamente que, a lo largo del siglo XIX, se fue desarrollando una buena alternativa basada en el concepto de límite que seguramente recordamos de nuestras clases de matemáticas antes de llegar a la universidad. Curiosamente, el uso de infinitésimos volvió a la vida del trabajo matemático en los 60 del siglo XX, mediante el denominado análisis no estándar de la mano de Abraham Robinson (1918-1974).

El segundo problema está relacionado con Kant y está más cerca de los asuntos que nos ocupan. Una figura fundamental en liberar el análisis del recurso a la intuición fue el matemático y filósofo checo Bernard Bolzano (1781-1848). Tal vez porque Kant no influyó en él. Recordemos que aunque lo que Kant decía de la aritmética no era muy prometedor, la ciencia teóricamente fundamental en su época seguía siendo la geometría y él proporcionó un marco epistemológico para ella. La ventaja de las demostraciones de la geometría es que se ven; o como terminó diciéndose por culpa de Kant, se intuyen. La expresión ya se alejaba de un uso propiamente kantiano pues la idea que había detrás de ese "ver" era que dichas demostraciones se presentan con la marca de lo obvio.

Bolzano mostró un prurito persistente en probar todo lo que pudiese ser probado, no importaba cómo de obvio pudiese parecer cuando se pensaba en términos geométricos. Una razón obvia para esto fue que lo que parece obvio puede no ser verdadero. La cosa podría haber quedado en poco más que una exigencia de rigor para evitar el error si no fuera porque encontró (1840) algo sorprendente para futuras generaciones de matemáticos. Digo futuras, porque ese descubrimiento nunca se publicó. Hizo falta que otra figura fundamental en este asunto Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) publicase un caso parecido (1872). Veamos.

Si pensamos en una función continua en un intervalo (incluyendo los puntos extremos) representada por una curva (matemáticamente hablando) en un papel, parece obvio que, en el intervalo dado, cualquier curva debe tener una pendiente y, por tanto, se puede calcular la función derivada, excepto en un número finito de puntos; es el caso, por ejemplo, cuando la curva está hecha de dos segmentos de línea recta en ángulos diferentes, no hay pendiente en el punto en el que se encuentran las dos líneas.

Sin embargo, Bolzano encontró el primer ejemplo de una función continua en un intervalo pero que no era diferenciable en ningún punto del intervalo. Expresado geométricamente, esto estaría representado por una curva continua que no tuviese pendiente en ningún sitio; naturalmente, la curva de esta función no se puede dibujar.

Como se ha señalado, hubo que esperar a que Weierstrass revitalizase el asunto y pudiese llevar a cabo el programa de investigación de liberar el análisis de la intuición mediante sus clases en la Universidad de Berlín. Si se analiza dicho programa, nos encontramos con tres aspectos principales. El primero, y más matemático y alejado de nuestra lectura, consistió en suponer lo números naturales como dados y construir lo que en matemáticas se denomina un campo completamente ordenado; el principal contribuyente a dicha construcción fue el ya mencionado Dedekind. Esto se ha denominado "aritmetización del análisis".

Los otros dos aspectos de que hablábamos atañen directamente a Frege. El segundo de los tres es el uso del método axiomático y, a la vez, conseguir sólidas bases para las demostraciones que no involucraban visualizaciones geométricas sino un lenguaje no visual. El método axiomático se hizo fuerte con los trabajos sobre el análisis. Pero también en la propia lógica. La *Conceptografía* de Frege es una contribución fundamental a este aspecto del programa de investigación del que hablamos, también en la axiomatización, pero sobre todo en las bases sólidas para las demostraciones. Una importancia que no fue reconocida hasta mucho más tarde cuando la lógica se asentó como disciplina matemática. Ya hemos hablado de ello.

Finalmente, el tercer aspecto es la fundamentación o conceptualización de los propios números naturales que se suponen en toda las matemáticas antedichas. Esto se realizó de diversas maneras. Una de ellas la encontramos en el libro de Frege objeto de nuestra lectura *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884). Otra es, de nuevo, obra de Dedekind con Was sind und was sollen die Zahlen? (*¿Qué son y qué significan los números?* 1888). En ambos se enfoca de manera diferente el uso de los números naturales para contar, lo que en Teoría de conjuntos se denomina cardinal de un conjunto. Dedekind deriva un teorema que justifica teóricamente este propósito. Frege optó por partir del hecho de que los números naturales se usan para contar y derivar las propiedades de los números naturales de ahí.

Ambas tienen en común basarse en algo similar a lo que ahora denominamos conjuntos en matemáticas. Pero esta afirmación requiere de muchas precisiones, como todo lo que rodea a la Teoría de conjuntos que no es algo monolítico. Podemos distinguir entre cuatro funciones de la Teoría de conjuntos en la matemática. La primera es que proporciona un lenguaje común a los matemáticos. La segunda proporcionar la materia de las matemáticas, que es el caso que nos ocupa respecto a los números naturales, al deducirlos de una teoría conjuntista. Las dos últimas caen fuera de nuestro asunto: tratar con el infinito y proporcionar modos de razonamiento matemático. Normalmente es a ese tratamiento del infinito mediante la Teoría de conjuntos con el que se asocia al iniciador de dicha teoría Georg Cantor (1845-1918), el cual también participó en el programa sobre el análisis que abanderó Weierstrass.

Para empezar con los conjuntos, lo primero que hay que hacer es distinguir dos tipos de concepciones del tipo de cosa que es un conjunto en el campo de la Teoría de conjuntos. Se trata de la distinción entre combinaciones y las colecciones. Una combinación no es más que la suma de sus partes, mientras que una colección supone que hay algo que reúne sus objetos, y que podemos comparar con una especie de contenedor donde los metemos. Los conjuntos de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, estándar en matemáticas, son de este último tipo.

La diferencia entre ambas también se puede observar en la distinción que se hace en Teoría de conjuntos entre un individuo y el conjunto que contiene sólo un individuo, o la posibilidad de que haya un conjunto vacío, lo cual tiene sentido en las colecciones pero no tendría sentido en las combinaciones. Estas son meramente sus componentes y si desaparecen estos, desaparece la combinación. Por su parte, ya conocemos una versión de la entidad que hace el papel de contenedor que colecciona sus miembros: los conceptos o predicados lógicos.

De nuevo hay que destacar que Frege hizo la distinción al hacer una reseña de una publicación de Schröder (el mismo que aparece citado en *Los fundamentos* en la segunda nota de la sección 63). Este último, como también Dedekind al principio, pensaba en términos de combinaciones, aunque luego cambió de opinión. Ernest Zermelo (1871-1953) también optó por las colecciones en su concepción de los conjuntos.

Que las colecciones estén determinadas inequívocamente por sus miembros hace que cualquier teoría que las conceptualice tenga como relación primitiva la relación de pertenencia "$\in$" . Y esa determinación inequívoca se suele formular con alguna forma de lo que se denomina "axioma de extensionalidad" que afirma que dos colecciones son iguales si y solo si tienen los mismos elementos. A una colección le pueden pertenecer otras colecciones e individuos (a veces, estos últimos aparecen designados en este contexto con la palabra alemana "Urelemente"); hay teorías de las colecciones que admiten individuos y otras que no.

En términos formales, expresaremos una colección así

$$\{x \mid \Phi(x)\}$$

donde Φ se refiere a cualquier fórmula lógica donde x ocurre libre (pero ligada por la expresión entre llaves). Se lee: la colección de los x tales que $\Phi(x)$. Esto es, la fórmula "Φ" significa un concepto o predicado lógico.

Si llamamos a a la colección $\{x \mid \Phi(x)\}$, esto es, $a = \{x \mid \Phi(x)\}$ tendremos que cualquier x pertenece a la colección a si y solo si cumple $\Phi(x)$, o sea, $\forall x(x \in a \leftrightarrow \Phi(x))$

Podemos encontrar dos tipos de colecciones: los conjuntos y las clases. Los primeros los encontramos en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel que es la estándar de las matemáticas actuales. Las segundas en la teoría de conjuntos de Von Neumann-Bernays-Gödel. Se denomina "clase" a toda propiedad expresada por una fórmula $\Phi(x)$, aun cuando pueda demostrarse que no existe un conjunto que contenga todos los objetos con esa propiedad (en cuyo caso se denomina "clase propia"). La teoría de Zermelo-Fraenkel no permite las clases. Sin embargo en la teoría de Von Neumann-Bernays-Gödel las clases son objetos que forman parte de la teoría y puede establecerse una distinción entre ambos tipos de colecciones, clases y conjuntos. Los segundos siempre forman parte de otros conjuntos, no así las primeras. Ello permite expresar, por ejemplo, una colección universal, cosa que no es posible en términos de conjuntos.

El problema que tienen las colecciones es que no todos los conceptos, o si lo preferimos, propiedades y relaciones, permiten formar colecciones. Eso es lo que descubrió Russell (1903) en la que iba a ser la obra magna de Frege con su famosa paradoja (recordemos que nos referimos a la obra de Frege *Grundgesetze der Arithmetik*, *Las leyes básicas de la aritmética*, dos volúmenes, 1893 y 1903) .

Recordemos la Paradoja de Russell. Si elegimos $x \notin x$ para $\Phi(x)$ nos encontramos con una contradicción. En efecto, supongamos que se da el caso $a = \{x \mid x \notin x\}$. Entonces, sustituyendo $\Phi(x)$ por $x \notin x$ en $\forall x(x \in a \leftrightarrow \Phi(x))$, tenemos $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \notin x)$. sustituimos ahora las restantes x por a y tenemos la contradicción $(a \in a \leftrightarrow a \notin a)$.

El intento de fundar los números naturales en teorías conjuntistas también se enfrenta a las diferentes alternativas, todas igualmente validas, para expresar los números naturales en términos conjuntistas. Podemos considerar al menos dos:

Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel:

$0 = \varnothing$

$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$

$2 = \{1\} = \{\{\varnothing\}\}$

$3 = \{3\} = \{\{\{\varnothing\}\}\}$
...

Teoría de conjuntos de Von Neumann-Bernays-Gödel

$0 = \varnothing$

$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$

$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$3 = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
...

Es frecuente encontrar como denominación de esta situación "el problema de identificación de Benacerraf". Vamos a ver que Frege también deja constancia de este tipo de problemas con lo que se ha denominado "el problema de Julio César".

