مؤسس علم النيتروسوفيك

العالم فلورنتين سمارانداكه

مؤلف الكتاب

الدكتورة: ميسم أحمد جديد

النماذج الخطية النيتروسوفيكية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها

تأليف

الدكتورة: ميسم أحمد جديد

عضو هيئة تدريس – جامعة دمشق – كلية العلوم

2022-2023

النماذج الخطية النيتروسوفيكية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها

تأليف

الدكتورة: ميسو أحمد جديد

عضو هيئة تدريس –جامعة دمشق – كلية العلوم

2022-2023

مؤسس علم النيتروسوفيك

العالم الأمريكي فلورنتين سماراندكه

Florentin Smarandache

University of New Mexico ,Mathematics, Physics and Natural Sciences Division 705 Gurley Ave., Gallup, NM 87301, USA

smarand@unm.edu

- ولد العالم فلورنتين في العاشر من شهر ديسمبر عام 1954 في مدينة Balcesi_ رومانيا
- حاصل على Ph.D. في PostDocs،
- أستاذ فخري للرياضيات في جامعة نيو مكسيكو، الولايات المتحدة.
- حصل على درجة الماجستير في الرياضيات وعلوم الكمبيوتر من جامعة كرايوفا، رومانيا
- دكتوراه في الرياضيات من جامعة كيشينيف الحكومية
- ما بعد الدكتوراه في الرياضيات التطبيقية من جامعة أوكاياما للعلوم، اليابان، جامعة قوانغدونغ للتكنولوجيا، قوانغتشو، الصين.
- مؤسس النيوترسوفيا (تعميم الديالكتيك)، والمجموعة النيتروسوفيكية، المنطق والاحتمالات والإحصاء منذ عام 1995
- نشر مئات الأوراق البحثية والكتب عن الفيزياء النيوترسوفية، والفيزياء الفائقة للضوء والفيزياء اللحظية غير المادة، مفارقات الكم، النظرية النسبية المطلقة، الانزياح الأحمر والانزياح الأزرق بسبب متوسط التدرج ومعامل الانكسار بالإضافة إلى تأثير دوبلر، المفارقة، الفن الخارجي، العدلة كفرع جديد من الفلسفة، قانون تتضمن مجموعة متوسطة ومتعددة المساحات ومتعددة الهياكل ومجموعة HyperSoft، مجموعة TreeSoft، مجموعة IndetermSoft ومجموعة IndetermHyperSoft، SuperHyperGraph، الطوبولوجيا الفائقة الفائقة، الجبر الفائق الفائق، الدالة الفائقة الفائقة، النيتروسوفيكية

SuperHyperAlgebra، درجة الاعتماد والاستقلال بين مكونات نيوتروسوفية، مجموعة نيوتروسوفية مكررة، مجموعة نيوتروسوفية زائدة عن الحد، مجموعة بليثوجينية / منطق احتمالية / إحصائيات، بليثوجينيك رمزي الهياكل الجبرية، الهياكل النيوتروسوفية الثلاثية والمزدوجة، الرباعية الهياكل النيتروسوفيكية، امتداد الهياكل الجبرية إلى الجبر النيتروسوفيكي و مكافحة الجبر، الهندسة النيوترولوجية والهندسة المضادة، الطوبولوجيا النيوترولوجية و مكافحة الطوبولوجيا، الطوبولوجيا النيتروسوفيكية المكررة، والطوبولوجيا النيتروسوفيكية المكررة الطوبولوجيا ونظرية Dezert-Smarandache

- مراجع علمي للعديد من المجلات العالمية والعديد من الكتب
- شارك في العديد من المؤتمرات الدولية حول العالم من خلال الأوراق البحثية والمحاضرات
- أصدر العديد من الكتب الشعرية والدرامية وقصص الأطفال ، ترجمات ومقالات وروايات ، ومجموعات التراث الشعبي وذكريات السفر والألبومات الفنية.

http://fs.unm.edu/FlorentinSmarandache.htm

مؤلف الكتاب

ميسم أحمد جديد

Maissam Ahmad Jdid

Faculty of Science, Damascus University, Damascus, Syria.
maissam.jdid66@damascusuniversity.edu.sy
Correspondence: jdidmaisam@gmail.com

من مواليد دمشق في اليوم السابع والعشرون من شهر نيسان عام 1966

المنشأ: طرطوس – حصين البحر

الشهادة العلمية: دكتوراه (Ph. D) في النمذجة الرياضية من جامعة تفير الحكومية – روسيا

مكان العمل الحالي: عضو هيئة تدريس في جامعة دمشق - كلية العلوم – قسم الرياضيات منذ عام 2006

مكان عمل سابق: محاضرة سابقة في جامعة الشام الخاصة – كلية الهندسة المعلوماتية من 2015-2023م

محاضرة سابقة في جامعة انطاكية السورية الخاصة عام 2022-2023

كلية الهندسة المدنية – كلية الهندسة المعمارية

Honorary Membership

1- **Neutrosophic Science International Association –University of New Mexico, USA**
2- **International Association of Paradoxism - University of New Mexico, USA**

Editor-in-Chief

Journal Prospects for Applied Mathematics and Data Analysis, (ASPG), USA

https://americaspg.com/articlesvoulume/34
https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0003-4413-4783
https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57353028500
https://www.researchgate.net/profile/Maissam-Jdid
https://scholar.google.com/citations?user=-5pTuFcAAAAJ&hl=ar
https://www.facebook.com/profile.php?id=61551427142439&mibextid=9R9pXO
https://digitalrepository.unm.edu/do/search/?q=Jdid&start=0&context=8211305&facet=

بسم الله الرحمن الرحيم

«فَتَعَالَى اللَّهُ الْمَلِكُ الْحَقُّ وَلَا تَعْجَلْ بِالْقُرْآنِ مِن قَبْلِ أَن يُقْضَى إِلَيْكَ وَحْيُهُ وَقُل رَّبِّ زِدْنِي عِلْمًا»

(صدق الله العلي العظيم)

زملائي الأعزاء – زملائي الأكارم

إن البحث من أجل الأفضل هو مسار اهتمام الإنسان في كل الأزمنة، وفي سعينا لتقديم الأفضل ومواكبة التطور العلمي الكبير الذي يشهده عالمنا المعاصر نقدم لكم هذا العمل المتواضع بعنوان

(النماذج الخطية النيتروسوفيكية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها)

العلم هو الأساس في تدبير شؤون الحياة وفعاليات البشر وإن العيش بدون علم هو ضرب من التيه ونوع من الضياع، إن استخدام الأساليب العلمية يساعدنا على الإحاطة بأسس الاختيار واتخاذ القرارات وتبني الحلول الصائبة عندما تكثر الحلول وتتعدد الخيارات.

نقدم من خلال هذا العمل دراسة للنماذج الخطية باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك ، العلم الذي تم بناءه على أساس أنه لا يوجد حقيقة مطلقة لا يوجد بيانات مؤكدة ، لا يمكن حصر القضايا بالصواب والخطأ فقط هناك حالة ثالثة ما بين الخطأ والصواب حالة غير محددة غير معينة غير مؤكدة هي اللاتحديد ، أعطى علم النيتروسوفيك لكل قضية ثلاثة أبعاد هي (T, I, F) الصح بدرجات واللاتحديد بدرجات والخطأ بدرجات ، أسسه الفيلسوف والرياضي الأمريكي فلورنتين سمارانداكه في عام 1995 وجاء كتعميم للمنطق الضبابي الذي أسسه العالم لطفي زاده عام 1965 ، علم النيتروسوفيك علم جديد يدرس الأطياف المختلفة التي يمكن أن يتخيلها الانسان في قضية واحدة ، الأمر الذي يعطي وصف أكثر دقة لبيانات المسألة قيد الدراسة وبالتالي نتائج دقيقة لا تترك مجال للمصادفة تساعد على اتخاذ قرارات تناسب جميع الظروف التي تمر بها بيئة عمل المنظومة قيد الدراسة .في سعينا للبحث عن الأفضل نقدم في هذا الكتاب دراسة للنماذج الخطية وخوارزميات

لإيجاد الحل الأمثل لها باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك، نعلم أن أسلوب البرمجة الخطية هو أحد الأساليب الهامة لبحوث العمليات العلم الذي كان نتاجا" للتطور العلمي الكبير الذي يشهده عالمنا المعاصر ، تطلق تسمية بحوث العمليات على مجموعة الأساليب العلمية المستخدمة في تحليل المشكلات والبحث عن الحلول المثلى، علم أحرزت تطبيقاته نجاحا" واسعا" في مختلف مجالات الحياة ، إن الخاصية التي يتسم فيها هذا العلم هي استحداث نماذج وأدوات وتقنيات رياضية تملك القدرة على التعبير عن مفاهيم الكفاءة والندرة في نموذج رياضي محدد تحديداً جيداً بالنسبة لموقف معين، تملك القدرة على استخدام الأساليب العلمية لحل المعضلات المعقدة في إدارة أنظمة كبيرة في المصانع والمؤسسات والشركات وتساعد صناع القرار فيها على اتخاذ القرارات العلمية المثلى لسير العمل ،تمت معالج هذه المسائل وفق المنطق الكلاسيكي ولكن كان الحل المثالي قيمة محددة مناسبة للظروف التي تم جمع البيانات فيها ولا يراعي التغيرات التي يمكن أن تطرأ على بيئة العمل ومن أجل الحصول على نتائج أكثر دقة وتتمتع بهامش من الحرية نقدم في هذا الكتاب دراسة للنماذج الخطية النيتروسوفيكية وخوارزميات لإيجاد الحل الأمثل لها، والمقصود بالنماذج النيتروسوفيكية هي النماذج التي تكون البيانات فيها قيم نيتروسوفيكية، أي أمثال المتغيرات في تابع الهدف والتي تعبر عن ربح إذا كان النموذج نموذج تعظيم وتعبر عن تكلفة إذا كان النموذج نموذج تقليل والتي بدورها تتأثر بالظروف البيئية نأخذها بالشكل $Nc_j = c_j \ \pm \varepsilon_j$ حيث ε_{ij} هو اللاتحديد ويأخذ بأحد الأشكال $\varepsilon_j \in [\lambda_{j1}, \lambda_{j2}]$ أو $\varepsilon_j \in \{\lambda_{j1}, \lambda_{j2}\}$ أو غير ذلك وهو عبارة عن أي جوار للقيمة c_{ij} التي نحصل عليها أثناء جمع البيانات عن المسألة عندها تصبح مصفوفة التكلفة (أو الربح) $Nc_j = [c_j \ \pm \varepsilon_j]$ ، أيضا القيم الثابتة التي تمثل الطرف الأيمن للمترجحات القيود والتي تعبر عن الإمكانيات المتاحة من رؤوس أموال أو زمن أو مواد أولية أو غير ذلك وهي أيضا تتأثر بالظروف البيئية، نأخذها من الشكل $Nb_j = b_j + \delta_j$ حيث δ_j هو اللاتحديد على الكميات المطلوبة يمكن أن يأخذ بأحد الأشكال $\delta_j \in [\mu_{i1}, \mu_{i2}]$ أو $\delta_j \in \{\mu_{i1}, \mu_{i2}\}$، ونفس الوضع بالنسبة لأمثال المتحولات في القيود والتي تعبر عن الكميات المستهلكة من المواد

الأولية في عملية الإنتاج نأخذها من الشكل $Na_{ij} = a_{ij} + \gamma_{ij}$ حيث γ_{ij} هو اللاتحديد على الكميات اللازمة من المادة الأولية i لإنتاج الوحدة الواحدة من المنتج j يمكن أن يأخذ بأحد الأشكال $\gamma_{ij} \in [\varphi_{ij1}, \varphi_{ij2}]$ ، أو $\gamma_{ij} \in \{\varphi_{ij1}, \varphi_{ij2}\}$ ، الأمر الذي يساعدنا في الحصول على نتائج أكثر دقة وتعطي للشركات هامش من الحرية.

اشتمل هذا الكتاب على ثمان فصول:

الفصل الأول: دراسة جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية

الفصل الثاني: النماذج الخطية النيتروسوفيكية

الفصل الثالث: الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيكية

الفصل الرابع: خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيكية للإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

الفصل الخامس: خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيكية للإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

الفصل السادس: خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

الفصل السابع: النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيكية والخوارزمية المزدوجة

الفصل الثامن: بعض التطبيقات على النماذج الخطية النيتروسوفيكية

أتمنى من الله العلي القدير أن يحقق هذا العمل الفائدة المرجوة من إعداده

المؤلف

د. ميسم أحمد جديد

الفهرس

الصفحة	الموضوع
88	المقدمة.
88	6-1- خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية.
92	6-2- معالجة النموذج وجميع القيود من نوع مساويات.
96	6-3- معالجة النموذج القيود مختلطة.
99	الخاتمة.
100	**الفصل السابع: النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيكية والخوارزمية المزدوجة**
101	مقدمة.
102	7-1- النماذج المرافقة النيتروسوفيكية.
102	7-1-1- الشكل المصفوفي للنماذج المرافقة النيتروسوفيكية.
105	7-1-2 - إيجاد النماذج المرافقة النيتروسوفيكية باستخدام الجدول المزدوج.
107	7-1-3- بناء النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيكية باستخدام الجداول.
111	7-2- صياغة الخوارزمية المزدوجة النيتروسوفيكية.
112	7-2-1- خطوات خوارزمية السيمبلكس المزدوجة.
116	7-2-2- خوارزمية السيمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق.

الفصل الأول

دراسة جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية

المقدمة.

1-1- جمل المعادلات الخطية وفق المنطق الكلاسيكي.

1-2- جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية التي عدد المعادلات فيها يساوي m وعدد المتحولات يساوي n .

1-3- طريقة (جاردن -غوص) لحل جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية التي فيها $m = n$.

1-4- الحلول القاعدية لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية.

1-5- طريقة (جاردان- غوص) لحل جملة معادلات خطية نيتروسوفيكية فيها $m < n$:

1-6- الحلول القاعدية غير السالبة لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية.

1-7- طريقة السيمبلكس لإيجاد الحلول القاعدية غير السالبة لجملة معادلات خطية فيها $m < n$.

الخاتمة.

الفصل الأول

دراسة جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية

المقدمة:

من خلال سعينا لتقديم كل ما هو جديد ومواكبة التطور العلمي ونظراً للأهمية الكبيرة لأسلوب البرمجة الخطية كأحد أساليب بحوث العمليات وجدنا من الضروري إعادة صياغة جمل المعادلات الخطية وبعض طرق حلها باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك، لأن جميع الأبحاث والدارسات المقدمة باستخدام مفاهيم هذا العلم أعطت نتائج أكثر دقة بالمقارنة مع الدراسات المقدمة باستخدام المنطق الكلاسيكي.

1-1- جمل المعادلات الخطية وفق المنطق الكلاسيكي:

تعطى جمل المعادلات الخطية التي عدد المعادلات فيها يساوي m وعدد المتحولات فيها يساوي n وفق المنطق الكلاسيكي بالشكل العام الآتي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

وتكتب بالشكل المصفوفي الآتي:

$$A.X = B$$

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot\cdot \\ b_m \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

حيث a_{ij} و b_i أعداد حقيقة من أجل جميع قيم:

$$i = 1,2, \dots, m \text{ و } j = 1,2, \dots, n$$

وميزنا ثلاث حالات لجملة المعادلات الخطية:

الحالة الأولى: عدد المعادلات يساوي عدد المتحولات أي $m = n$

الحالة الثانية: عدد المعادلات أكبر من عدد المتحولات أي $m > n$

الحالة الثالثة: عدد المعادلات أقل من عدد المتحولات $m < n$

فيما يلي سنقوم بعرض جمل المعادلات الخطية باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك حيث سنأخذ الأعداد الحقيقة a_{ij} و b_i أعداد نيتروسوفيكية أي من الشكل Nb_i و Na_{ij}، قيم غير محددة تحديد تمام يمكن أن تكون أي جوار للأعداد الحقيقية a_{ij} و b_i تكتب بأحد الشكال الآتية:

$Na_{ij} = a_{ij} + \varepsilon_{ij}$ و $Nb_i = b_i + \mu_i$ حيث:

$\varepsilon_{ij} \in [\lambda_{1ij}, \lambda_{2ij}]$ أو $\varepsilon_{ij} \in \{\lambda_{1ij}, \lambda_{2ij}\}$ أو غيرها.

عندها تكتب جملة المعادلات الخطية النيتروسوفيكية بالشكل الآتي:

1-2- جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية التي عدد المعادلات فيها يساوي m وعدد المتحولات يساوي n :

الشكل العام:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + Na_{1\mathrm{n}}x_n = Nb_1$$
$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2\mathrm{n}}x_n = Nb_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Na_{\mathrm{mn}}x_1 + Na_{\mathrm{mn}}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_m = Nb_m$$

وبالشكل المصفوفي الآتي:

$$NA.\mathrm{X} = NB$$

حيث:

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} \dots Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} \dots Na_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} \dots Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \cdot\cdot \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \cdot\cdot \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix}$$

لإيجاد الحل العام لجملة المعادلات السابقة ندرسها حسب الحالات الثلاثة السابقة الذكر.

الحالة الأولى: عدد المعادلات يساوي عدد المتحولات أي $m = n$ نتكتب جملة المعادلات كما يلي:

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + Na_{1\mathrm{n}}x_n = Nb_1$$
$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2\mathrm{n}}x_n = Nb_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Na_{n1}x_1 + Na_{n2}x_2 + \cdots + Na_{nn}x_n = Nb_n$$

وبالشكل المصفوفي:

$$NA\,.X = NB$$

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} \dots Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} \ \dots Na_{2n} \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \dots \\ Na_{n1} & Na_{n2} \dots Na_{nn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ .. \\ Nb_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأمثال مصفوفة مربعة نحسب محددها $\Delta_N = |NA|$ وهنا نميز حالتين:

1- $\Delta_N = 0$ ينتج عن هذه الحالة حالتين:

a. إذا كان $\Delta_N = 0$ و $\Delta_{N_{x_j}} \neq 0$ حيث $\Delta_{N_{x_j}}$ هو المحدد الناتج من محدد مصفوفة الأمثال Δ_N بعد تبديل العمود الذي يحوي أمثال المجهول x_j بعمود الثوابت (القيم الموجودة في الطرف الثاني من المعادلات) عندئذ ليس للجملة حل.

b. إذا كان $\Delta_N = 0$ و $\Delta_{N_{x_j}} = 0$ هذا يعني أن جملة المعادلات غير مستقلة خطيا أي أن بعضها مرتبط خطيا ببعضها الأخر، لمعالجة هذه الحالة نقوم بحذف احدى المعادلتين المرتبطتين خطيا، بذلك ينخفض عدد المعادلات ويصبح m' حيث ان $m' = m - 1$ ويكون $m' < n$ وهي مطابقة للحالة الثانية التي سيتم معالجتها لاحقا

2- إذا كان $\Delta_N \neq 0$ أي أن جملة المعادلات مستقلة خطيا وللجملة حل وحيد، يمكن ايجاده بعدة طرق، ندرس في هذا البحث طريقة (جاردان -غوص) التي تعتبر الأساس لخوارزمية السيمبلكس المباشرة التي نستخدمها للحصول على الحل الأمثل للنماذج الخطية.

1-3- طريقة (جاردن -غوص) لحل جمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية التي فيها $m = n$:

لتوضيح الأساس الرياضي لهذه الطريقة نكتب المعادلات بالشكل المصفوفي الآتي:

$$\begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} \dots Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} \dots Na_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ Na_{n1} & Na_{n2} \dots Na_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ .. \\ Nb_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

أو بالشكل المختصر الآتي:

$$NA\,.X = NB \quad (2)$$

بما أن $\Delta_N = |NA| \neq 0$ هذا يعني أن للمصفوفة NA مقلوب هو NA^{-1} نضرب طرفي المعادلة (2) بـ NA^{-1} نجد:

$$NA^{-1}.(NA\,.X) = NA^{-1}.NB$$

وبالتالي نحصل على:

$$I.\mathrm{X} = NB'$$

والتي تكتب بالشكل المفصل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb'_1 \\ Nb'_2 \\ .. \\ Nb'_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

إن هذه العملية هي أساس طريقة (جاردن – غوص) لحل جملة من المعادلات الخطية، حتى نقوم بتحويل الشكل (1) إلى الشكل (2) نتبع الخطوات الآتية:

1- نعبر عن الشكل (1) بالجدول الآتي:

المعادلات \ المتحولات	x_1	x_2	....	x_n	NB
1	Na_{11}	Na_{12}	....	Na_{1n}	Nb_1
2	Na_{21}	Na_{22}	...	Na_{2n}	Nb_2
....	...	...	...	...	...
n	Na_{n1}	Na_{n2}	...	Na_{nn}	Nb_n

جدول رقم (1) جدول جملة المعادلات

2- نقوم بتحويل المصفوفة NA إلى مصفوفة الواحدية I وذلك بمعالجة أسطر الجدول بحيث نجعل جميع العناصر غير القطرية في جميع اسطره مساوية للصفر والقطرية مساوية للواحد.

عندما نريد حذف المتحول x_s من المعادلة t نتبع الخطوات الآتية:

a. نقسم جميع عناصر السطر t الذي نريد جعل أمثال x_s فيه مساوية للواحد على Na_{ts} (أمثال x_s) فتصبح أمثال x_s مساوية للواحد وتتغير الأمثال الأخرى.

b. نجعل جميع عناصر العمود الذي فيه x_s (عدا السطر t) مساوية للصفر.

c. نحسب بقية عناصر الجدول الجديد من العلاقتين الآتيتين:

$$\left.\begin{aligned} Na'_{ij} &= \left(Na_{ij} - Na_{is}\frac{Na_{tj}}{Na_{ts}}\right) = \frac{Na_{ij}Na_{ts} - Na_{is}Na_{tj}}{Na_{ts}} \\ Nb'_{i} &= \left(Nb_{i} - Na_{is}\frac{Nb_{t}}{Na_{ts}}\right) = \frac{Nb_{i}Na_{ts} - Na_{is}Nb_{t}}{Na_{ts}} \end{aligned}\right] \quad (4)$$

يسمى العنصر Na_{ts} بعنصر الارتكاز.

من المعالجة السابقة نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / المعادلات	Nx_1	Nx_2	....	Nx_n	NB'
1	1	0	....	0	Nb_1'
2	0	1	...	0	Nb_2'
....	...	...	...	...	...
n	0	0	...	1	Nb_n'

جدول رقم (2) جدول الحل النهائي

من خلال الجدول تكتب جملة المعادلات الخطية بالشكل المصفوفي الآتـي:

$$I.NX = NB'$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb_1' \\ Nb_2' \\ .. \\ Nb_n' \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} Nx_1 \\ Nx_2 \\ .. \\ Nx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb_1' \\ Nb_2' \\ .. \\ Nb_n' \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow Nx_1 = Nb_1' , Nx_2 = Nb_2' , \dots , Nx_n = Nb_n'$$

الحالة الثانية: عدد المعادلات أكبر من عدد المتحولات أي $m > n$:

في هذه الحالة نشكل من جملة المعادلات جملة جديدة عدد المعادلات فيها يساوي عدد المتحولات وذلك باستبعاد عدد من المعادلات قدره $m - n$ ثم نقوم بحل الجملة الجديد كما فعلنا في الحالة الأولى ونعوض الحل الناتج في المعادلات التي تم استبعادها للتأكد من أنها محققة.

الحالة الثالثة: عدد المتحولات أكبر من عدد المعادلات أي $m < n$:

في هذه الحالة نكون أمام جملة من المعادلات من الشكل الآتي:

$$\left.\begin{array}{c} Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + Na_{1\mathrm{m}}x_m + \cdots + Na_{1\mathrm{n}}x_n = Nb_1 \\ Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2\mathrm{m}}x_m + \cdots + Na_{2\mathrm{n}}x_n = Nb_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{\mathrm{mm}}x_m + \cdots + Na_{mn}x_n = Nb_m \end{array}\right] \quad (5)$$

الذي تكتب بالشكل المصفوفي الآتي:

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} \dots Na_{1m} \dots\dots Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} \dots Na_{2m} \dots\dots Na_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} \dots Na_{mm} \dots\dots Na_{mn} \end{bmatrix} NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \vdots \\ Nb_n \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

وبالشكل المختصر الآتي:

$$NA_{(m.n)}\,.X_{(n.1)} = NB_{(m.1)} \quad (6)$$

1− نقوم بتجزئة المصفوفة $NA_{(m.n)}$ إلى مصفوفتين:

a. مصفوفة مربعة من المرتبة $(m.m)$ ونرمز لها بـ $NC_{(m.m)}$.

b. ومصفوفة مستطيلة من المرتبة $(m.n-m)$ ونرمز لها $ND_{(m.n-m)}$

2− نجزئ مصفوفة العمود $X_{(n.1)}$ إلى مصفوفتين $X'_{(m.1)}$ و $X''_{(n-m.1)}$.

عندها تكتب جملة المعادلات (5) بالشكل المصفوفي الآتي:

$$\left[NC_{(m.m)}, ND_{(m.n-m)}\right].\begin{bmatrix} X'_{(m.1)} \\ X''_{(n-m.1)} \end{bmatrix} = NB_{(m.1)} \quad (7)$$

$$NC_{(m.m)}.X'_{(m.1)} + ND_{(m.n-m)}.X''_{(n-m.1)} = NB_{(m.1)}$$

ومنها نجد أن:

$$NC_{(m.m)}.X'_{(m.1)} = NB_{(m.1)} - ND_{(m.n-m)}.X''_{(n-m.1)} \quad (8)$$

بفرض أن $|NC| \neq 0$ نضرب الطرفين في العلاقة (8) بـ NC^{-1} نجد:

$$NC^{-1}.NC.X' = NC^{-1}.(NB - ND.X^{"})$$

$$I.X' = NC^{-1}.NB - NC^{-1}.ND.X^{"}) \quad (9)$$

بفرض أن $NC^{-1}.NB = NB'$ وأن $NC^{-1}.ND = ND'_{(m.n-m)}$ نجد أن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Nb'_1 \\ Nb'_2 \\ .. \\ Nb'_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Nd'_{11} & Nd'_{12} \dots Nd'_{1(n-m)} \\ Nd'_{21} & Nd'_{22} \dots Nd'_{1(n-m)} \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \dots \\ Nd'_{m1} & Nd'_{m2} \dots Nd'_{m(n-m)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

وتحول إلى جملة معادلات خطية كما يلي:

$$Nx_1 = Nb'_1 - (Nd'_{11}x_{m+1} + Nd'_{12}x_{m+2} + \dots + Nd'_{1(n-m)}x_n)$$

$$Nx_2 = Nb'_2 - (Nd'_{21}x_{m+1} + Nd'_{22}x_{m+2} + \dots + Nd'_{2(n-m)}x_n)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$Nx_m = Nb'_m - (Nd'_{m1}x_{m+1} + Nd'_{m2}x_{m+2} + \dots + Nd'_{m(n-m)}x_n)$$

هـذا يعنـي أننـا تمكّنـا مـن حسـاب m متحـولاً وهـي $x_1, x_2, \dots, x_m$ بدلالـة $(n-m)$ متحولاً هي $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$.

ونلاحظ أن قيم المتحـولات $x_1, x_2, \dots, x_m$ تتعلـق بـالقيم التـي تأخـذه المتحـولات $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ أو بتعبيـــر أخـــر الـــذي نعطيهـــا للمتحـــولات وأنـــه مقابـــل كـــل جملـــة مـــن القـــيم مثـــل $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_n$ لهـذه المتحـولات نحصـل علـى جملـة لقـيم المتحـولات $x_1, x_2, \dots, x_m$ هي:

$$Nx_1 = Nb'_1 - (Nd'_{11}\beta_{m+1} + Nd'_{12}\beta_{m+2} + \cdots + Nd'_{1(n-m)}\beta_n)$$
$$Nx_2 = Nb'_2 - (Nd'_{21}\beta_{m+1} + Nd'_{22}\beta_{m+2} + \cdots + Nd'_{2(n-m)}\beta_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Nx_m = Nb'_m - (Nd'_{m1}\beta_{m+1} + Nd'_{m2}\beta_{m+2} + \cdots + Nd'_{m(n-m)}\beta_n)$$

وبالتالي نحصل على حل يشمل جميع متحولات الجملة (5)

وهو الحل المرتب كمايلي:

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_n)$$

ولكن بما أن المتحولات $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ يمكن أن تأخذ عدداً لا نهائياً من القيم الكيفية (وحتى ان كانت مقيدة بشروط معينة) فإننا نحصل على عدد لا نهائي من القيم المقابلة لها للمتحولات $x_1, x_2, \dots, x_m$.

وبالتالي فاذا كان $|NC| \neq 0$ فان لجملة المعادلات (5) عدد لانهائي من الحلول المقبولة من الشكل:

$$(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$$

وبالتالي نحصل على حل يشمل جميع متحولات الجملة هو الحل المرتب:

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_n)$$

1-4- الحلول القاعدية لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية:

بما أن للجملة (5) عدد لانهائي من الحلول المقبولة فإننا سنحاول الاقتصار على عدد محدود منها وذلك بوضع المتحولات $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ مساوية للصفر عندها تأخذ الجملة (9) الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb'_1 \\ Nb'_2 \\ \cdot\cdot \\ Nb'_m \end{bmatrix} \qquad (11)$$

ومنه نحصل على:

$$x_1 = Nb'_1 \quad , x_2 = Nb'_2 \ , \ldots , x_m = Nb'_m$$

وبالتالي يكون الحل الكامل:

$$(Nb'_1, Nb'_2, \ldots , Nb'_m, 0,0, \ldots ,0)$$

نسمي هذا الحل بالحل القاعدي لآنه نسب إلى القاعدة ذات المتجهات العمودية الأحادية في الفضاء R^m الآتية:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot\cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot\cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \ldots \quad e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot\cdot \\ m \end{bmatrix}$$

إن جملت المتجهات $e_1, e_2, \ldots , e_m$ ، تشكل قاعدة لأنها مستقلة خطيا ويمكن التعبير عن المتجه NB'بدلالتها باستخدام المضاريب $x_1, x_2, \ldots , x_m$ كما يلي:

$$NB' = e_1x_1 + e_2x_2 + \cdots + e_mx_m$$

ندعو المتحولات $x_1, x_2, \ldots , x_m$ بالمتحولات الأساسية أو المتحولات القاعدية وندعو المتحولات الأخرى $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots , x_n$ بالمتحولات الحرة أو غير القاعدية لأنها تأخذ قيم كيفية.

إن عملية اختيار المتحولات $x_1, x_2, \ldots , x_m$ لتكون متحولات قاعدية هي عملية عشوائية، حيث أنه نستطيع تشكيل حلول قاعدية أخرى، مع العلم أن الإمكانيات المتاحة للحصول على حلول قاعدية هي:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

وهو عدد محدود من الحلول المقبولة اللانهائية.

