Kognitionswissenschaft, 4 (1995), 177–184.

Zur Kognition räumlicher Grenzen: Eine mereotopologische Untersuchung[1]

Barry Smith
Department of Philosophy and Center for Cognitive Science, SUNY Buffalo
phismith@buffalo.edu

Kurzfassung
Die Wahrnehmung räumlicher Körper ist wenigstens zum großen Teil eine Wahrnehmung körperlicher *Grenzen*. Die geläufigen mathematischen Auffassungen von Grenzen als abstrakte Konstruktionen sind aber für kognitionswissenschaftliche Zwecke wenig hilfreich. Der Aufsatz versucht, eine adäquatere Auffassung der Ontologie von Grenzen zu gewinnen, die in Ideen von Aristoteles und Brentano zur sogenannten *Koinzidenz von Grenzen* gewürzelt ist. Eine formale Theorie von Grenzen und von den ihnen zugehörigen Kontinua wird präsentiert, die auch eine Lösung gewisser Paradoxa des Zenon-Typs ermöglicht. Diese Theorie läßt sich nicht nur in der Kognitionswissenschaft anwenden sondern auch in bezug auf gewisse Probleme, die mit der Ontologie von geographischen und geopolitischen Grenzen zusammenhängen.

Einführung

Die Wahrnehmung räumlicher Körper ist wenigstens zum großen Teil eine Wahrnehmung körperlicher *Grenzen*. Der Wahrnehmungsraum ist primär durch zweidimensionale Flächen konstituiert, die weiter durch eindimensionale interne und externe lineare Grenzen strukturiert sind. Unsere Wahrnehmungswelt ist demnach eine Grenzwelt. Die in der Wahrnehmung gegebenen materiellen, wahrnehmbaren, phänomenalen Grenzen sind

---

[1]Diese Arbeit ist als Teil eines mehrjährigen Forschungsprojekts des Schweizerischen Nationalfonds zum Thema "Formalontologische Grundlagen der gegenwärtigen künstlichen Intelligenzforschung" entstanden. Für wertvolle Hinweise und Kritik möchte ich Carola Eschenbach, Christopher Habel und Christina Schneider danken.

allerdings sowohl in der Philosophie als auch in der empirischen Kognitionswissenschaft als solche wenig untersucht worden, und die geläufigen mathematischen Auffassungen von Grenzen als abstrakte oder sogar als fiktive Gegenstände oder Konstruktionen sind für kognitionswissenschaftliche Zwecke wenig hilfreich.

Um eine adäquatere Auffasung zu gewinnen, müssen wir zunächst ein Hindernis überwinden, das wir durch gewisse Analoga der klassischen Zenon-Paradoxen verbildlichen können. Diese weisen auf gewisse kontraintuitive Konsequenzen hin, die dem Begriff des Kontinuierlichen anzuhaften scheinen. Danach werden wir gewisse Aspekte der modernen mathematischen Auffassung des Kontinuums kritisieren, um eine für die Zwecke des Kognitionswissenschaftlers adäquateren Theorie von Grenzen formulieren zu können. Die dadurch gewonnene Theorie wird sich nicht nur im engeren kognitiven Bereich der Wahrnehmungstheorie anwenden lassen, sondern auch in bezug auf unser Verständnis materieller Grenzen in der Geographie und in benachbarten Gebieten.

Ein Zenon-Paradoxon für Farben

Man stelle sich folgenden Sachverhalt vor: Wir bewegen uns eine Linie entlang, die durch den Mittelpunkt eines Kreises führt, der in zwei symmetrische Segmente geteilt ist; das eine rot, das andere grün. In dieser Weise bewegen wir uns kontinuierlich vom roten zum grünen Segment des Kreises. Was geschieht, wenn wir die Grenze zwischen den beiden Segmenten überschreiten? Passieren wir einen letzten Punkt p_1, der rot, und einen ersten Punkt p_2, der grün ist? Offensichtlich nicht, da ein jedes Kontinuum dicht ist.[2]

Zwischen jeden zwei verschiedenen Puntken p_1 und p_2 müßten wir also eine unbestimmte Vielheit von weiteren Punkten konstatieren, die in unserem jetzigen Fall weder rot noch grün wären. Auch unerlaubt ist die Anerkennung nur einer der beiden Punkte p_1 und p_2, denn dies bedeutete eine unmotivierte Privilegierung einer der zwei Segmente über das andere, und eine Asymmetrie dieser Art würde eine weitere Erklärung verlangen, was hier ausgeschlossen wäre. (Diese Asymmetrie stellt, um mit den Philosophen zu sprehen,

---

[2]Nach der klassischen Analyse des Kontinuums, die wir dem Mathematiker Richard Dedekind zu verdanken haben, müssen wir zwischen ‘Dichte’ und ‘Stetigkeit’ unterscheiden. Die Menge der rationalen Zahlen ist z. B. Dicht, in dem Sinn, daß wir zwischen zwei beliebigen Elementen dieser Menge immer ein Drittes finden können. Eine Menge A nennen wir stetig, genau dann wenn, für jede Teilung dieser Menge in Aggregaten B und C, derart, daß jedes Element von B größer ist als jedes Element von C, es ein A-Element gibt, das entweder das kleinste Element von B oder das größte von C ist. Die Menge der rationalen Zahlen hat diese Eigenschaft nicht. (Betrachten wir z.B. die Teilung, die A mit der Menge aller rationalen Zahlen, die größer sind als %2, und B mit der Restmenge gleichsetzt.) Die Menge der realen Zahlen dagegen ist nach der gegebenen Definition sowohl dicht als auch stetig.

ein Verstoß gegen das Gesetz des zureichenden Grundes dar, das für jedes Urteil einen Grund fordert, aus dem es rechtmäßigerweise gefolgert werden kann.)