15-El concepto de número

El capítulo IV se titula "El concepto de número" y está dividido en tres apartados:

(1)*Cada número es un objeto independiente* (secciones 55-61)
(2)*Para obtener el concepto de número, hay que fijar el sentido de una ecuación numérica* (secciones 62-69)
(3)*Resumen y confirmación de nuestra definición* (secciones 70-83)

(1)***Cada número es un objeto independiente*** (secciones 55-61)

En la sección 55, Frege traduce las definiciones leibnizianas de los números en términos de la lógica matemática (Zalta2022).

Así, se define:

A un concepto F le corresponde el número 0

$$\equiv_{def}$$

$$\neg \exists x Fx$$

A un concepto F le corresponde el número 1

$$\equiv_{def}$$

$$\exists x Fx \wedge \forall x \forall y ((Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y)$$

Podemos añadir el 2 y el 3 para intentar captar la idea mejor:

A un concepto F le corresponde el número 2

$$\equiv_{def}$$

$$\exists x \exists y (Fx \wedge Fy \wedge x = y)$$

$$\wedge$$

$$\forall x \forall y \forall z ((Fx \wedge Fy \wedge Fz) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z))$$

A un concepto F le corresponde el número 3

$$\equiv_{def}$$

$$\exists x \exists y \exists z (Fx \wedge Fy \wedge Fz \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$$

$$\wedge$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall w ((Fx \wedge Fy \wedge Fz \wedge Fw) \to (x = y \vee x = z \vee x = w \vee y = z \vee y = w \vee z = w))$$

Frege justifica que eso no es suficiente para sus propósitos. Tal vez es más clarificador empezar por la última razón que está al final de la sección. Frege señala que esas definiciones nos proporcionan *qué significa* lógicamente la expresión "hay n Fs" o en términos más fregeanos "al concepto F le corresponde el n", donde n es cualquier número natural. Pero las definiciones que nos ocupan solamente nos garantizan que existe una y solo una entidad en cada caso y nada más. Necesitaríamos más premisas que nos permitiesen, a partir de cada una de las proposiciones particulares, inferir una proposición singular en la que la variable se convierta en una constante. Y eso no lo tenemos.

Por tanto, dichas definiciones no nos dicen en cada caso qué entidad es y no le podemos poner un nombre propio. La forma de expresarlo por Frege ha hecho que se llame a esta cuestión "el problema de Julio César". La consecuencia de esa situación es que "no podemos demostrar que debe ser $a = b$, cuando al concepto F le corresponde el número a y cuando al mismo le corresponde el número b."

De lo que se trataría entonces, es de realizar un análisis lógico más profundo de la expresión "al concepto F le corresponde el número n". Esto se hace a partir de la sección 62 (ver nuestro siguiente apartado). Pero al hilo de los análisis lógicos de la sección 55, Frege nos da, en la sección 57, un nuevo argumento en favor de su hipótesis de que los números son, como diríamos ahora, particulares abstractos. No olvidemos el camino que a este respecto ha seguido Frege. Ha dado por supuesto que hay una serie de hipótesis sobre la ontología de los números y las ha ido descartando hasta quedarse con una. Ha descartado que los números sean magnitudes (sección 6), que sean propiedades de cosas externas (21-25), algo subjetivo (26-27) y tampoco un conjunto o agregado en el sentido de la tradición de Euclides (28, 30-40). Y Frege se queda con la hipótesis de que los números son particulares abstractos.

Ahora (sección 57) nos ofrece una razón en favor de esta última hipótesis, la hipótesis de que los números son particulares abstractos. No se trata de una razón definitiva sino de un elemento a favor que hay que tener en cuenta. Al hilo de las formulaciones de la sección 55, Frege llama la atención de que podemos analizar lógicamente las expresiones que nos dicen cuántas cosas hay de manera diferente a la atribución: como ecuaciones o identidades numéricas. Habitualmente atribuimos un número (Júpiter tiene cuatro lunas) y, de hecho, habitualmente los numerales se clasifican como adjetivos. Pero Frege señala que podemos hacer otra interpretación (recordemos las descripciones definidas): "el número de lunas de Júpiter = cuatro". Y esa interpretación presenta al numeral como designando un individuo (un particular abstracto).

Y es esa interpretación del número como particular abstracto de la que hace uso a partir de la sección 62, como veremos en el siguiente apartado (2). Antes, las secciones 58 a 60 justifican que el significado de las palabras que designan números no van ligadas a imágenes si no es porque, individualmente, cada persona puede asociar un número a cierta cosa. El objetivo de Frege es justificar que esa situación se da en otras palabras y eso no las excluye del lenguaje. Igual pasa con la imposibilidad de situar los números en un lugar: el que algo no ocupe un lugar espacial no quiere decir que no sea un objeto (sección 61).

(2)***Para obtener el concepto de número, hay que fijar el sentido de una ecuación numérica*** **(secciones 62-69)**

Dividiremos este apartado en tres partes:

(2a) Planteamiento del problema y adelanto de la solución (secciones 62 y 63)
(2b) Objeciones a la solución tal como otros la han propuesto (secciones 63-67)
(2c) Solución de la dificultad según Frege (secciones 68 y 69)

(2a) Planteamiento del problema y adelanto de la solución (secciones 62 y 63)
Frege comienza a partir de la sección 62 la construcción de la justificación de su hipótesis favorita: los números son particulares abstractos. Si los particulares abstractos no se ven, no se tocan, no se sienten, podría decir Frege, entonces hay que utilizar palabras para hacerlos presentes. Y las palabras sólo se refieren a las cosas en el seno de oraciones. Frege, nos recuerda así su *Principio del contexto* que apareció en su "Introducción". Y, en consecuencia, Frege señala que hay que analizar los numerales en su uso en oraciones. No en vano, Frege es padre de la filosofía analítica: el giro lingüístico que se atribuye a ésta tiene aquí un claro y fundamental ejemplo.

Pero Frege ya está tomando decisiones rápidamente nada más plantear su enfoque. Porque la primera cosa que dice inmediatamente después de establecer el análisis de los numerales como objetivo para resolver cuestiones ontológicas sobre los números es insistir que "ya hemos establecido que por numerales hay que entender [palabras que se refieren a] objetos independientes." (sección 62).

Ya hemos visto que esta afirmación debe entenderse en términos mucho menos contundentes: como resultado de limitar las hipótesis disponibles y encontrar argumentos contra todas las demás excepto una: los números son particulares abstractos y los numerales, designan, denotan, se refieren a ellos.

Por otro lado, conviene no olvidar que si la guía para resolver la ontología de los objetos son los términos singulares, que indiscutiblemente refieren, designan o denotan a los objetos, primero hay que tener claro que es un término singular. Aquí Frege está suponiendo la lógica matemática que ha pergeñado en su *Conceptografía* que hace lógicamente explícito el uso matemático de los términos singulares.

Frege sigue velozmente. Conecta directamente la hipótesis de que los números son particulares abstractos con el tipo de oraciones que se van a considerar para justificar dicha hipótesis: "las oraciones que expresan que algo se reconoce de nuevo". Y continúa: "Si el signo "a" debe designar un objeto, tendremos que disponer de un criterio para decidir en cualquier caso si [lo designado por] "b" es lo mismo que [lo designado por] "a", aun cuando no siempre esté en nuestras manos el poder aplicar este criterio."

Hay que fijarse en que aquí Frege inaugura otro rasgo de la corriente principal de la filosofía analítica y que Quine resumió así: ninguna entidad sin identidad. Lo que dota de ser, de entidad, a algo, desde el punto de vista de Frege, viene dado por los criterios de identidad. El asunto lo retomaremos en pocos párrafos.

Frege señala que la oración relevante es: "el número que corresponde al concepto F es el mismo que el número que corresponde al concepto G". Y precisa que el objetivo es expresar el contenido de dicho enunciado sin emplear la expresión "el número que corresponde al concepto ..." Entonces y sólo entonces se habrá establecido un criterio general para la identidad de los números y se le podrá aplicar un numeral como nombre propio.

Recuérdese que en la sección 55 se había abandonado la propuesta de definición lógica de cada número por insuficiente porque no era posible asignar ese nombre propio (ver al principio de esta sección). En cada caso, era posible establecer que hay una y solo una entidad que corresponde al concepto en cuestión, pero no qué entidad era. Ahora nos dice que para solucionar ese problema, hay que "traducir", decir de otra manera, "el número que corresponde al concepto ...". En otras palabras, se trata de redefinir esa expresión de manera lógicamente adecuada.

En la sección siguiente, la 63, se nos presenta la forma elegida de obtener esa definición y Frege señala que no es original suya (véase la segunda nota a la sección 63 del capítulo IV; obsérvese que se cita a Schröder y Cantor). Se trata de usar una aplicación biyectiva: Frege propone que "el número que corresponde al concepto ..." se defina en términos de aplicación biyectiva entre conceptos. No tardaremos en explicar lo que dice Frege. Pero ahora hay que prestar atención a que Frege no realiza inmediatamente un desarrollo matemático que justifique que eso que plantea es posible, sino que se dedica a presentar una serie de objeciones a dicho planteamiento que terminan en una irresoluble que es, de nuevo, el problema de Julio César. El resultado es que hay que esperar a la sección 68 para que lleguemos a la manera de definir la expresión que nos ocupa de manera satisfactoria para Frege.

(2b) Objeciones a la solución tal como otros la han propuesto (secciones 63-67)
Veamos las objeciones de Frege a la propuesta de entender la igualdad numérica como aplicación biyectiva entre conceptos. La primera objeción se plantea en el segundo párrafo de la sección 63. Podría pensarse que el procedimiento que está proponiendo Frege pretende definir la igualdad para el caso específico de los números. Esto, se puede objetar, sería un error, pues lo lógico es que dado que sabemos lo que es la igualdad (sobre esto la sección 65 es la relevante; lo vemos unos párrafos más abajo) añadimos el concepto de

número. Pero, objeta Frege, el problema es que no tenemos un concepto de número porque precisamente eso es lo que buscamos.

La forma correcta de entender esta propuesta, como dice en el último párrafo de la sección 63, es partir de una proposición de identidad (lógicamente hablando) o, como las llaman los matemáticos, de una ecuación, ecuación en la que cada miembro sea un número. O sea, $s = t$, para s y t números naturales.

En este punto conviene adelantarnos e introducir lo que Frege tiene que decir sobre la identidad. Eso ocurre hacia la mitad de la sección 65 en forma de segunda objeción contra su propuesta. Esta objeción es si su propuesta no contradice las leyes de la identidad. Recordaremos ahora algunas cuestiones fundamentales sobre la identidad para enmarcar lo que Frege dice.