مثال1:

أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين الخطيتين الآتيتين:

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 2x_4 = [2,5]$$
$$3x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = [3,7]$$
$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = [4,8]$$

في جملة المعادلات عدد المتحولات $n = 4$ وعدد المعادلات $m = 3$ وبالتالي فإن عدد المتحولات القاعدية يساوي 3 وعدد المتحولات الحرة غير القاعدية $n - m = 1$ ، عدد الحلول الممكنة يحسب من العلاقة:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

أي

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$$

تكتب بالشكل الآتي:

$$(x_1, x_2, x_3, 0) \quad , (x_1, x_2, 0, x_4) \, , (x_1, 0, x_3, x_4), (0, x_2, x_3, x_4)$$

للحصول على هذه الحلول نكتب جملة المعادلات بالشكل الآتي:

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = [2,5] - 2x_4$$
$$3x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = [3,7] - x_4$$
$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = [4,8] - 4x_4$$

تكتب الجملة السابقة بالشكل المصفوفي الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2,5] \\ [3,7] \\ [4,8] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} . [x_4] \quad (*)$$

$$C=\begin{bmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{bmatrix}\quad X'=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\quad NB=\begin{bmatrix}[2,5]\\ [3,7]\\ [4,8]\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}\quad X''=[x_4]$$

نحسب المحدد $|C|$ نجد:

$$|C|=\begin{vmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{vmatrix}=-3\neq 0$$

لإيجاد الحلول نقوم بإيجاد مقلوب المصفوفة $C=\begin{bmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{bmatrix}$ نجد:

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-7}{3}&2&\frac{-1}{3}\\ \frac{5}{3}&-1&\frac{-1}{3}\\ -2&1&1\end{bmatrix}$$

نعوض في العلاقة:

$$NC^{-1}.NC.X'=NC^{-1}.(NB-ND.X'')$$

نجد:

$$\begin{bmatrix}\frac{-7}{3}&2&\frac{-1}{3}\\ \frac{5}{3}&-1&\frac{-1}{3}\\ -2&1&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{-7}{3}&2&\frac{-1}{3}\\ \frac{5}{3}&-1&\frac{-1}{3}\\ -2&1&1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}[2,5]\\ [3,7]\\ [4,8]\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}.[x_4]\right)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Nx_1\\Nx_2\\Nx_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{-7}{3}&2&\frac{-1}{3}\\\frac{5}{3}&-1&\frac{-1}{3}\\-2&1&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}[2,5]\\[3,7]\\[4,8]\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{-7}{3}&2&\frac{-1}{3}\\\frac{5}{3}&-1&\frac{-1}{3}\\-2&1&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}.[x_4]$$

وتحول الى جملة المعادلات الآتية:

$$Nx_1=\begin{bmatrix}\left[0,\frac{-1}{3}\right]\\-\left[1,\frac{4}{3}\right]\\ [3,5]\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{-16}{3}\\1\\1\end{bmatrix}.[x_4]$$

نضع المتحول الحر x_4 مساويا للصفر نحصل على:

$$Nx_1=\begin{bmatrix}\left[0,\frac{-1}{3}\right]\\-\left[1,\frac{4}{3}\right]\\ [3,5]\end{bmatrix}$$

ومنه:

$$x_1=\left[0,\frac{-1}{3}\right],x_2=-\left[1,\frac{4}{3}\right],x_3=[3,5]$$

وبذلك نحصل على الحل القاعدي النيتروسوفيكي الأول وهو:

$$(x_1,x_2,x_3,0)=\left(\left[0,\frac{-1}{3}\right],-\left[1,\frac{4}{3}\right],[3,5],0\right)$$

وبنفس الطريقة نحصل على الحلول القاعدية الأخرى.

الحلول القاعدية المنحلة:

يكون الحل القاعدي حل منحل وغير سليم إذا حصلنا في النتيجة النهائية على قيمة الصفر للمتحولات التي اخترناها كقاعدة.

1-5- طريقة (جاردان- غوص) لحل جملة معادلات خطية نيتروسوفيكية فيها $m < n$:

انطلاقا من المبادئ الرياضية السابقة تكون الخطوات الأساسية لطريقة (جاردان- غوص) كما يلي:

1- نكتب جملة المعادلات (5) بالشكل المصفوفي الآتي:

$$I.X' + NC^{-1}.D.X'' = NC^{-1}.NB = NB'$$

$$[I\ ,NC^{-1}.ND]\,.\begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} = NB' \qquad (12)$$

والتي تكتب بالشكل المفصل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\ldots 0 & Nd'_{11} & Nd'_{12}\ldots Nd'_{1(n-m)} \\ 0 & 1 & 0\ldots 0 & Nd'_{21} & Nd'_{22}\ldots Nd'_{1(n-m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots 1 & Nd'_{m1} & Nd'_{m2}\ldots Nd'_{m(n-m)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Nb'_1 \\ Nb'_2 \\ \ldots \\ Nb'_m \end{bmatrix} \qquad (13)$$

ويتم الانتقال من الشكل (5) الى الشكل (12) باتباع نفس الخطوات التي ذكرناها في الفقرة السابقة، ولكن هذه الطريقة لا تعطينا حلا قاعديا الا إذا وضعنا جميع المتحولات الحرة مساوية للصفر، وإذا قمنا بذلك نحصل فقط على الحل الأول وللحصول على جميع الحلول نقوم بالخطوات الآتية:

a. نضع أمثال المعادلات في جدول كمايلي:

المعادلات \ المتحولات	x_1	x_2	....	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	....	x_n	NB
1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1m}	a_{1m+1}	a_{1m+2}	....	a_{1n}	Nb'_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	a_{2m+1}	a_{2m+2}	....	a_{2n}	Nb'_2
....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mm}	a_{mm+1}	a_{mm+2}	...	a_{mn}	Nb'_m

جدول رقم (3) الجدول الأول لطريقة (جاردان –غوص)

b. نقوم بإيجاد المصفوفة الأحادية $I_{m\times m}$ عن طريق معالجة أسطر الجدول السابق بنفس الطريقة التي تم شرحها بالفقرة السابقة ويتم ذلك بتحديد المتحولات التي ستدخل الى القاعدة ولتكن $x_1, x_2, \dots, x_m$ ونتيجة لهذه المعالجة نحصل على الجدول الآتي:

المعادلات \ المتحولات	x_1	x_2	....	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	....	x_n	NB'
1	1	0	....	0	Nd'_{11}	Nd'_{12}	....	Nd'_{1n-m}	Nb'_1
2	0	1	...	0	Nd'_{21}	Nd'_{22}	....	Nd'_{2n-m}	Nb'_2
....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	0	0	...	1	Nd'_{m1}	Nd'_{22}	...	Nd'_{mn-m}	Nb'_2

جدول رقم (4) جدول الحل القاعدي الأول

c. نضع جميع المتحولات الحرة في الجدول (4) مساوية للصفر نحصل على الحل القاعدي الأول الآتي:

$$(Nb'_1, Nb'_2, \dots, Nb'_m, 0,0, \dots ,0)$$

d. للحصول على حل قاعدي ثاني نقوم باستبدال أحد المتحولات القاعدية وليكن مثلا x_m بأحد المتحولات غير القاعدية x_{m+1} ، وذلك بتحديد عنصر الارتكاز المناسب وهنا هو Nq'_{m1} نعمل على حذف x_{m+1} من جميع المعادلات ماعدا المعادلة m حيث نجعل أمثاله في هذه المعادلة مساوية للواحد، نقوم بإجراء الحسابات المناسبة من خلال العلاقتين (4) نحل على الحل القاعدي الثاني الآتي:

$$(Nb'_1, Nb'_2, \dots, Nb'_{m-1}, 0, Nb'_{m+1}, 0, \dots, 0)$$

للحصول على حلول قاعدية أخرى نكرر ما ورد بالخطوة (d).

1-6- الحلول القاعدية غير السالبة لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية:

إذا كانت جميع المتحولات أو بعضها مشروطة بأن تكون غير سالبة فإن بعض الحلول القاعدية يكون غير مقبول لأنه يخالف الشرط في مثل هذه الحالة علينا أن نبحث عن الحلول القاعدية الموجبة من ضمن الحلول القاعدية

نظرا لصعوبة تطبيق الطريقة الواردة في المثال وخاصة في الحالة التي تتضمن عدداً كبيراً من المتحولات تم تطوير طريقة جاردان غوص بحيث يتم الحصول مباشرة على الحلول الموجبة.

سميت الطريقة الجديدة طريقة السيمبلكس التي تتم وفق الخطوات الآتية:

7-1- طريقة السيمبلكس لإيجاد الحلول القاعدية غير السالبة لجملة معادلات خطية فيها $m < n$:

في جملة المعادلات (5)

1- نجعل جميع عناصر عمود الثوابت NB في الطرف الثاني من المعادلات غير سالبة، وذلك بضرب المعادلة التي طرفها الثاني سالب بـ (-1)

2- نضع المعاملات للجملة الجديدة بجدول

3- نقوم بتشكيل قاعدة مؤلفة من m متحولا وذلك باختيار المتحول الذي نريد إدخاله الى القاعدة وليكن مثلا x_s ثم نقوم بحساب المؤشر

$$\theta = Min\left[\frac{Nb_i}{Na_{is}}\right] = \frac{Nb_t}{Na_{ts}} > 0; \quad Na_{is} > 0, Nb_i > 0$$

ندعو العنصر Na_{ts} عنصر الارتكاز.

نقوم بحذف المتحول x_s من جميع المعادلات وفق طريقة (جاردان – غوص) ماعدا المعادلة t تصبح امثاله فيها تساوي الواحد.

نكرر الخطوة السابقة حتى نشكل قاعدة مؤلفة من m متحول.

4- نضع المتحولات غير القاعدية مساوية للصفر نحصل على الحل القاعدي غير السالب الآتي:

$$(Nb'_1, Nb'_2, \dots, Nb'_{m-1}, 0, Nb'_{m+1}, 0, \dots, 0)$$

5- للحصول على حلول قاعدية جديدة غير سالبة أخرى نقوم باختيار أحد المتحولات ليكون متحول قاعدي ثم نحدد عنصر الارتكاز ونكرر العمل الذي قمنا به من أجل المتحول السابق الذكر x_s نحصل على حل قاعدي غير

سالب جديد وهكذا نتابع العمل حتى نحصل على جميع الحلول القاعدية غير السالبة

6- معيار التوقف هو عندما لا نجد عمود من الاعمدة الحرة لم نستخدمه للتبديل يحوي عنصر موجبا (واحد على الأقل)، أي أن جميع عناصر الأعمدة الحرة التي لم يتم استخدامها اثناء التبديل قيم سالبة.

نوضح ما سبق من خلال المثال الآتي:

مثال2:

$$x_1 - 3x_4 + 2x_5 = -[1,3]$$
$$x_2 + 2x_4 - 3x_5 = [2,8]$$

نضرب المعادلة الأولى بـ (-1) حتى يتحقق الشرط $Nb_i > 0$ نحصل على الجملة الجديدة الآتية:

$$-x_1 - 3x_3 - 2x_5 = [1,3]$$
$$x_2 + 2x_4 - 3x_5 = [2,8]$$

في جملة المعادلات عدد المتحولات $n = 5$ وعدد المعادلات $m = 2$ وبالتالي فإن عدد المتحولات القاعدية يساوي 2 وعدد المتحولات الحرة غير القاعدية $n - m = 3$ ، عدد الحلول الممكنة يحسب من العلاقة:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

أي

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10$$

تكتب بالشكل الآتي:

$$(x_1, x_2, 0,0,0)\ , (x_1, 0, x_3, 0,0), (x_3, 0,0, x_4, 0), (x_1, 0,0,0, x_5),$$
$$(0, x_2, x_3, 0,0)\ (0, x_2, 0, x_4, 0), (0, x_2, 0,0, x_5), (0,0, x_3, x_4, 0),$$
$$(0,0, x_3, 0, x_5), (0,0,0, x_4, x_5)$$

للحصول على هذه الحلول ننظم الجدول الآتي:

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NB
1	-1	0	0	3	-2	$[1,3]$
2	0	1	0	2	-3	$[2,8]$

جدول رقم (5) الجدول الأول لطريقة السيمبلكس

لإيجاد حل قاعدي لجملة المعادلات نختار متحول مثلاً x_4 ليكون متحول قاعدي ولتحديد عنصر الارتكاز المناسب نحسب المؤشر θ

$$\theta = Min\left[\frac{Nb_i}{Na_{is}}\right] = Min\left[\frac{[1,3]}{3}, \frac{[2,8]}{2}\right] = \frac{[1,3]}{3}$$

أي أن عنصر الارتكاز هو $a_{14} = 3$ بإجراء الحسابات اللازمة لحذف المتحول x_4 من المعادلتين نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / المعادلات	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{NB'}$
x_4	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\left[\frac{1}{3}, 1\right]$
2	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{5}{3}$	$\left[\frac{4}{3}, 6\right]$

جدول رقم (6) الجدول الثاني لطريقة السيمبلكس

نختار متحولاً آخر ليكون متحول قاعدي نلاحظ أن المتحول x_2 جاهز ليكون متحول قاعدي وبالتالي نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / المعادلات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	NB'
x_4	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\left[\frac{1}{3},1\right]$
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{5}{3}$	$\left[\frac{4}{3},6\right]$

جدول رقم (7) جدول الحل النهائي

وبذلك حصلنا على قاعدة مؤلفة من المتحولين $x_2\,,x_4$ نضع المتحولات الحرة مساوية للصفر نحصل على الحل القاعدي النيتروسوفيكي غير السالب الآتي:

$$\left(0,\left[\frac{4}{3},6\right],0,\left[\frac{1}{3},1\right],0\right)$$

للحصول على الحلول الأخرى نكرر ما قمنا به لتعين الحل السابق.

الخاتمة:

كأساس للبرمجة الخطية النيتروسوفيكية قدمنا في هذا البحث دراسة لجمل المعادلات الخطية النيتروسوفيكية ، وطريقة جاردان –غوص التي تعتبر الأساس الرياضي لطريقة السيمبلكس المستخدمة لإيجاد الحلول القاعدية الموجبة والتي يمكن استخدامها عندما يكون هنا قيود على بعض المتحولات أو جميعها لتكون قيم موجبة والتي هي بدورها كان الساس لطريقة السيمبلكس المباشرة المستخدمة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية ، وتوصلنا من خلال المثل التي قمنا بعرضها على جمل معادلات نيتروسوفيكية إلى حلول قاعدية نيتروسوفيكية عبار عن قيم غير محددة، ويمكن استخدام هكذا جمل في الحالات التي تكون البيانات المقدمة للأنظمة التي تعمل وفق هذه الجمل من المعادلات معرضة للتغير وهنا يمكننا الاستفادة من هامش الحرية الذي تقدمه القيم النيتروسوفيكية.

الفصل الثاني

النماذج الخطية النيتروسوفيكية

الفصل الثاني

النماذج الخطية النيتروسوفيكية

مقدمة:

نقدم في هذا الفصل صيغ النماذج الرياضية الخطية النيتروسوفيكية، ونقصد بها النماذج الخطية التي تحوي في علاقتها الرياضية قيم نيتروسوفيكية سواء في علاقة تابع الهدف أو بعلاقات القيود، والتي تأخذ بعين الاعتبار جميع التغيرات التي يمكن أن تطرأ على ببيئة عمل المنظومة التي يمثلها النموذج، الأمر الذي يضمن للمنشأة سير عمل آمن، أي أننا سنقوم بأخذ أمثال المتغيرات في تابع الهدف قيم نيتروسوفيكية أي $Nc_j = c_j \pm \varepsilon_j$.

وأيضا القيم التي تعبر عن الإمكانيات المتاحة هي قيم نيتروسوفيكية أي $Nb_i = b_i \pm \delta_i$ و $Na_{ij} = a_{ij} \pm \mu_{ij}$ حيث $(j = 1,2, \dots, n\ , i = 1,2, \dots, m)$ قيم غير محددة تتمتع بهامش من الحرية وتأخذ بحسب طبيعة الحالة التي يمثلها النموذج الخطي، ثم نقوم بعرض الصيغ الأساسية للنماذج الخطية من خلال الدراسة الآتية:

2 – 1 – الصيغ الأساسية للنماذج الخطية النيتروسوفيكية:

يمكن تصنيف النماذج الخطية النيتروسوفيكية وفق الصيغ الآتية:

2 – 1 – 1 – الصيغة العامة للنموذج الخطي النيتروسوفيكي:

تعطى الصيغة العامة النيتروسوفيكية للنموذج الرياضي الخطي بالشكل المختصر كما يلي:

$$NZ = \sum_{j=1}^{n} (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \longrightarrow Max\ or\ Min$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} Na_{ij} x_j \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1,2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

حيث: $c_j \pm \varepsilon_j$ و $b_i \pm \delta_i$ و Na_{ij} حيث $(i = 1,2, \dots, m$ و $j = 1,2, \dots, n)$ ثوابت تعين قيمها بحسب طبيعة المسألة المعطاة و x_j متحولات القرار.

ويعطى بالشكل المفصل الآتي:

أوجد

$$NZ = Nc_1 x_1 + Nc_2 x_2 + \dots + Nc_n x_n \longrightarrow Max\ or\ Min$$

ضمن القيود

$$Na_{i1} x_1 + Na_{i2} x_2 + \dots + Na_{in} x_n \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} Nb_{\mathrm{i}} \quad i = 1,2, \dots, m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

كما أنه يمكن التعبير عن النماذج الخطية باستخدام المصفوفات وعليه يمكن كتابة النموذج الخطي النيتروسوفيكي الموضوع بالصيغة العامة باستخدام المصفوفات كما يلي:

أوجد

$$NZ = NC\,\mathrm{X} \longrightarrow (Max\ or\ Min)$$

ضمن القيود

$$NA\,\mathrm{X}\begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} NB$$

$$\mathrm{X} \geq 0$$

حيث

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} \dots Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} \dots Na_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ Na_{m1} & Na_{m2} \dots Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ .. \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ .. \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}$$

2 – 1 – 2 – الصيغة المعيارية للنموذج الخطي النيتروسوفيكي:

يكون النموذج الخطي النيتروسوفيكي موضوع بالصيغة المعيارية إذا كان تابع الهدف من نوع تعظيم والقيود من نوع أصغر من أو يساوي، عندها تعطى الصيغة المعيارية النيتروسوفيكية للنموذج الرياضي الخطي بالشكل المختصر كما يلي:

تعطى الصيغة المعيارية النيتروسوفيكية للنموذج الرياضي الخطي بالشكل المختصر كما يلي:

$$NZ = \sum_{j=1}^{n} (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \longrightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} Na_{ij}x_j \leq b_i \pm \delta_i \quad ; \; i = 1,2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

ويعطى بالشكل المفصل الآتي:

أوجد

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + \mathrm{N}a_{1n}x_n \leq Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n \leq Nb_2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n \leq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

كما أنه يمكن التعبير عن النماذج الخطية باستخدام المصفوفات وعليه يمكن كتابة النموذج الخطي النيتروسوفيكي الموضوع بالصيغة العامة باستخدام المصفوفات كما يلي:

أوجد

$$NZ = NC\,\mathrm{X} \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$NA\,\mathrm{X} \leq NB$$

$$\mathrm{X} \geq 0$$

حيث

$$NA=\begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} \dots Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} \dots Na_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} \dots Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB=\begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ .. \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC=\begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ .. \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad \mathrm{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}$$

2 – 1 – 3 – الصيغة القياسية النيتروسوفيكية للنموذج الخطي:

يلعب الشكل القياسي دوراً مهماً في إيجاد حل مسائل البرمجة الخطية، حيث تم تحويل قضية البحث عن حل مسألة البرمجة الخطية إلى عملية البحث عن حل جملة المعادلات الخطية المؤلفة من m معادلة بـ $n+m$ مجهول ، وحل هذه الجملة يكون مفيداً إذا كان ممكناً، أي إذا كان يحقق شروط عدم السلبية $x_j \geq 0$ ومن ثم فإن الحل الأمثل للنموذج الخطي هو القيم المثالية للمتغيرات التي تحقق القيود وتعطي لدالة الهدف أعظم أو أصغر قيمة ممكنة حسب نص المسألة قيد الحل ، تعطى الصيغة القياسية النيتروسوفيكية بالشكل المختصر الآتي:

$$NZ=\sum_{j=1}^{n}(c_j \pm \varepsilon_j)x_j \longrightarrow (Max \;\; or \; Min)$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} Na_{ij}x_j = b_i \pm \delta_i \quad ; \;\; i=1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0$$

ويعطى بالشكل المفصل الآتي:

أوجد

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n \longrightarrow (Max \;\; or \; Min)$$

ضمن القيود

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + \mathrm{N}a_{1n}x_n = Nb_1$$
$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n = Nb_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n = Nb_m$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

كما أنه يمكن التعبير عن النماذج الخطية باستخدام المصفوفات وعليه يمكن كتابة النموذج الخطي النيتروسوفيكي الموضوع بالصيغة العامة باستخدام المصفوفات كما يلي:

أوجد

$$NZ = NC\,\mathrm{X} \longrightarrow (Max \;\; or \; Min)$$

ضمن القيود

$$NA\,\mathrm{X} = NB$$
$$\mathrm{X} \geq 0$$

حيث

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} \dots Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} \dots Na_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} \dots Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \cdot\cdot \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \cdot\cdot \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

هنا نلاحظ أن جميع القيود من نوع مساواة ماعدا قيود عدم السلبية فإنها تبقى متراجحات، وأيضاً الطرف الأيمن من كل قيد مساواة يجب أن يكون غير سالب وجميع متحولات القرار غير سالبة وتابع الهدف في الشكل القياسي النيتروسوفيكي يمكن أن يكون تابع تعظيم أو تابع تقليل.

2 – 1 – 4 – الصيغة المتناظرة للنموذج الخطي النيتروسوفيكي:

نقول عن برنامج خطي أنه موضوع بالصيغة المتناظرة إذا كانت جميع المتحولات مقيدة بأن تكون غير سالبة وإذا أعطيت جميع القيود بشكل متراجحات (ويجب أن تكون متراجحات قيود مسألة التعظيم موضوعة بصيغة (≤ أقل من أو يساوي) في حين أن متراجحات قيود مسألة التقليل يجب أن تكون بصيغة (≥ أكبر من أو يساوي)، عندها نكتب الصيغة المتناظرة النيتروسوفيكية بأحد الشكلين الآتيين:

الشكل الأول:

تعطى الصيغة المتناظرة النيتروسوفيكية للنموذج الرياضي الخطي بالشكل المختصر كما يلي:

$$NZ = \sum_{j=1}^{n} (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \longrightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} Na_{ij} x_j \le b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1,2, \dots, m$$

$$x_j \ge 0$$

ويعطى بالشكل المفصل الآتي:

أوجد

$$NZ = Nc_1 x_1 + Nc_2 x_2 + \cdots + Nc_n x_n \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$Na_{11} x_1 + Na_{12} x_2 + \cdots + \mathrm{N}a_{1n} x_n \le Nb_1$$

$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n \leq Nb_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n \leq Nb_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

وباستخدام المصفوفات كما يلي:

أوجد

$$NZ = NC\,\mathrm{X} \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$NA\,\mathrm{X} \leq NB$$

$$\mathrm{X} \geq 0$$

حيث

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} \dots Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22}\ \dots Na_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} \dots Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \cdot\cdot \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \cdot\cdot \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

الشكل الثاني:

المختصر كما يلي:

تعطى الصيغة المتناظرة النيتروسوفيكية للنموذج الرياضي الخطي بالشكل المختصر كما يلي:

$$NZ = \sum_{j=1}^{n} (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \longrightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} Na_{ij}x_j \geq b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0$$

ويعطى بالشكل المفصل الآتي:

أوجد

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n \longrightarrow Min$$

ضمن القيود

$$\begin{gathered} Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + \mathrm{N}a_{1n}x_n \geq Nb_1 \\ Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n \geq Nb_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n \geq Nb_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{gathered}$$

وباستخدام المصفوفات كما يلي:

أوجد

$$NZ = NC\ \mathrm{X} \longrightarrow M\text{هى}$$

ضمن القيود

$$\begin{gathered} NA\ \mathrm{X} \geq NB \\ \mathrm{X} \geq 0 \end{gathered}$$

حيث

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} \dots Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} \dots Na_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} \dots Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ .. \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ .. \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}$$

2 – 2 – كيفية الانتقال من صيغة إلى أخرى:

بعد عرض صيغ النماذج الخطية النيتروسوفيكية تجدر الإشارة إلى أننا نستطيع الانتقال من صيغة إلى أخرى باتباع التحويلات الأولية الآتية:

- نحول القيمة الصغرى لتابع الهدف $f(x)$ إلى قيمة عظمى بأخذ $(-f(x))$ بدلا من $f(x)$
- إذا كانت المتراجحات من الشكل ($\geq$أكبر من أو يساوي) تحول إلى الشكل ($\leq$أصغر من أو يساوي) بضرب طرفيها بـ (-1)، وبالعكس.
- قيد المساواة يمكن تحويله إلى قيدي متراجحات مختلفتين في الاتجاه.
- إذا كان الطرف الأيسر من قيد (متراجحة) معطى بالقيمة المطلقة فإنه يمكن تحويله إلى متراجحتين نظاميتين.
- قيد المتراجحات من نوع ($\geq$ أكبر من أو يساوي) نحوله إلى قيد مساواة بطرح قيمة موجبة مناسبة من الطرف الأيسر للمتراجحة وندخل هذه القيمة إلى تابع الهدف بأمثال مساوية للصفر.
- قيد المتراجحات من نوع ($\leq$ أصغر من أو يساوي) نحوله إلى قيد مساواة بإضافة متحول موجب مناسب إلى الطرف الأيسر للمتراجحة وندخل هذا المتحول إلى تابع الهدف بأمثال مساوية للصفر.
- إذا كان أحد متحولات القرار غير مقيد بشرط عدم السلبية (أي يمكن أن يكون سالباً أو موجباً أو صفر) فإننا يمكن أن نعبر عنها بالفرق بين متحولين غير سالبين x' و x'' كما يلي $x' - x''$ حيث
- $x', x'' \geq 0$

2 – 3 – أمثلة على ما سبق:

النماذج الخطية في جميع الأمثلة معطاة بالشكل المفصل:

مثال 1:

لدينا النموذج الخطي المعطى بالصيغة العامة النيتروسوفيكية الآتية:

$$Min\ NL = (3 \pm \varepsilon_1)x_1 - (3 \pm \varepsilon_2)x_2 + (7 \pm \varepsilon_3)x_3$$

ضمن القيود:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 40 \pm \delta_1$$
$$x_1 + 9x_2 - 7x_3 \geq 50 \pm \delta_2$$
$$5x_1 + 3x_2 = 20 \pm \delta_3$$
$$|5x_2 + 8x_3| \leq 100 \pm \delta_4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

حيث ε_j هو اللاتحديد في أمثال المتغيرات بتابع الهدف التي تعبر عن تكلفة الوحدة الواحدة من المنتج وممكن أن يكون

$\varepsilon_j \in [\lambda_{1j}, \lambda_{2j}]$ أو $\varepsilon_j \in \{\lambda_{1j}, \lambda_{2j}\}$ حيث $j = 1,2,3$

حيث δ_i هو اللاتحديد على الكميات المتوفرة وممكن أن يكون $\delta_i \in [\mu_{1i}, \mu_{2i}]$

أو $\delta_i \in \{\mu_{1i}, \mu_{2i}\}$ حيث $i = 1,2,3,4$

لتحويل النموذج إلى الصيغة المعيارية النيتروسوفيكية نقوم بإجراء التحويلات الآتية:

- تابع الهدف هو تابع تقليل نحوله إلى تابع تعظيم $Min\ NL =$

$(3 \pm \varepsilon_1)x_1 - (3 \pm \varepsilon_2)x_2 + (7 \pm \varepsilon_3)x_3$ يكافئ $Max\ NZ =$

$$-(3 \pm \varepsilon_1)x_1 + (3 \pm \varepsilon_2)x_2 - (7 \pm \varepsilon_3)x_3$$

- القيد الثاني معطى (≥أكبر أو يساوي) نحوله إلى (≤ أصغر من أو يساوي) بضرب الطرفين بـ (-1) نحصل على:

$$-x_1 - 9x_2 + 7x_3 \leq -(50 \pm \delta_2)$$

- القيد الثالث $5x_1 + 3x_2 = 20 \pm \delta_3$ يكافئ القيدين

$$5x_1 + 3x_2 \leq 20 \pm \delta_3$$
$$5x_1 + 3x_2 \geq 20 \pm \delta_3$$

ثم نحول القيد $5x_1 + 3x_2 \geq 20 \pm \delta_3$ إلى $-5x_1 - 3x_2 \leq -(20 \pm \delta_3)$

- القيد $|5x_2 + 8x_3| \leq 100 \pm \delta_4$ يكافئ القيدين

$$5x_2 + 8x_3 \leq 100 \pm \delta_4$$
$$-5x_2 - 8x_3 \leq 100 \pm \delta_4$$

- المتحول x_3غير مقيد بقيد عدم السلبية نستعيض عنه بالمتحولين x_3', x_3'' حيث $x_3 = x_3' - x_3''$حيث $x_3', x_3'' \geq 0$

تصبح الصيغة المعيارية النيتروسوفيكية كما يلي:

$$Max\ NZ = -(3 \pm \varepsilon_1)x_1 + (3 \pm \varepsilon_2)x_2 - (7 \pm \varepsilon_3)(x_3' - x_3'')$$

ضمن القيود:

$$x_1 + x_2 + 3(x_3' - x_3'') \leq 40 \pm \delta_1$$
$$-x_1 - 9x_2 + 7(x_3' - x_3'') \leq -(50 \pm \delta_2)$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 20 \pm \delta_3$$
$$-5x_1 - 3x_2 \leq -(20 \pm \delta_3)$$
$$5x_2 + 8(x_3' - x_3'') \leq 100 \pm \delta_4$$
$$-5x_2 - 8(x_3' - x_3'') \leq 100 \pm \delta_4$$
$$x_1, x_2, x_3', x_3'' \geq 0$$

مثال 2:

يقوم مصنع بإنتاج أربعة أنواع من المنتجات $S_1, S_2,, S_3, S_4$ ويستخدم من أجل ذلك المواد الأولية الآتية M_1, M_2, M_3 .