Vielleicht ist also die Linie an dem Punkt, wo sie die Segmentenscheide kreuzt, farblos. Die zwei Segmente wären dann – topologisch gesehen – analog zu offenen Regionen.[3] Man könnte versuchen, diese Alternative zu unterstützen, indem man behauptet, daß Farben – oder auch ähnliche Qualitäten (denn unser Argument gilt für andere Arten von Qualitäten räumlicher Gegenstände) – eigentlich nur als Eigenschaft von zweidimensionalen Regionen existieren können, Linien, wie auch Punkte, wären dann allesamt ohne Farbe. Man stelle sich allerdings eine völlig homogene rote Fläche vor. Sind die Punkte und Linien innerhalb dieser Fläche nicht auch rot?

Um unsere Anschauungen in dieser Hinsicht zu festigen, betrachten wir zwei weitere Gedankenexperimente, die mit Bewegung und körperlicher Berührung zu tun haben. Stellen wir uns einen Körper vor, der eine Zeit lang in Ruhe ist und sich dann zu bewegen beginnt. Gibt es einen letzten Zeitpunkt p_1, an dem der Körper ruht, und einen ersten p_2, in dem er sich bewegt? Offensichtlich nicht, denn wegen der Dichte des Zeitkontinuums müßten wir in diesem Fall eine unendliche Zahl von weiteren Punkten zulassen, die zwischen p_1 und p_2 liegen und an denen der Körper irgendwie weder in Ruhe noch in Bewegung ist. Nur einen von p_1 und p_2 zuzulassen und nicht den Anderen würde wieder eine unmotivierte Priviligierung einer von zwei symmetrischen Alternativen bedeuten. Und auch die dritte Möglichkeit, daß der Körper in dem Zeitpunkt, an dem er die Segmentenscheide zwischen Ruhe und Bewegung kreuzt, ruhe- und bewegungslos ist, können wir ausschließen, da es zwischen Ruhe und Bewegung kein Drittes gibt.

Stellen wir uns weiter zwei ruhende Kugeln vor, die einander berühren. Was geschieht in dem Punkt, wo sie in Kontakt sind? Gibt es einen letzten körperlichen Punkt p_1, der zur ersten Kugel, und einen ersten Punkt, p_2, der zum zweiten gehört? Offensichtlich nicht, da wir dann wieder eine unendliche Anzahl von weiteren Punkten zwischen p_1 und p_2 zulassen müßten, was bedeutet, daß die zwei Kugeln sich *nicht* berühren würden. Die Anerkennung von nur einem der beiden Punkte würde wiederum eine unmotivierte Asymmetrie darstellen, was wir ausschließen wollen. Unsere dritte Alternative ist allerdings gleichfalls auszuschließen. Denn die Behauptung, daß der Punkt, wo die zwei Kugeln sich berühren, zu keinem der beiden Kugeln gehört, scheint wiederum mit der These gleichzusetzen zu sein, daß die zwei Kugeln sich nicht berühren.

[3]Über die topologischen Ideen, die hier angewendet werden, vgl. Eschenbach, Habel und Smith (Hrsg.).

Es gibt jedoch eine alternative Darstellung der Tatbestände in unseren drei Beispiele. Diese behauptet im Falle des Farbbeispiels, daß es nur einen Punkt der Linie gibt, wenngleich einen *komplexen* Punkt, der genau an der Grenze zwischen den beiden Segmenten liegt. Dieser Punkt ist in einem gewissen Sinn *sowohl rot als auch grün*. Anders gesagt: Er ist zugleich ein *Aufhören, rot zu sein,* und ein *Anfangen, grün zu sein*. In einer noch anderen Weise formuliert: Er ist ein Punkt, wo ein roter und ein grüner Punkt *zusammenfallen*. Wir haben es m.a.W. mit einer *Koinzidenz von Grenzen* zu tun, eine Idee, die wir im Folgenden zu präzisieren versuchen werden. Ähnlich verhält es sich in dem Fall, wo ein Körper sich zu bewegen beginnt. Auch hier gibt es einen einzigen Zeitpunkt, an dem der Körper *sowohl in Ruhe als auch in Bewegung ist*. Oder genauer: Der Körper ist in diesem Zeitpunkt dadurch charakterisiert, daß er *aufhört, in Ruhe zu sein*, und *beginnt, sich zu bewegen*. Und ähnlich auch in dem Fall, wo die zwei Kugeln sich berühren. Ein Punkt an der Oberfläche der einen Kugel *koinzidiert* mit einem Punkt an der Oberfläche der benachbarten Kugel. Alle Körper sind nach dieser Darstellung analog, topologisch gesprochen, zu *geschlossenen dreidimensionalen Volumen* (sie besetzen geschlossene Volumen des Raumes).

Die Brentanosche Auffassung des Kontinuums

Der Raum, wie er in der alltäglichen Erfahrung gegeben ist, stellt sich als eine sehr große, nicht begrenzte, dreidimensionale Ordnung dar, worin Körper sich von Ort zu Ort frei bewegen können und worin verschiedene Typen von materiellen und phänomenalen Grenzen sich der Wahrnehmung präsentieren. Dieser Erfahrungsraum ist eine Einheit, ein einziges, zusammenhängendes Ganzes, worin sich keine isolierten Raumpunkte, Linien, oder Flächen finden lassen. Dieses räumliche Ganze der Alltagswelt ist dicht: Für jede zwei nicht aneinander grenzenden räumlichen Regionen der Alltagswelt, gibt es eine weitere Region, die zwischen diesen beiden liegt. Materie, woraus Körper gebildet werden, erscheint in getrennten Portionen von endlicher Größe, die endliche Volumen des Raumes besetzen. Auch Materie läßt einer kumulative Zerteilung oder Zerstückung zu, für die aus der Perspektive der alltäglichen Erfahrung keine Grenzen gesetzt sind. Alle Körper sind im Raum und bestehen aus Materie. Körper sind zusammenhängend und haben geschlossene Grenzen. Sie haben manchmal Löcher. Sie sind ausgedehnt, können einander berühren, zersplittern und in gewissen Fällen miteinander verschmolzen werden.