En los lenguajes indoeuropeos, el verbo 'ser' -y sus equivalentes- tiene (al menos) tres usos: un uso equivalente a existir (aunque poco usado) , un uso copulativo (como parte del predicado) y un uso de identidad (Noonan2022 "Identity", Vega2011 "Identidad", FerraterMora2001 "salva veritate")

Cuando "es" aparece flanqueado por dos términos singulares, la interpretación más simple es esta última. Las siguientes oraciones,

(a) Mark Twain es Samuel Clemens (b) Tolkien es el autor de *El Señor de los Anillos* (c) El inventor del pararrayos es también el inventor de las lentes bifocales,

pueden usarse para hacer enunciados de identidad. Otras locuciones que indican identidad son: "es el mismo que", "es idéntico a", y "es igual que/a". Así que dos cosas son idénticas cuando son lo mismo. "Identidad" y "mismidad" tienen el mismo significado.

Se suele distinguir entre identidad cualitativa e identidad numérica. La identidad cualitativa es una cuestión de más o menos: hay cosas más o menos iguales. Mis perros son iguales en que son perros pero uno es una es una mestiza de podenca y el otro es mestizo de pastor belga. Por su parte, la identidad numérica es de todo o nada y sólo puede darse entre una cosa y sí misma. Es precisamente la que permite que contemos o numeremos cosas y la cuantificación lógica. Es de lo que nos estamos ocupando aquí ahora.

El verbo ser en los usos de identidad es lógicamente hablando un predicado poliádico, en concreto uno binario. Cuál es el contenido de las oraciones de identidad y cuál es la ontología que suponen son asuntos controvertidos como vamos a ver.

Si consideramos:

(1) El General De Gaulle era alto
(2) El Primer Presidente de la Quinta República Francesa era alto

y declaramos que lo que dice (1) es verdadero, veremos que sustituir en (1) "El General De Gaulle" por "El Primer Presidente de la Quinta República Francesa" da lugar a (2). Si

(3) El General De Gaulle = El Primer Presidente de la Quinta República Francesa

(2) sigue siendo verdadero. Las expresiones que están a la izquierda y a la derecha del "=" en (3) tienen, en (1) y (2), una posición puramente referencial y pueden sustituirse una por otra manteniendo el valor de verdad de la proposición de partida (*salva veritate*).

Así pues:

Si "a" y "b" son expresiones correferenciales y O es una oración en la que la expresión "a" aparece usada, entonces la oración O´ que resulta de sustituir en O "a" por "b" mantiene el mismo valor de verdad que O.

En términos de Leibniz, que son los que cita Frege en *Los fundamentos* (sección 65):

Eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate. (Dos cosas son lo mismo, si una de ellas puede ser sutituída por la otra sin perjuicio de la verdad)

Frege mantiene aquí la misma posición que en la *Conceptografía* (sección 8). La identidad es una relación peculiar que produce una bifurcación entre los objetos y sus nombres. En dicha obra, Frege considera que la identidad es una relación entre nombres de objetos, una relación metalingüística que indica que los términos que la flanquean tienen el mismo contenido. Aun así, los enunciados de identidad no siempre expresan una identificación convencional entre las referencias de sus términos. Es lo que se denomina el sentido oblicuo de una expresión que impide que se aplique el dictum leibniziano.

El ejemplo clásico es:

(1) George IV ignoraba que Walter Scott = el autor de *Waverley*
(2) Walter Scott = el autor de *Waverley*
(3) George IV ignoraba que Walter Scott = Walter Scott

Si (1) y (2) son verdaderas, (3) debería ser verdadero en virtud de la sustituibilidad de la segunda aparición de "Walter Scott" en (3) por "el autor de *Waverley*". Pero George IV no ignoraba que Walter Scott era Walter Scott a despecho de ignorar que fuese el autor de *Waverley*.

Desde Frege se ha estimado que esta no sustituibilidad se debe a que no denotan directamente sino como se dirá luego "oblicuamente". Es el caso de expresiones con verbos de actitud proposicional o cláusulas modales. Las teorías de la filosofía del lenguaje debido a este problema son multitud, incluyendo la del propio Frege posterior a *Los fundamentos*.

Conviene no olvidar que existe otra opción en la consideración de los relatos en la relación de identidad, que es la de considerar la identidad como una relación entre objetos. Y de nuevo Frege es relevante. La interpretación estándar del pensamiento de Frege en este punto es que éste abandonó a partir de 1892, por tanto después de la publicación de *Los fundamentos*, la interpretación metalingüística adoptada en la *Conceptografía* para apoyar una interpretación de la relación de identidad como una relación entre objetos.

La peculiaridad de la identidad en su interpretación objetual queda patente cuando se comprende que, en este caso, lo que un enunciado de identidad verdadero expresaría es la autoidentidad de un objeto, algo que es verdadero de todo objeto posible, y una proposición de identidad falsa expresaría la desigualdad de un objeto consigo mismo, algo no solo falso sino contradictorio. Formalmente la auto-identidad es un predicado monádico y no una relación, y una afirmación de auto-identidad, tanto si es verdadera como si es falsa, tiene un contenido informativo nulo.

Las aguas del análisis lógico de la identidad son más plácidas si nos referimos a las reglas formales del predicado binario de identidad (=) en los lenguajes de primer orden estándar. En todos ellos se asume que la identidad es una relación de equivalencia -o incluso que es la relación de equivalencia por antonomasia-, esto es, que es reflexiva, simétrica y transitiva:

Reflexiva $\forall x(x = x)$
Simétrica $\forall xy(x = y \to y = x)$
Transitiva $\forall xyz((x = y)\&(y = z) \to x = z)$

Se considera que la condición necesaria de la identidad se expresa mediante alguna regla o axioma que permita derivar el siguiente esquema de fórmula (donde F puede ser sustituida por un predicado cualquiera) denominado Principio de indiscernibilidad de los idénticos:

$$\forall xy((x = y) \to (Fx \leftrightarrow Fy))$$

Pero el Principio de identidad de los indiscernibles, o sea, la conversa que sugiere la anterior fórmula, tendría que expresarse así:

$$\forall x \forall y \forall P((Px \leftrightarrow Py) \to (x = y))$$

Como se puede ver, aquí hay un predicado (concepto) cuantificado. Esto quiere decir que para formular el Principio de identidad de los indiscernibles hace falta la lógica de segundo orden.

Volvamos al hilo de nuestra lectura. Habíamos dejado a Frege en la sección 63 con la propuesta de entender la igualdad numérica como aplicación biyectiva y usar para sus fines una ecuación y a partir de esa ecuación obtener el concepto de número.

Y concluye Frege la sección: "Naturalmente, esto parecerá un tipo muy extraño de definición, que ciertamente todavía no ha sido estudiado suficientemente por lo lógicos; pero que este modo de definir no es inaudito, pueden mostrarlo algunos ejemplos." Es dudoso lo que dice Frege antes del punto y coma, porque lo que hace es proporcionar una definición mediante lo que ahora denominamos una clase de equivalencia, cosa que en matemáticas no ha sido infrecuente, pese a que no se identificase así (ver Mancosu2016). Vayamos primero con la lectura de los ejemplos que pone Frege para luego recordar qué es una clase de equivalencia.

El ejemplo central que ofrece Frege, ya en la sección 64, es el de la definición de dirección de una recta mediante el paralelismo. Formalmente, el resultado de una definición es que el definiens (lo que define) y el definiendum (lo que hay que definir) quedan ligados de tal manera que si se sustituye uno por otro el valor de verdad de la proposición donde uno de ellos ocurre no se altera. Pero Frege resalta el aspecto epistemológico, podemos centrarnos en ir de lo conocido a lo desconocido que la distinción entre definiens y definiendum sugieren.

En el caso de la dirección de las rectas de la sección 64 Frege señala que lo que cualquiera que sepa un poco de geometría sabe es que para entender el predicado "tener la misma dirección que" debemos partir del predicado "ser paralela a". Lo segundo se sabe inmediatamente porque la geometría euclídea es intuitiva (se ve; recuérdese a Kant para un sentido más técnico).

El problema aquí es que Frege se demora, y nos enreda, en críticas sobre como se suelen plantear las cosas en la enseñanza de la geometría que a veces van en sentido contrario a lo dicho antes.

En cualquier caso, "tener la misma dirección que" (definiendum) para rectas se puede definir como "ser paralela a" (definiens). De igual modo, para los planos "tener la misma orientación que" se puede definir como "ser paralelo a". Y para los triángulos "tener la misma forma que" se puede definir como "ser semejante a". Y en todos esto casos, el segundo concepto (o predicado lógico) funciona como clave epistemológica del primero.

Como ya he anticipado, en el ejemplo de definición de la dirección de una recta en función del paralelismo, "ser paralelo a" es una relación de equivalencia que genera una clase de equivalencia (Steinhart2018).

Recordemos que una relación de equivalencia es aquella relación que tiene las propiedades de ser reflexiva, simétrica y transitiva:

Reflexiva $\forall x(xRx)$
Simétrica $\forall xy(xRy \to yRx)$
Transitiva $\forall xyz((xRy)\&(yRz) \to xRz)$

Y recordemos también, que hemos visto que la identidad es una relación de equivalencia:

Reflexiva $\forall x(x = x)$
Simétrica $\forall xy(x = y \to y = x)$
Transitiva $\forall xyz((x = y)\&(y = z) \to x = z)$

Las relaciones de equivalencia en un conjunto divide éste en clases de equivalencia. Dichas clases son particiones. Una partición P de un conjunto S es una división de S en subconjuntos no vacíos tales que cada miembro de S es un miembro de un solo subconjunto. Si P es una partición de S, entonces la unión de P es S. Por ejemplo, sea el conjunto {Sócrates, Platón, Kant, Hegel}. No es una partición {{Sócrates, Platón, Kant},

{Kant, Hegel}} porque el elemento Kant está en los dos subconjuntos. Sí es una una partición {{Sócrates, Platón}, {Kant, Hegel}}.

Decíamos que una relación de equivalencia divide un conjunto en clases de equivalencia. Por ejemplo, la relación "ser del mismo color que" puede usarse para dividir un conjunto C de cosas coloreadas en subconjuntos cuyos miembros son del mismo color.