ترغب إدارة المصنع في دراسة التنظيم الأمثل للإنتاج خلال فترة زمنية (شهر مثلاً) وتحديد الإنتاج الشهري لكل منتج من أجل تحقيق ربح أعظمي، علماً بأن الربح يتناسب طرداً مع عدد الوحدات المباعة من المنتجات. نوضح الكميات المتوفرة من المواد الأولية اللازمة لكل منتج والربح العائد بالجدول الآتي:

الكميات المتوفرة	نوع المنتج				المواد الأولية
	S_4	S_3	S_2	S_1	
$3000 \pm \delta_1$	1	2.4	1	1.5	M_1
$9000 \pm \delta_2$	3.5	1	5	1	M_2
$7000 \pm \delta_3$	1	3.5	3	1.5	M_3
	$6 \pm \varepsilon_4$	$5 \pm \varepsilon_3$	$8 \pm \varepsilon_2$	$4 \pm \varepsilon_1$	ربح واحدة المنتج

نفرض x_1 عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول x_2عدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني x_3 عدد الوحدات المنتجة من النوع الثالثx_4عدد الوحدات المنتجة من النوع الرابع خلال الفترة الإنتاجية (شهر مثلاً) وعليه تكون الكمية المستهلكة من المادة الأولية M_1 في إنتاج الأصناف الأربعة:

$$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4$$

ويجب ألا تتجاوز $3000 \pm \delta_1$ الكمية المتوفرة أي:

$$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 \leq 3000 \pm \delta_1 \qquad (1)$$

بالمثل تكون الكمية المستهلكة من المادة الأولية M_2 في إنتاج الأصناف الأربعة:

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 \leq 9000 \pm \delta_2 \qquad (2)$$

وتكون الكمية المستهلكة من المادة الأولية M_3 في إنتاج الأصناف الأربعة

$$1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 \le 7000 \pm \delta_3 \qquad (3)$$

بالإضافة إلى ذلك يجب أن تكون الكميات المنتجة غير سالبة أي:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \qquad (4)$$

وهي ما تسمى بقيود عدم السلبية.

بذلك نكون قد حددنا جميع القيود المفروضة على متحولات المسألة.

نحدد الآن تابع الهدف إذا تم إنتاج وحدات قدرها x_1, x_2, x_3, x_4 من الأنواع على الترتيب فإن الربح خلال الفترة الإنتاجية سوف يكون:

$$NZ = (4 \pm \varepsilon_1)x_1 + (8 \pm \varepsilon_2)x_2 + (5 \pm \varepsilon_3)x_3 + (6 \pm \varepsilon_4)x_4$$

وهو يمثل تابع الهدف.

وعليه يكون النموذج الرياضي للمسالة:

$$Max\ NZ = (4 \pm \varepsilon_1)x_1 + (8 \pm \varepsilon_2)x_2 + (5 \pm \varepsilon_3)x_3 + (6 \pm \varepsilon_4)x_4$$

ضمن القيود:

$$\begin{gathered} 1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 \le 3000 \pm \delta_1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 \le 9000 \pm \delta_2 \\ 1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 \le 7000 \pm \delta_3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{gathered}$$

حصلنا على نموذج خطي معياري نيتروسوفيكي باستخدام التحويلات المناسبة يمكن كتابته بالصيغة القياسية النيتروسوفيكية الآتية:

$$\begin{aligned} Max\ NZ = (4 \pm \varepsilon_1)x_1 + (8 \pm \varepsilon_2)x_2 + (5 \pm \varepsilon_3)x_3 + (6 \pm \varepsilon_3)x_4 + 0y_1 \\ + 0y_2 + 0y_3 \end{aligned}$$

ضمن القيود:

$$\begin{gathered} 1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 + y_1 = 3000 \pm \delta_1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 + y_2 = 9000 \pm \delta_2 \\ 1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 + y_3 = 7000 \pm \delta_3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{gathered}$$

الخاتمة:

إن اللاتحديد الذي قمنا بإضافته على البيانات التي يصفها النموذج الخطي يقدم لنا نماذج خطية نيتروسوفيكية تحاكي الواقع وتراعي معظم التغيرات التي يمكن أن تطرأ على بيئة عمل النظام الذي يمثله النموذج الرياضي الخطي، وتمكننا من متابعة دراسة مواضيع البرمجة الخطية مثل ايجاد البرامج المرافقة التي تحتاج إلى وضع النموذج الرياضي بالشكل المتناظر، وحل النماذج الخطية بطريقة السيمبلكس التي تحتاج إلى وضع النماذج بالشكل القياسي وغيرها من مواضيع البرمجة الخطية.

الفصل الثالث

الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيكية

المقدمة.

3-1- الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية.

3-2- الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيكية.

3-3- كيفية الاستفادة من شروط عدم السلبية لإيجاد الحل الأمثل لبعض النماذج الخطية النيتروسوفيكية باستخدام الطريقة البيانية.

الخاتمة.

الفصل الثالث

الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيكية

المقدمة:

بعد أن عرضنا النماذج الخطية والصيغ المختلفة لها باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك نقدم في هذا الفصل الطريقة البيانية النيتروسوفيكية والتي سنستخدمها لحل النماذج الخطية النيتروسوفيكية.

والطريقة البيانية هي عبارة عن رسم بياني للنموذج وتعد من أسهل طرق حل مشاكل البرمجة الخطية إلا أنها غير كافية لمعالجة جميع مسائل البرمجة الخطية لأن مسائل البرمجة الخطية في الغالب تحوي عدداً كبيراً من المتحولات وينحصر استخدام الطريقة البيانية في الحالات الآتية:

- عدد المجاهيل $n = 1$ أو $n = 2$ أو $n = 3$.
- في النماذج الخطية التي قيودها قيود مساويات إذا حقق عدد المجاهيل وعدد المعادلات أحد الشروط الآتية: $n - m = 1$ أو $n - m = 2$، أو $n - m = 3$.

هنا نستطيع تحويل النموذج إلى تابع لمتحول واحد أو متحولين أو ثلاث متحولات على الترتيب وذلك بالاستفادة من قيود عدم السلبية التي يتمتع بها متحولات النموذج الخطي، سنقدم في هذا البحث اعادة صياغة الطريقة البيانية لحل النماذج الخطية باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك وكذلك الطريقة البيانية لحل النماذج الخطية التي قيودها قيود مساويات والفرق بين عدد المجاهيل وعدد القيود يساوي واحد أو اثنان أو ثلاثة.

3-1- الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية:

يتم إيجاد الحل الأمثل بيانيا بإتباع الخطوات الآتية:

1- نحدد أنصاف المستويات المعرفة بمتراجحات القيود وذلك برسم المستقيمات الناتجة من تحويل متراجحات القيود إلى مساويات، يتم الرسم بتحديد نقطتين محققتين للقيد، ثم نصل بين النقطتين نحصل على المستقيم الموافق للقيد وهذا المستقيم يقسم المستوي إلى نصفين من أجل تحديد نصف المستوي المحقق للقيد، نختار نقطة لأعلى التعين من أحد نصفي المستويين، ونعوض إحداثيات هذه النقطة في المتراجحة فإذا كانت محققة تكون المنطقة التي تقع فيها هذه النقطة هي منطقة الحل أما إذا كانت غير محققة فتكون المنطقة المعاكسة هي منطقة الحل.

2- نحدد منطقة الحلول المشتركة وهي المنطقة الناتجة من تقاطع أنصاف المستويات المعرفة بمتراجحات القيود، يجب أن تكون هذه المنطقة غير خالية لكي نستطيع متابعة الحل.

3- من أجل تمثيل تابع الهدف نلاحظ أن علاقته تحوي ثلاثة مجاهيل هي $Z\ ,\ x_1\ , x_2$ لذلك يجب معرفة قيمة لـZ والتي هي مجهولة لدينا، هنا نفترض قيمة ما ولتكن $Z_1 = 0$ ونرسم معادلة تابع الهدف Z_1 ونعطي قيمة أخرى ولتكن Z_2 ونمثل المعادلة نحصل على مستقيم مواز للمستقيم الأول، وبالمتابعة نحصل على مجموعة من المستقيم المتوازية الممثلة لتابع الهدف.

4- نرسم الشعاع $\overrightarrow{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ حيث c_1 هي أمثال x_1 و c_2 هي أمثال x_2 في عبارة تابع الهدف وتكون جهة تزايده التابع هي اتجاه الشعاع $\vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ ، وجهة تناقصه هي عكس اتجاه هذا الشعاع، أي يتم السحب حسب نوع تابع الهدف (تعظيم أو تقليل) بتعبير أوضح نقوم بإيجاد نقطة الحل الأمثل وذلك بأن نسحب المستقيم الممثل لـZ_1 بشكل مواز لنفسه باتجاه الشعاع $\overrightarrow{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ لإيجاد القيمة العظمى لتابع الهدف، (وبعكس هذا الاتجاه لإيجاد القيمة الصغرى)، حتى يمر بآخر نقطة من نقاط منطقة الحلول المشتركة وتكون هذه النقطة هي نقطة الحل الأمثل، والتي تقع على حدود منطقة الحلول المشتركة وأي إزاحة أخرى مهما كانت صغيرة تخرجها منها.

3-2- الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيكية:

من تعريف النماذج الخطية النيتروسوفيكية نجد أننا نستطيع تطبيق نفس الخطوات السابقة للحصول على الحل الأمثل الذي هو قيمة نيتروسوفيكية مناسبة لجميع الظروف، نوضح ما سبق من خلال المثال الآتي:

مثال1:

تنتج شركة نوعين من المنتجات A_1 ,A_2 وتستخدم في عملية الإنتاج ثلاثة أنواع من المواد الأولية B_1 ,B_2 ,B_3 ، إذا كانت الكميات المتوفرة من كل مادة من المواد الأولية $B_i \,;\, i = 1,2,3$، والكمية اللازمة لإنتاج الوحدة الواحدة من كل

منـتج $j = 1,2\ ;\ A_j$، والـربح العائـد مـن الوحـدة الواحـدة مـن كـل منـتج مـن المنتجات A_2 ,A_1 موضح بالجدول الآتي:

المنتجات / المواد الأولية	A_1	A_2	الكميات المتوفرة
B_1	6	4	36
B_2	2	3	12
B_3	5	0	10
الربح العائد	[6,8]	[2,4]	

جدول رقم (1) بيانات المسألة

المطلوب:

تحديد الكميات التي يجب انتاجها من كل منتج من المنتجات $A_j\ ;\ j = 1,2$ بحيث تحقق الشركة ربح أعظمي:

الحل:

نفرض x_j هـي الكميـة المنتجـة مـن المنـتج j حيـث $j = 1,2$ عنـدها نسـتطيع صياغة النموذج الرياضي الخطي النيتروسوفيكي الآتي:

$$Z = [6,8]x_1 + [2,4]x_2 \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 36 \quad (1)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12 \quad (2)$$

$$5x_1 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

النموذج السابق هو نموذج خطي نيتروسوفيكي لأنه يوجد عدم تحديد في أمثال المتحولات بتابع الهدف لإيجاد الحل الأمثل للنموذج السابق سنستخدم الطريقة البيانية وفق الخطوات الآتية:

القيد الأول: نرسم المستقيم الممثل للقيد الأول:

$$6x_1 + 4x_2 = 36$$

نفرض: $x_1 = 0 \Rightarrow 4x_2 = 36 \Rightarrow x_2 = 9$

نحصل على النقطة الأولى: $A(0,9)$.

نفرض: $x_2 = 0 \Rightarrow 6x_1 = 36 \Rightarrow x_1 = 6$

نحصل على النقطة الثانية : $B(6,0)$

إذا أخذنا نقطة لا على التعيين من أحد نصفي المستوي الناتجين بعد رسم المستقيم المار بالنقطتين $A(0,9)$ و $B(6,0)$ ولتكن النقطة $O(0,0)$ وعوضناها في متراجحة القيد الأول نجد أن المتراجحة محققة أي أن نصف المستوي الذي تنتمي له النقطة $O(0,0)$ هو نصف مستوي الحل للمتراجحة القيد الأول.

نتابع بنفس الطريقة بالنسبة للقيدين الثاني والثالث نحصل على التمثيل البياني الآتي:

القيد الثاني:

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$

نفرض: $x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 4$

نحصل على النقطة الثالثة $C(0,4)$

نفرض: $x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = 6$

نحصل على النقطة الرابعة $D(6,0)$

ونحدد منطقة حل متراجحة القيد الثاني كما فعلنا في القيد الأول.

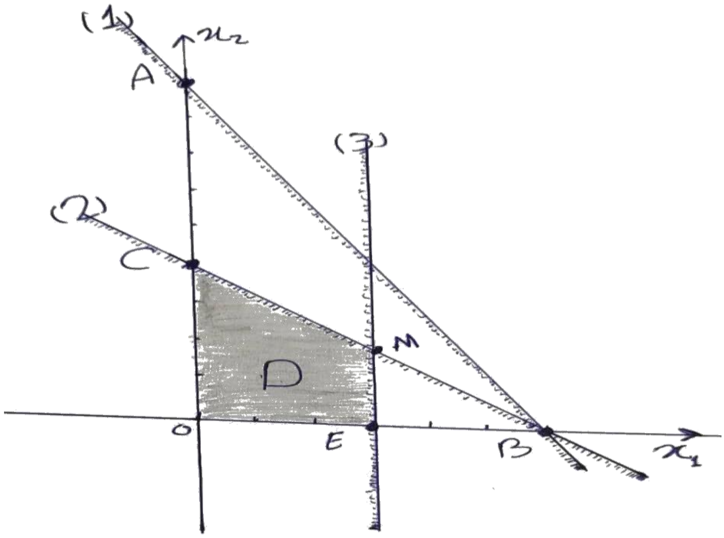
القيد الثالث:

$$5x_1 = 15 \Rightarrow x_1 = 3$$

نحصل على النقطة الخامسة $E(3,0)$

ونحدد منطقة حل متراجحة القيد الثالث كما فعلنا في القيد الأول.

الشكل رقم (1) هو التمثيل البياني المطلوب:



شكل رقم (1) التمثيل البياني لقيود النموذج الخطي في المثال 1

بعد تمثيل القيود نلاحظ أن منطقة الحل المشتركة محصورة بالمضلع الذي رؤوسه النقاط $O(0,0)$ و $E(3,0)$ و $M\left(؟,؟\right)$ و $C(0,4)$ النقطـة $M\left(؟,؟\right)$ هـي نقطـة تقاطع القيـدين الثـاني والثالـث نحصـل علـى إحداثياتها من خـلال حل جملـة المعادلتين الآتيتين:

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$
$$5x_1 = 15$$

نجد أن إحداثياتها $M(3,2)$

نعوض إحداثيات نقاط الرؤوس بعبارة تابع الهدف نجد:

$$Z_O = 0$$
$$Z_E \in [12,16]$$
$$Z_M \in [22,32]$$
$$Z_C \in [8,16]$$

أي أن أعظم قيم للتابع Z تتحقق عند النقطـة $M(3,2)$ ، أي يجب علـى الشركة أن تنتج ثـلاث وحدات مـن المنتج الأول ووحدتين مـن المنتج الثـاني عنـدها تحقق ربح أعظمي

$$Max\ Z = Z_M \in [22,32]$$

ملاحظة:

إن عمليـة التعـويض بتـابع الهدف بإحـداثيات نقـاط رؤوس منطقـة الحـل المشـتركة تكون ممكنـة عندما يكون عدد النقاط قليلاً حيث نتمكن بسـهولة من تعويضـها فـي تـابع الهدف والنقطـة التـي تعطـي أفضـل قيمـة لتـابع الهـدف تمثـل الحـل الأمثـل، أمـا

عندما يوجد عدد كبير من القيود نحصل على عدد كبير من النقاط الرأسية الواقعة على محيط منطقة الحل المشتركة. في هذه الحالة تصبح طريقة إيجاد إحداثيات كل هذه النقاط وتعويضها في تابع الهدف غير عملية، لذلك نلجأ إلى تمثيل تابع الهدف وتحديد نقطة الحل الأمثل كما ذكرنا سابقاً.

3-3- كيفية الاستفادة من شروط عدم السلبية لإيجاد الحل الأمثل لبعض النماذج الخطية النيتروسوفيكية باستخدام الطريقة البيانية:

مثال2:

أوجد الحل الأمثل للنموذج الخطي النيتروسوفيكي الآتي:

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + [2,5]x_5 - x_6 + 2x_7 - [10,15] \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 5 \qquad (1)$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -11 \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 - x_5 = -4 \qquad (3)$$

$$x_2 + x_6 = 6 \qquad (4)$$

$$2x_1 - 3x_2 - x_6 + 2x_7 = 8 \qquad (5)$$

قيود عدم السلبية:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

الحل:

نلاحظ أن عدد القيود $m = 5$ وعدد المتحولات $n = 7$ أي أن $n - m = 2$، إذا نستطيع بالاعتماد على قيود عدم السلبية ايجاد الحل الأمثل للنموذج السابق باستخدام الطريقة البيانية وفق الخطوات الآتية:

1-نقوم بحساب خمسة من المتحولات بدلالة متحولين اثنان فقط

2-بما أن متحولات النموذج الخطي تحقق قيود عدم السلبية عندها نحصل من المتحولات التي قمنا بحسابها على خمسة متراجحات من نوع أكبر من أو يساوي

3-نعوض في تابع الهدف عن الخمسة متحولات نحصل على تابع هدف بمتحولين فقط

4-نكتب النموذج الجديد وهو نموذج خطي بمتحولين لذلك يمكن ايجاد الحل الأمثل بيانيا

نطبق الخطوات السابقة على المثال2:

نجد

$$x_3 = 5 - x_1 + x_2 \qquad (1)'$$

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 + 6 \qquad (2)'$$

$$x_5 = x_1 + x_2 + 4 \qquad (3)'$$

$$x_6 = 6 - x_2 \qquad (4)'$$

$$x_7 = 7 - x_1 + x_2 \qquad (5)'$$

نعوض بتابع الهدف نجد:

$$Z = [1,4]x_1 + [3,6]x_2 + [8,25]$$

بمـا أن $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$ فمـن $(1)'$ ، $(2)'$، $(3)'$ ، $(4)'$ ، $(5)'$ ، نحصل على مجموعة القيود الآتية:

$$5 - x_1 + x_2 \geq 0$$

$$-3x_1 + 2x_2 - 3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + 4 \geq 0$$

$$6 - x_2 \geq 0$$

$$7 - x_1 + x_2 \geq 0$$

عندها يصبح النموذج الرياضي الخطي النيتروسوفيكي كما يلي:

أوجد

$$Z = [1,4]x_1 + [3,6]x_2 + [8,25] \rightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$5 - x_1 + x_2 \geq 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + 6 \geq 0$$

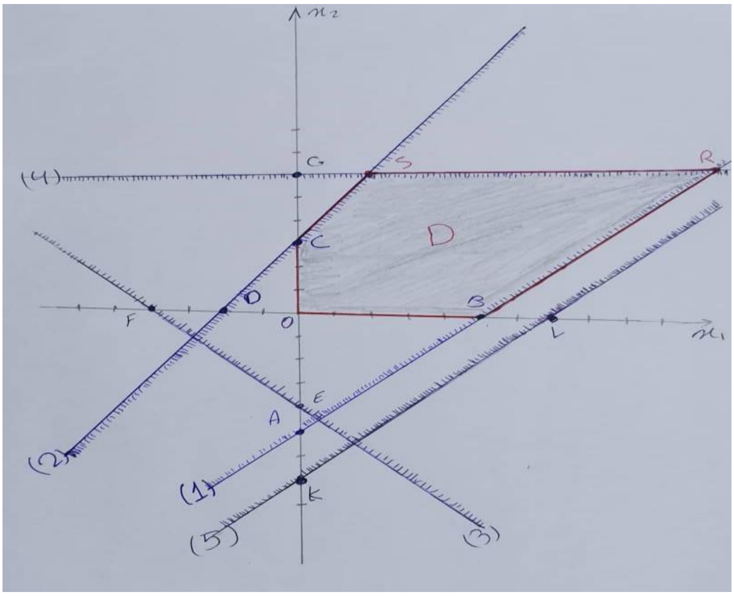
$$x_1 + x_2 + 4 \geq 0$$

$$6 - x_2 \geq 0$$

$$7 - x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

النموذج بمتحولين لذلك يمكن ايجاد الحل الأمثل له بيانيا باتباع نفس الخطوات الواردة في المثال رقم (1) نحصل على التمثيل الشكل رقم (2) هو التمثيل البياني المطلوب:



شكل رقم (2) التمثيل البياني لقيود النموذج الخطي في المثال 2

المنطقة D هي منطقة الحلول المشتركة ومحددة بالمضلع $OBRSC$ حيث $O(0,0)$ ، $B(5,0)$ ، $C(0,3)$ وبالنسبة للنقطتين $R\ ,S$ نجد:

النقطة R هي نقطة تقاطع القيدين الأول والرابع نحصل على إحداثياتها بحل جملة المعادلتين:

$$5 - x_1 + x_2 = 0$$
$$6 - x_2 = 0$$

نحصل على $R(11,6)$.

النقطة S هي نقطة تقاطع القيدين الثاني والرابع ونحصل على إحداثياتها بحل جملة المعادلتين:

$$3x_1 - 2x_2 + 6 = 0$$
$$6 - x_2 = 0$$

نحصل على $S(2,6)$.

بما أن الحل الأمثل يتوضع في نقطة من نقاط رؤوس منطقة الحل المشتركة لذلك نعوض إحداثيات هذه النقاط بتابع الهدف نجد:

عند النقطة $O(0,0)$

$$Z_O = 0$$

عند النقطة $B(5,0)$

$$Z_B = [13,45]$$

عند النقطة $R(11,6)$

$$Z_R \in [37,105]$$

عند النقطة $S(2,6)$

$$Z_S \in [28,69]$$

عند النقطة $C(0,3)$

$$Z_C \in [17,43]$$

أعظم قيمة لتابع الهدف عند النقطة $R(11,6)$ أي أن $x_1 = 11$ و $x_2 = 6$ نحسب قيم باقي المتحولات بالتعويض $(1)'$ ، $(2)'$، $(3)'$ ، $(4)'$ ، $(5)'$ نجد:

$$x_3 = 0 \ , x_4 = 27 \ , x_5 = 21 \ , x_6 = 0 \ , x_7 = 2$$

نعوض في تابع الهدف للنموذج الأصلي نحصل على القيمة العظمى للتابع Z وهي $MaxZ \in [68,126]$.

ملاحظات هامة:

1- إن الحل البياني ينطبق على نقطة راسية في الفضاء R^n

2- إن عدداً من مركبات الحل المثالي يكون معدوماً وذلك لأن الحل المثالي ينطبق على نقطة راسية والنقطة الراسية هي نتيجة تقاطع عدد من المستقيمات أو المستويات وإن عدد المركبات المعدومة هي $n-m$ مركبة على الأقل.

3- قد يتضمن النموذج بعض الشروط التي لا تلعب دوراً في عملية الحل

4- قد يكون الحل المثالي نقطة وحيدة وقد يكون عدد لانهائي من النقاط وذلك عندما يكون أحد أضلاع منطقة الحل المشتركة والمار بنقطة الحل المثالي موازياً للمستقيم $Z=0$ وعليه عند سحب المستقيم الممثل لتابع الهدف سينطبق هذا المستقيم على الضلع الموازي وتكون جميع نقاط ذلك الضلع والتي عددها لانهائي هي حلول مثالية.

5- إذا كانت منطقة الحلول المقبولة مفتوحة من جهة تزايد التابع Z فإننا لا نستطيع التوقف عند حل مثالي محدد، وعندها نقول إن لتابع الهدف عدداً لانهائي من الحلول المقبولة التي تعطينا قيما لـ Z أكبر فأكبر.

6- حالة عدم وجود حل مثالي (حل مقبول) وذلك عندما تكون الشروط متناقضة بعضها مع بعض وعندها تكون منطقة الإمكانيات مجموعة خالية (المسألة مستحيلة الحل).

الخاتمة:

قـدمنا هـذا الفصــل الطريقــة البيانيــة لإيجــاد الحــل الأمثــل للنمــاذج الخطيــة النيتروسـوفيكية، وأيضـا الطريقـة التـي نـادرا" مـا يـتم مناقشـتها فـي مراجـع بحـوث العمليـات الكلاسيكية، وهـي كيفيـة الاسـتفادة مـن القيـود غيـر السـلبية لإيجـاد الحل الأمثل بيانيا الحل لبعض النماذج الخطية النيتروسوفيكية، ولكن يجب أن ندرك أننا قد نواجـه نمـاذج خطيـة نيتروسوفيكية ذات متغيـرين، ولكـن قد تكـون هنـاك صـعوبة في الوصول إلى منطقة الحل المشترك، أو قد تكون هناك صـعوبة في تحديد الحل الأمثل بعد الحصول على الحل المشترك، لذلك يفضـل استخدام طريقة السيمبلكس النيتروسـوفيكية. بمـا أن الهـدف الأساسـي هـو الحصـول علـى الحـل الأمثـل، لـذلك يجب على الباحث تحديد الطريقة المناسبة للنموذج يريد حله.

الفصل الرابع

خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيكية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

مقدمة.

4-1- استخدام طريقة السيمبلكس المباشرة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيكية الموضوعة بالصيغة المتناظرة ومن نوع Max.

الخاتمة.

الفصل الرابع

خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيكية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

المقدمة:

تعد البرمجة الخطية الأسلوب المساعد على حسن انتقاء القرارات وإقرار البرنامج الأفضل للفعاليات المستقلة مع الأخذ بعين الاعتبار المصادر المتاحة ، تستخدم البرمجة الخطية في حل المسائل التي يكون الهدف فيها محدد مثل تأمين ربح أعظمي أو تأمين تكلفة أصغرية أو توفير أعظمي بالوقت أو الجهد ----الخ ، مع الإشارة إلى أن مسألة البرمجة الخطية المؤلفة من تابع خطي ومعرفة على مجموعة من المتراجحات أو المعادلات (القيود) تتميز بوجود عدد كبير من الحلول غير السالبة المقبولة ويكون المطلوب هو إيجاد الحل الأمثل من بين هذه الحلول للوصول إلى هذا الحل نعتمد على المعلومات التي قدمناها في الفصل الأول عندما درسنا الحلول غير السالبة لجملة المعادلات الخطية النيتروسوفيكية عندها استخدمنا طريقة السيمبلكس التي تعد الأساس الرياضي لخوارزمية السيمبلكس المباشرة المستخدمة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية التي سنقوم بعرضها في هذا الفصل:

خوارزمية السيمبلكس المباشرة لحل النماذج الخطية النيتروسوفيكية:

تتمثل خوارزمية السيمبلكس المباشرة في ثلاث مراحل:

a. مرحلة تحويل النموذج المفروض إلى شكل نظامي مكافئ له.

b. مرحلة تحويل الشكل النظامي إلى شكل قاعدي للحصول على الحلول القاعدية غير السالبة.

c. مرحلة البحث عن الحل الأمثل المطلوب من بين الحلول القاعدية غير السالبة.

سنقوم في هذا الفصل باستخدام خوارزمية السيمبلكس المباشرة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيكية، التي تم عرضها في الفصل الثاني من هذا الكتاب وهنا نميز الحالات التالية:

1- النماذج الخطية النيتروسوفيكية موضوعة بالصيغة المتناظرة ومن النوع Max.

2- النماذج الخطية النيتروسوفيكية موضوعة بالصيغة المتناظرة ومن نوع Min.

3- النماذج الخطية النيتروسوفيكية موضوعة بالصيغة العامة.

4-1- استخدام طريقة السيمبلكس المباشرة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيكية الموضوعة بالصيغة المتناظرة ومن نوع Max:

يكتب النموذج الخطي النيتروسوفيكي من نوع Max بالصيغة المتناظرة كما مر معنا في الفصل الثاني بالشكل التالي:

أوجد

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + \mathrm{N}a_{1n}x_n \leq Nb_1$$
$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n \leq Nb_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n \leq Nb_m$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

تتم الدراسة وفق الخطوات الآتية:

1. نكتب النموذج بالصيغة القياسية نحصل على الشكل التالي:

أوجد

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n + 0.y_1 + 0.y_2 + \cdots + 0.y_m \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + \mathrm{N}a_{1n}x_n + y_1 = Nb_1$$
$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n + y_2 = Nb_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n + y_m = Nb_m$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$$

2. نحول النموذج إلى الشكل القاعدي هنا نلاحظ أن المتحولات الإضافية تصلح أن تكون قاعدة أولية ننطلق منها في البحث عن الحل الأمثل لذلك نقوم بترتيب معلومات النموذج في الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	...	x_n	y_1	y_1	...	y_m	الكميات المتوفرة
y_1	Na_{11}	Na_{12}	....	Na_{1n}	1	0	...	0	Nb_1
y_2	Na_{21}	Na_{22}	... ...	Na_{2n}	0	1	...	0	Nb_2
....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	Na_{m1}	Na_{m2}	...	Na_{mn}	0	0	...	1	Nb_m
تابع الهدف	Nc_1	Nc_2	...	Nc_n	0	0	0	0	$Z-0$

جدول رقم (1) المعلومات الأساسية للنموذج

لدينا قاعدة أولى مؤلفة من المتحولات $y_1, y_2, \dots, y_m$ عندها تكون المتحولات $x_1, x_2, \dots, x_n$ متحولات غير قاعدية وننتقل إلى الخطوة الآتية:

3. نقوم بتحديد المتحول المناسب من المعادلات وإدخاله في القاعدة عن طريق دراسة أمثال المتحولات في سطر تابع الهدف Z بما أن تابع الهدف تابع تعظيم نختار أكبر القيم الموجبة في سطر تابع الهدف بتعبير أخر نأخذ:

$$Max(Nc_1, Nc_2, \dots, Nc_n) = Nc_s$$

وليكن مثلا Nc_s المقابل للمتحول x_s بذلك نكون قد حددنا عمود الارتكاز، هذا يعني أن المتحول x_s سيدخل إلى القاعدة لتحديد المتحول الذي سيخرج من القاعدة وبالتالي سطر الارتكاز نحسب المؤشر الآتي:

$$\theta \in Min\left[\frac{Nb_i}{Na_{is}}\right] = \frac{b_{tN}}{Na_{ts}} > 0; \quad Na_{is} > 0, Nb_i > 0$$

ويكون العنصر الذي يقع عند تقاطع عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز هو عنصر الارتكاز.

- نقوم بتقسيم سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز نحصل على:

$$\frac{Na_{t1}}{Na_{ts}},\frac{Na_{t2}}{Na_{ts}},\dots,\frac{Na_{ts-1}}{Na_{ts}},1,\frac{Na_{ts+1}}{Na_{ts}},\dots,\frac{Na_{tn}}{Na_{ts}},\dots,\frac{Nb_{t}}{Na_{ts}}$$

- نجعل عناصر عمود الارتكاز جميعها أصفار ماعدا عنصر الارتكاز يكون مساوي للواحد.
- نجري الحسابات المناسبة لحساب عاصر الجدول الجديد وذلك باستخدام العلاقات التالية:

$$Na'_{ij} = Na_{ij} - Na_{tj}\frac{Na_{is}}{Na_{ts}} = \frac{Na_{ij}Na_{ts} - Na_{tj}Na_{is}}{Na_{ts}}$$

$$Nb'_{i} = Nb_{i} - Nb_{t}\frac{Na_{is}}{Na_{ts}} = \frac{Nb_{i}Na_{ts} - Nb_{t}Na_{is}}{Na_{ts}}$$

$$Nc'_{j} = Nc_{j} - Nc_{s}\frac{Na_{tj}}{Na_{ts}} = \frac{Nc_{j}Na_{ts} - Nc_{s}Na_{tj}}{Na_{ts}}$$

نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	…	x_{s-1}	x_s	…	x_n	y_1	y_1	…	y_m	الكميات المتوفرة
y_1	Na'_1	Na'_1	…	Na'_{1s}	0	…	Na'_1	1	0	…	0	Nb'_1
y_2	Na_2	Na_2	…	Na'_{2s}	0	…	Na_2	0	1	…	0	Nb'_2
…	…	…	…	…	0	…	…	…	…	…	…	…
x_s	$\frac{Na_t}{Na_t}$	$\frac{Na_t}{Na_t}$	…	$\frac{Na_{ts}}{Na_t}$	1	…	$\frac{Na_t}{Na_t}$	0	0	…	0	$\frac{Nb_t}{Na_{ts}}$
…	…	…	…	…	0	…	…	…	…	…	…	…
y_m	Na_m	Na_m	… …	Na'_m	0	…	Na_m	0	0	…	1	Nb'_m
تابع الهدف	Nc'_1	Nc'_2	…	Nc'_{s-}	0	…	Nc'_n	0	0	0	0	NZ'

جدول رقم (2) الخطوة الأولى في خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيكية

- نطبق معيار توقف خوارزمية السيمبلكس على سطر تابع الهدف في الجدول رقم (2).