Wie die Zenon'schen Überlegungen schon gezeigt haben, ist es schwer, die genaue ontologische Struktur dieses Raums der alltäglichen Erfahrung in widerspruchsfreier Form festzulegen. Was folgt ist ein Versuch, die Ontologie der Alltagswelt räumlicher Körper konsequent zu bestimmen. Die hier zu verteidigende Theorie gründet sich lose in der

Auffassung, die durch Aristoteles in seiner *Physik* geschildert ist, vor allem in deren Präzisierung durch Franz Brentano in seinen *Philosophischen Untersuchungen zu Raum, Zeit und Kontinuum*.[4]

Wir beginnen – sozusagen von oben – mit den ausgedehnten und qualitativ gefüllten räumlichen Kontinua, die in der visuellen Wahrnehmung gegeben sind. Die Grenzen dieser Kontinua werden als Entitäten aufgefaßt, die sich darin visuell diskriminieren lassen. Die gewöhnlichen mengentheoretischen Auffassungen des Kontinuums arbeiten dagegen von unten nach oben: Sie beginnen mit unausgedehnten Punkten und versuchen, ein Modell des Kontinuums auf der Basis von Mengen von Punkten zu konstruieren. Das Kontinuum ist dadurch mengentheoretisch *simuliert*. Die gewonnene Simulation ist von großer mathematischer Eleganz und Ausdruckskraft, und sie läßt sich in vielen Bereichen z.B. der mathematischen Physik reibungslos anwenden. Wir werden im Folgenden dagegen zu zeigen versuchen, daß eine alternative, formal konsequente Theorie des Kontinuums von Oben nach Unten gewonnen werden kann. Diese Theorie will keine Simulation der Struktur des Kontinuums. Sie versteht sich vielmehr als eine realistische Theorie des Kontinuums selbst, wie sie in der Erfahrung gegeben ist, und dadurch auch als eine Theorie von den Grenzen, die mitgegeben werden.

Mengentheorie

Die mengentheoretische Simulation des Kontinuums ist aus folgenden Gründen als eine Auffassung des Kontinuums, wie es in der Erfahrung gegeben wird, unzulänglich:

1. Das Kontinuum der Erfahrung ist ein *qualitatives* Kontinuum, nicht nur in dem Sinn, daß es (charakteristischerweise) mit Farb- und anderen Qualitäten gefüllt ist, sondern auch in dem Sinn, daß ihm die *quantitativen* Konstruktionen (von Kardinalzahlen usw.) der klassischen Mengentheorie nicht gerecht werden. Die gewöhnliche erwähnte mathematische Gegenüberstellung zwischen *Dichte* und *Stetigkeit* ist für das Kontinuum der Erfahrung ohne Belang.[5]

---

[4] Die formalen Ideen, die weiter unten skizziert sind, wurden seinerseits durch Roderick Chisholms Schriften zur Ontologie des Kontinuums inspiriert. Vgl. Chisholm (1989), (1992/93), sowie Smith (im Erscheinen).

[5] Vgl. Fußnote 2 oben. Demnach entsteht diesbezüglich auch kein Analog des Cantorschen Kontinuumproblems. Schon die Existenz dieses Problems, das bekanntlich gerade auf einen Fehlen entscheidungsrelevanter Anschauungen innerhalb des mengentheoretischen Weltbildes basiert, kann als Zeugnis betrachtet werden, daß eine nicht-mengentheoretischer Auffassung einen größeren Grad

2. Die mengentheoretische Konstruktion des Kontinuums setzt die höchst fragwürdige Hypothese voraus, man könne aus nicht-ausgedehnten Bauteilen (Punkten, Atomen) ein ausgedehntes Ganzes zusammenstellen.

3. Die Anwendung der Mengentheorie auf einen bestimmten Bereich setzt voraus, daß man eine Grundstufe von sog. *Urelementen* isoliert hat, und daß man die Gesamtheit der Strukturmomente dieses Bereichs durch ein kumulatives Kombinieren dieser Element simulieren kann. Wenn wir es allerdings, wie im Bereich der Welt der alltäglichen Erfahrung, ausschließlich mit mesoskopischen Entitäten und mit ihren mesoskopischen Teilen und Zusammensetzungen zu tun haben, dann sind keine grundlegende Atome oder Urelemente gegeben, die als letzte Bauteile eingesetzt werden können.[6]

4. Die mengentheoretische Hierarchie ist eine abstrakte zeitlose Ordnung, implizit durch die jeweiligen Axiome definiert und nicht durch die Inspektion eines präexistierenden Bereichs von Gegenständen aufgedeckt. Auf der Basis mengentheoretischer Axiome kann man Existenzbeweise führen. (Wir können z.B. beweisen, daß das Kontinuum existiert.) Keine solchen Beweise sind im Rahmen einer realistischen Theorie des Kontinuums möglich. Es ist vielmehr eine empirische Frage, ob Kontinua existieren oder nicht, und die

---

des Realismus besitzen kann.