Sea $C = \{R_1, R_2, A_1, A_2, A_3, V_1, N_1, N_2\}$

Los objetos R_1 y R_2 son enteramente rojos. Cada A es enteramente amarillo. V es enteramente verde y los N son enteramente negros. Los objetos R_1 y R_2 son de color equivalente y por tanto $\{R_1, R_2\}$ es una clase de equivalencia en C. Habría cuatro particiones en cuatro clases de equivalencia debido a la relación "ser del mismo color":

$\{\{R_1, R_2\}, \{A_1, A_2, A_3\}, \{V_1\}, \{N_1, N_2\}\}$

Así pues, una clase de equivalencia es un conjunto de cosas que son equivalentes de alguna manera. Son lo mismo de acuerdo con una relación de equivalencia. Y cada clase de equivalencia en un conjunto es disjunta a otra, esto es, su intersección da como resultado el conjunto vacío y su unión el conjunto original (en nuestro caso C).

Técnicamente, lo que hace Frege en su ejemplo sobre la dirección y el paralelismo de rectas en la sección 64 es identificar la dirección de una recta con la clase de equivalencia de paralelas. Lo segundo se ve, lo primero es una abstracción. Al final de la sección 65 (de la que ya hemos hablado más arriba), y siguiendo con el ejemplo del paralelismo de rectas, Frege explica cómo se puede justificar la definición del predicado "tener la misma dirección que" en términos de "ser paralela a". Para ello debería poderse demostrar que cuando una recta a es paralela a otra b (o sea, las rectas a y b son paralelas) se puede sustituir siempre "la dirección de a" por "la dirección de b" (y al contrario).

La dos secciones siguientes (66 y 67) plantean la objeción auténtica a la propuesta que Frege acepta pero que tal como ha sido propuesta por otros no le parece suficiente. Y la dificultad es nuestro conocido problema de Julio César. En la propuesta objeto de consideración, dice Frege, nadie se ha dado cuenta de que estamos suponiendo en todo momento que sabemos de qué cosas estamos hablando: rectas, planos, triángulos, números. Y lo que queremos saber es cómo identificar y re-identificar rectas, planos, triángulos, números. Obviamente, en geometría todo el mundo puede ver cuando estamos ante una recta, ante un plano, ante un triángulo. Pero con los números eso no es posible, no vemos los números.

(2c) Solución de la dificultad según Frege (secciones 68 y 69)
En la sección 68 Frege propone cómo solucionar la situación que se acaba de plantear. Y para ello recurre a la extensión de los conceptos (predicados lógicos). El predicado "ser paralela a" es poliádico, indica una relación o, si preferimos, para no perder de vista la terminología de Frege, es un concepto relacional. Como todo concepto tendrá una extensión: el de todas las rectas que guardan relación de paralelismo entre sí.

Evidentemente, a y b pueden ser dos rectas paralelas entre sí y no con c y d. La recta c puede ser paralela a f y la d a g. Por tanto, podemos afinar más nuestro concepto y no hablar de paralelismo en general sino de las rectas paralelas a a. La extensión del concepto (predicado lógico) "recta paralela a a" será idéntica a la extensión "recta paralela a b" si y solo si a y b son rectas paralelas. Pero entonces es obvio que lo siguiente es verdad: la dirección de la recta a es la extensión del concepto "ser paralela a la recta a"

Frege nos dice, que en lugar de rectas pensemos en conceptos (predicados lógicos) y en lugar de paralelismo pensemos en aplicación biyectiva y tendremos:

el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto "aplicación biyectiva con F"

o lo que es lo mismo

el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto "equinumérico (*gleichzahlig*) al concepto F.".

Varias cosas en las que hay que fijarse. En primer lugar, la palabra "equinumérico". "Gleichzahlig" es un neologismo cuya traducción al castellano ofrecida aquí es literal; puede comprenderse entonces, la insistencia de Frege en que olvidemos la sugerencia de su significado que nos hace la forma de componer el neologismo. Tal vez debería haber utilizado otra palabra para no confundir, dado que Frege se daba cuenta de que no era buena idea.

La segunda cosa relevante es que un número se identifica con la extensión de un concepto de nivel superior. En efecto, se trata de un concepto de conceptos y explícitamente hace referencia a su extensión. En la nota a la sección 68 (muy importante, como he señalado) afirma: "Presupongo que se sabe lo que es la extensión de un concepto." En efecto, no cabe duda que cualquier lógico sabe de qué se está hablando al hablar de la extensión de un concepto. Otra cosa es cuál es el concepto adecuado de extensión. Frege, con otros, lo abordará como colección. Frege no había desarrollado completamente su propia teoría pero se puede ilustrar perfectamente la equinumerosidad de Frege con el concepto la equipotencia o equipolencia de conjuntos. Esta propiedad viene dada cuando se puede realizar una aplicación biyectiva entre dos conjuntos.

Recordemos. Una aplicación biyectiva es aquella que establece una relación entre dos conjuntos de tal manera que en ambos conjuntos no hay ningún elemento sin relación con otro elemento del otro conjunto y que esa relación es siempre de uno a uno. Son emparejamientos del tipo comensal, tenedor, cuchara, cuchillo, servilleta, etc. en una mesa bien puesta y sin ausencias inesperadas. Luego lo expresaremos en términos más formales.

Tercer punto relevante. Frege dice en dicha nota que "en vez, de "extensión del concepto", podría decirse sencillamente "concepto"." El propio Frege señala que eso tiene objeciones pero "pueden ser eliminadas". De nuevo, el extensionalismo de Frege, aunque con un optimismo no justificado dado el posterior descubrimiento de la Paradoja de Russell.

Así pues, según la definición de Frege: un número es la extensión de un concepto, pero las palabras "extensión de un concepto" y "concepto" son intercambiables (según dice él en la nota de la sección 68). Pero entonces, ¿un número es un concepto? ¿Pero no había dicho Frege que un número es un particular abstracto? ¿No hay que distinguir siempre entre objeto y concepto? Por otra parte, ¿Una extensión es una especie de "conjunto"? ¿No había dedicado un montón de páginas a desacreditar que el número fuese una colección, agregado, conjunto, etc. ?

En primer lugar, recordemos que hay una acepción de "conjunto" y similares que está ligada a los libros aritméticos de Euclides; esa concepción ha sido descartada. Por otro lado, nuestros elementales conocimientos sobre Teoría de conjuntos pueden venir en nuestra ayuda para atisbar qué dice Frege. Frege está diciendo que los números naturales son los cardinales de un conjunto (tomaremos los conjuntos como representantes de las colecciones; recordemos lo dicho en nuestra sección 14). Damos un cardinal cuando nos preguntan ¿Cuántos objetos caen bajo un conjunto o un concepto? ¿Cuántos objetos caen bajo el concepto "ser presidente de la República española?" Respuesta 0 y 0 es lo que tienen en común todos los conceptos bajo los que nada cae, y todos esos conceptos forman la extensión a la que pertenece ese concepto. Una colección, un conjunto, viene determinado por sus elementos, pero forma una unidad. Digamos que los conjuntos tienen dos caras: son sus elementos y a la vez forman una unidad; de tal manera que un conjunto puede estar incluido en otro conjunto o pertenecer a ese otro conjunto.

Resumamos lo que hemos visto del segundo apartado del capítulo IV *Para obtener el concepto de número, hay que fijar el sentido de una ecuación numérica*, secciones 62-69 del libro. Dado que el número no se presenta a la percepción, hay que recurrir a las palabras y estas se presentan en oraciones. Además, dado que las otras alternativas tienen dificultades insalvables para Frege (ver el resumen de nuestra sección 9), recurre a la idea de los numerales entendidos como nombres propios que nombran particulares abstractos. Lo cual, a su vez, sugiere que las oraciones relevantes para su estudio son las que formulan el reconocimiento de algo previamente conocido: las ecuaciones numéricas o identidades de términos numéricos. Dicho de otra manera, las oraciones que nos dicen que dos colecciones tienen el mismo número de elementos. En estas oraciones, de lo que se trata es de encontrar una definición para la expresión "el número de cosas F". Eso nos proporciona un criterio para la igualdad de números y consecuentemente la manera de reconocer a cada número. De este modo, se le puede asignar un numeral entendido como nombre propio (sección 62).

La propuesta que Frege ve con buenos ojos es la de la aplicación biyectiva entre conceptos (sección 63), pero Frege piensa que la forma en que se ha implementado esa idea es insuficiente porque plantea el problema de Julio César (secciones 63-67). La propuesta de Frege es que la aplicación biyectiva entre conceptos debe entenderse como una relación que se da entre las extensiones de los conceptos (sección 68), y las extensiones son colecciones que actualmente conceptualizamos según diversas teorías de conjuntos. Frege desarrolló más adelante su propia teoría sobre el asunto, pero su desarrollo se topó con la Paradoja de Russell.

(3)Resumen y confirmación de nuestra definición **(secciones 70-83)**

Dividiremos el apartado de Frege en las siguientes partes:

(3a) Definición en términos de la lógica matemática de la equinumerosidad, en otras palabras, formulación en términos de lógica matemática de la biyección relevante (secciones 70-72).
(3b) Deducción del Principio de Hume a partir del concepto de equinumerosidad (sección 73).
(3c) Deducción de los Axiomas de Peano a partir del Principio de Hume (secciones 74-83).

(3a) Empecemos por cómo formaliza Frege la idea de aplicación biyectiva mediante la lógica matemática (secciones 70-72). La sección 70 hace un breve recordatorio de la formalización lógica de las relaciones, mientras la 71 formaliza la relación entre dos conceptos F y G; por su parte, la 72 formaliza una función (punto 1) biyectiva (punto 2) para el mismo caso. Vamos a formalizar la explicación que Frege da. Se ha mantenido el uso de las letras a, b, c, etc. como variables en vez de las habituales x, y, etc. para no perderse en el texto. Recordemos además, que una función (72.1) es una relación en la que todos y cada uno de los elementos del conjunto de partida (argumentos) tienen un correlato en el conjunto de llegada (valores). Finalmente, decir que el resultado se ha puesto en términos de proposición universal y no existencial (En la impresión que manejo aparece $\varnothing$ para representar la relación; se ha sustituido por Q para evitar confusiones).

$$(71)\forall a(Fa \rightarrow \exists b(Gb \& Qab)) \& \forall b(Gb \rightarrow \exists a(Fa \& Qab))$$

$$(72.1)\forall dae((Qda \& Qde) \rightarrow a = e)$$

$$(72.2)\forall dba((Qda \& Qba) \rightarrow d = b)$$

La conjunción de las tres fórmulas formaliza la definición de función biyectiva entre los conceptos F y G en lógica de predicados poliádicos. O sea, lo que Frege denomina "equinumerosidad" y podemos considerar más o menos análogo a la equipotencia o equipolencia de conjuntos. Pero con una precisión: en la formalización falta la cláusula "existe una relación Q". Frege está afirmando que tal relación existe.