معيار التوقف: بما أن تابع الهدف من نوع تعظيم يجب أن يكون سطر تابع الهدف في الجدول لا يحوي أي قيمة موجبة، (اما إذا كان تابع الهدف من نوع تقليل فيجب أن يكون سطر تابع الهدف في الجدول الجديد لا يحوي أي قيمة سالبة)، في حال عدم تحقق المعيار نعود إلى الخطوة رقم (3) ونكرر نفس الخطوات حتى يتحقق معيار التوقف ونحصل على الحل الأمثل المطلوب. وبذلك نحصل على حلول قاعدية جديدة نيتروسوفيكية غير سالبة وحلول غير قاعدية (حرة) مساوية للصفر ويكتب الحل المثل بالشكل التالي:

$$(Nb'_1, Nb'_2, \dots, Nb'_m, 0,0, \dots ,0)$$

الجدول الآتي يمثل الحل النهائي في حال كانت الحلول القاعدية هي $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	y_1	y_2	…	y_m	الكميات المتوفرة
x_1	1	0	…	0	Na'_{1m+1}	…	Na'_{1n}	$N\beta_{11}$	$N\beta_{11}$	…	$N\beta_{1m}$	Nb'_1
x_2	0	1	…	0	Na'_{2m+1}	…	Na_{2n}	$N\beta_{21}$	$N\beta_{22}$	…	$N\beta_{2m}$	Nb'_2
…	…	…	…	0	0	…	…	…	…	…	…	…
x_m	0	0	…	1	$Na'_{m,m+1}$	…	Na_{mn}	$N\beta_{m1}$	$N\beta_{m2}$	…	$N\beta_{mm}$	Nb'_m
تابع الهدف	0	0	…	0	Nc'_{m+1}	…	Nc'_n	Nq_1	Nq_2	…	Nq_m	NZ'

جدول رقم (3) الحل النهائي في خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيكية

حيث $N\beta_{ii}$ و Nq_1 هي أمثال المتحولات الإضافية في القيود وفي تابع الهدف بعد إجراء العمليات المتكررة السابقة الذكر ويكون الحل الأمثل هو:

$$x_1 = Nb'_1, x_2 = Nb'_2, \dots, x_m = Nb'_m$$

الذي يعطي القيمة العظمى لتابع الهدف التالية:

$$NZ' = Nc_1Nb'_1 + Nc_2Nb'_2 + \cdots + Nc_mNb'_m$$

نوضح ما سبق من خلال المثال الآتي:

مثال1:

بيانات المسألة قيم كلاسيكية:

تنتج شركة نوعين من المنتجات A, B بإستخدم أربع مواد أولية F_1, F_2, F_3, F_4 ، إن المقادير اللازمة من كل من هذه المواد لإنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج من المنتجين A, B والكميات المتوفرة من المواد الأولية والربح العائد من الوحدة الواحدة من كلا المنتجين موضحة بالجدول التالي:

المنتجات / المواد الأولية	الكميات اللازمة للوحدة الواحدة		الكميات المتوفرة من المواد الأولية
	A	**B**	
F_1	2	3	19
F_2	2	1	13
F_3	0	3	15
F_4	3	0	18
الربح العائد من الوحدة الواحدة	7	5	

جدول رقم (4) البيانات الكلاسيكية للمسألة

المطلوب:

ايجاد الخطة الإنتاجية المثلى التي تجعل ربح الشركة من المنتجين A, B أكبر ما يمكن.

نرمز للكميات المنتجة من المنتج A بالرمز x_1 ومن المنتج B بالرمز x_2 ، بعد بناء النموذج الرياضي المناسب وحله نتوصلنا إلى أن $x_1 = 5$ و $x_2 = 3$ وعليه يكون الربح الأعظمي $MaxZ = 50$ وحدة نقدية

بيانات المسألة قيم نيتروسوفيكية:

تنتج شركة نوعين من المنتجات A, B بإستخدم أربع مواد أولية F_1, F_2, F_3, F_4 ، إن المقادير اللازمة من كل من هذه المواد لإنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج من المنتجين A, B والكميات المتوفرة من المواد الأولية والربح العائد من الوحدة الواحدة من كلا المنتجين موضحة بالجدول الآتي:

المنتجات / المواد الأولية	الكميات اللازمة للوحدة الواحدة		الكميات المتوفرة من المواد الأولية
	A	B	
F_1	2	3	$[14,20]$
F_2	2	1	$[10,16]$
F_3	0	3	$[12,18]$
F_4	3	0	$[15,21]$
الربح العائد من الوحدة الواحدة	$[5,8]$	$[3,6]$	

جدول رقم (5) البيانات النيتروسوفيكية للمسألة

المطلوب:

ايجاد الخطة الإنتاجية المثلى التي تجعل ربح الشركة من المنتجين A,B أكبر ما يمكن.

نرمز للكميات المنتجة من المنتج A بالرمز x_1 ومن المنتج B بالرمز x_2 ، نقوم ببناء النموذج الرياضي المناسب نحصل على

$$NZ \in [5,8]\; x_1 + [3,6]\; x_2 \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 \leq [14,20] \\ 2x_1 + x_2 \leq [10,16] \\ 3x_2 \leq [12,18] \\ 3x_1 \leq [15,21] \end{gathered}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نحول هذا النموذج إلى الشكل النظامي نحصل على:

$$NZ \in [5,8]\, x_1 + [3,6]\, x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$2x_1 + 3x_2 + y_1 = [14,20]$$
$$2x_1 + x_2 + y_2 = [10,16]$$
$$3x_2 + y_3 = [12,18]$$
$$3x_1 + y_4 = [15,21]$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

نرتب المعلومات السابقة في الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_1	y_1	y_2	y_3	y_4	**الكميات المتوفرة**
y_1	2	3	1	0	0	0	[14,20]
y_2	2	1	0	1	0	0	[10,16]
y_3	0	3	0	0	1	0	[12,18]
y_4	3	0	0	0	0	1	[15,21]
تابع الهدف	[5,8]	[3,6]	0	0	0	0	$NZ - 0$

جدول رقم (6) الخطوة الأولى بطريقة السيمبلكس

نلاحظ أن المتحولات الإضافية تشكل قاعدة أوليه مؤلفة من المتحولات (y_1, y_2, y_3, y_4) عندها نعتبر المتحولات (x_1, x_2) متحولات غير قاعدية وننتقل إلى الخطوة الآتية:

نقوم بتحديد المتحول المناسب من المعادلات وإدخاله في القاعدة عن طريق دراسة أمثال المتحولات الداخلة في عبارة تابع الهدف NZ بما أن تابع الهدف تابع تعظيم

نختار المتحول ذا أكبر أمثال موجبة من السطر الأخير في الجدول أي من سطر تابع الهدف بتعبير آخر نأخذ:

$$Max([5,8],[3,6]) = [5,8]$$

المقابل للمتحول x_1 بذلك نكون قد حددنا عمود الارتكاز لتحديد سطر الارتكاز أي المتحول الذي سيخرج من القاعدة نحسب المؤشر التالي:

$$\theta \in Min\left[\frac{[14,20]}{2},\frac{[10,16]}{2},\frac{[15,21]}{3}\right] = \frac{[15,21]}{3} = [5,7]$$

نكون بذلك قد حددنا سطر الارتكاز وهو السطر المقابل للمتحول y_4 ويكون العنصر الذي يقع عند تقاطع عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز أي 3 هو عنصر الارتكاز، أولاً نقوم بتقسيم سطر الدوران على 3 نحصل على:

$$\frac{3}{3},\frac{0}{3},\frac{0}{3},\frac{0}{3},\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{[15,21]}{3} = [5,7]$$

ثم نجعل عناصر عمود الارتكاز جميعها أصفار ماعدا عنصر الارتكاز يكون مساوي للواحد، نجري الحسابات المناسبة وذلك باستخدام العلاقات التالية:

$$Na'_{ij} = Na_{ij} - Na_{tj}\frac{Na_{is}}{Na_{ts}} = \frac{Na_{ij}Na_{ts} - Na_{tj}Na_{is}}{Na_{ts}}$$

$$Nb'_i = Nb_i - Nb_t\frac{Na_{is}}{Na_{ts}} = \frac{Nb_iNa_{ts} - Nb_tNa_{is}}{Na_{ts}}$$

$$Nc'_j = Nc_j - Nc_s\frac{Na_{tj}}{Na_{ts}} = \frac{Nc_jNa_{ts} - Nc_sNa_{tj}}{Na_{ts}}$$

نحصل على الجدول الآتي:

القاعدة \ المتحولات	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	الكميات المتوفرة
y_1	0	3	1	0	0	$\frac{-2}{3}$	[4,6]
y_2	0	1	0	1	0	$\frac{-2}{3}$	[0,4]
y_3	0	3	0	0	1	0	[12,18]
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	[5,7]
تابع الهدف	0	[3,6]	0	0	0	$[\frac{-8}{3},\frac{-5}{3}]$	$NZ-[25,56]$

جدول رقم (7) الخطوة الثانية بطريقة السيمبلكس

ندرس سطر تابع الهدف نلاحظ أنه لايزال هناك قيمة موجبة مقابلة للمتحول x_2 هذا يعني أن المتحول x_2 سيدخل إلى القاعدة ولتحديد المتحول الذي سيخرج من القاعدة نحسب المؤشر

$$\theta \in Min\left[\frac{[4,6]}{3},\frac{[0,4]}{1},\frac{[12,18]}{3}\right]=\frac{[4,6]}{3}=[\frac{4}{3},2]$$

وهذا مقابل للمتحول y_1 وبما أن أمثال x_2 في هذا السطر تساوي 3 نقسم السطر الأول على 3، ونقوم بالحسابات اللازمة نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	الكميات المتوفرة
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{-2}{9}$	$[\frac{4}{3},2]$
y_2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{-4}{9}$	$[\frac{-4}{3},2]$
y_3	0	0	-1	0	1	$\frac{2}{3}$	[8,12]
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	[5,7]
تابع الهدف	0	0	[-2, -1]	0	0	$[\frac{-6}{9},-1]$	$NZ-[29,68]$

جدول رقم (8) الحل النهائي

نلاحظ أنه في سطر تابع الهدف جميع القيم إما أصفار أو أعداد نتروسوفيكية سالبة، هذا يعني أننا توصلنا إلى الحل المثالي وهو:

$$x_1^* \in [5,7], x_2^* \in \left[\frac{4}{3},2\right], y_2^* \in \left[\frac{-4}{3},2\right], y_3^* \in [8,12], y_1^* = y_4^* = 0$$

نعوض الحل الأمثل بتابع الهدف نجد:

$$Max\, NZ \in [5,8].[5,7] + [3,6].\left[\frac{4}{3},2\right] = [25,56] + [4,12] = [29,68]$$

نفس النتيجة الموجودة في الجدول.

نعوض الحل الأمثل بالقيود نجد:

$$2[5,7] + 3\left[\frac{4}{3},2\right] + 0 = [14,20]$$
$$2[5,7] + \left[\frac{4}{3},2\right] + \left[\frac{-4}{3},2\right] = [10,16]$$
$$3\left[\frac{4}{3},2\right] + [8,12] = [12,18]$$
$$3[5,7] + 0 = [15,21]$$

نلاحظ الحل الأمثل يحقق جميع القيود.

نلخص النتائج السابقة في الجدول الآتي:

البيانات كلاسيكية								
بيانات المسألة						النتائج		
c_1	c_2	b_1	b_2	b_3	b_4	x_1	x_2	$Max\ Z$
7	5	19	13	15	18	5	3	50
البيانات النيتروسوفيكية								
بيانات المسألة						النتائج		
c_{1N}	c_{2N}	b_{1N}	b_{2N}	b_{3N}	b_{4N}	x_{1N}	x_{2N}	$Max\ NZ$
[5,8]	[3,6]	[14,20]	[10,16]	[12,18]	[15,21]	[5,7]	$[\frac{4}{3},2]$	[29,68]

جدول رقم (9) المقارنة بين نتائج حل المسألة والبيانات كلاسيكية والبيانات نيتروسوفيكية

2 – النماذج الخطية النيتروسوفيكية موضوعة بالصيغة المتناظرة ومن نوع $\boldsymbol{Min}$.

يكتب النموذج الخطي النيتروسوفيكي من نوع Min بالصيغة المتناظرة كما مر معنا في الفصل الثاني بالشكل الآتي:

أوجد

$$NL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n \longrightarrow Min$$

ضمن القيود

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + \mathrm{N}a_{1n}x_n \geq Nb_1$$
$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n \geq Nb_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n \geq Nb_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

نستطيع البحث عن الحل الأمثل بإتباع احدى الطرق التالية:

- يمكن إيجاد الحل الأمثل للنموذج الخطي السابق بأن نحول تابع الهدف إلى تابع من نوع تعظيم كما مر معنا في الفصل الثاني وذلك بضرب سطر تابع الهدف بـ (-1)، ثم نقوم بكتابة النموذج بالصيغة القياسية، هنا نلاحظ أنه لا يوجد قاعدة أولية جاهزة لأن المتحولات الإضافية جميعها مسبوقة بإشارة ناقص، أي يجب أن نبحث أولا عن حل أولي ثم نقوم بتحسين هذا الحل إلى أن نصل إلى الحل الأمثل وذلك بإتباع نفس الخطوات السابقة.
- نستطيع أيضا إيجاد النموذج المرافق وبالتأكيد سيكون كتناظر من نوع تعظيم ثم نقوم بإيجاد الحل المثل له كما فعلنا سابقا أو باستخدام الخوارزمية المزدوجة لحل النموذج والنموذج المرافق التي سنعرضها في الفصل السابع من هذا الكتاب
- يفضل في مثل هذه النماذج استخدام خوارزمية السيمبلكس الاصطناعية التي سيتم عرضها في الفصل السادس من هذا الكتاب.

- أيضا يمكننا أن نجد الحل بدون إجراء أي تغيير في تابع الهدف ولكن نقوم بتعديل واحد على الخطوات السابقة الذكر وهو أننا عندما نريد تحديد عمود الارتكاز نختار العنصر الأكثر سالبية ويكون عموده هو عمود الارتكاز ونتابع الحل كما مر معنا، ويكون معيار التوقف هنا هو أن تكون جميع عناصر سطر تابع الهدف اما موجبة أو صفر.

3 – النماذج الخطية النيتروسوفيكية موضوعة بالصيغة العامة:

يكتب النموذج الخطي النيتروسوفيكي بالصيغة العامة التالية:

أوجد

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n \longrightarrow (Max\ or\ Min)$$

ضمن القيود

$$Na_{i1}x_1 + Na_{i2}x_2 + \cdots + Na_{in}x_n \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} Nb_i \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

كخطوة أولى نقوم بكتابة النموذج بالصيغة القياسية، ولكتابته بالشكل القاعدي ندر المتحولات الإضافية هنا نلاحظ أن بعض المتحولات الإضافية يصلح أن يكون متحولا قاعديا وبعضها الأخر لا يصلح، أيضا إذا كان هناك بعض القيود من نوع مساويات فإنه لا يوجد مقابلها متحولات إضافية، بالنتيجة لا يوجد قاعدية أولية جاهزة ونحن بحاجة إلى بناء قاعدة أولية ننطلق منها في البحث عن الحل الأمثل، أيضا هنا يفضل استخدام السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية التي سيتم عرضها في الفصل السادس من هذا الكتاب.

ملاحظات هامة:

في الجدول النهائي للنموذج من نوع تعظيم إذا كانت بعض الأمثال المقابلة للمتحولات الحرة في سطر تابع الهدف موجبة هذا يعني أننا لم نتوصل إلى الحل المثالي المطلوب، وعلينا في هذه الحالة أن نحذف المتحولات الحرة المقابلة للقيمة الموجبة نعود إلى الخطوة (2) ونجري اللازم نكرر هذه العمليات حتى نحصل على سطر تابع الهدف لا يحوي إلا الأصفار أو أعداد سالبة (موجبة). أو نتوصل إلى إحدى الحالات الآتية:

a) لا يوجد حل مثالي لأن منطقة الحلول مفتوحة باتجاه تزايد التابع NZ، ونستدل على ذلك من عدم وجود عنصر موجب في عمود الارتكاز.
b) يوجد عدد لانهائي من الحلول المثلى وذلك بسبب كون مستويات تابع الهدف NZ موازية لأحد أضلاع أو سطوح منطقة الحل المشتركة، نستدل على ذلك من ظهور صفر في السطر الأخير مقابل لأحد المتحولات الحرة في جدول الحل الأمثل الأخير، عندها يمكننا الحصول على حل أمثل أخر بتبديل المتحول بأحد المتحولات القاعدية، ونتيجة لذلك سنحصل على حل قاعدي آخر.
c) حالة عدم وجود أي حل أمثل يحدث ذلك بسبب تعارض القيود بعضها مع بعض، ونستدل على ذلك من عدم وجود أي عنصر موجب عدا الثابت Nb_i في أحد الأسطر هذا يعني أن الطرف الأيمن يأخذ قيمة سالبة بينما الطرف الأيسر يأخذ قيمة موجبة وهذا لا يحدث إلا عند تعارض القيود.

d) بعد الحصول على الحل الأمثل علينا أن نتحقق من أنه يحقق جميع القيود المفروضة ويعطينا القيمة نفسها لتابع الهدف، وذلك من خلال التعويض بتابع الهدف والقيود.

الخاتمة:

نستنتج من الدراسة السابقة والنتائج الموضحة بالجدول (9) أنه عند استخدام البيانات النيتروسوفيكية نحصل على مجالات أي قيم غير محددة وهذا اللاتحديد يكون أكثر دقة ويحاكي الواقع ويراعي معظم التغيرات التي يمكن أن تطرأ على بيئة عمل النظام الذي يمثله النموذج الرياضي الخطي في حين أن القيم التي نحصل عليها عند الحل وفق البيانات الكلاسيكية هي قيم محددة ولا تأخذ بعين الاعتبار التغير الذي يمكن أن يطرأ على بيئة عمل النظام الذي يمثله النموذج الرياضي ، وعليه فإن البيانات النيتروسوفيكية توفر لنا دراسة أعم وأشمل من الدراسة باستخدام البيانات الكلاسيكية المعروفة، أي أن العمل باستخدام البيانات الكلاسيكية لم يعد كافياً في الوقت الحالي، لأن تطور العلوم وعدم الاستقرار في وضع بيئة عمل المنشأة وضع أمامنا عدداً كبيراً من الحالات التي تحتاج إلى معالجة سريعة ودقيقة لتفادي الخسائر التي يمكن أن تتعرض لها المنشأة ، الأمر الذي لا يمكن معالجته باستخدام البيانات الكلاسيكي وهنا يأتي دور البيانات النيتروسوفيكية التي تقدم لنا شمولية أكثر في تفسير النتائج وتساعدنا في الحصول على النتائج الدقيقة المطلوبة، هذا من جانب ومن جانب اخ نركز على ضرورة اختيار الخوارزمية المناسبة لحل النموذج قيد الدراسة من بين الخوارزميات التي سنعرضها في هذا الكتاب لتوفير الجهد والوقت عن البحث عن الحل الأمثل.

الفصل الخامس

خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيكية المعدلة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

مقدمة.

5-1- خطوات خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيكية.

الخاتمة.

الفصل الخامس

خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيكية المعدلة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية

مقدمة:

نقدم في هذا الفصل خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيكية التي تم تقديمها لمعالجة الصعوبة التي كنا نواجهها عند تطبيق خوارزمية السيمبلكس المباشرة وهي الكم الكبير من العمليات الحسابية المطلوب القيام بها في كل خطوة من خطوات الحل الأمر الذي يحتاج إلى الكثير من الوقت والجهد.

5-1- خطوات خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيكية:

نوضح خطوات خوارزمية السيمبلكس المعدلة من خلال النموذج الرياضي الخطي النيتروسوفيكي التالي:

$$Max\, Z = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n$$

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le Nb_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le Nb_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \le Nb_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le Nb_m
\end{gathered}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$$

لإيجاد الحل الأمثل لهذا النموذج الخطي النيتروسوفيكي باستخدام خوارزمية السيمبلكس المعدلة

1− نكتب النموذج الخطي النيتروسوفيكي بالصيغة القياسية نحصل على النموذج التالي:

$$\max Z = c_{1N}x_1 + c_{2N}x_2 + \cdots + c_{nN}x_n + 0y_1 + 0y_2 + \cdots + 0y_m$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 = b_{1N} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + y_2 = b_{2N} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n + y_3 = b_{3N} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + y_m = b_{mN} \end{gathered}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots, y_m \geq 0$$

2− نحول النموذج الخطي القياسي إلى الشكل القاعدي ونضع المعاملات في جدول مختصر يتضمن عموده الأول

المتحولات القاعدية وفي سطره الأعلى المتحولات غير القاعدية فقط.

a. نحدد عمود الارتكاز وهو العمود المقابل لأكبر قيمة موجبة في سطر تابع الهدف لأن تابع الهدف تابع تعظيم (أما إذا كان تابع الهدف تابع تقليل فهو العمود المقابل لأكثر القيم سالبية) وليكن هذا العمود هو عمود المتحول x_s.

b. نحدد سطر الارتكاز

يتم تحديد سطر الارتكاز من خلال المؤشر التالي:

$$\theta = min\left[\frac{b_{iN}}{a_{is}}\right] = \frac{b_{tN}}{a_{ts}} > 0; \quad a_{is} > 0, b_{iN} > 0$$

وليكن هذا السطر هو سطر المتحول القاعدي y_t

عندها يكون عنصر الارتكاز هو العنصر الناتج من تقاطع عمود الارتكاز وسطر الارتكاز أي a_{ts}

نوضح الخطوة الثانية من خلال الجدول الآتي:

Non-Basic Variables / Basic Variables	x_1	x_2	…..	x_s	….	x_n	Nb_i
y_1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1s}	…..	a_{1n}	Nb_1
y_2	a_{21}	a_{22}	…….	a_{1s}	….	a_{2n}	Nb_2
……..	…….	……..	…….	……	…..	……	…….
y_t	a_{t1}	a_{t2}	……	a_{ts}	……	a_{tn}	Nb_t
……	……	……	….	…..	…..	……	…….
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…….	a_{1s}	….	a_{mn}	Nb_m
NZ	Nc_1	Nc_2	……	Nc_s	…..	Nc_n	$NZ - Nc_o$

جدول رقم (1) جدول عنصر الارتكاز

3- نقوم بحساب العناصر الجديدة المقابلة لسطر الارتكاز وعمود الارتكاز وفق الخطوات التالية:

نضع مقابل عنصر الارتكاز a_{ts} مقلوبه $\frac{1}{a_{ts}}$

نحسب عناصر السطر المقابل لسطر الارتكاز (ما عدا عنصر سطر الارتكاز) بتقسيم عناصر سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز a_{ts}

نحسب جميع عناصر العمود المقابل لعمود الارتكاز (ما عدا عنصر الارتكاز) بتقسيم عناصر عمود الارتكاز على عنصر الارتكاز a_{ts} ثم ضربها بـ (-1)

4- نقوم بحساب العناصر الأخرى من العلاقات التالية:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{tj}\frac{a_{is}}{a_{ts}} = \frac{a_{ij}a_{ts} - a_{tj}a_{is}}{a_{ts}}$$

$$Nb'_i = Nb_i - Nb_t\frac{a_{is}}{a_{ts}} = \frac{Nb_i a_{ts} - Nb_t a_{is}}{a_{ts}}$$

$$Nc_j' = Nc_j - Nc_s \frac{a_{tj}}{a_{ts}} = \frac{Nc_j a_{ts} - Nc_s a_{tj}}{a_{ts}}$$

نحصل على الجدول الآتي:

Non-Basic Variables / Basic Variables	x_1	x_2	…..	y_t	….	x_n	Nb_i'
y_1	a_{11}'	a_{12}'	……	$\frac{-a_{1s}}{a_{ts}}$	…..	a_{1n}'	Nb_1'
y_2	a_{21}'	a_{22}'	…….	$\frac{-a_{2s}}{a_{ts}}$	….	a_{21}'	Nb_2'
……..	…….	……..	…….	……	…..	…….	…….
x_s	$\frac{a_{t1}}{a_{ts}}$	$\frac{a_{t2}}{a_{ts}}$	……	$\frac{1}{a_{ts}}$	……	$\frac{a_{tn}}{a_{ts}}$	$\frac{Nb_t}{a_{ts}}$
……	……	……	….	…..	…..	……	…….
y_m	a_{m1}'	a_{m1}'	…….	$\frac{-a_{ms}}{a_{ts}}$	….	a_{mn}'	Nb_m'
NZ	Nc_1'	Nc_2'	……	$\frac{-Nc_s}{a_{ts}}$	…..	Nc_n'	$NZ - Nc_0'$

جدول رقم (2) أول مرحلة في البحث عن الحل الأمثل

نطبق معيار توقف خوارزمية السيمبلكس على سطر تابع الهدف في الجدول رقم (2) الآتي:

بما أن تابع الهدف من نوع تعظيم يجب أن يكون سطر تابع الهدف في الجدول لا يحوي أي قيمة موجبة، (اما إذا كان تابع الهدف من نوع تقليل فيجب أن يكون سطر تابع الهدف في الجدول الجديد لا يحوي أي قيمة سالبة)، في حال عدم تحقق المعيار نعود إلى الخطوة رقم (3) ونكرر نفس الخطوات حتى يتحقق معيار التوقف ونحصل على الحل المثالي المطلوب.

نوضح ما سبق من خلال المثال الآتي:

مثال:

تنتج شركة نوعين من المنتجات A, B باستخدام أربع مواد خام F_1, F_2, F_3, F_4 ويبين الجدول الآتي الكميات اللازمة من كل مادة من هذه المواد لإنتاج وحدة واحدة من كل من المنتجين أ، ب، والكميات المتوفرة من المواد الأولية، والربح العائد من وحدة واحدة من كلا المنتجين:

المنتجات / المواد	الكمية المطلوبة للوحدة الواحدة		الكميات المتوفرة
	A	B	
F_1	2	3	[14,20]
F_2	2	1	[10,16]
F_3	0	3	[12,18]
F_4	3	0	[15,21]
الربح للوحدة الواحدة	[5,8]	[3,6]	

جدول رقم (3) بيانات المسألة

المطلوب:

إيجاد خطة الإنتاج الأمثل التي تجعل أرباح الشركة من المنتجين A, B كبيرة قدر الإمكان.