[6]Wie Bockman ((1993), S. 100) bemerkt, ist der mengentheoretische Ansatz aus folgende Gründen in bezug auf eine Ontologie von komplexen materiellen Gegenständen inadäquat:

> First, all possible parts of such objects are in general not known in advance and hence we cannot choose a natural class of ‘urelements’. Hence, if we choose some level of decomposition of such a complex system and construct a corresponding set-theoretical model, we obtain an essentially partial description of this system. What complicates the situation still further is the possibility of different independent decompositions of the same object. As a result we must assign to an object a set of its partial models, and will never be sure that this set gives a faithful description.

Genau an diesem Punkt kann die Mereologie als Alternative zur Mengentheorie eingesetzt werden, denn ‘the objects in mereology are primary elements of the universe of discourse and hence there exists a possibility of “downward” analysis of the structure of objects through their decomposition into parts.’ (aaO.)

hier angebotene Theorie besteht demgemäß aus sehr allgemeinen Sätzen, die von der Wirklichkeit, wie wir sie aus der Erfahrung kennen, wahr sein sollen.[7]

5. Die üblichen Auffassungen des Kontinuums setzen ein Dualitätsprinzip voraus, wonach jede Grenze eines beliebigen Gegenstands auch Grenze seines Äußeren ist. Es ist vor allem dieses Prinzip, das für die oben geschilderten Zenon-Paradoxa verantwortlich ist. Intuitiv betrachtet aber sind die Grenzen, die in der Erfahrung gegeben sind, in vielen Fällen *asymmetrisch*. Dies gilt z. B. für die externe Grenze (Oberfläche) eines Körpers. Diese erscheint uns selbstverständlich als Teil des Körpers, nicht aber als Teil seines Äußeren. Im Folgenden werden wir davon ausgehen, daß Grenzen, wenigstens in manchen wichtigen Fällen, in diesem Sinn Teile von dem sind, was sie abgrenzen. Viele Grenzen, die in der Alltagserfahrung gegeben sind, sind also *asymmetrisch*.

6. Die Mengentheorie betrachtet das Kontinuum als etwas Homogenes, in dem Sinn, daß es aus Bestandteilen nur einer Art aufgebaut wäre. Aus der Perspektive der Alltagserfahrung dagegen, ist das Kontinuum aus mehreren verschiedenartigen Teilen aufgebaut: Grenzen von verschiedenen Dimensionen einerseits, und ausgedehnten Körpern und Raumregionen andererseits.

7. Grenzen sind immer und notwendigerweise Grenzen *von* etwas Ausgedehntem. Es ist diese Eigentümlichkeit der Grenzen, daß sie nur als Teile von größeren Ganzen existieren können, die unsere Auffassung am radikalsten von der klassischen mathematischen Auffassung unterscheidet. Brentano beschreibt diesen Gegensatz wie folgt: Wir sollen uns einen Raum vorstellen, worin sich eine Menge von Kugeln befindet, von welchen sich jede mit einer anderen Geschwindigkeit bewegt.

> Bei einer sei diese 0, bei einer andern habe sie die Größe von 1 Meile in der Stunde, bei einer dritten die von ½ Meile in der Stunde, und so sei jede mittlere Geschwindigkeit zwischen 0 und 1 Meile in der Stunde, welche überhaupt denkbar ist, möge sie ein rationales oder irrationales Verhältnis zeigen, durch die Geschwindigkeit irgendeiner Kugel vertreten. Fragt man, ob man es dann mit einem Kontinuum von Geschwindigkeiten zu tun habe, so wäre die Frage nach Dedekind zu bejahen, in Wahrheit aber wäre sie zu verneinen, wogegen in dem Falle einer in der Art sich drehenden Scheibe, daß die Geschwindigkeit in der äußersten Peripherie die einer

[7] Dies gilt auch für die Ontologie und Mereologie Lesniewskis: Vgl. Lejewski (1967).

> Meile in der Stunde wäre, während das Zentrum sich nicht verrückte, ein wirkliches Kontinuum von Geschwindigkeiten vorläge. (Brentano, (1976), S. 52)

Der Unterschied zwischen den beiden Fällen besteht, laut Brentano, darin

> daß in dem letzten jede der Geschwindigkeiten als Grenze erscheint, welche für sich genommen nichts ist, wohl aber mit dem Kontinuum der Geschwindigkeiten vereinigt, einen Beitrag zu ihm liefert. Bei jener Menge von Kugeln wäre dagegen die Geschwindigkeit einer jeden etwas für sich, und eben dies stände damit in Widerspruch, daß sie mit den übrigen ein wahres Kontinuum bildete. (aaO., S. 52-53)

Ontologie der Grenzen

Grenzen sind also abhängige Gegenstände und können nicht isoliert existieren. Grenzen haben in dieser Hinsicht eine Ähnlichkeit mit Löchern und Schatten.[8] Wie Löcher und Schatten haben Grenzen stets Träger. Der Träger einer Grenze ist in gewisser Hinsicht unbestimmt: Dieselbe Grenze kann unverändert weiter existieren, obwohl ihr Träger radikal verändert wird. Betrachten wir z. B. die Oberfläche eines Apfels. Hier taucht zunächst der ganze Apfel als Träger auf. Diese Rolle kann aber auch durch den Apfel ohne seinen Kern gespielt werden, wenn letzterer in verschiedenen Graden von Innen weggefressen wäre. Eine Grenze ist also nur *generisch* von dem Kontinuum abhängig, das die Rolle ihres Trägers spielt. Wie Brentano es formuliert: Eine Grenze kann 'nicht ohne Zusammenhang mit einem Kontinuum sein … Doch läßt sich kein noch so kleiner Teil des Kontinuums und kein noch so naheliegender Punkt desselben angeben, von dessen Existenz die Grenze bedingt wäre.'((1993), S. 65-66)