Dicho punto es importante porque el origen de la paradoja de Russell, que se descubrió posteriormente, depende de que, como Frege, se supone equivocadamente que siempre podemos encontrar una extensión (una colección, un conjunto) para cualquier concepto que imaginemos. En lo que acabamos de decir, para cualquier par de conceptos, existirá siempre el concepto "relación biyectiva" entre ambos y esa posibilidad irrestricta de formar conceptos lleva a que se genere la Paradoja de Russell.

Recapitulemos lo dicho sobre las secciones 70 a 72. Frege propone:

1. Definición de igualdad del número de instancias para conceptos (equinumerosidad)

Dos conceptos se aplican al mismo número de instancias o el número de Fs es igual al número de Gs $\iff$ existe una función biyectiva entre las extensiones de F y $G \iff F$ y G son equinuméricos.

Una cuestión terminológica: este bicondicional se ha venido en denominar en la literatura "Principio de Hume", pues recuérdese que Frege lo introduce en la sección 63 citando a Hume.

2. Asignación de un número determinado a las instancias de un concepto:

F tiene n instancias $\equiv_{def}$ F tiene la extensión del concepto "equinumérico a F"

3. Definición de número

n es un número $\equiv_{def}$ existe un concepto F que tiene n instancias.

(3b) Deducción del Principio de Hume (sección 73)

Recordemos que, para Frege, el Principio de Hume debe ser deducido de premisas previas para evitar el problema de Julio César. Dicha deducción la aborda, en parte, en la sección 73. Y lo hace sólo en parte (ver su nota de la sección 73), porque la deducción completa exige su teoría de las extensiones, la cual no desarrollaría completamente hasta más tarde y luego se demostraría inconsistente por contener la paradoja de Russell (ver Zalta2022)

(3c) Deducción de los Axiomas de Peano a partir del Principio de Hume (secciones 74-83): el Teorema de Frege.

Si hablamos estrictamente, decir que Frege deduce los Axiomas de Peano en *Los fundamentos* es un anacronismo. Ya hemos visto el origen de los Axiomas de Peano, que reciben su nombre de quien les dio la forma habitual en la actualidad pero que tienen su origen en Dedekind. En el momento de publicarse *Los fundamentos*, Frege y Dedekind desconocían sus respectivas investigaciones. Y la fundamentación de la aritmética de Dedekind fue publicada posteriormente a *Los fundamentos*. Sin embargo, el aplastante consenso sobre dicha axiomatización en lo que se refiere a la aritmética y el hecho de que dichos axiomas o son identificables en el texto de Frege o se puede suponer que está implícitos, permite tal formulación del asunto. La deducción de Frege de los Axiomas de Peano a partir del Principio de Hume se ha venido en denominar "Teorema de Frege".

Conviene precisar también, que el Teorema de Frege es independiente de la deducción del propio Principio de Hume a partir de la teoría de las extensiones de Frege (que, insistimos, estaba todavía por formular completamente). Esto es, podemos tomar el Principio de Hume como una especie de axioma y deducir los Axiomas de Peano como si fueran teoremas que se deducen de él. La advertencia es importante porque ya hemos dicho que la teoría de las extensiones de Frege conduce a la paradoja de Russell. Sin embargo, el propio Principio de Hume no genera dicha paradoja y podría intentar deducirse de alguna otra teoría alternativa que habría que desarrollar. Por otra parte, tomar el Principio de Hume sin deducirlo de la teoría de las extensiones de Frege conlleva el problema de Julio Cesar. Por tanto, optar por cualquiera de las dos alternativas supone ciertas cargas en las que no entraremos ahora.

Una formulación cualquiera en matemáticas de los Axiomas de Peano es la siguiente:

A-1) Hay un elemento especial $0 \in N$.

A-2) Para todo $n \in N$ existe un único elemento $n' \in N$ llamado el sucesor de n.

A-3) Para todo $n \in N$, $n' \neq 0$.

A-4) Si $n \in N$ y $m \in N$ y $n' = m'$ entonces $n = m$.

A-5) Si

1. $0 \in S$,
2. Si para todo $n \in S$ entonces $n' \in S$,
   entonces
   $N \subseteq S$

Y se suelen precisar cosas como las siguientes. En la formulación de los Axiomas de Peano se supone de antemano la existencia del conjunto N. Los axiomas A-1 y A-3 se refieren al 0. El 0 pertenece al conjunto de los números naturales (A-1) y no es sucesor de ningún número natural (A-3). Los axiomas A-2 y A-4 perfilan la función sucesor. Cada número natural tiene uno y solo un sucesor (A-2). El axioma A-4 indica que números naturales diferentes tienen sucesores diferentes (no hay circularidad en la serie de los números). Por su parte, el axioma A-5 se conoce como el Principio de Inducción Matemática. (No viene mal recordar que, en las demostraciones que usan este principio, el antecedente $n \in S$ a partir de la cual hay que deducir el consecuente $n' \in S$ para obtener el condicional 2, se denomina hipótesis inductiva). Finalmente, existen modelos isomorfos no intencionados del conjunto de axiomas de Peano (que Frege plantea en sus términos con el problema de Julio César).

Antes de ver cómo el propio Frege plasma el posteriormente denominado Teorema de Frege es preciso hacer una serie de consideraciones:

(I) Adviértase que dado que Frege no usa el lenguaje de la Teoría de conjuntos que se puede observar en las actuales formulaciones de los Axiomas de Peano análogas a la anterior, deberemos hacer modificaciones en la formulación que, fundamentalmente, conllevan que se cuantifique no sobre conjuntos sino sobre conceptos (predicados lógicos). Además, dada su deducción a partir del Principio de Hume, el orden de presentación es distinto, dado que, por ejemplo, A-2 depende de A-4 y A-5 para su deducción. Por otra parte, A-1 nunca es citado explícitamente por Frege pero es igualmente deducible en el momento que Frege habla de la serie natural de los números que comienza con 0. Este es el orden que sigue Frege en su deducción a partir del Principio de Hume y una formulación más acorde con su terminología, si bien hacen falta más precisiones que irán viéndose:

(A-3) 0 no es el sucesor de ningún número natural.
(A-4) Ningún par de números naturales tiene el mismo sucesor.
(A-5) Si ocurre que
(a) 0 cae bajo F y
(b) si para cualesquiera par de números naturales n y m tales que m es el sucesor de n entonces (si n cae bajo F entonces m cae bajo F),
entonces
todos y cada uno de los números naturales caen bajo F.
(A-2) Todo número natural tiene un (único) sucesor.

(II) Frege no expone la deducción completa sino que bosqueja su estructura y demuestra algunos puntos, todo lo cual ha sido completado por distintos autores (ver Zalta2022).

(III) La traducción inglesa y castellana traducen la frase "in der natürliche Zahlenreihe" respectivamente "in the series of natural numbers" y "en la serie de los números naturales". Pero se ha señalado que la traducción inglesa correcta sería "in the natural series of numbers" y, consiguientemente, la española debería ser "en la serie natural de los números" (ver Smiley1988 citado por Heck2011). Es obvio que esos números son los números naturales, pero Frege no los llama "números naturales" sino "números finitos" (ver el final de la sección 83) hasta la sección 92.

(IV) Igualmente, llamar la atención de que las letras minúsculas son siempre variables de individuo y las mayúsculas variables de concepto; en otros términos variables de predicado (monádico) o relación (predicado poliádico). Cuando las variables son a, b, c, d, m, n, o, estas son variables de números naturales. Y hay variables que son libres tanto en individuos como en predicados y relaciones. Pero Frege no sale de la formulación semiformal y no formaliza sus resultados. No obstante, como ya se ha señalado antes, conviene usar la formalización, al menos en cierto grado, para no perder de vista muchos aspectos relevantes para entender lo que hace Frege y que sus formulaciones verbales dejan implícitos.

Deducción de los Axiomas de Peano (I)

Comencemos con la estructura argumentativa de las secciones 74 a 78 (Zalta2022).

Sección 74. *Definición de 0*
En términos formales, Frege dice lo siguiente:

$$0 \equiv_{def} \#[\lambda x \quad x \neq x]$$

El símbolo "#[...]" significa el número que corresponde al concepto que se describe entre los corchetes; dicho concepto (en este caso $x \neq x$, pero puede ser muy complejo, formado por más predicados y cuantificadores y otros operadores y términos) está precedido por un operador λ para formar términos, de tal manera que las variables que lo suceden están libres en la fórmula que sigue y que así expresa el predicado complejo.

En este caso puede leerse: 0 es el número de los x tales que caen bajo el (λ) concepto de no ser idénticos a sí mismos.

Sección 75. *Demostración* de que $\#F = 0 \leftrightarrow \forall x \neg Fx$
Recordemos que "#F" significa el número que corresponde a F.

Sección 76. *Definición de sucesor*: n sigue inmediatamente a m, esto es, n es sucesor de m, Snm.

$Snm \equiv_{def} \exists F \exists x(Fx \wedge \#F = n \wedge \#[\lambda y \quad Fy \wedge y \neq x] = m)$

Frege usa también la relación equivalente Pmn (m precede inmediatamente a n) porque dicho predicado permite poner al 0 como primer elemento al definir qué es un número natural (en la sección 83); eso conlleva intercambiar la x y las y para mantener la coherencia:

$Pmn \equiv_{def} \exists F \exists y(Fy \wedge \#F = n \wedge \#[\lambda x \quad Fx \wedge x \neq y] = m)$

Sección 77. Existe el sucesor de 0 (el 1).

Sección 78, números 1 a 4. Sobre el 1.

Sección 78, número 5. Aparece un primer Axioma de Peano, **A-4**: ningún par de números naturales tienen el mismo sucesor. Tal como lo formula Frege: la relación sucesor es una relación biyectiva (en realidad es todavía más estricta, pues es una función biyectiva).

Se puede formalizar lo que dice Frege así:

$\forall mno((Som \wedge Som) \rightarrow n = m)$

$\forall mno((Pmo \wedge Pno) \rightarrow m = n)$

Frege no esboza ninguna demostración.