نرمز للكمية المنتجة من المنتج A بالرمز x_1، ومن المنتج B بالرمز x_2 ، سيتم إعادة صياغة المسألة باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيكي على النحو الآتي:

$$\max Z \in [5,8]\, x_1 + [3,6]\, x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq [14,20]$$
$$2x_1 + x_2 \leq [10,16]$$
$$3x_2 \leq [12,18]$$
$$3x_1 \leq [15,21]$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

نطبق خوارزمية السيمبلكس المعدلة:

1- الصيغة القياسية للنموذج الخطي السابق هي:

$$\max Z \in [5,8]\, x_1 + [3,6]\, x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4$$
$$2x_1 + 3x_2 + y_1 = [14,20]$$
$$2x_1 + x_2 + y_2 = [10,16]$$
$$3x_2 + y_3 = [12,18]$$
$$3x_1 + y_4 = [15,21]$$
$$x_1, x_2 \geq 0, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

2- ننظم المعلومات السابقة بجدول السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيكية الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_1	b_i
y_1	2	3	[14,20]
y_2	2	1	[10,16]
y_3	0	3	[12,18]
y_4	3	0	[15,21]
تابع الهدف	[5,8]	[3,6]	$Z - 0$

جدول رقم (4) جدول السيمبلكس وفق خوارزمية السيمبلكس المعدلة النيتروسوفيكية

مـن الواضـــح أن $\max([5,8],[3,6]) = [5,8]$ مقابـل العمـود x_1،أي أن عمـود المتحـول x_1 هـو عمـود الارتكـاز، وهذا يعنـي أنـه يجـب ادخـال المتغيـر x_1 إلـى القاعـدة بـدلاً مـن أحـد المتغيـرات القاعديـة، لتحديـد المتغيـر القاعـدي التـي يجـب إخراجه، نقوم بحساب المؤشر θ:

$$\theta \in min\left[\frac{[14,20]}{2}, \frac{[10,16]}{2}, \frac{[15,21]}{3}\right] = \frac{[15,21]}{3} = [5,7]$$

تشير قيمـة θ إلـى أن السطر المقابـل للمتغيـر y_4 هـو سـطر الارتكـاز، والعنصـر الموجود فـي تقاطع عمـود الارتكـاز وسطر الارتكاز (3) هـو عنصـر الارتكـاز، تقسم عناصر سطر المتحـول y_4 علـى عنصـر الارتكاز ينتج:

3- نقوم بحساب عناصر الجدول الجديد وفق الخطوات المذكورة سابقا نحصل على الجدول الآتي:

القاعدة \ المتحولات	x_1	x_2	b'_i
y_1	$\frac{-2}{3}$	**3**	$[4,6]$
y_2	$\frac{-2}{3}$	1	$[0,4]$
y_3	0	3	$[12,18]$
x_1	$\frac{1}{3}$	0	$[5,7]$
تابع الهدف	$\left[\frac{-8}{3}, \frac{-5}{3}\right]$	$[3,6]$	$Z - [25,56]$

جدول رقم (5) جدول الخطوة الأولى في البحث عن الحل الأمثل

4- نطبق معيار التوقف في الخوارزمية نجد:

لا تزال هناك قيمة غير سالبة في سطر تابع الهدف [3,6] هذا يعني أننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل لذلك نعيد الخطوات السابقة وفق الآتي:

وهو مقابل لعمود x_2، هذا يعني أنه يجب إدخال المتغير x_2 إلى المتغيرات الأساسية وعموده يكون هو عمود الارتكاز، لتعين سطر الارتكاز أي المتحول الذي يجب أن يجرج من القاعدة نحسب المؤشر θ :

$$\theta \in \min\left[\frac{[4,6]}{3},\frac{[0,4]}{1},\frac{[12,18]}{3}\right]=\frac{[4,6]}{3}=[\frac{4}{3},2]$$

وهو مقابل للمتغير y_1 ، عندها يكون عنصر الارتكاز يساوي 3، تقسيم سطر y_1 على 3، ونقوم بالحسابات اللازمة لعنصر الجدول الجديد نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	b_i'
x_2	$\frac{-2}{9}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$[\frac{4}{3},2]$
y_2	$\frac{-4}{9}$	$\frac{-1}{3}$	$[\frac{-4}{3},2]$
y_3	$\frac{2}{3}$	$\mathbf{-1}$	$[8,12]$
x_1	1	0	$[5,7]$
تابع الهدف	$[-6,-1]$	$[-2,-1]$	$Z-[29,68]$

جدول رقم (6) جدول الحل النهائي

نطبق معيار توقف الخوارزمية نجد أن المعيار قد تحقق وبالتالي توصلنا الى حصلنا الحل الأمثل

الحل الأمثل للنموذج الخطي هو:

$$x_1^* \in [5,7], x_2^* \in \left[\frac{4}{3}, 2\right], y_2^* \in \left[\frac{-4}{3}, 2\right], y_3^* \in [8,12], y_1^* = y_4^* = 0$$

ويقابل قيمة لتابع الهدف هي:

$$\max Z \in [5,8].[5,7] + [3,6].\left[\frac{4}{3}, 2\right] = [25,56] + [4,12] = [29,68]$$

واضح من عناصر سطر تابع الهدف أننا توصلنا إلى الحل الأمثل ولأن جميعها قيم نيتروسوفيكية سالبة وبالتالي يكون الحل الأمثل هو

$$x_1^* \in [5,7], x_2^* \in \left[\frac{4}{3}, 2\right], y_2^* \in \left[\frac{-4}{3}, 2\right], y_3^* \in [8,12], y_1^* = y_4^* = 0$$

جميع القيم التي حصلنا عليها هي قيم نيتروسوفيكية، نعوض هذه القيم في دالة الهدف نجد:

$$\max Z \in [5,8].[5,7] + [3,6].\left[\frac{4}{3}, 2\right] = [25,56] + [4,12] = [29,68]$$

هذا يعني أنه يجب على الشركة انتاج الكمية $x_1^* \in [5,7]$, من المنتج A والكمية $x_2^* \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$ من المنتج B ، بذلك تحقق ربح أعظمي وهو القيمة النيتروسوفيكية الآتية:

$$\max Z \in [29,68]$$

للمقارنة بين طريقة السيمبلكس المعدلة وطريقة السيمبلكس المباشرة قمنا بحل نفس المثال باستخدام خوارزمية السيمبلكس المباشرة وفيما يلي جداول الحل:

Non-basic var. / Basic var.	x_1	x_1	y_1	y_2	y_3	y_4	b_i
y_1	2	3	1	0	0	0	[14,20]
y_2	2	1	0	1	0	0	[10,16]
y_3	0	3	0	0	1	0	[12,18]
y_4	3	0	0	0	0	1	[15,21]
Objective fun.	[5,8]	[3,6]	0	0	0	0	$Z-0$

جدول رقم (7) جدول السيمبلكس وفق خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيكية

Non-basic var. / Basic var.	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	b_i
y_1	0	**3**	1	0	0	$\frac{-2}{3}$	[4,6]
y_2	0	1	0	1	0	$\frac{-2}{3}$	[0,4]
y_3	0	3	0	0	1	0	[12,18]
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	[5,7]
Object. Fun.	0	[3,6]	0	0	0	$[\frac{-8}{3},\frac{-5}{3}]$	$Z-[25,56]$

جدول رقم (8) جدول الخطوة الأولى في البحث عن الحل الأمثل

Non-basic var. / basic var.	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	b_i
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{-2}{9}$	$[\frac{4}{3},2]$
y_2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{-4}{9}$	$[\frac{-4}{3},2]$
y_3	0	0	-1	0	1	$\frac{2}{3}$	[8,12]
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	[5,7]
Object. Fun.	0	0	[-2, -1]	0	0	$[\frac{-6}{9},-1]$	$Z-[29,68]$

جدول رقم (9) جدول الحل النهائي

واضح من عناصر سطر تابع الهدف أننا توصلنا إلى الحل الأمثل ولأن جميعها قيم نيتروسوفيكية سالبة أو صفر وبالتالي يكون الحل الأمثل هو

$$x_1^* \in [5,7], x_2^* \in \left[\frac{4}{3},2\right], y_2^* \in \left[\frac{-4}{3},2\right], y_3^* \in [8,12], y_1^* = y_4^* = 0$$

جميع القيم التي حصلنا عليها هي قيم نيتروسوفيكية، نعوض هذه القيم في دالة الهدف نجد:

$$\max Z \in [5,8].[5,7] + [3,6].\left[\frac{4}{3},2\right] = [25,56] + [4,12] = [29,68]$$

هذا يعني أنه يجب على الشركة انتاج الكمية $x_1^* \in [5,7]$, من المنتج A والكمية $x_2^* \in \left[\frac{4}{3},2\right]$ من المنتج B ، بذلك تحقق ربح أعظمي وهو القيمة النيتروسوفيكية الآتية:

$$\max Z \in [29,68]$$

الخاتمة:

من الدراسة السابقة نلاحظ أننا حصلنا على نفس الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه عندما استخدمنا طريقة السيمبلكس المباشرة ولكن بعدد من الحسابات أقل بكثير من العدد الذي قمنا به في خوارزمية السيمبلكس المباشرة كما هو واضح من خلال مقارنة جداول الحل باستخدام طريقة السيمبلكس المعدلة جدول رقم (4) وجدول رقم (5) وجدول رقم (6) مع جداول الحل باستخدام طريقة السيمبلكس المباشرة جدول رقم (7) وجدول رقم (8) وجدول رقم (9) ، وعليه اختصارا للوقت والجهد نركز على ضرورة استخدام طريقة السيمبلكس المعدلة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية وخاصة عندما يحوي النموذج على عدد كبير من المتحولات والقيود.

الفصل السادس

إيجاد حل قاعدة للنماذج الخطية باستخدام متحولات اصطناعية

المقدمة.

6-1- خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية.

6-2- معالجة النموذج وجميع القيود من نوع مساويات.

6-3- معالجة النموذج القيود مختلطة.

الخاتمة.

الفصل السادس

إيجاد حل قاعدة للنماذج الخطية باستخدام متحولات اصطناعية

المقدمة:

نقدم في هذا الفصل خوارزمية السيمبلكس بمتحولات اصطناعية النيتروسوفيكية، التي يفضل استخدامه في النماذج الخطية التي لا يوجد فيها قاعدة جاهزة نتمكن من خلالها الحصول على الحل الأمثل لذلك يتم إضافة متحولات اصطناعية إلى القيود عددها يساوي عدد القيود التي لا تحوي متحول قاعدي، وكخطوة أولى في البحث عن الحل الأمثل يجب أن نتخلص من جميع المتحولات الاصطناعية وتحويلها إلى متحولات غير قاعدية حتى تأخذ قيمة الصفر وبذلك لا توثر على الحل المثالي للنموذج الخطي، نوضح ما سبق من خلال الدراسة الآتية:

6-1- خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية:

الغاية من حل النماذج الخطية هي اختيار الحل الأمثل من مجموعة الحلول المقبولة ويتم ذلك انطلاقا من حل قاعدة يتم تحسينه باستخدام خوارزمية السيمبلكس المباشرة التي تتمثل بثلاث مراحل أساسية:

a. مرحلة تحويل النموذج المفروض إلى شكل نظامي مكافئ له.
b. مرحلة تحويل الشكل النظامي إلى شكل قاعدي للحصول على الحلول القاعدية غير السالبة.
c. مرحلة البحث عن الحل المثالي المطلوب من بين الحلول القاعدية غير السالبة. وعليه فأن عملية البحث عن الحل الأمثل لا تبدأ إلا بعد الحصول

على حل قاعدة، ولكن في العديد من النماذج الخطية نواجه صعوبة كبيرة في الحصول على الحل القاعدة لذلك تم اقتراح طريقة السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية، حيث يتم تشكيل قاعدة مؤلفة من مجموعة من المتحولات الاصطناعية غير السالبة تضاف إلى القيود التي لا تحوي متحول قاعدة وبذلك يتم الحصول على حل القاعدة ثم نقوم بتحسينه باستخدام خوارزمية السيمبلكس المباشرة حتى نحصل على الحل الأمثل.

في هذا البحث سنقوم بإعادة صياغة خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية التي يكون من الصعب الحصول على حل قاعدة لها وذلك باستخدام مفاهيم علم النيتروسوفيك

نص المسألة:

أوجد الحل الأمثل للنموذج الخطي الآتي:

$$Max\, Z = NC_1x_1 + NC_2x_2 + \cdots + NC_nx_n$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = Nb_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = Nb_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = Nb_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = Nb_m \end{gathered}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

حيث $NC_j = C_j \pm \varepsilon_j \;,\;\; Nb_i = b_i \pm \delta_i,\;\; a_{ij},\; j = 1,2,\dots,n\,, i = 1,2,\dots,m$ مجموعة من القيم النيتروسوفيكية المعلومة وتثل بيانات المسألة قيد الدراسة و x_j هي مجاهيل المسألة التي يطلب تعينها حتى يحقق تابع الهدف قيمته العظمى.

في النموذج السابق نلاحظ أن عدد المتحولات n وعدد القيود m وهذا النموذج موضوع بالصيغة النظامية.

ننتقل إلى المرحلة الثانية وهي إيجاد حل قاعدي هنا نستخدم خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية التي تتمثل بما يأتي:

1- نشكل من الشكل النظامي شكلا قاعديا اصطناعيا وذلك بأن نضيف إلى الطرف الأيسر لكل معادلة من معادلات القيود متحولا اصطناعياً غير سالب ε_i بذلك نشكل قاعدة تتألف من المتحولات غير السالبة $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$.

2- بما أن المتحولات الاصطناعية أدخلت على قيود كانت في الأصل معادلات خطية لذلك يجب أن تأخذ هذه المتحولات قيمة الصفر حتى لا تتأثر القيود الخطية.

3- لذلك يجب ان ننقلها جميعا من القاعدة حتى تصبح متحولات غير قاعدية ولكي نستطيع اجراء هذا الانتقال نستخدم خوارزمية السيمبلكس المباشرة.

4- نقوم بإدخال هذه المتحولات إلى تابع الهدف بأمثال M (حيث M هو عدد موجب كبير بشكل كافي وهو على الأقل أكبر من أي $|Nc_j|$) ومسبوقة بإشارة ناقص (لأن تابع الهدف تابع تعظيم) وذلك حتى لا نعيد نقلها إلى المتحولات القاعدية مرة ثانية.

5- نحصل على الشكل القاعدي للنموذج الخطي النيتروسوفيكي الآتي:

$$Max\, Z = NC_1x_1 + NC_2x_2 + \cdots + NC_nx_n - M\varepsilon_1 - M\,\varepsilon_2 - \cdots - M\,\varepsilon_m + NC_0$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \varepsilon_1 = Nb_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2 = Nb_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n + \varepsilon_3 = Nb_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + \varepsilon_m = Nb_m$$
$$x_j \geq 0 \ \ , \varepsilon_i > 0 \ , Nb_i > 0 \ ; j = 1,2, \dots , n \ and \ i = 1,2, \dots , m$$

6- بعد الحصول على الحل القاعدي نقوم باستخدام خوارزمية السيمبلكس المباشرة من أجل تحسين هذا الحل للوصول إلى الحل الأمثل لذلك نرتب المعلومات السابقة في جدول كما يلي:

المتحولات / Basic	x_1	x_2	….	x_n	ε_1	ε_2	….	ε_m	b_i
ε_1	a_{11}	a_{12}	….	a_{1n}	1	0	….	0	b_1
ε_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	0	0	b_2
….	…	…	…	…	…	…	…	…	…
ε_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m
	NC_1	NC_2	….	NC_n	$-M$	$-M$	…	$-M$	$Z - NC_0$

جدول رقم (1) بيانات عامة للنموذج

7- نقوم بالتخلص من المتحولات الاصطناعية، هنا ندرس الثوابت b_i المقابلة للمتحولات الاصطناعية ونختار أكبرها وليكن b_t المقابل للمتحول ε_t ونعتبر سطره سطر الارتكاز، ثم نقوم بتحديد عنصر الارتكاز فيه بوساطة تقسيم عناصر سطر تابع الهدف (العناصر NC_j) على عناصر سطر ε_t ثم نأخذ أصغر النسب الموجبة θ حيث:

$$\theta = \underset{j}{\text{Min}} \left[\frac{NC_j}{a_{tj}} > 0 \right] = \frac{NC_s}{a_{ts}}$$

حيث $a_{tj} > 0$ وعندها يكون عنصر الارتكاز هو العنصر a_{ts} ، ونقوم بتبديل المتحولين x_s و ε_t

وفق تعليمات خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيكية، نكرر الخطوة (7) حتى نتخلص من جميع المتحولات الاصطناعية ونحصل على قاعدة عادية مؤلفة من المتحولات الأساسية، بعد التخلص من المتحولات الاصطناعية نعود إلى العمل وفق خوارزمية السيمبلكس المباشرة النيتروسوفيكية

نوضح ما سبق من خلال المثال الآتي:

6-2- معالجة النموذج وجميع القيود من نوع مساويات:

نوضح كيفية إيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية التي جميع قيودها قيود مساويات باستخدام خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية من خلال المثال الآتي:

مثال1

أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي الآتي:

$$Max\, Z = -12x_1 + [6,9]x_2 + 3x_3$$

ضمن القيود

$$8x_1 - x_2 + 4x_3 = [4,6]$$
$$6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = [-12,-9]$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل:

1- نحول النموذج إلى الصيغة القياسية نضرب المعادلة الثانية بـ (1-) نحصل على النموذج الآتي:

أوجد حل قاعدة للنموذج الخطي النيتروسوفيكي الآتي:

$$Max\,Z = -12x_1 + [6,9]x_2 + 3x_3$$

ضمن القيود

$$8x_1 - x_2 + 4x_3 = [4,6]$$
$$-6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = [9,12]$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1- نضيف المتحولات الاصطناعية وندخلها إلى تابع الهدف بأمثال كبير M مسبوقة بإشارة ناقص نأخذ هنا $M = 15$

أوجد حل قاعدة للنموذج الخطي النيتروسوفيكي الآتي:

$$Max\,Z = -12x_1 + [6,9]x_2 + 3x_3 - 15\varepsilon_1 - 15\varepsilon_2$$

ضمن القيود

$$8x_1 - x_2 + 4x_3 = [4,6]$$
$$-6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = [9,12]$$
$$x_1, x_2, x_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$$

نرتب المعلومات السابقة بالجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	b_i
ε_1	8	-1	4	1	0	[4,6]
ε_2	-6	3	-3	0	1	[9,12]
	-12	[6,9]	3	-15	-15	$Z - 0$

جدول رقم (2): القاعدة الاصطناعية

بما أن القاعدة اصطناعية، لذلك نقوم بدراسة الثوابت b_i فنجد أكبرها ينتمي إلى المجموعة [9,12] مقابل للمتحول ε_2 لذلك نقوم بتقسيم سطر تابع الهدف على العناصر الموجبة في سطر ε_2 ونحسب المؤشر θ فنجد أن:

$$\theta = \underset{j}{\mathrm{Min}}\left[\frac{[6,9]}{3}\right] = \frac{[6,9]}{3}$$

وبذلك يكون عنصر الارتكاز هو (3) المقابل لـ x_2 لذلك نقوم بتبديل x_2 بـ ε_2 ، عندها يصبح المتحول x_2 متحولا قاعديا ويخرج ε_2 من القاعدة نقوم بإجراء الحسابات اللازمة نحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	b_i
ε_1	6	0	3	1	$\frac{1}{3}$	[7,10]
x_2	-2	1	-1	0	$\frac{1}{3}$	[3,4]
	[0,6]	0	[9,12]	-15	$[-18,-17]$	$Z-[18,36]$

جدول رقم (3): جدول التغيير الأول في القاعدة

ندرس عناصر الجدول السابق نلاحظ أنه مازال لدينا متحول اصطناعي هو ε_1 موجود في القاعدة لذلك نجري تبديلا أخر معتمدين سطر الارتكاز هو السطر المقابل له ومن أجل تحديد عمود الارتكاز نقوم بحساب المؤشر θ نجد:

$$\theta = \underset{j}{\mathrm{Min}}\left[\frac{[0,6]}{6},\frac{[9,12]}{3}\right] \in \frac{[0,6]}{6}$$

وبذلك يكون عنصر الارتكاز هو (6) المقابل لـ x_1 لذلك ننقل x_1 إلى القاعدة بدلا من ε_1 فنحصل على الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	b_i
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\left[\frac{7}{6},\frac{10}{6}\right]$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\left[\frac{16}{3},\frac{22}{3}\right]$
	0	0	9	$[-18,-15]$	$\left[-18,\frac{-50}{3}\right]$	$Z-[18,46]$

جدول رقم (4): التغيير الثاني في القاعدة

من الجدول السابق نلاحظ أن متحولات القاعدةx_1, x_2 وبذلك نكون قد حصلنا على حل أولي للنموذج الخطي وهو

هي وهو يعطينا الحل القاعدة الآتي:

$$\left(x_1 \in \left[\frac{7}{6},\frac{10}{6}\right], x_2 \in \left[\frac{16}{3},\frac{22}{3}\right], x_3 = 0, \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0\right)$$

ولكن واضح من الجدول أن هذا الحل ليس الحل المثالي لأنه يوجد في سطر تابع الهدف قيمة موجبة مقابلة للمتحولx_3 لذلك نطبق خوارزمية السيمبلكس المباشرة لتحسين الحل القاعدي نحصل على الحل المثالي من الجدول الآتي:

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	x_3	ε_1	ε_2	b_i
x_3	2	0	1	1	$\frac{1}{9}$	$\left[\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right]$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\left[\frac{16}{3},\frac{22}{3}\right]$
	-18	0	0	$[-27,-24]$	$\left[-19,\frac{-53}{3}\right]$	$Z-[39,76]$

جدول رقم (5): الحل الأمثل للنموذج

الحل المثالي للنموذج الخطي

$$x_1 = 0, x_2 \in \left[\frac{16}{3},\frac{22}{3}\right], x_3 \in \left[\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right], \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$$

عند هذا الحل يأخذ تابع الهدف أعظم قيمة له وهي

$$Z \in [39,76]$$

يمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض بالقيود وعبارة تابع الهدف

نلاحظ أن القيم في الحل المثالي للنموذج الخطي السابق هي قيم نيتروسوفيكية

6-3- معالجة النموذج القيود مختلطة:

نوضح كيفية إيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية التي قيودها مختلطة باستخدام خوارزمية السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية من خلال المثال الآتي:

مثال 2:

أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي الآتي:

$$Min\,Z = -3x_1 + [8,10]x_2 + [0,6]x_3$$

ضمن القيود

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \le [3,7]$$
$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge [9,6]$$
$$2x_1 - x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

نحول هذا النموذج إلى الصيغة القياسية تصبح المسألة:

أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي الآتي:

$$Min\,Z = -3x_1 + [8,10]x_2 + [0,6]x_3 + 0y_1 + 0y_2$$

ضمن القيود

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + y_1 = [3,7]$$
$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - y_2 = [9,6]$$
$$2x_1 - x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \ge 0$$

إن المتحول y_1 في القيد الأول هو متحول قاعدي وبما أنه لا يوجد متحولات قاعدية أخرى فإننا نضيف متحولات اصطناعية إلى القيدين الثاني والثالث وندخلها الى تابع الهدف بأمثال موجبة بالقدر الكافي لأن النموذج نموذج تقليل وبذلك نحصل على الشكل القاعدي الآتي:

أوجد الحل المثالي للنموذج الخطي الآتي:

$$Min\,Z = -3x_1 + [8,10]x_2 + [0,6]x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 12\varepsilon_1 + 12\varepsilon_2$$

ضمن القيود

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + y_1 = [3,7]$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - y_2 + \varepsilon_1 = [9,6]$$

$$2x_1 - x_3 + \varepsilon_2 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$$

ونتبع نفس الخطوات الواردة في المثال 1 لإخراج المتحولات الاصطناعية من القاعدة وإدخال المتحولات الأساسية وبعد الحصول على الحل القاعدة نقوم باستخدام طريقة السيمبلكس المباشرة لإيجاد الحل الأمثل

ملاحظات هامة:

1- إذا لم يتضمن سطر ε_i عنصرا موجبا وكان $b_t > 0$ فإن ذلك يدل على تعارض القيود وتكون المسألة غير قابلة للحل

2- إذا لم نستطيع العثور على نسبة موجبة $\frac{NC_j}{a_{tj}}$ فإننا نقوم بحساب أكبر النسب السالبة θ' حيث:

$$\theta' = Max\left[\frac{NC_j}{a_{tj}} < 0\right] = \frac{NC_s}{a_{ts}}$$

حيث $a_{tj} > 0$ وبذلك يكون a_{ts} هو عنصر الارتكاز وهو عنصر موجب بالتأكيد .

الخاتمة:

قدمنا من خلال الدراسة السابقة إحدى الطرق الهامة لإيجاد الحل الأمثل للنماذج الخطية النيتروسوفيكية وهي طريقة السيمبلكس ذات القاعدة الاصطناعية التي نلجأ لها عندما يتعذر علينا إيجاد حل قاعدة ووجدنا أن الحل الأمثل الذي حصلنا عليه هو عبارة عن قيم نيتروسوفيكية قيم غير محددة تحديد تمام تنتمي إلى مجال يمثل حده الأدنى أصغر قيمة يمكن أن يأخذها تابع الهدف وحده الأعلى يمثل أعلى قيمة لتابع الهدف الأمر الذي يتناسب مع الظروف المحيطة ببيئة عمل النظام الذي يمكن أن يمثله النموذج الخطي.

الفصل السابع

النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيكية والخوارزمية المزدوجة

مقدمة.

7-1- النماذج المرافقة النيتروسوفيكية.

7-1-1- الشكل المصفوفي للنماذج المرافقة النيتروسوفيكية.

7-1-2 إيجاد النماذج المرافقة النيتروسوفيكية باستخدام الجدول المزدوج.

7-1-3- بناء النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيكية باستخدام الجداول.

7-2- صياغة الخوارزمية المزدوجة النيتروسوفيكية.

7-2-1- خطوات خوارزمية السيمبلكس المزدوجة.

7-2-2- خوارزمية السيمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق.

7-3- التفسير الاقتصادي للنماذج المرافقة.

الخاتمة.

الفصل السابع

النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيكية والخوارزمية المزدوجة

مقدمة:

نواجه في حياتنا العملية الكثير من المسائل التي تصاغ على شكل نماذج رياضية خطية تتألف من تابع هدف ومجموعة من القيود على شكل معادلات أو متراجحات، ويكتب النموذج الخطي بالعديد من الصيغ التي يتم التميز بينها من خلال نوع تابع الهدف وشكل القيود وتم توضيح صيغ النماذج الخطية في الفصل الثاني من هذا الكتاب، وذكرنا سابقا أنه لكل صيغة من هذه الصيغ استخدام فمثلا عندما نريد إيجاد الحل الأمثل للنموذج الخطية يجب علينا أولا وضعه بالصيغة القياسية ، وذكرنا اننا نستخدم الصيغ المتناظرة في النظرية الثنوية التي تعد من أهم النظريات في البرمجة الخطية وفكرتها الأساسية أنه لكل نموذج خطي يوجد نموذج خطي مرافق ، حيث أن حل النموذج الخطي الأصلي يعطي حلا للنموذج المرافق ، وعليه عند حل نموذج البرمجة الخطية فإننا نحصل فعليا على حلول لنموذجين خطيين ، نقدم في هذا الفصل دراسة للنماذج المرافقة النيتروسوفيكية وخوارزمية السيمبلكس المزدوجة التي تعمل على إيجاد الحل الأمثل للنموذجين الأصلي والمرافق بنفس الوقت تتجلى أهمية هذه الخوارزمية بأنه يتم الاعتماد عليها في عدة مواضيع من مواضيع بحوث العمليات مثل، خوارزميات البرمجة ذات الأعداد الصحيحة ، بعض خوارزميات البرمجة اللاخطية ، تحليل الحساسية في البرمجة الخطية ...

7-1- النماذج المرافقة النيتروسوفيكية:

7-1-1- الشكل المصفوفي للنماذج المرافقة النيتروسوفيكية:

لإيجاد النموذج المرافق لنموذج خطي نيتروسوفيكي معطى باستخدام المصفوفات نضع النموذج الخطي النيتروسوفيكي بالصيغة المتناظرة وكما وجدنا في الفصل الثاني ، يكون النموذج الخطي موضوع بالشكل المتناظر إذا كانت جميع المتحولات مقيدة بأن تكون غير سالبة وإذا أعطيت جميع القيود بشكل متراجحات (ويجب أن تكون متراجحات قيود نموذج التعظيم موضوعة بصيغة (≤ أقل من أو يساوي) في حين أن متراجحات قيود نموذج التقليل يجب أن تكون بصيغة (≥ أكبر من أو يساوي)، عندها يكتب النموذج الخطي بالشكل المتناظر النيتروسوفيكي بأحد الحالتين:

الحالة الأولى: النموذج الأصلي متناظر ومن نوع تعظيم

النموذج الأصلي:

أوجد

$$NZ = NC\,X \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$NA\,X \leq NB$$
$$X \geq 0$$

حيث

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} \dots Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} \dots Na_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ Na_{m1} & Na_{m2} \dots Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \vdots \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \vdots \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ويكون النموذج المرافق:

أوجد

$$NL = NB\,\mathrm{Y} \longrightarrow Min$$

ضمن القيود

$$NA^T\mathrm{Y} \geq NC$$
$$\mathrm{Y} \geq 0$$

حيث

$$NA^T = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{21} \dots Na_{m1} \\ Na_{12} & Na_{22} \dots Na_{m2} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ Na_{1n} & Na_{2n} \dots Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \cdot\cdot \\ Nb_m \end{bmatrix} NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \cdot\cdot \\ Nc_n \end{bmatrix} \ \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot\cdot \\ y_m \end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: النموذج متناظر ومن نوع تصغير

النموذج الأصلي:

أوجد

$$NZ = NC\,\mathrm{X} \longrightarrow Min$$

ضمن القيود

$$NA\mathrm{X} \geq NB$$
$$\mathrm{X} \geq 0$$

حيث

$$NA = \begin{bmatrix} Na_{11} & Na_{12} \dots Na_{1n} \\ Na_{21} & Na_{22} \dots Na_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ Na_{m1} & Na_{m2} \dots Na_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ \cdot\cdot \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ \cdot\cdot \\ Nc_n \end{bmatrix} \ \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

النموذج المرافق:

أوجد

$$NL = NB\,\mathrm{Y} \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$NA^T\mathrm{Y} \leq NC$$
$$\mathrm{Y} \geq 0$$

حيث

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \ \ldots a_{m2} \\ \ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \quad NB = \begin{bmatrix} Nb_1 \\ Nb_2 \\ .. \\ Nb_m \end{bmatrix} \quad NC = \begin{bmatrix} Nc_1 \\ Nc_2 \\ .. \\ Nc_n \end{bmatrix} \quad \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_m \end{bmatrix}$$

نلخص عملية إيجاد النماذج المرافقة النيتروسوفيكية باستخدام المصفوفات بالخطوات التالية:

1. نعرف متحول جديد غير سالب لكل قيد من قيود النموذج الأصلي.
2. نجعل متجه الريح (التكلفة) في النموذج الأصلي متجه عمود الثوابت في النموذج المرافق.
3. نجعل متجه عمود الثوابت في النموذج الأصلي متجه التكلفة(الربح) في النموذج المرافق.
4. نجعل منقول مصفوفة أمثال متغيرات القيود في النموذج الأصلي أمثال للمتغيرات في النموذج المرافق.
5. نعكس اتجاه متراجحات القيود.
6. نعكس اتجاه الأمثلة أي نغير الزيادة الى الحد الأعظمي إلى إنقاص إلى الحد الأصغري والعكس بالعكس.

7-1-2 – إيجاد النماذج المرافقة النيتروسوفيكية باستخدام الجدول المزدوج:

وجدنا سابقاً أننا نستطيع كتابة النماذج الخطية بثلاث أشكال

- الشكل المصفوفي كما هو موضح بالفقرة السابقة.
- الشكل المختصر التالي:

$$NZ = \sum_{j=1}^{n} (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \longrightarrow (Max \;\; or \;\; Min)$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} Na_{ij} x_j \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} b_i \pm \delta_i \quad ; \;\; i = 1,2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

- الشكل المفصل الآتي:

أوجد

$$NZ = Nc_1 x_1 + Nc_2 x_2 + \cdots + Nc_n x_n \longrightarrow (Max \;\; or \;\; Min)$$

ضمن القيود

$$Na_{i1} x_1 + Na_{i2} x_2 + \cdots + Na_{in} x_n \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{pmatrix} Nb_{\mathrm{i}} \quad ; i = 1,2, \dots, m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

لإيجاد النموذج المرافق نضع النموذج الخطي النيتروسوفيكي بالصيغة المتناظرة وهنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: النموذج الأصلي متناظر ومن نوع تعظيم

$$NZ = \sum_{j=1}^{n} (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \longrightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} Na_{ij} x_j \leq b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1,2, \dots , m$$

$$x_j \geq 0$$

الحالة الثانية: النموذج متناظر ومن نوع تصغير

$$NL = \sum_{j=1}^{n} (c_j \pm \varepsilon_j) x_j \longrightarrow Min$$

ضمن القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} Na_{ij} x_j \geq b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1,2, \dots , m$$

$$x_j \geq 0$$

وفي الحالتين لدينا $x_j \geq 0$ وهي متحولات القرار، قيم مجهولة نحصل عليها بعد حل النموذج الخطي، أما

$Na_{ij} = a_{ij} \pm \mu_{ij}$ و $Nb_i = b_i \pm \delta_i$ و $Nc_j = c_j \pm \varepsilon_j$

حيث $(j = 1,2, \dots , n \,, i = 1,2, \dots , m)$

فهي بيانات المسألة قيد الدراسة وهي قيم نيتروسوفيكية قيم غير محددة تتمتع بهامش من الحرية وتأخذ بحسب طبيعة الحالة التي يمثلها النموذج الخطي

7-1-3- بناء النماذج الخطية المرافقة النيتروسوفيكية باستخدام الجداول:

لبناء النماذج الخطية النيتروسوفيكية باستخدام الجداول نرسم جدول مزدوج للنموذجين الأصلي والمرافق وفق الخطوات التالية:

1- معاملات تابع الهدف في النموذج الأصلي هي عمود الثوابت في النموذج المرافق، وعمود الثوابت في النموذج الأصلي هو معاملات تابع الهدف في النموذج المرافق

2- نعكس إشارات متراجحات القيود (إذا كانت في النموذج الأصلي من نوع $\leq$ تصبح في النموذج المرافق من نوع $\geq$)

3- نغير الهدف من الزيادة إلى الحد الأعظمي في النموذج الأصلي إلى الإنقاص إلى الحد الأصغري في النموذج المرافق

4- نضع كل قيد (سطر) في النموذج الأصلي يوافق عمود في النموذج المرافق أي يوجد متحول واحد لكل قيد في النموذج الأصلي

5- المتحولات في النموذج الأصلي والنموذج المرافق تحقق قيود عدم السلبية.