Grenzen sind auch dadurch bestimmt, in welcher *Richtung* sie als Grenze dienen. Wir stellen uns zwei Linienfragmente vor, die zusammen die Ecke eines Vierecks bilden. Betrachten wir die Endpunkte dieser Linien, wie sie an der Kante des Vierecks koinzidieren. Der eine Punkt ist Grenze *einer* Linie und grenzt in *eine* Richtung ab; der andere Punkt ist Grenze der *anderen* Linie und genzt in eine andere, orthogonale Richtung ab. Oder stellen wir uns eine Linie vor, die Tangente eines Kreises ist und die den Kreis in einem gewissen Punkt berührt. Ein Punkt auf der Linie koinzidiert mit einem gewissen Punkt auf dem Kreis. Die zwei hier gegebenen punktuellen Grenzen sind ihrer Koinzidenz zum Trotz Grenzen *in jeweils andere Richtungen* und *mit jeweils anderen Trägern*. Auch koinzidierende Linien können als Grenzen in verschiedene Richtungen dienen, wie wir weiter unten bei der Behandlung von geographischen Grenzphänomenen sehen werden.

---

[8] Vgl. Casati und Varzi (1994), Appendix.

Eine äußere Grenze eines Körpers, z. B. ein Punkt auf dem Rand einer Scheibe, ist nur in bestimmten Richtungen eine Grenze. (Wir erinnern uns daran, daß die äußere Grenze eines Körpers nach unserer Auffassung nicht zugleich Grenze seiner Umgebung ist.) Innere Grenzen dagegen – wie z.B. der Mittelpunkt einer soliden Kugel – sind Grenzen in alle möglichen Richtungen. Sie haben, wie Brentano es ausdrückt, *maximale Plerose* oder *Fülle*: 'ein Punkt [ist] örtlich spezifisch anders, jenachdem er nach allen Seiten oder nur nach gewissen Seiten Grenze ist, wie das erste bei einem Punkte im Innern des Körpers, das letzte bei einem Punkte in der Fläche oder Kante oder einem Eckpunkte der Fall ist.'((1993), S. 72)

Grenzen sind aber auch *qualitativ* und *materiell* durch ihre Träger bedingt. Wie Brentano sagt: 'Wenn eine rote und eine blaue Fläche aneinanderstoßen, so koinzidieren eine rote und eine blaue Linie' ((1976), S. 51-52). Der Mittelpunkt einer blauen Kreisfläche ist in der Tat ein Ganzes aus unzählig vielen koinzidierenden Punkten, die Grenzen 'unzähliger gerader und krummer blauer Linien und beliebig vieler blauer Sektoren, in welche die Kreisfläche geteilt gedacht werden kann.' (aaO., S. 15-16) Wenn eine Kreisfläche aus vier Quadranten besteht,

> von welchen der eine weiß, der andere blau, der dritte rot, der vierte gelb ist, so sehen wir den Mittelpunkt des Kreises in gewisser Weise in eine Vierheit von Punkten zerlegt, denn insofern er die Spitze des blauen Quadranten bildet, kommt ihm ein Viertel der Plerose zu, die ihm als blauen Punkt zukam, da er Mittelpunkt einer durchaus blauen Kreisfläche war, und er koinzidiert jetzt mit einem einer roten, einem einer gelben und einem einer weißen Fläche zugehörigen Punkte, von welchen jeder das gleiche Maß von Plerose, aber eine andersseitige Plerose besitzt. (aaO., S. 16)

Ein Zenon-Paradoxon für Länder

Man könnte meinen, daß diese und ähnliche Überlegungen bestenfalls von phänomenologischem Interesse sind, da Grenzen von physikalischen Körpern nie die nötige geometrische Vollkommenheit besitzen können, um die hier geschilderten Eigenschaften der Koinzidenz und Plerose zu verwirklichen. In manchen Bereichen der äußerlichen Welt, und vor allem im Bereich der geopolitischen Grenzen, kann die Theorie der Koinzidenz und Plerose jedoch aufschlußreich angewendet werden, in einer Art, die wieder bei der klassischen mathematischen Auffassung ausgeschlossen zu sein scheint.

Landesgrenzen, z. B. die Grenze zwischen Frankreich und Deutschland, sind im normalen Fall symmetrisch. Diese Grenze ist für sich genommen eine Grenze in voller Plerose. Nehmen wir aber das Beispiel der alten Grenze zwischen der DDR und der Bundesrepublik Deutschland. Diese Grenze war eine Grenze in nur halber Plerose, da sie nur in eine Richtung als Grenze diente. Die Bundesrepublik erkannte bekanntlich keine Grenze an dieser Strecke an: Eine in die östliche Richtung gerichtete Grenze gab es an dieser Stelle nicht.[9]

Wenn, wie allerdings nach der hier verteidigten Auffassung, Landesgrenzen stets als Teil der entsprechenden Länder existieren, dann folgt daraus, daß wir es auch im Fall der Grenze zwischen Frankreich und Deutschland eigentlich mit asymmetrischen Grenzen zu tun haben. Denn obwohl die Grenzen zwischen Frankreich und Deutschland für eine gewisse Strecke koinzidieren, besitzen doch Frankreich und Deutschland keine gemeinsamen Teile. Die Grenze von Frankreich ist ja *französisch*, die von Deutschland *deutsch*.