Sección 78, número 6. Aparece un segundo axioma de Peano, el **A-3**, pues de lo que dice Frege se sigue que 0 no es el sucesor de ningún número natural.

Podemos formalizarlo:
$\neg \exists x Px0$

Frege no proporciona ningún esbozo de demostración.

Hasta aquí, lo que dice Frege permite presentar como deducibles a partir del Principio de Hume los axiomas **A-3 y A-4**. En la sección 82, Frege esbozará como se realizaría la deducción, a partir del Principio de Hume, de **A-2**, y preparará el terreno en las secciones

79 a 81. Para todo ello conviene dar un largo rodeo que nos permita explicar lo que hará Frege en términos de las matemáticas actuales en la sección 79.

Cierre y ancestral de una relación

Más arriba hemos mencionado tres propiedades importantes de las relaciones: reflexividad, simetría y transitividad. A veces puede ser conveniente transformar una relación dada en una relación que tenga una o más de dichas propiedades. Para transformar una relación R en una relación con una propiedad P, realizamos el cierre P de R, que también se denomina clausura P de R. Por ejemplo, para transformar una relación R en otra que es reflexiva, realizamos el cierre reflexivo de $R4. En sentido amplio, cerrar una relación es una forma de extender la relación (Steinhart2018).

Dado que las relaciones de equivalencia son útiles, a veces queremos transformar una relación dada en una relación de equivalencia. Como ya sabemos para que una relación sea de equivalencia debe ser reflexiva, simétrica y transitiva. Por tanto, para transformar una relación en una relación de equivalencia hay que obtener sus cierres reflexivo, simétrico y transitivo.

Cierre reflexivo. Supongamos que queremos transformar la relación "ser más alto que" en una relación reflexiva. Una forma sería transformarla en "ser más alto que o ser tan alto como". Ya que en una relación R que sea reflexiva en un conjunto X contiene todos los pares de la forma (x, x) para todo x perteneciente a X, podemos hacer la relación R reflexiva añadiendo esos pares. Cuando hacemos R reflexiva, obtenemos una nueva relación llamada cierre reflexivo de R

el cierre reflexivo de $R = R \cup \{(x, x) \mid x \in X\}$"

Se lee: el cierre reflexivo de R es la unión de R con el conjunto de los pares (x, x) tales que x pertenece a X.

Por ejemplo, supongamos que tenemos el conjunto formado por las personas {Carlos, Basilio, Alberto} y que Carlos es más alto que Basilio y Basilio más alto que Alberto. Tenemos así la relación no reflexiva:

"ser más alto que" $= \{(Carlos, Basilio), (Basilio, Alberto)\}$

Esta situación se puede transformar en una nueva relación reflexiva "ser más alto que o ser tan alto como" añadiendo pares de la forma (x, x) para cualquier x de nuestro conjunto de personas. Esto tiene sentido porque se puede considerar que cada uno es igual de alto que sí mismo. Tenemos entonces el cierre reflexivo

"ser más alto que o ser tan alto como"
$= \{(Carlos, Basilio), (Basilio, Alberto), (Carlos, Carlos), (Basilio, Basilio), (Alberto, Alberto)\}$

Cierre Simétrico. Un ejemplo de transformación de una relación no simétrica en una simétrica es cuando transformamos la relación "ser marido de" en "estar casado con".

Transformamos una relación R en simétrica añadiendo (x, y) a R si y solo si (y, x) ya se encuentra en R. Obtenemos así el cierre simétrico de R.

el cierre simétrico de $R = R \cup \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$

Se lee: el cierre simétrico de R es la unión de R con el conjunto de los pares (y, x) tales que (x, y) pertenecen a R.

Ya que $\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ es la inversa de R, que se denota R^{-1}, se sigue que

el cierre simétrico de $R = R \cup R^{-1}$

Por ejemplo, supongamos que tenemos un conjunto de personas {Alberto, Berta, Carlos, Diana}. En este conjunto, Alberto es el marido de Berta y Carlos es el marido de Diana. Tenemos la relación no simétrica

"ser el marido de" $= \{(Alberto, Berta), (Carlos, Diana)\}$

Transformamos esta relación en una nueva relación simétrica "estar casado con" tomando los pares de la relación "ser el marido de" y añadiendo los pares de la forma (esposa y, esposo x) para cada par de la forma (esposo x, esposa y) de la relación "ser marido de". Tenemos entonces el cierre simétrico

"estar casado con" $= \{(Alberto, Berta), (Carlos, Diana), (Berta, Alberto), (Diana, Carlos)\}$

Cierre transitivo o ancestral de una relación. La obtención de una relación transitiva a partir de una que no lo es, resulta más complicada que las anteriores. Vamos a usar la relación "ser antepasado de", la relación de ascendencia, como cierre transitivo de la relación de paternidad (masculina) P, para ilustrar la construcción de un cierre transitivo.

Los antepasados incluyen tanto los abuelos como los padres. La relación "ser abuelo de" es una repetición de la relación "ser padre de": un padre de un padre de y es un abuelo de y. Con más precisión podemos decir que x es el abuelo de y si y solo si existe un z tal que x es padre de z y z es padre de y.

En términos formales la repetición se formula mediante la composición de una relación consigo misma ($R \circ R$). Formalmente

$R \circ R = \{(x, y) \mid (\exists z(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R\}$

La relación "ser abuelo de" es una composición de la relación "ser padre de" consigo misma. O sea

"ser abuelo de" $= P \circ P$

Se puede extender este razonamiento a los bisabuelos: x es un bisabuelo de y si y solo si existe un z tal que x es padre de z y z es abuelo de y. "Ser bisabuelo" es la composición de la relación "ser padre" consigo misma dos veces:

"ser un bisabuelo"$= P \circ P \circ P \circ P$

Cuando componemos una relación repetidamente consigo misma, obtenemos lo que se denomina las "potencias" de una relación:

$R^1 = R$;
$R^2 = R \circ R = R^1 \circ R$;
$R^3 = R \circ R \circ R = R^2 \circ R$;
$R^{n+1} = R^n \circ R$.

En el caso de la relación de ascendencia tenemos:

"ser padre de" $= P^1$
"ser abuelo de" $= P^2$
"ser bisabuelo de" $= P^3$
"ser tatarabuelo de" $= P^4$
"ser tatara-tatarabuelo de" $= P^5$

Y así sucesivamente. Generalizando:

"ser antepasado hace n generaciones antes" $= P^n$

También podemos definir:

"ser antepasado de" $= P^1 \cup P^2 \cup P^3 ... \cup P^n ...$

La relación de ascendencia es el cierre transitivo de la relación de paternidad. Generalizando definimos el cierre transitivo R^* de una relación R:

$R^* = R^1 \cup R^2 \cup R^3 ... \cup R^n ...$

Como ya hemos visto una relación de equivalencia es reflexiva, simétrica y transitiva. Así que podemos trasformar una relación R en una relación de equivalencia construyendo sus cierres reflexivo, simétrico y transitivo. Se puede ordenar la construcción de los cierres de manera distinta y eso produce cierres diferentes.

El cierre transitivo también se denomina "ancestral" de una relación. El nombre proviene de los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead y fue definido por Frege en su *Conceptografía* (lo dice en la sección 79 de *Los fundamentos*).

Una característica interesante de los cierres transitivos, de los ancestrales, de una relación es que pueden definirse mediante definiciones recursivas. Este tipo de definiciones permiten definir una relación en términos de sí misma de manera lógicamente válida.

Veamos como funciona con la ascendencia humana masculina (A):

x es un antepasado de y

si y solo si

x es padre de y o existe un z tal que x es padre de z y z es antepasado de y. (Siempre el sentido de la "o" es inclusivo).

Como se puede ver, "ser antepasado de" está definida en términos de sí misma y esa iteración puede repetirse sin fin.

Considérese el caso de los abuelos:

Si x es abuelo de y, entonces existe un z tal que x es padre de z y z es padre de y.

El hecho de que z sea padre de y cumple el primer miembro de la disyunción (en A) que forma parte del *definiens* de la relación de ascendencia ("ser antepasado de"). En otras palabras, un padre es un antepasado. Por tanto, podemos reemplazar el hecho de que z es padre de y por el hecho de que z es un antepasado de y para obtener

x es padre de algún z y z es un antepasado de y.

Esto cumple el segundo miembro de la disyunción (en A) que forma parte del *definiens* de la relación de ascendencia. Por tanto,

x es un antepasado de y.

Considérese el caso de los bisabuelos. Tenemos

x es padre z y z es padre de w y w es padre de y;

x es padre de z y z es padre de w y w es antepasado de y;

x es padre de z y z es antepasado de y;

x es un antepasado de y.

La circularidad de las definiciones recursivas permite anidar el tipo de razonamiento anterior sin fin. Esta sería la forma general de una definición recursiva del ancestral de una relación:

R^*xy

si y solo si

Rxy o existe un z tal que Rxz y R^*zy.

Deducción de los Axiomas de Peano (II)

En la primera parte de este epígrafe, habíamos visto cómo Frege presentaba como demostrables **A-3** y **A-4** partiendo el Principio de Hume. Pasemos ahora al texto de Frege de las secciones 79 a 83 en las que se esboza la deducción de **A-2** a partir de dicho Principio.

Sección 79. *"Ser miembro de la serie natural de los números que termina con n"* (I)

Frege comienza con la formulación de la proposición que hay que deducir: no hay un último número natural, o lo que es equivalente, que a todo número natural n le sigue otro **(A-2)**. Una forma de hacerlo que Frege encontró exitosa es que para cualquier número natural n, el número de números menores o iguales que n es el sucesor de n. En términos semiformales el número que corresponde al concepto "el número que pertenece al concepto 'ser miembro de la serie natural de los números que termina con n'" sigue inmediatamente a n en la serie natural de los números (ver secciones 79, 82 y 83).

El primer paso para esa demostración es hacer un análisis lógico de "pertenecer a la serie natural de los números que termina con n". Esta tarea se realiza en las secciones 79 y 81, pues la sección 80 es un comentario que insiste en el carácter puramente lógico del análisis. Para ello Frege comienza con un concepto general de serie que concreta en lo que ahora denominamos "ancestral" de una relación.