نوضح ما سبق من خلال الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: النموذج الأصلي متناظر ومن نوع تعظيم

أوجد: $NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n \longrightarrow Max$

ضمن القيود

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + \mathrm{N}a_{1n}x_n \leq Nb_1$$
$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n \leq Nb_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n \leq Nb_m$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

يكون الجدول المزدوج للنموذج الأصلي والنموذج المرافق كما يلي:

		النموذج الأصلي			
		تابع الهدف NZ / القيود	$Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n$		Max / عمود الثوابت
المتحولات	y_1	1	$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + Na_{1n}x_n$	$\leq$	Nb_1
	y_2	2	$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n$	$\leq$	Nb_2
	…	…	… … … … … … … … … … … … … …	$\leq$	…
	y_m	m	$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n$	$\leq$	Nb_m
		قيود عدم السلبية	$x_1, x_2, \dots, x_n$	$\geq$	0
		النموذج المرافق			
		تابع الهدف NL / القيود	$Nb_1y_1 + Nb_2y_2 + \cdots + Nb_iy_m$		Min / عمود الثوابت
		1	$Na_{11}y_1 + Na_{21}y_2 + \cdots + Na_{m1}y_m$	$\geq$	Nc_1
		2	$Na_{12}y_1 + Na_{22}y_2 + \cdots + Na_{m2}y_m$	$\geq$	Nc_2
		…	… … … … … … … … … … … … … …	$\geq$	…
		n	$Na_{1n}y_1 + Na_{2n}y_2 + \cdots + Na_{mn}y_m$	$\geq$	Nc_n
		قيود عدم السلبية	$y_1, y_2, \dots, y_m$	$\geq$	0

جدول رقم (1) تابع الهدف من نوع تعظيم

الحالة الثانية: النموذج الأصلي متناظر ومن نوع تقليل

أوجد

$$NL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n \longrightarrow Min$$

ضمن القيود

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + \mathrm{N}a_{1n}x_n \geq Nb_1$$
$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n \geq Nb_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n \geq Nb_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

يكون الجدول المزدوج للنموذج الأصلي والنموذج المرافق كمايلي:

		النموذج الأصلي			
		تابع الهدف NL / القيود	$Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n$		Min / عمود الثوابت
المتحولات	y_1	1	$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + Na_{1n}x_n$	$\geq$	Nb_1
	y_2	2	$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n$	$\geq$	Nb_2
	…	…	… … … … … … … … … … … … … …	$\geq$	…
	y_m	m	$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n$	$\geq$	Nb_m
		قيود عدم السلبية	$x_1, x_2, \dots, x_n$	$\geq$	0
		النموذج المرافق			
		تابع الهدف NZ / القيود	$Nb_1y_1 + Nb_2y_2 + \cdots + Nb_iy_m$		Max / عمود الثوابت
		1	$Na_{11}y_1 + Na_{21}y_2 + \cdots + Na_{m1}y_m$	$\leq$	Nc_1
		2	$Na_{12}y_1 + Na_{22}y_2 + \cdots + Na_{m2}y_m$	$\leq$	Nc_2
		…	… … … … … … … … … … … … … …	$\leq$	…
		n	$Na_{1n}y_1 + Na_{2n}y_2 + \cdots + Na_{mn}y_m$	$\leq$	Nc_n
		قيود عدم السلبية	$y_1, y_2, \dots, y_m$	$\geq$	0

جدول رقم (2) تابع الهدف في النموذج الأصلي من نوع تقليل

7-2- صياغة الخوارزمية المزدوجة النيتروسوفيكية:

خوارزمية السيمبلكس المزدوجة (للنموذجين الأصلي والمرافق) النيتروسوفيكية، من خلال هذه الخوارزمية نستطيع ايجاد الحلين المثاليين لكل من النموذجين الأصلي والمرافق بآن واحد، وقبل البدء بخوارزمية السيمبلكس المزدوجة لابد من أن نذكر بخوارزمية السيمبلكس المعدلة الواردة في الفصل الرابع التي سنستخدمها ضمن خطوات الخوارزمية المزدوجة.

خوارزمية السيمبلكس المعدلة:

في خوارزمية السيمبلكس المعدلة وبعد تحويل النموذج الخطي النظامي إلى الشكل القاعدي نضع المعاملات في جدول مختصر يتضمن عموده الأول المتحولات القاعدية وفي سطره الأعلى المتحولات غير القاعدية فقط. نحدد عمود الارتكاز وهو العمود المقابل لأكبر قيمة موجبة في سطر تابع الهدف إذا كان تابع الهدف تابع تعظيم (أما إذا كان تابع الهدف تابع تقليل فهو العمود المقابل لأكثر القيم سالبية) وليكن هذا العمود هو عمود المتحول x_s، نحدد سطر الارتكاز، يتم تحديد سطر الارتكاز من خلال المؤشر التالي:

$$\theta \in Min\left[\frac{Nb_i}{Na_{is}}\right] = \frac{Nb_t}{Na_{ts}} > 0; \quad Na_{is} > 0, Nb_i > 0$$

وليكن هذا السطر هو سطر المتحول القاعدي y_t، عندها يكون عنصر الارتكاز هو العنصر الناتج من تقاطع عمود الارتكاز وسطر الارتكاز أي a_{ts}، ثم نقوم بحساب العناصر الجديدة المقابلة لسطر الارتكاز وعمود الارتكاز كما يلي:

1- نضع مقابل عنصر الارتكاز Na_{ts} مقلوبه $\frac{1}{Na_{ts}}$

2- نحسب عناصر السطر المقابل لسطر الارتكاز (ما عدا عنصر سطر الارتكاز) بتقسيم عناصر سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز Na_{ts}

3- نحسب جميع عناصر العمود المقابل لعمود الارتكاز (ما عدا عنصر الارتكاز) بتقسيم عناصر عمود الارتكاز على عنصر الارتكاز Na_{ts} ثم ضربها بـ (-1)

نقوم بحساب العناصر الأخرى من العلاقات التالية:

$$Na'_{ij} = Na_{ij} - Na_{tj}\frac{Na_{is}}{Na_{ts}} = \frac{Na_{ij}Na_{ts} - Na_{tj}Na_{is}}{Na_{ts}}$$

$$Nb'_{i} = Nb_{i} - Nb_{t}\frac{a_{is}}{a_{ts}} = \frac{Nb_{i}a_{ts} - Nb_{t}a_{is}}{a_{ts}}$$

$$Nc'_{j} = Nc_{j} - Nc_{s}\frac{a_{tj}}{a_{ts}} = \frac{Nc_{j}a_{ts} - Nc_{s}a_{tj}}{a_{ts}}$$

نطبق معيار توقف خوارزمية السيمبلكس المباشرة على سطر تابع الهدف فإذا كان تابع الهدف من نوع تعظيم يجب أن يكون سطر تابع الهدف في الجدول لا يحوي أي قيمة موجبة، (اما إذا كان تابع الهدف من نوع تقليل فيجب أن يكون سطر تابع الهدف في الجدول الجديد لا يحوي أي قيمة سالبة)، في حال عدم تحقق المعيار نكرر نفس الخطوات حتى يتحقق معيار التوقف ونحصل على الحل المثالي المطلوب.

7-2-1- خطوات خوارزمية السيمبلكس المزدوجة:

a. نكتب النموذجين بالشكل القاعدي وذلك بإضافة أو طرح متحولات إضافية أو باستخدام المتحولات الاصطناعية ونعزل المتحولات غير المقيدة

الشكل القاعدي للنموذج الأصلي:

أوجد

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n + 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_m \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + Na_{1n}x_n + u_1 = Nb_1$$
$$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n + u_2 = Nb_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n + u_m = Nb_m$$
$$x_j \geq 0 \ ; \mathrm{j} = 1,2, \ldots , \mathrm{n}$$
$$u_i \geq 0 \ ; \mathrm{i} = 1,2, \ldots , \mathrm{m}$$

هنا لا نشترط أن تكون $Nb_i \geq 0$

الشكل القاعدي للنموذج المرافق:

أوجد

$$NL = Nb_1y_1 + Nb_2y_2 + \cdots + Nb_iy_m + 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \longrightarrow Min$$

ضمن القيود

$$Na_{11}y_1 + Na_{21}y_2 + \cdots + Na_{m1}y_m - v_1 = Nc_1$$
$$Na_{12}y_1 + Na_{22}y_2 + \cdots + Na_{m2}y_m - v_2 = Nc_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Na_{1n}y_1 + Na_{2n}y_2 + \cdots + Na_{mn}y_m - v_n = Nc_n$$
$$y_i \geq 0 \ ; i = 1,2, \ldots , m$$
$$v_j \geq 0 \ ; \mathrm{j} = 1,2, \ldots , \mathrm{n}$$

هنا لا نشترط أن تكون $Nc_j \geq 0$

إن للنموذجين نفس المعاملات، ومصفوفة أمثال النموذج المرافق هي منقول مصفوفة أمثال النموذج الأصلي نكتب النموذجين بالجدول المختصر الآتي:

		النموذج الأصلي			
		التابع NZ القيود	$Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n + 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_m$		Max عمود الثوابت
المتحولات	y_1	1	$Na_{11}x_1 + Na_{12}x_2 + \cdots + Na_{1n}x_n + u_1$	$=$	Nb_1
	y_2	2	$Na_{21}x_1 + Na_{22}x_2 + \cdots + Na_{2n}x_n + u_2$	$=$	Nb_2
	…	…	… … … … … … … … … … … … … …	$=$	…
	y_m	m	$Na_{m1}x_1 + Na_{m2}x_2 + \cdots + Na_{mn}x_n + u_m$	$=$	Nb_m
		قيود عدم السلبية	$x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m$	$\geq$	0
		النموذج المرافق			
		التابع NL القيود	$Nb_1y_1 + Nb_2y_2 + \cdots + Nb_iy_m + 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$		Min عمود الثوابت
		1	$Na_{11}y_1 + Na_{21}y_2 + \cdots + Na_{m1}y_m - v_1$	$=$	Nc_1
		2	$Na_{12}y_1 + Na_{22}y_2 + \cdots + Na_{m2}y_m - v_2$	$=$	Nc_2
		…	… … … … … … … … … … … … … …	$=$	…
		n	$Na_{1n}y_1 + Na_{2n}y_2 + \cdots + Na_{mn}y_m - v_n$	$=$	Nc_n
		قيود عدم السلبية	$y_1, y_2, \dots, y_m, v_1, v_2, \dots, v_n$	$\geq$	0

جدول رقم (2) الشكل القياسي للنموذجين الأصلي والمرافق

b. نضع متحولات ومعاملات النموذج الأصلي في جدول السيمبلكس المعدلة، ونضع متحولات النموذج المرافق خارج الجدول بالشكل الآتي:

			المتحولات القاعدية مع إشارتها (−) للنموذج المرافق				
			$-v_1$	$-v_2$	…	$-v_n$	
		المتحولات غير القاعدي / المتحولات القاعدية	x_1	x_2	…	x_n	تابع الهدف للنموذج المرافق NB_i
المتحولات غير القاعدية للنموذج	y_1	u_1	Na_{11}	Na_{12}	…	Na_{1n}	Nb_1
	y_2	u_2	Na_{21}	Na_{22}	…	Na_{2n}	Nb_2
	…	…	…	…	…	…	…
	y_m	u_m	Na_{m1}	Na_{m2}	…	Na_{mn}	Nb_m
		تابع الهدف للنموذج الأصلي	Nc_1	Nc_2	…	Nc_n	$L-0\to Min$ $Z-0\to Max$

جدول رقم (3) الجدول المزدوج للنموذجين الأصلي والمرافق وفق خوارزمية السيمبلكس المعدلة

7-2-2- خوارزمية السيمبلكس المزدوجة للنموذجين الأصلي والمرافق:

من خوارزمية السيمبلكس المعدلة للنموذج الأصلي نحصل على الحل الأمثل للنموذج الأصلي عندما تكون جميع العناصر في السطر الأخير (سطر تابع الهدف للنموذج الأصلي) $Nc_j \geq 0 \; ; \mathrm{j} = 1,2, \dots, \mathrm{n}$ وفي الوقت نفسه تكون جميع العناصر في العمود الأخير (عمود تابع الهدف المرافق)

$$Nb_i \geq 0 \; ; i = 1,2, \dots, m$$

ونحصل على الحل الأمثل للنموذج المرافق عندما تكون جميع العناصر في العمود الأخير (عمود تابع الهدف المرافق) $Nb_i \geq 0 \; ; i = 1,2, \dots, m$ وفي الوقت نفسه السطر الأخير (سطر تابع الهدف للنموذج الأصلي) $Nc_j \leq 0 \; ; \mathrm{j} = 1,2, \dots, \mathrm{n}$ (لأنها ستقابل $Nc_j = -v_j$) وهما الشرطان نفسهما لكل من النموذجين.

لذلك علينا عند البحث عن الحل الأمثل للنموذجين معاً أن نعمل على جعل جميع العناصر $Nb_i \geq 0 \; ; i = 1,2, \dots, m$ وعلى جعل جميع العناصر

$$Nc_j \leq 0 \; ; \mathrm{j} = 1,2, \dots, \mathrm{n}$$

ولتحقيق ذلك نعتمد على أحد النموذجين ونضع متحولاته ومعاملاته في جدول ونضع النموذج المرافق في إطار خارجي لذلك الجدول ، بصورة عامة نجد أن ضرورة وضع النموذجين في جدول مختصر لا تسمح لنا بالتخلص من الثوابت السالبة في الطرف الأيمن ولهذا فإن الحالة العامة للجدول المزدوج السابق يمكن أن تتضمن ثوابت سالبة $Nb_i < 0$ كما أن عناصر السطر الأخير يمكن أن تتضمن عناصر موجبة $Nc_j > 0$ موجبة ، لذلك يجب علينا عند البحث عن الحل الأمثل للنموذجين أن نعمل على معالجة هذه العناصر اعتمادا على أحد النموذجين .

بالاعتماد على النموذج الأصلي ونقوم بذلك على مرحلتين هما:

المرحلة الأولى:

نجعل الثوابت Nb_i غير سالبة وهذا ما يقابل الحصول على حل قاعدي غير سالب للنموذج الأصلي

المرحلة الثانية:

نجعل جميع عناصر سطر تابع الهدف غير موجبة (في حالة تابع الهدف تعظيم) وهذا ما يقابل الحصول على الحل الأمثل المطلوب للنموذج الأصلي

بالاعتماد على النموذج المرافق نقوم بذلك على مرحلتين هما:

المرحلة الأولى:

يجب أن نجعل عناصر عمود تابع الهدف المرافق $Nb_i \geq 0 \ ; i = 1,2, \dots, m$ في السطر الأخير غير سالبة

المرحلة الثانية:

يجب أن نجعل الثوابت الحرة بالنسبة للنموذج المرافق $(-Nc_j)$ غير موجبة وهذا يقابل الحصول على الحل الأمثل للنموذج المرافق

نوضح ما سبق من خلال المثال التالي:

أوجد الحل الأمثل لكل من النموذج الخطي النيتروسوفيكي التالي ومرافقه باستخدام الخوارزمية المزدوجة

مثال:

أوجد

$$[5,8]\ x_1 + [3,6]\ x_2 \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط

$$2x_1 + 3x_2 \leq [14,20]$$
$$2x_1 + x_2 \leq [10,16]$$
$$3x_2 \leq [12,18]$$
$$3x_1 \leq [15,21]$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

نشكل الجدول المزدوج للنموذج والنموذج المرافق:

			النموذج الأصلي		
		تابع الهدف NZ / القيود	$[5,8]\,x_1 + [3,6]\,x_2$		Max / عمود الثوابت
المتحولات	y_1	1	$2x_1 + 3x_2$	$\leq$	$[14,20]$
	y_2	2	$2x_1 + x_2$	$\leq$	$[10,16]$
	y_3	3	$3x_2$	$\leq$	$[12,18]$
	y_4	4	$3x_1$	$\leq$	$[15,21]$
		قيود عدم السلبية	x_1, x_2	$\geq$	0
			النموذج المرافق		
		تابع الهدف NL / القيود	$[14,20]y_1 + [10,16]y_2 + [12,18]y_3 + [15,21]y_4$		Min / عمود الثوابت
		1	$2y_1 + 2y_2 + 3y_4$	$\geq$	$[5,8]$
		2	$3y_1 + y_2 + 3y_4$	$\geq$	$[3,6]$
		قيود عدم السلبية	y_1, y_2, y_3, y_4	$\geq$	0

جدول رقم (4) النموذج الأصلي ونموذجه المرافق

في الجدول الآتي كتبنا النموذجين بالشكل القياسي:

		النموذج الأصلي			
		تابع الهدف NZ / القيود	$[5,8]\ x_1 + [3,6]\ x_2 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4$		Max / عمود الثوابت
المتحولات	y_1	1	$2x_1 + 3x_2 + u_1$	$=$	$[14,20]$
	y_2	2	$2x_1 + x_2 + u_2$	$=$	$[10,16]$
	y_3	3	$3x_2 + u_3$	$=$	$[12,18]$
	y_4	4	$3x_1 + u_4$	$=$	$[15,21]$
		قيود عدم السلبية	$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4$	$\geq$	0
		النموذج المرافق			
		تابع الهدف NL / القيود	$[14,20]y_1 + [10,16]y_2 + [12,18]y_3 + [15,21]y_4 + 0v_1 + 0v_2$		Min / عمود الثوابت
		1	$2y_1 + 2y_2 + 3y_4 - v_1$	$=$	$[5,8]$
		2	$3y_1 + y_2 + 3y_4 - v_2$	$=$	$[3,6]$
		قيود عدم السلبية	$y_1, y_2, y_3, y_4, v_1, v_2$	$\geq$	0

جدول رقم (5) الشكل القياسي للنموذج الأصلي والنموذج المرافق

نلاحظ من الجدول أن الشكل القياسي للنموذج الأصلي يتضمن قاعدة جاهزة من المتحولات الإضافية u_1, u_2, u_3, u_4، أما بالنسبة للنموذج المرافق لا يوجد قاعدة جاهزة لذلك نقوم بضرب القيدين بـ (-1) فنحصل على الشكل القاعدي للنموذج المرافق والجدول التالي يوضح الشكل القاعدي للنموذجين الأصلي والمرافق:

المتحولات				
	النموذج الأصلي			
	تابع الهدف NZ / القيود	$[5,8]\ x_1 + [3,6]\ x_2 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4$		Max / عمود الثوابت
y_1	1	$2x_1 + 3x_2 + u_1$	$=$	$[14,20]$
y_2	2	$2x_1 + x_2 + u_2$	$=$	$[10,16]$
y_3	3	$3x_2 + u_3$	$=$	$[12,18]$
y_4	4	$3x_1 + u_4$	$=$	$[15,21]$
	قيود عدم السلبية	$x_1, x_2, u_1, u_2, u_3, u_4$	$\geq$	0
	النموذج المرافق			
	تابع الهدف NL / القيود	$[14,20]y_1 + [10,16]y_2 + [12,18]y_3 + [15,21]y_4 + 0v_1 + 0v_2$		Min / عمود الثوابت
	1	$-2y_1 - 2y_2 - 3y_4 + v_1$	$=$	$-[5,8]$
	2	$-3y_1 - y_2 - 3y_4 + v_2$	$=$	$-[3,6]$
	قيود عدم السلبية	$y_1, y_2, y_3, y_4, v_1, v_2$	$\geq$	0

جدول رقم (6) الشكل القاعدي للنموذج الأصلي والنموذج المرافق

نضع النموذجين في جدول خوارزمية السيمبلكس المعدلة نحصل على الجدول الآتي:

			حسب النموذج الأصلي		
			$-v_1$	$-v_2$	
		المتحولات غير القاعدي / المتحولات القاعدية	x_1	x_2	تابع الهدف للنموذج المرافق NB_i
المتحولات غير القاعدية للنموذج المرافق	y_1	u_1	2	3	[14,20]
	y_2	u_2	2	1	[10,16]
	y_3	u_3	0	3	[12,18]
	y_4	u_4	3	0	[15,21]
		تابع الهدف للنموذج الأصلي Nc_i	[5,8]	[3,6]	$L-0$ $Z-0$

			حسب النموذج المرافق				
			u_1	u_2	u_3	u_4	
		المتحولات غير القاعدي / المتحولات القاعدية	y_1	y_2	y_3	y_4	تابع الهدف للنموذج الأصلي Nc_i
المتحولات غير القاعدية للنموذج	x_1	v_1	-2	-2	0	-3	$-[5,8]$
	x_2	v_2	-3	-1	-3	0	$-[3,6]$
		تابع الهدف للنموذج المرافق NB_i	[14,20]	[10,16]	[12,18]	[15,21]	$Z-0$ $L-0$

جدول رقم (7) الجدول المزدوج للنموذجين الأصلي والمرافق وفق خوارزمية السيمبلكس المعدلة

لمرحلة الأولى:

1- بالنسبة للنموذج الأصلي:

بما أن القيم في عمود الثوابت جميعها موجبة ندرس القيم في سطر تابع الهدف ونحدد القيمة الموجبة الأكبر نجد

$$\text{Max}([5,8],[3,6]) = [5,8]$$

وهي مقالة للمتحول x_1 هذا يعني أنه سيدخل الى القاعدة لنحدد العنصر الذي سيخرج من القاعدة نحسب المؤشر θ حيث:

$$\theta \in Min\left[\frac{[14,20]}{2},\frac{[10,16]}{2},\frac{[15,21]}{3}\right] = \frac{[15,21]}{3} = [5,7]$$

نجد أن عمود الارتكاز هو عمود المتحول غير القاعدي x_1 ، أي أن المتحول x_1 سيدخل الى القاعدة بدلا من المتحول u_4 ، وعنصر الارتكاز هو العنصر الناتج من تقاطع سطر الارتكاز وعمود الارتكاز وهو (3)

نجري التبديل بين المتحولين باستخدام خوارزمية السيمبلكس المعدلة.

2- بالنسبة للنموذج المرافق:

ندرس عناصر سطر تابع الهدف نلاحظ أن جميع القيم موجبة لذلك ندرس عناصر عمود الثوابت نجد ان جميعها قيم سالبة نختار اكثرها سالبية وهو ([5,8]−) هو سطر المتحول القاعدي v_1 فيكون سطره هو سطر الارتكاز ولتحديد عمود الارتكاز وعنصر الارتكاز نحسب المؤشر θ' حيث:

$$\theta' \in Max\left[\frac{[14,20]}{-2},\frac{[10,16]}{-2},\frac{[15,21]}{-3}\right] = \frac{[15,21]}{-3}$$

فيكون عمود المتحول غير القاعدي u_4 هو عمود الارتكاز أي أن المتحول u_4 سيدخل الى القاعدة بدلا من المتحول v_1 وعنصر الارتكاز هو العنصر الناتج من تقاطع سطر الارتكاز وعمود الارتكاز وهو $(\mathbf{3}-)$ نجري التبديل بين المتحولين باستخدام خوارزمية السيمبلكس المعدلة، من (1) و(2) نحصل على الجدول المزدوج الآتي:

			حسب النموذج الأصلي		
			$-y_4$	$-v_2$	
		المتحولات غير القاعدي / المتحولات القاعدية	u_4	x_2	تابع الهدف للنموذج المرافق NB_i
المتحولات غير القاعدية للنموذج المرافق	y_1	u_1	$\frac{-2}{3}$	3	$[4,6]$
	y_2	u_2	$\frac{-2}{3}$	1	$[0,4]$
	y_3	u_3	0	3	$[12,18]$
	v_1	x_1	$\frac{1}{3}$	0	$[5,7]$
		تابع الهدف للنموذج الأصلي Nc_i	$\left[\frac{-8}{3},\frac{-5}{3}\right]$	$[3,6]$	$L-[25,56]$ $Z-[25,56]$

			حسب النموذج المرافق				
			u_1	u_2	u_3	x_1	
		المتحولات غير القاعدي / المتحولات القاعدية	y_1	y_2	y_3	v_1	تابع الهدف للنموذج الأصلي Nc_i
المتحولات غير القاعدية للنموذج	u_4	y_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	$\left[\frac{8}{3},\frac{5}{3}\right]$
	x_2	v_2	-3	-1	-3	0	$-[3,6]$
		تابع الهدف للنموذج المرافق NB_i	$[4,6]$	$[0,4]$	$[12,18]$	$[5,7]$	$Z-[25,56]$ $L-[25,56]$

جدول رقم (8) الجدول المزدوج للمرحلة الأولى الحل حسب للنموذجين الأصلي والمرافق

المرحلة الثانية:

نطبق معيار توقف الخوارزمية

1- بالنسبة للنموذج الأصلي:

بما أن القيم في عمود الثوابت جميعها موجبة ندرس القيم في سطر تابع الهدف نلاحظ أنه يوجد قيمة موجبة هي [3,6] أي أننا لم نصل بعد الى الحل الأمثل، لذلك نحدد عمود الارتكاز وهو عمود المتحول x_2 المقابل للقيمة الموجبة الوحيدة في سطر تابع الهدف [3,6] ومن أجل تحديد سطر الارتكاز وعنصر الارتكاز نحسب المؤشر θ حيث:

$$\theta \in \mathrm{Min}\left[\frac{[4,6]}{3},\frac{[0,4]}{1},\frac{[12,18]}{3}\right]=\frac{[4,6]}{3}=[\frac{4}{3},2]$$

وهي مقابلة للعنصر القاعدي u_1 ، فيكون سطره هو سطر الارتكاز ويكون عنصر الارتكاز هو $(\mathbf{3})$ ، نبدل بين المتحولين باستخدام خوارزمية السيمبلكس المعدلة.

1- بالنسبة للنموذج المرافق:

ندرس عناصر سطر تابع الهدف نلاحظ أن جميع القيم موجبة لذلك ندرس عناصر عمود الثوابت نجد انه يوجد قيمة سالبة وحيدة هي $(-[3,6])$ هي سطر المتحول القاعدي v_2 فيكون سطره هو سطر الارتكاز ولتحديد عمود الارتكاز وعنصر الارتكاز نحسب المؤشر θ' حيث:

$$\theta' \in Max\left[\frac{[4,6]}{-3},\frac{[0,4]}{-1},\frac{[12,18]}{-3}\right]=\frac{[4,6]}{-3}$$

فيكون عمود المتحول غير القاعدي y_1 هو عمود الارتكاز أي أن المتحول y_1 سيدخل الى القاعدة بدلا من المتحول v_2 وعنصر الارتكاز هو العنصر الناتج من تقاطع سطر الارتكاز وعمود الارتكاز وهو (-3) نجري التبديل بين المتحولين باستخدام خوارزمية السيمبلكس المعدلة، من (1) و(2) نحصل على الجدول المزدوج التالي:

			حسب النموذج الأصلي		
			$-y_4$	$-y_1$	
		المتحولات غير القاعدية / المتحولات القاعدية	u_4	u_1	تابع الهدف للنموذج المرافق NB_i
المتحولات غير القاعدية للنموذج المرافق	v_2	x_2	$\frac{-2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\left[\frac{4}{3},2\right]$
	y_2	u_2	$\frac{-4}{9}$	$\frac{-1}{3}$	$\left[\frac{4}{3},2\right]$
	y_3	u_3	$\frac{2}{3}$	-1	$[8,12]$
	v_1	x_1	1	0	$[5,7]$
		تابع الهدف للنموذج الأصلي Nc_i	$[-6,-1]$	$[-2,-1]$	$L-[29,68]$ $Z-[29,68]$

			حسب النموذج المرافق				
			x_2	u_2	u_3	x_1	
		المتحولات غير القاعدية / المتحولات القاعدية	v_2	y_2	y_3	v_1	تابع الهدف للنموذج الأصلي Nc_i
المتحولات غير القاعدية للنموذج	u_4	y_4	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{-2}{3}$	-1	$[-6,-1]$
	u_1	y_1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$[-2,-1]$
		تابع الهدف للنموذج المرافق NB_i	$\left[\frac{4}{3},2\right]$	$\left[\frac{4}{3},2\right]$	$[8,12]$	$[5,7]$	$Z-[29,68]$ $L-[29,68]$

جدول رقم (9) الجدول الخوارزمية المزدوجة للمرحلة الثانية

نطبق معيار توقف الخوارزمية:

1- بالنسبة للنموذج الأصلي نقوم بدراسة عناصر سطر تابع الهدف الى ان يتحقق معيار توقف الخوارزمية وهو عدم وجود أي عنصر موجب

2- بالنسبة للنموذج المرافق ندرس عناصر عمود الثوابت أيضا الى أن يتحقق معيار توقف الخوارزمية وهي عدم وجود أي عنصر سالب

نجد أن المعيار قد تحقق وبالتالي توصلنا الى حصلنا الحل الأمثل

الحل الأمثل للنموذج الأصلي هو:

$$x_2^* \in \left[\frac{4}{3}, 2\right] \;, u_2^* \in \left[\frac{4}{3}, 2\right] \;, u_3^* \in [8,12] \,, x_1^* \in [5,7] \;, u_1^* = u_4^* = 0$$

ويقابل قيمة لتابع الهدف هي:

$$Z^* = Max\, Z \in [29,68]$$

الحل الأمثل للنموذج المرافق هو:

$$y_1^* \in [1,2] \;, y_4^* \in [1,6] \;, v_2^* = y_2^* = y_3^* = v_1^* = 0$$

ويقابل قيمة لتابع الهدف هي:

$$L^* = MinL \in [29,166]$$

نلاحظ أن:

$$Z^* = Max\, Z \in [29,68] \leq L^* = MinL \in [29,166]$$

هذا الحل مقبول وذلك حسب النظرية التالية:

إذا كان $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حلاً مقبولاً للنموذج الأصلي من نوع Max وكان $(y_1, y, \dots, y_m)$حلا مقبولا للنموذج المرافق من نوع Min فإن قيمة تابع الهدف

للنموذج الأصلي لاتتجاوز قيمة تابع الهدف للنموذج المرافق عند هذين الحلين أي يكون

$$\sum_{j=1}^{n} Nc_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} Nb_i y_i$$

7-3- التفسير الاقتصادي للنماذج المرافقة:

نوضح التفسير الاقتصادي للنموذج المرافق من خلال المثال التالي:

مثال:

يريد مصنع نقل منتجاته من مخزنيين إلى ثلاثة مراكز للبيع بالمفرق وبأقل تكلفة ممكنة ونوضح بالجدول التالي البيانات التي قدمها المسؤول في المصنع:

مراكز البيع / المخازن	B_1	B_2	B_3	الكميات المتوفرة a_i
A_1	[1,3]	[2,4]	[0,3]	300
A_2	[4,6]	[1,4]	[1,5]	600
الكميات المطلوبة b_j	200	300	400	900 / 900

كان طلب المسؤول عن إدارة المصنع خطة نقل ذات تكلفة أصغرية بحيث يتم تلبية طلبات مراكز التوزيع من الكميات المتوفرة

إن المسألة السابقة هي مسألة نقل متوازنة لأن

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 900$$

لصياغة النموذج الرياضي

نفرض x_{ij} الكمية المنقولة من المخزن i حيث $i = 1,2$ إلى مركز التوزيع jحيث $j = 1,2,3$ بذلك نحصل على النموذج الخطي التالي:

أوجد

$$L \in [1,3]x_{11} + [2,4]x_{12} + [0,3]x_{13} + [4,6]x_{21} + [1,4]x_{22} + [1,5]x_{23} \longrightarrow Min$$

ضمن القيود

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 300$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{23} \leq 600$$
$$x_{11} + x_{21} \geq 200$$
$$x_{12} + x_{22} \geq 300$$
$$x_{13} + x_{23} \geq 400$$
$$x_{\text{ij}} \geq 0 \;\; ; \;\; \text{i} = 1,2 \;\; , \text{j} = 1,2,3$$

نكتب النموذج بالصيغة المتناظرة التالية:

بما أن تابع الهدف تابع تقليل فيجب أن تكون جميع القيود من نوع أكبر من أو يساوي عندها يكتب النموذج بالصيغة المتناظرة التالية:

أوجد

$$L \in [1,3]x_{11} + [2,4]x_{12} + [0,3]x_{13} + [4,6]x_{21} + [1,4]x_{22} + [1,5]x_{23} \longrightarrow Min$$

ضمن القيود

$$-x_{11} - x_{12} - x_{13} \geq -300$$
$$-x_{11} - x_{21} - x_{23} \geq -600$$
$$x_{11} + x_{21} \geq 200$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 300$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 400$$

$$x_{ij} \geq 0 \ ; \ \ i = 1,2 \ \ , j = 1,2,3$$

نشكل النموذج المرافق نحصل على النموذج الخطي التالي:

$$Z = -300y_1 - 600y_2 + 200y_3 + 300y_4 + 400y_5 \longrightarrow Max$$

ضمن القيود

$$-y_1 + y_3 \leq [1,3]$$

$$-y_1 + y_4 \leq [2,4]$$

$$-y_1 + y_5 \leq [0,3]$$

$$-y_2 + y_3 \leq [4,6]$$

$$-y_2 + y_4 \leq [1,4]$$

$$-y_2 + y_5 \leq [1,5]$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

نقوم بصياغة نص مناسب للنموذج المرافق انطلاقا من نص المسألة الأصلية:

واضح من النموذج الأصلي أن هدف المصنع هو نقل كامل منتجاته بأقل تكلفة ممكنة:

نص المسألة حسب النموذج المرافق:

قدمت شركة نقل لمصنع عرض بأنها ستقوم بنقل كامل الكمية الموجودة في المخزن الأول أي 300 وحدة بسعر قدره y_1 وحدة نقدية للوحدة الواحدة ونقل كامل الكمية المتوفرة في المخزن الثاني 600 بسعر قدره y_2 وحدة نقدية للوحدة

الواحدة وتعهدت الشركة بأنها ستقوم بإيصال 200 , 300 , 400 وحدة إلى مراكز بيع المفرق الثلاثة على الترتيب.