Eine formale Theorie

Wie wir bei der Betrachtung der Zenon-Paradoxen schon bemerkt haben, gibt es eine Reihe von subtilen Problemen, mit denen eine widerspruchsfreie Theorie von Grenzen konfrontiert ist. Im Folgenden werden wir also versuchen, mit formalen Mitteln eine logisch konsequente Auffassung des Kontinuums zu entwickeln, die für kognitionswissenschaftliche Zwecke geeignet ist. Als Grundlage unserer Theorie nehmen wir nicht wie gewöhnlich die Mengentheorie, sondern die Mereologie oder Theorie der Teil-Ganzes Relation,[10] die in ihrem Begriffsapparat eine weltnähere Darstellung der hier relevanten Phänomene zuläßt.

Als primitive Begriffe unserer formalen Theorie der Grenzen und ihrer Träger nehmen wir genauer das übliche ‘ist Teil von’ (‘#’) der klassischen Mereologie, sowie die zwei Spezialbegriffe: ‘koinzidiert mit’ (‘-’) und ‘ist ein Körper’ (‘K’). Wir verwenden ‘<’für ‘echter Teil’, der wie folgt zu definieren ist:

D<. $x < y := x \# y \wedge x \ldots y$,

Wir definieren weiter *mereologisches Überschneiden* oder *Überlappen (*O für ‘*overlapping’*) mit:

DO. $xOy :=$ › $z(z \leq x \wedge z \leq y)$

[9]Die Sachlage war also anders als der in der Weltgeschicht auch oft auftauchende Fall einer Grenze, die nur auf eine Seite *akzeptiert* ist.

[10]Vgl. Simons (1987), Eschenbach (1995).

Sich überschneidende Entitäten haben gemeinsame (echte oder unechte) Teile.

Als Bereich unserer Variablen (Bereich der Gegenstände im allgemeinsten Sinn) nehmen wir die Gesamtheit aller räumlichen Körper, einschließlich alle Teile, Grenzen und Zusammenfassung davon. Als mereologische Axiome verwenden wir:

A<1.	$(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$	(Transitivität)
A<2.	$x < y \rightarrow \neg\, y < x$	(Asymmetrie)
A<3.	$x < y \rightarrow \exists z(z < y \wedge \neg\, zOx)$	(schwache Ergänzung)

(Hier und im folgenden sind nicht explizit gebundene Variabeln implizit als allgemeinquantifiziert zu verstehen.) Wir benötigen außerdem ein allgemeines Prinzip der Summierung. ‘Die Summe der φ-er’ ist zuerst kontextuell durch:

Dσ $\quad \sigma x(\varphi x) := \iota y\, (\forall w\, (w\, O\, y \leftrightarrow \exists v\, (\varphi v \wedge w\, O\, v)))$

definiert. $\sigma x \varphi x$ (die Summe der φ-er) ist m.a.W. dasjenige y, das sich mit gerade denjenigen w überschneidet, die sich mit (mindestens) einem φ-er überschneiden.

Wir konstatieren dann:

A<4.	$\exists x \varphi x \rightarrow \exists y(y = \sigma x \varphi x)$	(Summierung)

Für jedes einstellige Prädikat φ, das für wenigstens ein Argument erfüllt ist, existiert eine entsprechende Summe. Es gibt demnach die mereologische Summe aller H_2O-Moleküle, die mereologische Summe aller Katzen, die mereologische Summe aller Menschen, usw. Teile diese Summen sind nicht nur (respektive) H_2O-Moleküle, Katzen und Menschen, sondern auch Teile und Aggregate von H_2O-Moleküle, Katzen und Menschen. Die *Summe* der φ-er ist demnach nicht mit der *Menge* der φ-er gleichzusetzen.

Wir definieren:

D–.	$x–y := \sigma z(z \leq x \wedge \neg\, z\, O\, y)$	(mereologische Differenz)
D∪	$x \cup y := \sigma z(z \leq x \vee z \leq y)$	(binäre Summierung)
D∩	$x \cap y := \sigma z(z \leq x \wedge z \leq y)$	(binäre Schnitt)

und können dann beweisen:

T<1.	$x < y \rightarrow \exists z(z = y–x)$	(starke Restbildung)

Wenn x echter Teil von y ist, dann gibt es genau ein z, derart, daß $x + z = y$.

Koinzidenz

Die Koinzidenzrelation $-$ soll nach unserer jetzigen Auffassung ausschließlich zwischen Grenzen bestehen. (In einer erweiterten Fassung könnte man andere Koinzidenzrelationen mitberücksichtigen, z. B. zwischen einem Körper und der Raumregion, die er besetzt, zwischen Geist und Gehirn, zwischen Statue und Bronzemasse oder sogar zwischen *der Straße von Athen nach Theben* und *der Straße von Theben nach Athen*.) Als Axiome für $-$ nehmen wir:

A-1. $x - y \to y - x$ (Symmetrie)

A-2. $(x - y \wedge y - z) \to x - z$ (Transitivität)

Wir können dann leicht beweisen:

T-1. $x - y \to x - x$

Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes? Gilt es präziser, daß Gegenstände, die mit sich selbst koinzidieren, auch mit etwas Anderem koinzidieren? Diese These können wir wenigstens schwach bejahen, in dem wir sagen, daß selbstkoinzidierende Gegenstände *möglicherweise* mit etwas Fremdem koinzideren können, ein Prinzip, das wir folgendermaßen formulieren können

A-3. $x - x \to \lozenge_x \text{›} y(x - y \wedge x \ldots y)$

Der Modaloperator '$\lozenge_x$' soll hier als 'ist möglicherweise von der Art, daß …'gelesen werden.