Lo que dice Frege semi-formalizado en nuestros términos para una relación cualquiera Q sería así:

y sigue a x en la serie que la relación generada por Q

si y solo si

x precede a y en la serie que la relación generada por Q

si y solo si

$\forall F(\forall z(Qxz \rightarrow Fz) \wedge \forall d \forall s(Fd \wedge Qds \rightarrow Fs) \rightarrow Fy)$

donde, en el texto de Frege, "todo objeto con el que x está en relación Q" se sustituye por z y "todo objeto con el que d está en relación Q" se sustituye por s, variables ligadas por los respectivos cuantificadores.

La última expresión es la que formula el ancestral de la relación Q. Por tanto, en formalización actual:

$Q^*xy \equiv_{def} \forall F(\forall z(Qxz \rightarrow Fz) \wedge \forall d \forall s(Fd \wedge Qds \rightarrow Fs) \rightarrow Fy)$

En la sección 81 definirá lo que se denomina el ancestral débil. Si añadimos que el 0 cumple F, de todo ello se sigue **(A-5)**. Ver más abajo T-4.

Sección 80. Relaciones de orden

"la serie no debe imaginarse necesariamente bajo la forma de una ordenación espacial y temporal". La afirmación de Frege no es baladí lógicamente hablando, aunque Frege se centra más en el aspecto epistemológico de la posible subjetividad que tales recursos conllevan. Desde una cierta interpretación de Kant, Frege destaca que con su propuesta para expresar una serie no hace falta recurrir al espacio o el tiempo.

Todos podemos entender que si varias cosas se ponen una detrás de la otra, están ordenadas. Igualmente, si ocurren una después de la otra. En el primer caso, recurrimos al espacio, en el segundo al tiempo para ordenar cosas. Pero debido a los errores a que inducía, como ya hemos dicho, los matemáticos llevaban todo el siglo XIX intentado no recurrir a la visualización espacial para expresar los conceptos matemáticos del cálculo diferencial e integral.

La liberación de la visualización en este caso viene de la mano de las relaciones de orden que son aquellas que son reflexivas, anti-simétricas y transitivas. Las relaciones anti-simétricas son aquellas en las que si se da la propiedad simétrica entre dos elementos, ambos son el mismo. Pero Frege no acude a estas, como se ve en su apartado dedicado a los números infinitos (secciones 84-86).

Sección 81. *"Ser miembro de la serie natural de los números que termina con n"* (II)

Recordemos que en la sección 79, Frege define el ancestral de una relación. Si en esa definición, dice Frege, la serie que genera Q se toma como Snm, entonces esa serie la llamará la serie natural de los números. Recordemos que Frege alterna Snm con su equivalente Pmn.

El bautizo de Frege se puede entender si, como él sugiere, sustituimos Q por Snm y pensamos que estamos trabajando con los números naturales. Entonces la diferencia entre S y S * *es la diferencia entre "suceder inmediatamente" y "ser mayor que". Para Pmn, P y P* * respectivamente "preceder inmediatamente" y "ser menor que".

Frege establece que tienen el mismo significado las proposiciones siguientes:

(i) y sigue a x en la serie generada por Q o $y = x$

(ii) y es un miembro de la serie generada por Q que empieza con x

(iii) x es un miembro de la serie generada por Q que termina con y

Dicho en términos actuales, lo que está haciendo Frege es definir lo que se denomina "ancestral débil" de una relación Q que se simboliza Q^+ . Y se define:

$Q^+xy \equiv_{def} (Q^*xy \vee x = y)$

Si, de nuevo, sustituimos Q por Snm, o sea, damos por hecho que tratamos con los números naturales, entonces S^+ es la relación "ser mayor o igual que". Para el caso de Pmn tenemos que P^+ es "ser menor o igual que".

Como hemos visto, Frege hace una precisión terminológica al principio de la sección: cuando la relación Q se instancia en la relación Snm (o su equivalente Pmn), esto es, cuando hablamos de números, entonces en vez de "serie-Q " se dirá "serie natural de los números." Por tanto, sustituyendo x por el número a e y por n en (iii) y haciendo el cambio del nombre de la serie tenemos lo que dice Frege:

a pertenece a la serie natural de los números que termina con n, si y solo si n sigue a a en la serie natural de los números o n es igual a.

Formalizado:

$S^{+}an \equiv_{def} (S^{*}an \vee a = n)$
$P^{+}na \equiv_{def} (P^{*}na \vee n = a)$

Recuérdese que con lo que Frege ha construido hasta aquí es posible deducir el Principio de inducción (**A-5**). Frege no lo hace explícito.

Sección 82 *"Ser miembro de la serie natural de los números que termina con n"* (III)

Se formula **A-2** y se esboza la deducción. Recordemos que A-2 establece que a todo número natural le sucede otro. Por tanto, A-2 dice que la serie de los números no tiene fin. Para esa prueba, Frege necesita de **A-5**, o sea el Principio de Inducción Matemática, como se comprueba al final de la sección.

Sección 83. *"Ser miembro de la serie natural de los números que empieza por 0"*

Frege desarrolla con más profundidad una parte del un esbozo de la deducción que ha hecho en la sección anterior. Recurre a una consecuencia de A-4 ("más arriba": sección 78, número 5) que Frege formula así: ningún objeto que pertenezca a la serie natural de los números que empieza por 0 puede seguirse a sí mismo.

Para deducir esa consecuencia Frege define

$Nn \equiv_{def} P^{+}0n$

donde N significa "ser número natural" o como Frege dice "ser número finito". Obsérvese que Frege deja de lado el predicado S para ceñirse a P, dado que así puede expresar el hecho de que 0 es el primer elemento de la serie (recuérdese el significado del ancestral débil para la serie de los números naturales).

Con esta definición, Frege puede expresar definitivamente en sus términos A-2:

$\forall x(Nx \rightarrow \exists y(Ny \wedge Pxy))$

Recuérdese que en todo momento la deducción de los axiomas de Peano se realiza solamente partiendo del Principio de Hume. El uso que hace de diversos conceptos y su introducción mediante definiciones no ofrecen problemas lógicos.

La lista de los Axiomas de Peano según su deducción sucesiva del Principio de Hume por Frege serían los siguientes:

---dado por supuesto por Frege
T1 (A-1) $N0$
0 es un número natural.

---explícitamente presentados por Frege:

T2 (A-3) $\neg\exists x(Nx \wedge Px0)$
0 no es el sucesor de ningún número natural (sección 78, número 5). No hay demostración.

T3 (A-4) $\forall mno(Nm \wedge Nn \wedge No \rightarrow (Pmo \wedge Pno) \rightarrow m = n))$
Ningún par de números naturales tiene el mismo sucesor (sección 78, número 6). No hay demostración.

T5 (A-2) $\forall x(Nx \rightarrow \exists y(Ny \wedge Pxy))$
Todo número natural tiene un (único) sucesor (secciones 82 y 83). Esboza la demostración.

---deducible en su sistema y usado como paso intermedio para A-2

T4 (A-5) $(F0 \wedge \forall nm(Nm \wedge Nn \wedge Pnm \rightarrow (Fn \rightarrow Fm))) \rightarrow \forall x(Nx \rightarrow Fx)$
Si ocurre que
(a) 0 cae bajo F y
(b) si para cualesquiera par de números naturales n y m tales que m es el sucesor de n entonces (si n caer bajo F entonces m cae bajo F),
entonces
todos y cada uno de los números naturales caen bajo F.

16-Números infinitos

El último apartado del capítulo IV trata de los números infinitos y está formado por las secciones 84, 85 y 86.

Como hemos visto, en línea con otros autores y con el padre de la Teoría de conjuntos, Georg Cantor, Frege presenta los números como los cardinales de conjuntos y el criterio para establecer la misma cardinalidad reside en la posibilidad de establecer una función biyectiva entre los conjuntos. La forma actual de simbolizar el cardinal que corresponde al conjunto de los números naturales es $\aleph_0$ que se lee alef sub cero (sección 85). Frege disiente en cuestión de nombres (sección 85), pues su punto de partida ha sido mantener el sentido habitual de número dentro de la definición matemática. Frege también señala diferencias con los conceptos involucrados en la definición de número (sección 86)

17-Crítica al formalismo

La conclusión comienza con las secciones 87 a 91 que no entran en ningún apartado y en las que reitera afirmaciones que ya conocemos y que ha hecho que estas secciones hayan sido traídas a colación anteriormente.

El resto de secciones (92-109) con las que termina la conclusión y el libro están bajo el apartado "Otros números". Las cuatro últimas hacen un resumen de la argumentación del libro. Las secciones de la 92 a la 105 le sirven a Frege para atacar el formalismo y de ello nos ocupamos ahora.

Lo primero que hay que señalar es que la palabra "formalismo" no se generó hasta mucho después de las diversas polémicas de Frege con lo que ahora llamamos formalismo. El término surgió con Hilbert, con quien Frege también tuvo una relevante polémica a raíz de la publicación por el primero de *Sobre los fundamentos de la geometría* (1899). Para lo que nos atañe, la polémica mostró que Frege no diferenciaba entre la vertiente sintáctica y semántica de los cálculos lógicos.

En *Los fundamentos* Frege personaliza el ataque al formalismo en Hermann Hankel (1839-1873), matemático alemán relevante en la época por motivos estrictamente matemáticos pero que también intentó desarrollar un programa de fundamentación de los diversos tipos de números y concretamente de los números naturales.

Es más frecuente que el estudio del ataque al formalismo de Frege se centre en lo que dijo Frege en *Las leyes básicas de la aritmética* contra los matemáticos Heinrich Eduard Heine (1821-1881) y Carl Johannes Thomae (1840-1921).

El tópico tiene importancia porque hay muchos puntos de vista en filosofía de las matemáticas posteriores a Frege que o son formalistas o muy cercanos o muy influenciados por él (ver Weir2022). Por ejemplo, Wittgenstein en el *Tractatus Logico-Philosophicus* (recordemos que Wittgenstein fue alumno de Frege), el Positivismo Lógico, especialmente en Carnap (también alumno de Frege) o el formalismo nominalista de Goodman y Quine. El estructuralismo también puede considerarse una especie de descendiente del formalismo hilbertiano (ver Bostock2009).

Normalmente, el formalismo de Hilbert se trata aparte porque la concepción tiene importantes peculiaridades y dio lugar a la metamatemática. Respecto a lo primero, encontramos la distinción entre una parte finitaria y otra infinitaria de las matemáticas. Un ejemplo de la parte finitaria de la matemática sería la aritmética o los lenguajes formales. Un ejemplo de la parte infinitaria sería el tratamiento del infinito en la Teoría de conjuntos.