حيث يتم ببيع هذه الوحدات في هذه المراكز بسعر قدره y_3, y_4, y_5 وحدة نقدية على الترتيب.

حتى تتمكن من اقناع المسؤول في المعمل بأنه إذا قبل بعرضها ستكون تكلفة النقل في مصنعه أقل من التكلفة في حال قام هو بعملية النقل أن يقوم هو بعملية النقل

استخدمت القيود في النموذج المرافق وأجرت معه النقاش التالي:

أنت تدفع تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصنع الأول إلى مركز البيع الأول مبلغ قيمته تنتمي إلى المجال [1,3] ولكن لو استخدمت شركة النقل فإن التكلفة هي $y_3 - y_1$ ، ولدينا من القيد الأول في النموذج المرافق

$$y_3 - y_1 \leq [1,3]$$

وهنا سيلاحظ المسؤول في المعمل أن عرض شركة النقل عرض مناسب.

بنفس الأسلوب نناقش جميع قيود النموذج المرافق، النتيجة التي سيصل لها المسؤول في المصنع هي ان تكلفة النقل على أي مسار في حال تم قبول عرض شركة النقل أقل من أو تساوي التكلفة التي سيدفعها لو قام هو بنفسه بعملية النقل

وشركة النقل ستعتمد القيم y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 لأنها ستحقق من خلالها ربح أعظمي حيث أن ربح شركة النقل يحسب من العلاقة:

$$-300y_1 - 600y_2 + 200y_3 + 300y_4 + 400y_5$$

وهي نفسها تابع الهدف للنموذج المرافق، أي أن النموذج المرافق يمثل شركة النقل التي تحاول زيادة أرباحها الى أعظم حد ممكن

إن النظرية الأساسية للترافق تنص على أن القيم المثلى للنموذج والنموذج المرافق دوما متساوية فإن المصنع لا يوفر أي مال لأنه سيدفع لشركة النقل كلفة النقل الأصغرية ولكنه سيوفر متاعب حل النموذج الأصلي لتعين التكلفة الأصغرية للنقل، وبالنسبة لشركة النقل فقد ضمنت صفقة نقل البضائع بربح أعظمي.

الخاتمة:

من الدراسة السابقة توصلنا إلى حل للنموذجين الأصلي والمرافق بنفس الوقت، وهي قيم نيتروسوفيكية نعلم من خلالها الحد الدنى والحد الأعلى للربح الذي يمكن أن نحصل عليه، لأن تفسير الحل الأمثل للنموذج الأصلي هو انه يعطينا أفضل خطة للإنتاج تجعل قيمة ذلك الإنتاج أكبر ما يمكن وذلك ضمن الإمكانيات المتاحة، أما الحل الأمثل للنموذج المرافق فهو يعطينا أفضل قيم لأسعار المواد الأولية التي إذا استخدمت بدون هدر ستعطينا أيضا أفضل خطة للإنتاج، والنتيجة هي الربح الأعظمي.

الفصل الثامن

بعض التطبيقات على النماذج الخطية النيتروسوفيكية

مقدمة.

8-1- مسألة تركيب الخلائط.

8-2- مسألة خليط المنتجات.

8-3- نموذج الاستخدام الأمثل للأراضي الزراعية.

8-4- مسألة تعيين موقع مستودع.

8-5- مسألة ميزانية رأس المال.

8-6- مسألة تعيين مفتشين.

8-7- مسألة تحديد التكلفة.

الخاتمة.

الفصل الثامن

بعض التطبيقات على النماذج الخطية النيتروسوفيكية

مقدمة:

يعد أسلوب البرمجة الخطية من أكثر اساليب بحوث العمليات المستخدم في أغلب المجالات العملية، ويعتمد هذا الأسلوب على تحويل المسألة قيد الدراسة إلى نموذج رياضي خطي ومن ثم نقوم بإيجاد الحل الأمثل باستخدام الخوارزميات الخاصة لحل النماذج الخطية، ان هذا الحل يساعد صناع القرار المسؤولين عن إدارة المنظومة التي تعمل وفق هذا النموذج على اتخاذ قرارات سليمة مبنية على أسس علمية، إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة انشاء النموذج الخطي ، أي التعبير عن الحالة قيد الدراسة بعلاقات رياضية ، ومن أجل صياغة النموذج الخطي يجب توفر العناصر الأساسية التالية:

1- تحديد الهدف بصورة كمية، ويعبر عنه بتابع الهدف وهو عبارة عن التابع المطلوب ايجاد القيمة العظمى أو الصغرى له، أي يجب أن يكون بإمكاننا التعبير عن الهدف كميا كأن يكون الهدف تحقيق أكبر ربح أو تحقيق أقل تكلفة.

2- تحديد القيود: يجب أن تكون القيود التي تعبر عن الموارد المتاحة محددة، أي يجب أن تكون الموارد قابلة للقياس، ويتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو مساويات.

3- تحديد البدائل المختلفة: ويشير هذا العنصر الى أن يكون للمشكلة أكثر من حل واحد حتى يمكن تطبيق البرمجة الخطية، لأنه لوكان للمشكلة حل

واحد لما كانت هناك ضرورة لاستخدام البرمجة الخطية التي تتركز فائدتها في المساعدة على اختيار أفضل حل من بين الحلول المقبولة.

نقدم في هذا الفصل بعض المسائل التي تؤول إلى نماذج خطية نيتروسوفيكية، أي أننا سنأخذ بعض أو كل بيانات المسألة قيم نيتروسوفيكية.

8-1- مسألة تركيب الخلائط:

نقصد بالخلائط أي شيء يتم تركيبه من عدد من المواد مثل الوجبات الغذائية – الدواء – أي خليطة معدنية --- ويكون هنا المطلوب هو اختيار المواد التي تدخل بتركيب هذا الخليط بحيث تكون تكلفة الانتاج أقل ما يمكن.

النص العام للمسألة:

نريد تركيب خليط من المواد الأولية $A_1, A_2, \dots, A_n$ وسعر الوحدة الواحدة من كل منها يساوي $NC_1, NC_2, \dots, NC_n$ على الترتيب ويشترط أن تتضمن الوجبة مقداراً من العناصر الهامة $B_1, B_2, \dots, B_m$ على ألا تقل الكمية من كل عنصر من العناصر $B_1, B_2, \dots, B_m$ عن $Nb_1, Nb_2, \dots, Nb_m$ وحدة على الترتيب المطلوب ايجاد المقادير اللازمة من كل مادة من المواد $A_1, A_2, \dots, A_n$ التي يجب إدخالها في الخليط بحيث تكون تكلفته أقل ما يمكن علماً بأن ما تحتويه كل مادة من المواد $A_1, A_2, \dots, A_n$ من كل عنصر من العناصر $B_1, B_2, \dots, B_m$ موضح بالجدول الآتي:

العناصر \ المواد الأولية	A_1	A_2	………	A_n	NB
B_1	a_{11}	a_{12}	……….	a_{1n}	Nb_1
B_2	a_{21}	a_{22}	……….	a_{2n}	Nb_2
……………….	………..	…………..	………..	…………..	
B_m	a_{m1}	a_{m2}	………..	a_{mn}	Nb_m

جدول رقم (1) المواد الأولية والعناصر لمسألة تركيب الخلائط

إن $Nc_j = c_j \pm \varepsilon_j$ و $j = 1,2,---,n$ حيث ε_j هو اللاتحديد وممكن أن يكون $\varepsilon_j \in [\lambda_{1j}, \lambda_{2j}]$ أو $\varepsilon_j \in \{\lambda_{1j}, \lambda_{2j}\}$ أو … غير ذلك

أيضاً القيم التي تعبر عن كميات العناصر التي يجب أن تتوفر في الخليط $Nb_i = b_i \pm \delta_i$ و $i = 1,2,\dots,m$ حيث δ_i هو اللاتحديد وممكن أن يكون $\delta_i \in [\mu_{1i}, \mu_{2i}]$ أو $\delta_i \in \{\mu_{1i}, \mu_{2i}\}$ أو …غير ذلك.

بناء النموذج الرياضي:

نرمز للمقادير المطلوبة من كل مادة من المواد $A_1, A_2, \dots, A_n$ بـ $x_1, x_2, \dots, x_n$

ونضع جميع المعلومات بالجدول الآتي:

العناصر \ المواد الأولية	$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{A_2}$	**………**	$\boldsymbol{A_n}$	**المقادير الدنيا**
B_1	a_{11}	a_{12}	………	a_{1n}	Nb_1
B_2	a_{21}	a_{22}	………	a_{2n}	Nb_2
………	………	………	………	………	………
B_m	a_{m1}	a_{m2}	………	a_{mn}	Nb_m
سعر الوحدة الواحدة	Nc_1	Nc_2	………	Nc_n	
المقادير المطلوبة	x_1	x_2	………	x_n	

جدول رقم (2) المعطيات العامة لمسألة تركيب الخلائط

يكون المطلوب في المسألة تحديد قيمة لكل من المتحولات $x_1, x_2, \dots, x_n$ بحيث يأخذ تابع الهدف أصغر قيمة، وذلك ضمن الشروط المفروضة

بناء على معطيات المسألة يكتب تابع الهدف بالصيغة الآتية:

$$NL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n$$

صياغة الشروط بشكل رياضي نقدم التوضيح الآتي:

كل واحدة من المادة A_1 تعطينا a_{11} واحدة من العنصر B_1 وبذلك نجد أن x_1 واحدة تعطينا $a_{11}x_1$ واحدة من العنصر B_1 وهكذا نجد بالنسبة لبقية المواد والعناصر وبالتالي يكون الشرط المتعلق بالعنصر B_1 كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq Nb_1$$

نتابع بنفس الطريقة بالنسبة لجميع المواد وجميع العناصر نحصل على النموذج الرياضي الآتي:

$$MinNL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n$$

ضمن الشروط

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq Nb_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq Nb_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 - - - +a_{mn}x_n \geq Nb_m$$

$$x_1, x_2, - - - -, x_n \geq 0$$

ويكتب بالشكل المختصر الآتي:

$$\text{Min}\, NL = \sum_{j=1}^{n} (c_j \pm \varepsilon_j) x_j$$

ضمن القيود

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \pm \delta_i \quad ; i = 1,2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

حيث $j = 1,2, \dots, n \,, i = 1,2, \dots, m$ ، $c_j \pm \varepsilon_j \;,\; b_i \pm \delta_i, \;\; a_{ij},$ بيانات المسألة وهي قيم نيتروسوفيكية.

مثال1:

تريد مدرسة تأمين وجبة افطار للطلاب مكونة من أربعة أنواع من المواد الغذائية هي A_1, A_2, A_3, A_4 وأن سعر الوحدة الواحدة من كل منها Nc_1, Nc_2, Nc_3, Nc_4 على الترتيب، ولنفترض أنه يشترط أن تتضمن الوجبة مقدارا معينا من العناصر الغذائية الهامة B_1 البروتينات B_2 النشويات B_3 الكربوهيدرات على ألا تقل كمية البروتين فيها عن Nb_1 واحدة وكمية النشويات عن Nb_2 واحدة وكمية الكربوهيدرات عن Nb_3 واحدة، المطلوب ايجاد المقادير اللازمة من المواد A_1, A_2, A_3, A_4 التي يجب إدخالها في الوجبة بحيث تكون تكلفتها أقل ما يمكن وتحتوي على الأقل الحد الأدنى من العناصر الغذائية المطلوب توفرها في الوجبة وذلك إذا علمت أن من كل مادة من المواد وما تحتويه من العناصر الغذائية الهامة المطلوبة موضحة بالجدول الآتي:

حيث $Nc_j = c_j \pm \varepsilon_j$ و $j = 1,2,3,4$

حيث ε_j هو اللاتحديد

وممكن أن يكون $\varepsilon_j \in [\lambda_{1j}, \lambda_{2j}]$ أو $\varepsilon_j \in \{\lambda_{1j}, \lambda_{2j}\}$ أو ...غير ذلك

أيضاً القيم التي تعبر عن كميات العناصر الغذائية التي يجب أن تتوفر في الوجبة $Nb_i = b_i \pm \delta_i$ و $i = 1,2,3$ حيث δ_i هو اللاتحديد وممكن أن يكون $\delta_i \in [\mu_{1i} ,\mu_{2i}]$ أو $\delta_i \epsilon \{\mu_{1i} ,\mu_{2i}\}$ أو ...غير ذلك.

نرمز للمقادير المطلوبة من كل من المواد A_1, A_2, A_3, A_4 بالرموز x_1, x_2, x_3, x_4 على الترتيب ونضع المعلومات الواردة في نص المسألة بجدول كما يلي:

المواد الغذائية / العناصر الغذائية	A_1	A_2	A_3	A_4	المقادير الدنيا
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	Nb_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	Nb_2
B_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	Nb_3
سعر الوحدة الواحدة	Nc_1	Nc_2	Nc_3	Nc_4	
المقادير المطلوبة	x_1	x_2	x_3	x_4	

جدول رقم (3) البيانات الأساسية لبناء النموذج الخطي للمثال 1

تابع الهدف:

من الجدول السابق نجد

$$NL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + Nc_3x_3 + Nc_4x_4$$

شروط العناصر الغذائية:

شرط البروتينات العنصر الغذائي B_1

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq Nb_1$$

شرط النشويات العنصر الغذائي B_2

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geq Nb_2$$

شرط الكربوهيدرات العنصر الغذائي B_3

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq Nb_3$$

شرط عدم السلبية:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

عندها يصبح النموذج الرياضي المناسب

أوجد أصغر قيمة للدالة

$$MinNL = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + Nc_3x_3 + Nc_4x_4$$

ضمن الشروط

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq Nb_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geq Nb_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq Nb_3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

للحصول على الحل الأمثل نستخدم احدى الخوارزميات السابقة الذكر.

8-2- مسألة خليط المنتجات:

المقصود بخليط المنتجات انتاج منتجات يدخل في تركيبها عدد من المواد الأولية ففي جميع المؤسسات الانتاجية حتى يكون سير العمل مثالي ويحقق لها الربح الاعظمي يجب أن تعتمد على دراسة علمية تحدد من خلالها الكميات التي يجب انتاجها من كل منتج من المنتجات وذلك باستخدام الموارد المتاحة بشكل مثالي بحيث يتم تأمين حاجة السوق وتحقيق ربح اعظمي ويمكن تقديم هذا النموذج

للطلاب كمثال على استخدام النماذج الخطية عندها يدرك الطلاب أن الأقلام والدفاتر والمقاعد والطاولات ووسائل النقل.. وغيرها من المنتجات التي يستخدمونها في حياتهم اليومية تم تصنيعها باستخدام اساليب بحوث العمليات التي تعتمد على بناء نموذج رياضي والحل الامثل لهذا النموذج هو الخطة المثالية التي يجب ان تعتمدها المؤسسة.

النص العام للمسألة:

مؤسسة انتاجية يمكنها انتاج $A_1, A_2, \dots, A_n$ من المنتجات ويدخل في تركيبها $B_1, B_2, \dots, B_m$ من المواد الأولية، الكميات المستخدمة من كل مادة من المواد الأولية في كل منتج من المنتجات موضحة بالجدول الآتي:

المواد الأولية / العناصر	A_1	A_2	………	A_n	NB
B_1	a_{11}	a_{12}	……….	a_{1n}	Nb_1
B_2	a_{21}	a_{22}	……….	a_{2n}	Nb_2
……………….	………..	…………..	………..	…………..	
B_m	a_{m1}	a_{m2}	………..	a_{mn}	Nb_m

جدول رقم (4) المواد الأولية والعناصر لمسألة خليط المنتجات

الكميات المتوفرة لدى المؤسسة من هذه المواد الاولية هي $Nb_1, Nb_2, \dots, Nb_m$ على الترتيب حيث $Nb_i = b_i \pm \delta_i$ و $i = 1,2, \dots, m$ حيث δ_i هو اللاتحديد وممكن أن يكون $\delta_i = [\mu_{1i}, \mu_{2i}]$ أو $\delta_i \in \{\mu_{1i}, \mu_{2i}\}$ أو … غير ذلك،

المطلوب ايجاد مقدار ما يجب انتاجه من كل منتج من المنتجات $A_1, A_2, \dots, A_n$

علماً أن الربح العائد من الوحدة الواحدة من كل منتج من المنتجات هو $NC_1, NC_2, \dots, NC_n$ على الترتيب حيث $Nc_j = c_j \pm \varepsilon_j$ و $j = 1,2, \dots, n$ حيث ε_j هو اللاتحديد وممكن أن يكون $\varepsilon_j \in [\lambda_{1j}, \lambda_{2j}]$ أو $\varepsilon_j \in \{\lambda_{1j}, \lambda_{2j}\}$ أو.. غير ذلك.

بناء النموذج الرياضي:

نرمز للكميات المنتجة من كل منتج من المنتجات $A_1, A_2, \dots, A_n$ بـ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ونضع جميع المعلومات بالجدول الآتي:

المنتجات / المواد الاولية	A_1	A_2	…………	A_n	الكميات المتوفرة
B_1	a_{11}	a_{12}	…………	a_{1n}	Nb_1
B_2	a_{21}	a_{22}	…………	a_{2n}	Nb_2
…………	…………	…………	…………	…………	…………
B_m	a_{m1}	a_{m2}	…………	a_{mn}	Nb_m
ربح الوحدة الواحدة	Nc_1	Nc_2	…………	Nc_n	
الكميات المنتجة	x_1	x_2	…………	x_n	

جدول رقم (5) البيانات النيتروسوفيكية للنموذج

يكون المطلوب في المسألة تحديد قيمة لكل من المتحولات $x_1, x_2, \dots, x_n$ بحيث يأخذ تابع الهدف أعظم قيمة، وذلك ضمن الشروط المفروضة

بناء على معطيات المسألة يكتب تابع الهدف بالصيغة الآتية:

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \dots + Nc_nx_n$$

صياغة الشروط بشكل رياضي نقدم التوضيح الآتي:

لإنتاج وحدة واحدة من المنتج A_1 يلزمنا a_{11} من المادة B_1 وبذلك نجد أن x_1 وحدة من المنتج A_1 تحتاج $a_{11}x_1$ وحدة من المادة B_1 وهكذا نجد بالنسبة لبقية المنتجات والمواد وبالتالي يكون الشرط المتعلق بالمادة B_1 كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq Nb_1$$

نتابع بنفس الطريقة بالنسبة لكل المنتجات وجميع المواد نحصل على النموذج الرياضي الآتي:

أوجد القيمة العظمى للدالة

$$MaxNZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + \cdots + Nc_nx_n$$

ضمن الشروط

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq Nb_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq Nb_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq Nb_m$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

وتكتب بالشكل المختصر الآتي:

$$\mathrm{M}axNZ = \sum_{j=1}^{n} (c_j \pm \varepsilon_j)x_j$$

ضمن الشروط

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \pm \delta_i \quad ; \quad i = 1,2,3 \dots\dots m$$
$$x_j \geq 0$$

حيث $a_{ij},\ j = 1,2,\dots,n\ , i = 1,2,\dots,m$ $\ c_j \pm \varepsilon_j\ ,\ \ b_i \pm \delta_i,$ ، بيانات المسألة وهي قيم نيتروسوفيكية.

مثال2:

يقوم مصنع لتصنيع الأقلام بإنتاج أربعة أنواع $S_4\ , S_3\ , S_2\ , S_1$ ويستخدم من أجل ذلك المواد الأولية الآتية $M_3\ , M_2, M_1$. ترغب إدارة المصنع في دراسة التنظيم الأمثل للإنتاج خلال فترة زمنية (شهر مثلاً) وتحديد الإنتاج الشهري لكل منتج من أجل تحقيق ربح أعظمي، علماً بأن الربح يتناسب طرداً مع عدد الوحدات المباعة من المنتجات. نوضح الكميات المتوفرة من المواد الأولية اللازمة لكل منتج والربح العائد بالجدول الآتي:

الكميات المتوفرة	S_4	S_3	S_2	S_1	المواد الغذائية / العناصر الغذائية
Nm_1	a_{14}	a_{13}	a_{12}	a_{11}	M_1
Nm_2	a_{24}	a_{23}	a_{22}	a_{21}	M_2
Nm_3	a_{34}	a_{33}	a_{32}	a_{31}	M_3

جدول رقم (6) بيانات المعطيات في المثال2

لبناء النموذج الرياضي نفرض x_1 عدد الوحدات المنتجة من S_1

x_2 عدد الوحدات المنتجة من S_2

x_3 عدد الوحدات المنتجة من S_3

x_4 عدد الوحدات المنتجة من S_4

خلال الفترة الإنتاجية (شهر مثلاً) نضع المعلومات في الجدول الآتي:

المواد الغذائية / العناصر الغذائية	S_1	S_2	S_3	S_4	الكميات المتوفرة
M_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	Nm_1
M_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	Nm_2
M_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	Nm_3
ربح الوحدة الواحدة	Nc_1	Nc_2	Nc_3	Nc_4	
المقادير المنتجة	x_1	x_2	x_3	x_4	

جدول رقم (7) معلومات أساسية لبناء النموذج الرياضي

من الجدول نلاحظ أن شرط المادة الأولية M_1:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \le Nm_1$$

شرط المادة الأولية M_2:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \le Nm_2$$

شرط المادة الأولية M_3:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \le Nm_3$$

بالإضافة إلى ذلك يجب أن تكون الكميات المنتجة غير سالبة أي:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

نحدد الآن تابع الهدف إذا تم إنتاج وحدات قدرها x_1 , x_2 , x_3 , x_4 من الأنواع على الترتيب فإن الربح خلال الفترة الإنتاجية سوف يكون:

$$NZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + Nc_3x_3 + Nc_4x_4$$

وعليه يكون النموذج الرياضي للمسالة:

أوجد القيمة العظمى للدالة

$$MaxNZ = Nc_1x_1 + Nc_2x_2 + Nc_3x_3 + Nc_4$$

ضمن الشروط

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq Nm_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leq Nm_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \leq Nm_3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

8-3- نموذج الاستخدام الأمثل للأراضي الزراعية:

نص المسألة:

لنفرض أنه لدينا n منطقة زراعية (سهلا أو مزروعة) مساحة كل منها تساوي $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ ونريد زرعتها بـ m نوعا من المحاصيل الزراعية لتأمين متطلبات المجتمع منها مع العلم أنه يلزمنا من المحصول $\boldsymbol{i}$ المقدار b_i ، إذا كان متوسط انتاجية واحدة المساحة في السهل j من المحصول i تساوي Na_{ij} طن\هكتار حيث $j = 1,2, \dots \dots, n$ و $i = 1,2, \dots \dots, m$، وكان الربح العائد من الوحدة الواحدة من المحصول $\boldsymbol{i}$ يساوي Np_i .

حيث Na_{ij} هي قيمة نيتروسوفيكية قيمة غير محددة غير معينة تعين تام ويمكن أن تكون أي جوار للقيمة a_{ij} ، أيضا Np_i التي يمكن أن تكون أي جوار للقيمة p_i.

المطلوب: تحديد مقدار المساحة اللازم زراعتها بكل محصول من المحاصيل وفي جميع المناطق لتحقيق أكبر ربح ممكن وتلبية حاجات المجتمع.

صياغة النموذج الرياضي:

نرمز بـ x_{ij} لمقدار المساحة من المنطقة j التي يجب زراعتها بالمحصول $\boldsymbol{i}$ ونضع بيانات المسألة في الجدول الآتي:

المناطق / المحاصيل	**1**	**2**	……	$\boldsymbol{n}$	**مقدار الطلب**	**مقدار الربح**
1	Na_{11} x_{11}	Na_{12} x_{12}	……	Na_{1n} x_{1n}	b_1	Np_1
2	Na_{21} x_{12}	Na_{22} x_{22}	……	Na_{2n} x_{2n}	b_2	Np_2
……	……	……	……	……	……	……
m	Na_{m1} x_{m1}	Na_{m2} x_{m2}	……	Na_{mn} x_{mn}	b_m	Np_m
مقدار المساحة المتوفرة	a_1	a_2	……	a_n		

جدول رقم (8) بيانات المسألة

عندها نجد أن الشروط المفروضة على المتحولات x_{ij} هي:

1- شروط المساحات:

يجب أن يكون اجمالي المساحة المخصصة لمختلف المحاصيل في المنطقة $\boldsymbol{j}$ مساويا a_j أي يجب أن يكون:

$$x_{11} + x_{12} + \cdots\cdots + x_{m1} = a_1$$
$$x_{12} + x_{22} + \cdots\cdots + x_{m2} = a_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \cdots\cdots + x_{mn} = a_n$$

2- شروط تلبية متطلبات المجتمع:

يجب ألا يقل اجمالي الانتاج من المحصول i في جميع المناطق عن المقدار b_i أي يجب أن يكون:

$$Na_{11}x_{11} + Na_{12}x_{12} + \cdots\cdots + Na_{1n}x_{1n} \geq b_1$$
$$Na_{21}x_{21} + Na_{22}x_{22} + \cdots\cdots + Na_{2n}x_{2n} \geq b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Na_{m1}x_{m1} + Na_{m2}x_{m2} + \cdots\cdots + Na_{mn}x_{mn} \geq b_m$$

ايجاد تابع الهدف:

نلاحظ ان الربح الحاصل من انتاج المحصول $\boldsymbol{i}$ فقط ومن جميع المناطق يساوي جداء الربح في الكمية ويساوي:

$$Np_i(Na_{i1}x_{i1} + Na_{i2}x_{i2} + \cdots\cdots + Na_{in}x_{in})$$

وبذلك نجد أن تابع الهدف الذي يعبر عن الربح الإجمالي الناتج عن جميع المحاصيل يساوي:

$$Z = Np_1\left(\sum_{j=1}^{n} Na_{1j}\ x_{1j}\right) + Np_2\left(\sum_{j=1}^{n} Na_{2j}\ x_{2j}\right) + \cdots + Np_m\left(\sum_{j=1}^{n} Na_{mj}\ x_{mj}\right) \to Max$$

مما سبق نحصل على النموذج الرياضي الآتي:

أوجد القيمة العظمى لـ

$$Z = Np_1\left(\sum_{j=1}^{n} Na_{1j}\ x_{1j}\right) + Np_2\left(\sum_{j=1}^{n} Na_{2j}\ x_{2j}\right) + \cdots + Np_m\left(\sum_{j=1}^{n} Na_{mj}\ x_{mj}\right) \to Max$$

ضمن الشروط:

$$x_{11}+x_{12}+\cdots\cdots+x_{m1}=a_1$$
$$x_{12}+x_{22}+\cdots\cdots+x_{m2}=a_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{1n}+x_{2n}+\cdots\cdots+x_{mn}=a_n$$
$$a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\cdots\cdots+a_{1n}x_{1n}\ge b_1$$
$$a_{21}x_{21}+a_{22}x_{22}+\cdots\cdots+a_{2n}x_{2n}\ge b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_{m1}+a_{m2}x_{m2}+\cdots\cdots+a_{mn}x_{mn}\ge b_m$$
$$x_{ij}\ge 0\quad ; i=1,2,\cdots\cdots,m\,, j=1,2,\cdots\cdots,n$$

مثال3:

لنفترض أننا نريد استغلال أربع مناطق زراعية A_1, A_2, A_3, A_4 ومساحة كل منها على الترتيب 60,150,20,10 ، وذلك بزراعتها بالمحاصيل الآتية: قمح، شعير، قطن، دخان، الشمندر، والتي نحتاج منها ما يلي: 800, 200,600,1000,2500 ولنفترض أن انتاجية المناطق من تلك المحاصيل وأسعارها معطية بالجدول الآتي:

المناطق / المحاصيل	A_1	A_2	A_3	A_4	الطلب	سعر الطن
قمح	{4,6}	4	3	6	2500	{1400,1600}
شعير	7	5	4	{3,5}	1000	{900,1100}
قطن	4	{9,11 }	8	5	600	{4500,6000}
دخان	6	{2,4}	0	0	200	{4000,5000}
شمندر	3	{10,14}	10	6	800	{400,700}
المساحة	60	150	20	10		

جدول رقم (9) بيانات المثال3

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة بحيث تكون قيمة الانتاج أكبر ما يمكن.