Wir brauchen außerdem zwei Prinzipien der beschränkten Summierung:

A-4. $(x - y \wedge v - w) \to (x \cup v) - (y \cup w)$ (endliche Summierung)

Wenn x mit y und v mit w koinzidieren, dann koinzidiert auch die Summe von x und y mit der Summe von y und w. Wir haben ausserdem:

A-5. $(\text{›} y\varphi y \wedge \forall y(\varphi y \to x - y)) \to x - \sigma y\varphi y$

Wenn es ein φ-er gibt und wenn alle φ-er mit x koinzidieren, dann koinzidiert auch die Summe aller φ-er mit x. Wenn also speziell x mit y sowie mit z koinzidiert, dann koinzidiert x mit der Summe von y und z.

Koinzidierende Gegenstände sind metaphorisch gesprochen stets “dünn”, sie haben keine massige Form (Bulk), wie Körper es haben. Aus diesem Grund gewinnen wir ein weiteres Prinzip, das darin besteht, daß Teile von selbstkoinzidierenden Gegenständen immer auch selbstkoinzident sind:

A-6. $(x - x \wedge y < x) \rightarrow y - y$

Körper

Der Begriff eines Körpers soll zunächst allgemein definiert werden. Körper müssen in dem Sinn topologisch wohlerzogen sein, daß sie immer vollständige äußerliche Grenzen haben. Dabei müssen sie aber nicht immer zusammenhängende Gegenstände[11] und sie müssen nicht selbständig sein. (Auch z. B. eine Kugel mit einem Radius von 1 Zoll innerhalb einer größeren soliden Kugel mit einem Radius von 2 Zoll soll als Körper gelten.)[12]

Wir konstantieren dann:

AK1. $Kx \wedge Ky \rightarrow K(x \cup y)$

AK2. $Kx \wedge \neg Ky \wedge \neg xOy \rightarrow \neg K(x \cup y)$

Körper haben demnach keine unendlich dünne Schlitze oder fehlende Einzelpunkte: Fehlende Teile von Körpern sind stets derart, daß sie durch Körper als ihre Füller gefüllt werden können.[13]

Körper haben stets selbstkoinzidente und nicht-selbstkoinzidente Teile. (Sie haben daher die nötige massige Form, sind nicht wie Grenzen dünn”.)

AK3. $Kx \rightarrow (› y\,(y < x \wedge y - y) \wedge › y\,(y < x \wedge \neg y - y))$

[11]Das Beispiel von Landesgrenzen macht deutlich, daß auch Grenzen von nicht-zusammenhängenden Ganzen existieren können, wie z. B. im Fall Dänemarks. Vgl. Cartwright (1975).

[12]In der erweiterten Fassung dieser Ideen werden wir den Begriff einer *Substanz* definieren, der derartige Fälle ausschließt. Vgl. Smith (1992) und (im Erscheinen).

[13]Vgl. Casati und Varzi (1994), Kap. 5: “Fillers and Skins”.

Sie sind außerdem dicht (sie können immer in weitere, kleinere Körper zerschnitten werden):

AK4. $Kx \rightarrow \text{›}yz\,(Ky \wedge Kz \wedge y \cup z = x \wedge \neg\, yOz)$ (Dichte von Körpern)

Körper können prinzipiell miteinander mereologisch überschneiden (wie etwa im Fall des Flügelsystems und des Antriebsystems eines Flugszeugs). Aus formalen Gründen bestehen wir aber darauf, daß der Schnitt zweier Körper immer selbst ein Körper ist:

AK3. $(Kx \wedge Ky \wedge xOy) \rightarrow K(y \cap x)$ (Schnitt)

Grenzen

Eine Grenze ist etwas, was die Bedingung erfüllt, daß sie notwendigerweise als echter Teil eines Körpers existiert. Um künstlich konstruierte Gegenbeispiele auszuschließen, insistieren wir ausserdem darauf, daß eine Grenze etwas ist, deren Teile auch diese Bedingung erfüllen. Eine Definition des Begriffs einer Grenze ist demnach die folgende:

DB1. $Bx := \text{ð}_x\forall z(z \leq x \rightarrow \text{›}y(Ky \wedge z < y))$,

Der Operator 'ð_x' soll hier eine Notwendigkeit bezeichnen: x ist eine Grenze, genau dann wenn, x *notwendigerweise von der Art ist*, daß, für alle seine Teile z, es einen Körper y gibt, der z als echten Teil enthält.[14]

Da x Teil von sich selbst ist, folgt trivialerweise aus DB1:

TB1. $Bx \rightarrow \text{›}y(Ky \wedge x < y)$

Die Definition DB1 soll unsere Intuition zum Ausdruck bringen, daß Grenzen nie isoliert existeren, sondern immer nur in Begleitung von Gegenständen höherer Dimensionen, wovon sie die Grenzen sind.[15]

Wir können jetzt folgendes Axiom konstatieren, die eine Konsequenz unserer begrifflichen Entscheidung zum Ausdruck bringt, daß nur Grenzen in Koinzidenzrelationen stehen können:

---

[14]Diese Definition müßte in einer vollständigeren Darstellung weiter präzisiert werden. Nicht beliebige Körper sollen als Träger einer gegebenen Grenze dienen. Die relevanten Körper müssen aller derart sein, daß im Schnitt von jeden zwei davon die Grenze selbst als echter Teil enthalten ist:

DB. $Bx := \text{›}y\ (Ky \wedge x < y \wedge \text{ð}_x\ \forall z(z \leq x \rightarrow \text{›}w(Kw \wedge z < w \cap y)))$

Dabei müßte auch der Sinn und Status der hier verwendeten Modaloperatoren geklärt werden.