Respecto a lo segundo, el origen hilbertiano de la metamatemática, Hilbert pensaba que la parte finitaria era, por así decir, epistemológicamente controlable y semánticamente podíamos conceder que podía hablarse de verdad y falsedad. El lenguaje de la parte infinitaria sería puramente instrumental. Si somos capaces de presentar lenguajes formales para esa parte infinitaria podremos determinar, por ejemplo, la no contradicción de nuestras teorías matemáticas. (Compárese con lo que dice Frege en las secciones 94 y 95.) Con ello estamos en el campo de metamatemática y metalógica que dio lugar al estudio de la consistencia, completitud, etc. de las teorías. El denominado "Programa de Hilbert" pretendía formalizar las teorías matemáticas y ofrecer pruebas de su consistencia a partir de las formalizaciones, pero no pudo llevarse a cabo en su versión original por los resultados de Gödel sobre incompletitud.

En cualquier caso, el rasgo formalista más importante es, en términos actuales, que en todo o en parte las matemáticas son un lenguaje formal por lo que para su estudio es suficiente basarse en las reglas de formación y transformación de las series de caracteres de los lenguajes formales. Aunque la terminología no siempre es constante, podemos recoger algunas definiciones que pueden ser útiles como guía en este campo.

Algunas definiciones sobre lenguajes formales

Un "lenguaje formal" L es un conjunto de series de caracteres, los cuales se toman de un conjunto de caracteres denominado alfabeto. Es posible otras articulaciones de caracteres; por ejemplo, Frege utilizaba alineamientos horizontales y verticales en su *Conceptografía*. Pero cualquier otra articulación de caracteres es matemáticamente reducible a las series.

Un lenguaje formal puede investigarse desde diversos puntos de vista. Una posibilidad es un dispositivo que reconocer las series del lenguaje. Ese dispositivos se denomina *autómata* (en sentido matemático, no mecánico).

También se puede estudiar mediante las *gramáticas formales*, las cuales describen cómo generar las series mediante reglas formales. Los lenguajes formales pueden clasificarse según la gramática que los genera. Por ejemplo, determinadas gramáticas sirven para los lenguajes de programación, mientras los lenguajes naturales exigen otras más complicadas.

Las gramáticas formales tienen el mismo poder expresivo que las funciones computables. La computación en una máquina de Turing puede simularse mediante gramáticas formales y la generación de series mediante las gramáticas formales se puede simular en una máquina de Turing.

Un *sistema formal* consta de un lenguaje formal L y una operación C, denominada "operación de consecuencia". En el sentido más general C transforma subconjuntos X de L en otros subconjuntos de L. C(X) es el conjunto de consecuencias de X.

Se denomina *sistema de inferencia* a un sistema formal que cumple la propiedad de Inclusión: un subconjunto X de L está incluido en (o es igual a) C(X))

Se denomina *sistema de clausura* al sistema de inferencia que cumple las propiedades: Idempotencia: C(C(X)) está incluida en (o es igual a) C(X) Monotonicidad: Si X está incluido en (o es igual a) Y entonces C(X) está incluida en (o es igual a) C(Y).

Se denomina *sistema deductivo* al sistema de clausura que cumple la propiedad de Compacidad: C(X) se pueden obtener de subconjuntos finitos de X

Los sistemas deductivos se pueden expresar mediante conjuntos de reglas. Esas reglas son equivalentes a las funciones computables (recordemos lo dicho sobre gramáticas formales). Mediante esas reglas se generan conjuntos ordenados de series de caracteres denominadas derivaciones. Cada serie de caracteres se denomina fórmula.

Se denomina *cálculo lógico* a un sistema deductivo en el que se establece una distinción entre distintas categorías de caracteres en el seno del alfabeto.

La crítica del formalismo en *Los fundamentos*

Como hemos dicho, la crítica del formalismo en *Los fundamentos* se encuentra en las secciones 92-105 y se centra en Hankel (Lawrence2021).

Frege no es muy fiable cuando cita a otros autores y aquí de nuevo tenemos un ejemplo. En cualquier caso, no vamos a extendernos en la filosofía de la matemática de Hankel. Decir solamente que rechaza a Kant pero, en la línea de la época, todavía se mueve el marco kantiano. Dicho brevemente, la propuesta de Hankel es que habría dos tipos de números, unos son particulares y otros conceptos. Y, como es de prever, para Frege, es precisamente esa distinción la que arruina la concepción de Hankel.

La objeción central de Frege está en cómo entender el contenido aritmético de términos como "2-3" (sección 95). La argumentación tiene dos partes. La primera (secciones 92-99) argumenta que mientras el formalista puede dar definiciones para los conceptos asociados con esos términos, no puede demostrar que existan los objetos correspondientes. Y si queremos proporcionar un programa de fundamentación de la aritmética, es necesaria dicha demostración. En segunda parte de la argumentación (secciones 100-105), Frege ofrece su solución, así como su extensión al resto de sistemas numéricos.

Frege considera que la principal crítica contra el formalismo de Hankel está en la existencia matemática: el formalismo, ilegítimamente, postula la existencia de los números en vez de demostrar su existencia (sección 96). Con ello, en primer lugar, el formalista va contra la práctica matemática en la que las cuestiones de existencia son habituales. Y, en segundo lugar, Frege insiste en que las cuestiones de existencia no pueden responderse mediante la consistencia.

En ello insiste con el ejemplo geométrico de la sección 94. Y lo extiende en la sección 95 a los números. Dentro del conjunto de los números naturales, la expresión "2-3" la podemos entender, podemos entender la noción que nos trasmite, pero para Frege, la clave matemática del asunto es si existe el objeto x, tal que x=2-3.

Como había señalado Frege en la nota a la sección 74, una cosa es el concepto de algo y otra es si bajo ese concepto cae algo. Y, claro está, para esto último hace falta el propio concepto. Pero además, si se quiere definir un objeto mediante un concepto, o sea, usar una descripción definida (el x tal que ...), hace falta demostrar dos cosas: que existe un objeto que cae bajo el concepto y que ese objeto es único. Así en la sección 97 reitera esto refiriéndose a los números complejos.

Conviene recordar que en la "Introducción", cuando al final Frege introduce el principio de distinción entre concepto y objeto, relaciona explícitamente dicho principio con su desacuerdo con "una teoría formal ampliamente difundida ...".

Recordemos que la argumentación de Frege tenía una segunda parte (secciones 100-105). Aquí se trata de cómo demostrar que hay un y solo un número para cada numeral. Para ello, de nuevo, utiliza los números complejos como ejemplo para su planteamiento (secciones 100-103).

En la sección 104, plantea la cuestión rotundamente: "¿De qué manera nos han de venir dadas las fracciones, los números irracionales y los números complejos? Si pedimos auxilio a la intuición, introducimos en la aritmética algo que le es ajeno; pero si sólo determinamos el concepto de tales números mediante ciertas características, si sólo exigimos que el número tenga ciertas propiedades, entonces nada nos garantiza que algún objeto caiga bajo el concepto y corresponda a nuestros requisitos y, sin embargo, es esto precisamente en lo que deben basarse las pruebas."

Este es el problema de Julio César en estado puro y ya conocemos la solución, fallida en parte, de Frege.

Bibliografía citada

Anderson, R. Lanier; 2015, *The Poverty of Conceptual Truth*, Oxford University Press.

Audi, Robert; 1995, *Diccionario Akal de Filosofía*, Akal.

Bell, John L.; 1999, *The Art of the Intelligible*, Springer.

Bostock, David; 2009, *Philosophy of Mathematics. An Introduction*, Wiley-Blackwell.

Dummett, Michael; 1991, *Frege. Philosophy of Mathematics*, Duckworth.

Descartes, R; 1642, *Meditaciones metafísicas*, traducción de Vidal Peña, Alfaguara 1977.

Díez, Carlos y Moulines, Ulises; 1999, *Fundamentos de filosofía de la ciencia*, Ariel.

Garrido, Manuel; 1983, *Lógica simbólica*, Tecnos.

Hintikka, J.; 1973, *Lógica, juegos del lenguaje e información*, Tecnos, 1976

Hume, D., 1739, *Tratado de la naturaleza humana*, traducción de Félix Duque, Tecnos. (Se cita según la edición SB)

Kant, I.; 1787, *Crítica de la razón pura*, traducción de Pedro Ribas, Alfaguara, 1983. (Se cita como es costumbre usando A y B).

Lawrence, Richard; 2021, "Frege, Hankel, and Formalism in the Foundations", *Journal for the History of Analytical Philosophy* 9 (11).

Mancosu, Paolo; 2016, *Abstraction and Infinity*, Oxford University Press.

Mill, J. S.; 1882, *A System of Logic*.

Mueller, I.; 1981, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, MIT Press.

Noonan, Harold and Ben Curtis, "Identity"; 2022, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2022 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), URL =

https://plato.stanford.edu/archives/fall2022/entries/identity/.

Potter, Michael; 2004. *Set Theory and its Philosophy*, Oxford University Press.

Russell, B. ; 1905, "On Denoting", *Mind*, New Series, Vol. 14, No. 56. (Oct., 1905), pp. 479-493. https://www.jstor.org/stable/2248381

Sanguineti, Juan José; 1982, Lógica, EUNSA, 2000.

Skorupski, John; 1989, *John Stuart Mill. The Arguments of the Philosphers*, Routledge, 2002.

Sluga, Hans D.; 1980, *Gottlob Frege. The Arguments of the Philosphers*, Routledge, 1999.

Smith, Peter; 2020, *Introduction to Formal Logic*, https://www.logicmatters.net/books/.

Steinhart, Eric; 2018, *More Precisely. The Math You Need to Do Philosophy (2nd ed.)*, Broadview Press.

Sutherland, D.; 2022, *Kant's Mathematical World*, Cambridge University Press.

Vega Reñón, Luis y Olmos Gómez, Paula; 2011, *Compendio de Lógica, Argumentación y Retórica*, Trotta.

Weir, Alan; 2022 "Formalism in the Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2022 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/formalism-mathematics/.

Zalta, Edward N.; 2022 "Frege's Theorem and Foundations for Arithmetic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2022 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/frege-theorem/.

Zalta, Edward N.; 2023, "Gottlob Frege", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2023 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), URL = https://plato.stanford.edu/archives/sum2023/entries/frege/.