لصياغة النموذج الرياضي نستخرج الشروط الخطية الآتية:

شروط المساحة:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 10$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 15$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 100$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 50$$

شروط الطلب:

$$\{4,6\}x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} \geq 2500$$
$$7x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + \{3,5\}x_{24} \geq 1000$$
$$4x_{31} + \{9,11\}x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34} \geq 600$$
$$6x_{41} + \{2,4\}x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44} \geq 200$$
$$3x_{51} + \{10,14\}x_{52} + 10x_{53} + 6x_{54} \geq 800$$

شروط عدم السلبية:

$$x_{ij} \geq 0$$

تابع الهدف الذي يعبر عن قيمة الانتاج هو:

$$\begin{aligned} Z = \ & \{1400,1600\}(\{4,6\}x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14}) \\ & + \{900,1100\}(7x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + \{3,5\}x_{24}) \\ & + \{4500,6000\}(4x_{31} + \{9,11\}x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34}) \\ & + \{4000,5000\}(6x_{41} + \{2,4\}x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44}) \\ & + \{400,700\}(3x_{51} + \{10,14\}x_{52} + 10x_{53} + 6x_{54}) \\ & \rightarrow Max \end{aligned}$$

8-4- مسألة تعيين موقع مستودع:

المسألة الأولى: طلب مسؤول عن ادارة احدى الشركات من خبير في علم بحوث العمليات أن يساعده في الحصول على حل أمثل يحقق من خلاله أقل تكلفة للنقل والتشغيل لمستودعات يريد انشائها من أجل التوسع في عمل الشركة وقدم له معلومات صاغ من خلالها الخبير المسألة الآتية:

نص المسألة وفق مفاهيم علم النيتروسوفيك: تخطط شركة بيع بالمفرق للتوسع في نشاطاتها في منطقة معينة عن طريق إنشاء مستودعين جديدين يوضح الجدول الآتي المواقع المحتملة وعدد الزبائن وامكانية تلبية الطلب للمواقع حيث تم وضع (*) في حال كان الموقع يستطيع تلبة طلب الزبون ووضع (×) عكس ذلك ورمز بـ $\boldsymbol{Nc_{ij}}$ لكلفة نقل الوحدة الواحدة من الموقع $\boldsymbol{i}$ الى الزبون $\boldsymbol{j}$ حصل على الجدول الآتي:

الزبون / **الموقع**	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	* Nc_{11}	* Nc_{12}	×	* Nc_{14}
A_2	* Nc_{21}	* Nc_{22}	* Nc_{23}	* Nc_{24}
A_3	×	* Nc_{32}	* Nc_{33}	* Nc_{34}
طلبات الزبائن	D_1	D_2	D_3	D_4

جدول رقم (10) تكلفة النقل في حال اختيار الموقع

ومع توفر المعلومات الآتية لكل موقع من المواقع المرشحة للمستودعات

المعلومات / الموقع	كلفة التشغيل للوحدة الواحدة (وحدة نقدية)	رأس المال المستثمر الابتدائي (وحدة نقدية)	سعة الموقع
الأول	Np_1	k_1	A_1
الثاني	Np_2	k_2	A_2
الثالث	Np_3	k_3	A_3

جدول رقم (11) معلومات للتشغيل

المطلوب اختيار المواقع الملائمة للمستودعين التي تجعل التكاليف الكلية للاستثمار والتشغيل والنقل أصغر ما يمكن

بناء النموذج الرياضي:

إن لكل موقع كلفة رأسمال ثابتة مستقلة عن الكمية المخزنة في المستودع المشار إلى ذلك الموقع وله أيضا كلفة متغيرة متناسبة مع الكمية المنقولة، وبالتالي فإن الكلفة الكلية لإنشاء المستودع وتشغيله هي تابع غير خطي للكمية المخزنة وباستخدام المتحولات الصحيحة الثنائية يمكن صياغة مسألة تعيين موقع المستودع بشكل برنامج ذي أعداد صحيحة حيث نفرض أن المتحول الصحيح الثنائي $\boldsymbol{\delta_i}$ يرمز إلى قرار اختيار الموقع أو عدم اختياره وبعبارة أخرى

$$\boldsymbol{\delta_i} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{اذا اخترنا الموقع } \boldsymbol{i} \\ \mathbf{0} & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

لنفرض أن x_{ij} يرمز إلى الكمية المنقولة من الموقع i إلى الزبون j فيكون القيد المعبر عن قدرة الموقع الأول على تلبية الطلبات على الشكل الآتي:

$$x_{11} + x_{12} + x_{14} \leq A_1\delta_1$$

فعندما يكون $\delta_1 = 1$ يتم اختيار الموقع الأول ذو السعة A_1 بحيث أن الكمية المنقولة من الموقع الأول لايمكن أن تتجاوز سعة ذلك الموقع A_1 وعندما يكون $\delta_1 = 0$ تنعدم المتحولات غير السالبة x_{11}, x_{12}, x_{14} مباشرة مشيرة إلى عدم إمكانية الشحن من الموقع الأول

وبطريقة مماثلة نحصل على القيدين الآتيين للموقعين الثاني والثالث

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq A_2\delta_2$$
$$x_{31} + x_{33} + x_{34} \leq A_3\delta_3$$

ولاختيار موقعين بالضبط نحتاج إلى القيد الآتي:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2$$

بما أن δ_1 يمكنه أن يأخذ احدى القيمتين 0 أو 1 فقط فإن القيد الجديد سوف يجبر متحولين من بين المتحولات δ_i الثلاثة ليكونا مساويين الواحد

ويمكن كتابة القيود الخاصة بطلبات الزبائن على الشكل الآتي:

الزبون الأول $x_{11} + x_{21} = D_1$

الزبون الثاني $x_{12} + x_{22} + x_{32} = D_2$

الزبون الثالث $x_{23} + x_{33} = D_3$

الزبون الرابع $x_{14} + x_{24} + x_{34} = D_4$

ولكتابة تابع الهدف نلاحظ أن التكلفة الكلية للاستثمار والتشغيل والنقل بخصوص الموقع الأول هي على الشكل الآتي:

$$k_1\delta_1 + Np_1(x_{11} + x_{12} + x_{14}) + Nc_{11}x_{11} + Nc_{12}x_{12} + Nc_{14}x_{14}$$

وعندما لا نختار الموقع الأول ينعدم المتحول δ_1 وذلك يجبر المتحولات x_{11}، x_{12}، x_{14} على أن تصبح معدومة وبطريقة مشابهة يمكن كتابة توابع التكلفة للموقعين الثاني والثالث وبالتالي تختزل الصياغة الكاملة لمسألة تعيين موقع المستودع الى البرنامج الصحيح المختلط الآتي:

يراد جعل Z أصغرياً:

$$\begin{aligned} Z = k_1\delta_1 + Np_1(x_{11} + x_{12} + x_{14}) + Nc_{11}x_{11} + Nc_{12}x_{12} + Nc_{14}x_{14} \\ + k_2\delta_2 + Np_2(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) + Nc_{21}x_{21} \\ + Nc_{22}x_{22} + Nc_{23}x_{23} + Nc_{24}x_{24} + k_3\delta_3 \\ + Np_3(x_{32} + x_{33} + x_{34}) + Nc_{32}x_{32} + Nc_{33}x_{33} \\ + Nc_{34}x_{34} \end{aligned}$$

مع مراعاة القيود الآتية:

$$x_{11} + x_{12} + x_{14} \leq A_1\delta_1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq A_2\delta_2$$

$$x_{31} + x_{33} + x_{34} \leq A_3\delta_3$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2$$

$$x_{11} + x_{21} = D_1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = D_2$$

$$x_{23} + x_{33} = D_3$$

δ_i متحول صحيح من أجل $i = 1,2,3$

$x_{ij} \geq 0\ ;\ i = 1,2,3\ \ and\ j = 1,2,3,4$

8-5- مسألة ميزانية رأس المال:

وكان الطلب الثاني الموجه من قبل المسؤول كيف أستطيع اختيار المشاريع المناسبة لتشغيل رأسمال محدود متوفر في الشركة من خلال عدد من المشاريع المطروحة فمن خلال المعلومات التي قدمها المسؤول عن ادارة الشركة قام الخبير بصياغة المسألة الآتية:

تخطط شركة لصرف رأسمالها خلال الفترات T_j حيث $j = 1, 2, \dots, \mathrm{n}$ القادمة ، ويوجد A_i مشروع مقترح حيث $i = 1, 2, \dots, \mathrm{m}$ مقابل رأسمال محدود B_j المتوافر للاستثمار في الفترة j ، وعند اختيار أي مشروع i يصبح بحاجة الى رأس مال معين في كل فترة j نرمز له بـ Na_{ij} وهي قيمة نيتروسوفيكية، تقاس قيمة كل مشروع بدلالة تدفق السيولة الموافق للمشروع في كل فترة محسوما منه قيمة التضخم ويدعى ذلك صافي القيمة الحالية net present value (NPV) نرمز لها بـ $\mathrm{Nv_i}$ ، وعليه يمكن تنظيم الجدول الآتي:

الفترة / المشروع	T_1	T_2	…………	T_n
A_1	Na_{11}	Na_{12}	…………	Na_{11}
A_2	Na_{21}	Na_{22}	…………	$Na_{2\mathrm{n}}$
…………	…………	…………	…………	…………
A_m	Na_{m1}	Na_{m2}	…………	Na_{mn}
رأس المال المحدد	B_1	B_2	…………	B_n

جدول رقم (12) مردودية الاستثمار خلال الفترات

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو اختيار المشاريع المناسبة التي تجعل القيمة الكلية **(NPV)** لجميع المشاريع المختارة أعظم ما يمكن

صياغة النموذج الرياضي:

هنا نفرض متحول صحيح ثنائي x_j يأخذ القيمة واحد في حال تم اختيار المشروع j ويأخذ القيمة صفر في حال عدم اختيار المشروع j أي

$$\boldsymbol{x_i} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{اذا اخترنا المشروع } \boldsymbol{i} \\ \mathbf{0} & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عندها يعطى تابع الهدف بالعلاقة الآتية:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} Nv_i\, x_i$$

ويعطى قيد رأس المال بالعلاقة الآتية:

$$\sum_{i=1}^{m} Na_{ij}\, x_i \le B_j \quad ; j = 1, \dots, n$$

وعليه نحصل على النموذج الرياضي الآتي:

أوجد القيمة العظمى للتابع:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} Nv_i\, x_i$$

مع مراعاة القيود الآتية:

$$\sum_{i=1}^{m} Na_{ij}\, x_i \le B_j \quad ; j = 1, \dots, n$$

x_i متحول ثنائي يأخذ احدى القيمتين 0 أو 1 من أجل جميع قيم $i = 1, \dots, m$

8-6- مسألة تعيين مفتشين:

نص المسألة:

لدى شركة n مرتبة للمفتشين وتريد اسناد مهمة ضبط الجودة لهم، وينبغي تدقيق K قطعة يومياً خلال S ساعة عمل في اليوم الواحد، في الجدول الآتي نوضح المعلومات الكاملة عن المفتشين ولجميع المراتب:

معلومات عن المفتش / مرتبة المفتش	عدد القطع التي يدققها (الساعة)	الدقة (بالمائة)	أجر المفتش (وحدة نقدية في الساعة)	عدد المفتشين	الغرامة التي تدفعها الشركة مقابل كل خطأ للمفتش
1	NM_1	ND_1	G_1	A_1	R
2	NM_2	ND_2	G_2	A_2	R
…………	…………	……	…………	……	…………
n	NM_n	ND_n	G_n	A_n	R

جدول رقم (13) معلومات عن المفتشين باستخدام القيم النيتروسوفيكية

عدد القطع قيم نيتروسوفيكية $NM_j = M_j + \varepsilon_j$ حيث ε_j هو اللاتحديد على عدد القطع يمكن أن يأخذ بأحد الأشكال:

$$[\lambda_{j1}, \lambda_{j2}] \text{ أو } \{\lambda_{j1}, \lambda_{j2}\}$$

أو أي جوار لـ M_j وكذلك الدقة قيم نيتروسوفيكية $ND_j = D_j + \delta_j$ حيث δ_j هو اللاتحديد على الدقة يمكن أن يأخذ بأحد الأشكال:

$$[\mu_{j1}, \mu_{j2}] \text{ أو } \{\mu_{j1}, \mu_{j2}\} \text{ أو أي جوار لـ } D_j$$

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي المناسب الذي نستطيع من خلاله تعين الاسناد الأمثل للمفتشين بحيث تكون تكلفة التفتيش أقل ما يمكن.

بناء النموذج الرياضي النيتروسوفيكي:

لبناء النموذج الرياضي نفرض $x_{1,}x_2,\dots,x_n$ عدد المفتشين من كل مرتبة على الترتيب المكلفين بمهمة التفتيش عندها يجب أن تتحقق المتراجحات الآتية:

$$x_j \le A_j \quad ; \quad j = 1,2,--,n$$

بما أن الشركة تحتاج إلى تدقيق K قطعة يومياً خلال S ساعة عمل في اليوم الواحد عندها يجب أن تتحقق مجموعة القيود الآتية:

$$\sum_{j=1}^{n} S(NM_j)x_j \ge K$$

للحصول على تابع الهدف نلاحظ أن الشركة تتحمل نوعين من التكاليف خلال عملية التفتيش، أجر المفتش والغرامة المقابل للخطأ المرتكب من قبل المفتش عن كل قطعة عندها يكتب تابع الهدف كما يلي:

$$Z = S\sum_{j=1}^{n} G_j + NM_jR_j\left[\frac{100-ND_j}{100}\right] x_j$$

عندها يكتب النموذج الرياضي كما يلي:

$$Z = S\sum_{j=1}^{n} G_j + NM_jR_j\left[\frac{100-ND_j}{100}\right] x_j \ \rightarrow \mathrm{Min}$$

ضمن القيود

$$x_j \le A_j \quad ; \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} S(NM_j)x_j \ge K$$

$$x_j \ge 0 \ ; \ j = 1,2,\dots,n$$

مثال 4:

لدى شركة ثلاث مراتب للمفتشين وتريد اسناد مهمة ضبط الجودة لهم ، وينبغي تدقيق 1500 قطعة يوميا خلال 8 ساعات عمل في اليوم الواحد ، في الجدول الآتي نوضح المعلومات الكاملة عن المفتشين ولجميع المراتب ، في هذا المثال سنأخذ عدد القطع التي يدققها المفتش من كل مرتبة قيم نيتروسوفيكية

معلومات عن المفتش / مرتبة المفتش	عدد القطع التي يدققها (الساعة)	الدقة (بالمائة)	أجر المفتش (وحدة نقدية في الساعة)	عدد المفتشين	الغرامة التي تدفعها الشركة مقابل كل خطأ للمفتش
1	$\{15,16\}$	95	4	10	2
2	$\{10,11\}$	90	3	6	2
3	$\{25,26\}$	98	5	8	2

جدول رقم (14) معلومات عن المفتشين باستخدام القيم النيتروسوفيكيةمثال4

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي المناسب الذي نستطيع من خلاله تعين الاسناد الأمثل للمفتشين بحيث تكون تكلفة التفتيش أقل ما يمكن

لبناء النموذج الرياضي نفرض $x_{1,}x_2,x_3$ عدد المفتشين من المراتب الثلاثة على الترتيب المكلفين بمهمة التفتيش عندها يجب أن تتحقق المتراجحات الآتية:

$$x_1 \leq 10$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_3 \leq 8$$

بما أن الشركة تحتاج إلى تدقيق K قطعة يومياً خلال S ساعة عمل في اليوم الواحد عندها يجب أن تتحقق مجموعة القيود الآتية:

$$\sum_{j=1}^{n} 8M_j x_j \geq 1500$$

أي:

$$8(M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3) \geq 1500$$

ومنه نحصل على القيد الآتي:

$$8\{15,16\}x_1 + 8\{10,11\}x_2 + 8\{25,26\}x_3 \geq 1500$$

للحصول على تابع الهدف نلاحظ أن الشركة تتحمل نوعين من التكاليف خلال عملية التفتيش، أجر المفتش والغرامة المقابل للخطأ المرتكب من قبل المفتش عن كل قطعة عندها يكتب تابع الهدف كما يلي:

عندها تحسب تكلفة المفتش من المرتبة j في الساعة من خلال العلاقة الآتية:

$$C_j = G_j + M_jR_j\left(\frac{100 - D_j}{100}\right) \quad ; \quad j = 1,2,---,n$$

منا نحصل على

$$C_1 = 4 + \{15,16\} \times 2 \times \left(\frac{100 - 95}{100}\right) = \{5.5,5.6\}$$

$$C_2 = 3 + \{10,11\} \times 2 \times \left(\frac{100 - 90}{100}\right) = \{5,5.2\}$$

$$C_3 = 5 + \{25,26\} \times 2 \times \left(\frac{100 - 98}{100}\right) = \{6,6.04\}$$

ويكون مجموع التكاليف لجميع المفتشين المكلفين بمهمة ضبط الجودة في الساعة يعطى بالعلاقة الآتية:

$$TC_j = \sum_{j=1}^{n}\left[G_j + M_jR_j\left(\frac{100 - D_j}{100}\right)\right] x_j$$

$$TC_j = \{5.5,5.6\}x_1 + \{5,5.2\}x_2 + \{6,6.04\}x_3$$

بالتعويض بعبارة تابع الهدف الآتية:

$$Z = S\sum_{j=1}^{n}\left[G_j + M_jR_j\left(\frac{100 - D_j}{100}\right)\right] x_j$$

نحصل على:

$$Z = \{44,44.8\}x_1 + \{40,41,6\}x_2 + \{48,48.32\}x_3$$

مما سبق نستطيع وضع النموذج الرياضي الآتي:

اوجد

$$MinZ = \{44,44.8\}x_1 + \{40,41,6\}x_2 + \{48,48.32\}x_3$$

ضمن القيود

$$x_1 \le 10$$
$$x_2 \le 6$$
$$x_3 \le 8$$
$$8\{15,16\}x_1 + 8\{10,11\}x_2 + 8\{25,26\}x_3 \ge 1500$$
$$x_j \ge 0 \ ; \ j = 1,2,3$$

مثال5:

لدى شركة ثلاث مراتب للمفتشين وتريد اسناد مهمة ضبط الجودة لهم، وينبغي تدقيق 1500 قطعة يوميا خلال 8 ساعات عمل في اليوم الواحد، في الجدول الآتي نوضح المعلومات الكاملة عن المفتشين ولجميع المراتب، في هذا المثال سنأخذ دقة التفتيش لكل مفتش قيم نيتروسوفيكية على شكل مجالات يكون حدها الأدنى أقل دقة وحدها الأعلى أعلى دقة يصل لها المفتش حسب المرتبة

معلومات عن المفتش / مرتبة المفتش	عدد القطع التي يدققها (الساعة)	الدقة (بالمائة)	أجر المفتش (وحدة نقدية في الساعة)	عدد المفتشين	الغرامة التي تدفعها الشركة مقابل كل خطأ للمفتش
1	15	[95,97]	4	10	2
2	10	[90,92]	3	6	2
3	25	[98,99.5]	5	8	2

جدول رقم (15) معلومات عن المفتشين باستخدام القيم النيتروسوفيكية مثال5

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي المناسب الذي نستطيع من خلاله تعين الاسناد الأمثل للمفتشين بحيث تكون تكلفة التفتيش أقل ما يمكن

لبناء النموذج الرياضي نفرض $x_{1,}x_2,x_3$ عدد المفتشين من المراتب الثلاثة على الترتيب المكلفين بمهمة التفتيش عندها يجب أن تتحقق المتراجحات الآتية:

$$x_1 \le 10$$

$$x_2 \le 6$$

$$x_3 \le 8$$

بما أن الشركة تحتاج إلى تدقيق K قطعة يومياً خلال S ساعة عمل في اليوم الواحد عندها يجب أن تتحقق مجموعة القيود الآتية:

$$\sum_{j=1}^{n} 8M_j x_j \ge 1500$$

أي

$$8(M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3) \ge 1500$$

ومنه نحصل على القيد الآتي:

$$120x_1 + 80x_2 + 200x_3 \ge 1500$$

للحصول على تابع الهدف نلاحظ أن الشركة تتحمل نوعين من التكاليف خلال عملية التفتيش، أجر المفتش والغرامة المقابل للخطأ المرتكب من قبل المفتش عن كل قطعة عندها يكتب تابع الهدف كما يلي:

عندها تحسب تكلفة المفتش من المرتبة j في الساعة من خلال العلاقة الآتية:

$$C_j = G_j + M_j R_j \left(\frac{100 - ND_j}{100}\right) \quad ; \quad j = 1,2,\dots,n$$

منا نحصل على

$$C_1 = 4 + 15 \times 2 \times \left(\frac{100 - [95,97]}{100}\right) = [4.9,5.5]$$

$$C_2 = 3 + 10 \times 2 \times \left(\frac{100 - [90,92]}{100}\right) = [4.6,5]$$

$$C_3 = 5 + 25 \times 2 \times \left(\frac{100 - [98,99.5]}{100}\right) = [5.25,6]$$

ويكون مجموع التكاليف لجميع المفتشين المكلفين بمهمة ضبط الجودة في الساعة يعطى بالعلاقة الآتية:

$$TC_j = \sum_{j=1}^{n} \left[G_j + M_j R_j \left(\frac{100 - \mathrm{N}D_j}{100}\right)\right] x_j$$

$$TC_j = [4.9,5.5]x_1 + [4.6,5]x_2 + [5.25,6]x_3$$

بالتعويض بعبارة تابع الهدف الآتية:

$$Z = S \sum_{j=1}^{n} \left[G_j + M_j R_j \left(\frac{100 - ND_j}{100}\right)\right] x_j$$

نحصل على:

$$Z = [39.2,44]x_1 + [36.8,40]x_2 + [42,48]x_3$$

مما سبق نستطيع وضع النموذج الرياضي الآتي:

أوجد

$$MinZ = [39.2,44]x_1 + [36.8,40]x_2 + [42,48]x_3$$

ضمن القيود

$$x_1 \le 10$$
$$x_2 \le 6$$
$$x_3 \le 8$$
$$120x_1 + 80x_2 + 200x_3 \ge 1500$$
$$x_j \ge 0 \ ; \ j = 1,2,3$$

8-7- مسألة تحديد التكلفة:

يتأثر ربح أي شركة يمكنها أن تنتج عدد من المنتجات بالاختيار الأمثل للمنتجات التي ستقوم بإنتاجه من مجموعة المنتجات التي تستطيع انتاجها ولمساعدة هذه الشركات على اختيار المنتجات التي تحقق لها ربح اعظمي قدمت بحوث العمليات نماذج رياضية خطية سميت بخليط المنتجات وبما أن الحل الأمثل لاي نموذج خطي قد تكون احدى مركباته أو جميعها قيم غير صحيحة قام الباحثون بصياغة النموذج المناسب لمثل هذه المسائل استخدم المتحول الصحيح الثنائي δ_j الذي يأخذ احدى القيمتين $0 \ or \ 1$ وهنا الواحد يوافق قرار انتاج المنتج والصفر قرار عدم الانتاج:

نص المسألة وفق علم النيتروسوفيك:

تريد شركة التخطيط لإنتاج N منتج حيث يحتاج المنتج j الى كلفة تحضير ثابتة أو كلفة انتاج ثابتة K_j مستقلة عن الكمية المنتجة ، ويحتاج الى كلفة متغيرة $C_j + \mu_j$ لكل وحدة انتاج تتناسب مع الكمية المنتجة ، لنفرض أن كل وحدة من المنتج $\boldsymbol{j}$ *تحتاج* a_{ij} وحدة من المورد i حيث يوجد M مورد ن بفرض أن المنتج j الذي له فرصة مبيعات قدرها $d_j + \varepsilon_j$ ويباع بسعر $P_j + \varphi_j$ وحدة نقدية لكل وحدة وانه يتوفر فقط b_j وحدة من المورد i حيث $i = 1,2, \dots, M$ يصبح هدف المسالة تعين خليط المنتجات الامثل الذي يجعل الربح الصافي اعظم ما يمكن

صياغة النموذج الرياضي:

تحدد التكلفة:

من نص المسألة نلاحظ أن التكلفة الكلية للإنتاج هي عبارة عن التكلفة الثابتة بالإضافة الى الكلفة المتغيرة وهي عبارة عن تابع لا خطي بالنسبة للكمية المنتجة، ولكن بمساعدة المتحولات الصحيحة الثنائية δ_j يمكن صياغة المسألة بشكل نموذج خطي ذي أعداد صحيحة

نفرض أن المتحول الصحيح الثنائي δ_j يرمز الى القرار بانتاج المنتج $\boldsymbol{j}$ أو عدم انتاجه بعبارة أخرى

$$\boldsymbol{\delta_j} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{اذا اتخذ قرار بانتاج المنتج } \boldsymbol{j} \\ \mathbf{0} & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عندها تصبح تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من المنتج j على الشكل الآتي $K_j\delta_j + (C_j + \mu_j)x_j$ حيث $\delta_j = 1$ إذا كان $x_j > 0$ و $\delta_j = 0$ إذا كان $x_j = 0$ وبالتالي فإن تابع الهدف يكتب كما يلي:

$$Z = \sum_{j=1}^{N} (P_j + \varphi_j)\, x_j - \sum_{j=1}^{N} \left(K_j\delta_j + (C_j + \mu_j)x_j\right)$$

قيود المسألة:

قيد على المورد i يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, x_j \le b_j \ ; i = 1,2,\dots,M$$

قيد الطلب على المنتج j يعطى بالعلاقة الآتية:

$$x_j \le \left(d_j + \varepsilon_j\right)\delta_j \quad ; j = 1,2,\dots,N$$

النموذج الرياضي: أوجد القيمة العظمى للتابع:

$$Z = \sum_{j=1}^{N} (P_j + \varphi_j)\, x_j - \sum_{j=1}^{N} \left(K_j\delta_j + (C_j + \mu_j)x_j\right)$$

ضمن القيود

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, x_j \le b_j \ ; i = 1,2,\dots,M$$
$$x_j \le \left(d_j + \varepsilon_j\right)\delta_j \quad ; j = 1,2,\dots,N$$

$x_j \ge 0$ و $\delta_j = 1$ أو $\delta_j = 0$ من أجل جميع قيم $j = 1,2,\dots,N$ من النموذج السابق نلاحظ أن x_j يأخذ قيمه موجبة فقط عندما يكون $\delta_j = 1$ وفي هذه الحالة يكون انتاج المنتج j محددا بالكمية $d_j + \varepsilon_j$ وكلفة الإنتاج الثابتة K_j متضمنة في تابع الهدف، بحل هذا النموذج نحصل على قيمة نيتروسوفيكية مثلى لتابع الهدف NZ^* نعلم من خلالها الربح الذي يمكن ان تحققه الشركة في أحسن وأسوء الظروف ويمكن الشركة من وضع الخطط المناسبة لسير العمل فيها.

الخاتمة:

من خلال الدراسة السابقة نلاحظ أنه باستخدام أسلوب البرمجة الخطية نستطيع تقديم الحل الأمثل لمعظم المشاكل التي يمكن أن تواجه الشركات الإنتاجية وذلك بصياغة الحالة قيد المعالجة بمسألة يمكن تحويلها إلى نموذج خطي، حله الأمثل يساعد صناع القرار على اتخاذ قرارات مثالية لسير العمل بحيث يتم تحقيق أكبر ربح ممكن، ومن أجل الحصول على حلول تتمتع بهامش من الحرية يمكن استخدامنا البيانات قيم نيتروسوفيكية قيم تراعي جميع الظروف التي يمكن تمر بها المنظومة التي يمثلها النموذج الخطي.

المراجع العلمية

1. Florentin Smarandache, Maissam Jdid, On Overview of Neutrosophic and Plithogenic Theories and Applications, Applied Mathematics and Data Analysis, Vo .2, No .1, 2023
2. L. A. ZADEH. Fuzzy Sets. Inform. Control 8 (1965).
3. Linear and Nonlinear Programming-DavidG. Luenbrgrr.YinyuYe- Springer Science + Business Media-2015.
4. Maissam Jdid, Operations Research, Faculty of Informatics Engineering, Al-Sham Private University Publications,2021. (Arabic version).
5. Bugaha J.S, Mualla.W, and others -Operations Research Translator into Arabic, The Arab Center for Arabization, Translation, Authoring and Publishing, Damascus,1998. (Arabic version).
6. Alali. Ibrahim Muhammad, Operations Research. Tishreen University Publications, 2004. (Arabic version).
7. Al Hamid. Mohammed Dabbas, Mathematical programming, Aleppo University, Syria, 2010. (Arabic version).
8. Maissam Jdid, Huda E Khalid, Mysterious Neutrosophic Linear Models, International Journal of Neutrosophic Science, Vol.18, No. 2, 2022.
9. Maissam Jdid, Florentin Smarandache, The Graphical Method for Finding the Optimal Solution for Neutrosophic linear Models and Taking Advantage of Non-Negativity Constraints to Find the Optimal Solution

for Some Neutrosophic linear Models in Which the Number of Unknowns is More than Three, Journal Neutrosophic Sets and Systems, NSS Vol.58,2023.

10. Maissam Jdid, AA Salama, Huda E Khalid ,Neutrosophic Handling of the Simplex Direct Algorithm to Define the Optimal Solution in Linear Programming ,International Journal of Neutrosophic Science, Vol.18,No. 1, 2022.
11. Maissam Jdid, Florentin Smarandache ,Neutrosophic Treatment of the Modified Simplex Algorithm to find the Optimal Solution for Linear Models , International Journal of Neutrosophic Science, Vol.23,No. 1, 2023.
12. Maissam Jdid, Florentin Smarandache, Neutrosophic Treatment of Duality Linear Models and the Binary Simplex Algorithm, Applied Mathematics and Data Analysis, Vo .2, No .2, 2023.
13. Maissam Jdid, Some Important Theories about Duality and the Economic Interpretation of Neutrosophic Linear Models and Their Dual Models, Applied Mathematics and Data Analysis, Vo .2, No .2, 2023.
14. Maissam Jdid, Florentin Smarandache, Optimal Agricultural Land Use: An Efficient Neutrosophic Linear Programming Method, Journal of Neutrosophic Systems with Applications, Vol. 10, 2023.
15. Maissam Jdid, The Use of Neutrosophic linear Programming Method in the Field of Education, Handbook of Research on the Applications of Neutrosophic Sets Theory and Their Extensions in Education, Chapter 15, IGI-Global,2023.

16. Maissam Jdid, Neutrosophic Mathematical Model of Product Mixture Problem Using Binary Integer Mutant, Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems (JNFS), Vol .6, No .2, 2023.
17. Maissam Jdid, Florentin Smarandache, Said Broumi, Inspection Assignment Form for Product Quality Control, Journal of Neutrosophic Systems with Applications, Vol. 1, 2023.
18. Maissam Jdid, Florentin Smarandache, The Use of Neutrosophic Methods of Operation Research in the Management of Corporate Work, Journal of Neutrosophic Systems with Applications, Vol. 3, 2023.

NEUTROSOPHIC LINEAR MODELS AND ALGORITHMS TO FIND THEIR OPTIMAL SOLUTION

2022-2023