[15]Vgl. Smith 1993, wo diesen Formel “Brentano’s Principle” genannt wird.

AB1. $Bx \, / \, x - x$ (Grenzen sind selbstkoinzident)

Eine Punktgrenze können wir dann wie folgt definieren:

DPT. $PTx := \forall y(y \leq x \rightarrow y - x)$ (Punkt)

was mit der These konsistent ist, daß Punkte (punktuelle) Teile haben können, ohne dadurch ausgedehnt zu sein.

Analog zu AK4 können wir dann behaupten:

AB2. $Bx \rightarrow PTx \vee \, › yz(By \wedge Bz \wedge y \cup z = x \wedge \neg yOz)$

Dieses Axiom soll eine "Dichte von Grenzen" zum Ausdruck bringen. (Wir bemerken dabei, daß AB2 auch dann gilt, wo x z.B. mit ein paar Punkte zu identifizieren ist.)

Schlußbemerkung

In seinen Ausführungen über die "ecological laws of surfaces" schreibt J. J. Gibson:

> According to classical physics, the universe consists of bodies in space. We are tempted to assume, therefore, that we live in a physical world consisting of bodies in space and that what we *perceive* consists of objects in space. But this is very dubious. The terrestrial environment is better described in terms of a *medium*, *substances*, and the *surfaces* that separate them. (1986, p. 16)

Und wie inzwischen klar geworden ist, wird es nicht nur in der Gibson'schen Wahrnehmungstheorie sondern auch in vielen anderen Bereichen der Kognitionswissenschaft mit topologischen Begriffen gearbeitet.[16] Die topologischen Strukturen der Erfahrungswelt können allerdings, wie gezeigt wurde, nur schwer mit Hilfe der klassischen mengentheoretischen Simulationen verstanden werden. Unsere nicht-klassische (Brentano'sche) Theorie bietet sich als Alternative an. Nicht von ungefähr ist diese Theorie aus der direkten Beschäftigung mit den psychologischen Strukturen im Bereich der menschlichen Wahrnehmung entstanden. Denn Brentano war nicht nur Erfinder (oder Entdecker) des modernen Begriffs der Intentionalität. Seine Intentionalitätslehre war Teil einer Ontologie der psychologischen Wirklichkeit, die die Gesamtheit der hier relevanten phänomenalen Strukturen in nicht-reduktionistischer Weise zu behandeln versuchte. Und die eigenartige Verquickung psychologischer und ontologischer Ideen in

[16] Vgl. Eschenbach, Habel und Smith (Hrsg.) sowie die in diesem Heft gesammelten Beiträge.

seinen Werken machen ihn zu einer der wichtigsten Urväter der modernen Kognitionswissenschaft.

Literatur

Bochman, Alexander (1990) “Mereology as a Theory of Part-Whole”, *Logique et Analyse*, 129-30, 75-101.

Brentano, Franz (1933) *Kategorienlehre*, hrsg. von A. Kastil, Leipzig: Meiner.

Brentano, Franz (1976) *Philosophische Untersuchungen zu Raum, Zeit und Kontinuum*, hrsg. von Stephan Körner und Roderick M. Chisholm, Hamburg: Meiner.

Cartwright, Richard (1975) “Scattered Objects”, in K. Lehrer (Hrsg.), *Analysis and Metaphysics* (pp. 153-171), Dordrecht: Reidel, wiederabgedruckt in Cartwright, *Philosophical Essays* (pp. 171-186), Cambridge, Mass.: MIT Press, (1987),

Casati, Roberto und Varzi, Achille (1994) *Holes and Other Superficialities*, Cambridge, Mass.: MIT Press.

Chisholm, Roderick M. (1989) “Boundaries”, in Chisholm, *On Metaphysics* (pp. 83-90), Minneapolis: University of Minnesota Press.

Chisholm, Roderick M. (1992/93) “Spatial Continuity and the Theory of Part and Whole. A Brentano Study”, *Brentano Studien*, 4, 11-23.

Eschenbach, Carola (1995) “Points”, in Eschenbach, *et al.* (Hrsg.).

Eschenbach, Carola, Habel, Christopher und Smith, Barry (Hrsg.) 1995 *Topological Foundations of Cognitive Science*, Hamburg: Graduiertenkolleg Kognitionswissenschaft.

Gibson, J. J. (1986) *The Ecological Approach to Visual Perception*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Lejewski, Czes»aw (1967) “LeÑniewski, Stanis»aw”, in P. Edwards (Hrsg.), *Encyclopedia of Philosophy*, vol. 4, 441-3.

Simons, Peter (1987) *Parts. A Study in Ontology*, Oxford: Clarendon Press.

Smith, Barry (1992) “Characteristica Universalis”, in K. Mulligan, Hrsg., *Language, Truth and Ontology* (Philosophical Studies Series), Dordrecht/Boston/London: Kluwer, 50-81.

Smith, Barry (1993) “Ontology and the Logistic Analysis of Reality”, in N. Guarino and R. Poli (eds.), *Proceedings of the International Workshop on Formal Ontology in Conceptual Analysis and Knowledge Representation* (pp. 51-68), Institute for Systems Theory and Biomedical Engineering of the Italian National Research Council, Padua, Italy. Revidierte Fassung in G. Haefliger und P. M. Simons (Hrsg.), *Analytic Phenomenology*, Dordrecht/Boston/London: Kluwer (in Druck).

Smith, Barry (im Erscheinen) “Boundaries”, in L. Hahn, Hrsg., *The Philosophy of Roderick Chisholm* (Library of Living Philosophers), LaSalle: Open Court.