RIGORISACE INFINITESIMÁLNÍHO POČTU A OBRAT K JAZYKU (KANT – BOLZANO – FREGE)[1]

Prokop SOUSEDÍK

Mathematics in the 19th century underwent explosive development. The discussion among philosophers was motivated by new results which conflicted with Kant's very influential conception. One of the most important areas which lead to the meeting of philosophy and mathematics was a rigorous account of the infinitesimal calculus. In his article the author shows that considerations of this type found in Bolzano and Frege are important not only for the overcoming of the Kantian conception, but as for what we today call the *linguistic turn*

Se vznikem analytické filosofie je spojen zcela nový přístup k řešení filosofických problémů. Zatímco pro antiku a středověk je charakteristická tematizace problematiky bytí a pro novověk oblast subjektu či vědomí, je pro analytické filosofy charakteristický obrat k dosud explicitně netematizované oblasti jazyka. Obrat k jazyku lze proto považovat podobně jako např. Descartův obrat k subjektu za epochální záležitost. K žádné filosofické či vědecké revoluci však nedochází bez předchozí přípravy – půdu pro ni musí svým úsilím připravit předcházející generace. Cílem mého příspěvku je ukázat, jak došlo k tomu, že se někteří filosofové a vědci vymanili z područí subjektivisticky založené novověké filosofie. Chci zde zaměřit svou pozornost na ty problémy a tendence novověké filosofie a vědy, které vedly ve svých důsledcích k obratu k jazyku. Tato tématika je jistě příliš široká a spletitá. Ve svém příspěvku se proto omezím pouze na filosofické a matematické diskuse, které se týkaly problémů spojených se založením infinitezimálního počtu.

1. Problém novověké filosofie

Je známo, že novověcí filosofové většinou rozlišovali dva druhy poznání, respektive dva druhy pravd: poznatky (pravdy), které jsou *a priori*,

1 Práce na tomto příspěvku byla podpořena grantem GAČR 401/04/0117. Za kritické připomínky děkuji Ladislavu Kvaszovi a Jaroslavu Peregrinovi.

a poznatky (pravdy), které jsou *a posteriori*. Poznatky, které mají aposteriorní povahu, nepředstavovaly pro většinu filosofů vážnou obtíž – jsou totiž založeny neproblematickou zkušeností. Vážné obtíže však představovala apriorní oblast. Výroky, které jsou *a priori*, totiž platí obecně a nutně, a tudíž jsou v podstatě téhož druhu jako výroky tehdy zcela nemoderní a opovrhované metafyziky. Oblast apriorního by snad byla z těchto „politických" důvodů zcela zrušena, kdyby neexistovala matematika, která stála v samém srdci přírodních věd a bez níž by byl pokrok těchto věd a s ním i pokrok celého lidstva vyloučen. Právě poznatky matematiky byly totiž považovány za učebnicový příklad poznání, které má zcela nepochybně apriorní povahu. Tím se však před novověkými filosofy vynořil vážný problém: Čím, když ne zkušeností, je založeno apriorní matematické poznání? Odkud se bere nutnost výroků, v nichž je toto poznání formulováno?

Jedna z možností jak zmíněný problém vyřešit, spočívala jednoduše v jeho odmítnutí. S takovýmto přístupem k řešení problematiky apriorního poznání se setkáváme v první polovině 19. stol. na britských ostrovech, kde, jak známo, tradičně vítězil empiristický duch. Nejvyhraněnější případ řešení tohoto druhu lze nalézt u anglického positivisty J. S. Milla. Tento filosof – jako důsledný empirik – totiž zcela odmítl připustit, že ona problematická apriorní oblast existuje. To ho přirozeně vedlo k závěru, že i matematika musí být založena stejným způsobem jako ostatní empirické vědy, tj. musí se jednat o aposteriorní a na indukci založenou disciplínu. Rozdíl mezi matematikou a přírodní vědou by díky tomu nebyl kvalitativní, ale spočíval by pouze ve větší obecnosti matematických pravd.

Empiristický přístup k matematice měl nicméně poměrně malou odezvu. Daleko větší ohlas a diskuse vyvolalo řešení, které předložil I. Kant. Právě Kantovi vděčí analytičtí filosofové za to, že začal rozvíjet systematický zájem o problematiku založení přírodních věd a matematiky. Kanta však nelze pouze považovat za jakéhosi praotce analytické tradice. Díky jeho přispění totiž vznikl rovněž proud analytické filosofii nejenom zcela cizí, ale mnohdy i vůči ní či jejím předchůdcům nepřátelský. Mám zde samozřejmě na mysli myšlenkové hnutí německého idealismu. Chceme-li pochopit počátky a kořeny analytické filosofie, musíme se chtě nechtě do jisté míry zabývat i touto novodobou podobou metafyziky. Nejenom předchůdci, ale i samotní představitelé analytické filosofie, se totiž s touto velmi silnou tradicí kriticky vyrovnávali. K tomuto procesu došlo jak na půdě kontinentální Evropy, tak na ostrovech. Německý idealismus však podle mého soudu nepůsobil pouze jako „vnější nepřítel“, ale i jako „nepřítel vnitřní“. Kantovy úvahy o založení matematiky a přírodních věd totiž zcela pochopitelně vycházely z idealistických předpokladů, tj. především z tzv. *kopernikánského obratu*. V dalších úvahách chci ukázat, že analytická tradice ve své středoevropské podobě vznikala postupným vytlačováním idealistických prvků z úvah, které se týkaly založení přírodních věd a matematiky.

2. Kantova odpověď

Naznačme nyní v krátkosti, jak vypadá Kantovo řešení. Náš autor, jak známo, transformuje otázku ohledně založení věd a matematiky na otázku, jak jsou možné soudy, které vyjadřují apriorní poznání. Východiskem jeho úvah tedy musí být teorie soudu. Každý soud má pro něj, a to je v jeho době neproblematické, subjekt – predikátovou strukturu. Ve všech soudech je proto myšlen určitý vztah mezi subjektem a predikátem. Tento vztah je však možný dvojím způsobem: V prvé řadě Kant hovoří o tzv. *analytických soudech*, pro něž je charakteristické, že je predikát obsažen v subjektu jako jeho část. Spojení subjektu s predikátem je v případě analytických soudů možno díky identitě části subjektu s predikátem, tedy jinak řečeno, díky principu sporu. Při spojování subjektu s predikátem tak není překročen pojem subjektu – zůstáváme pouze na úrovni pojmů, respektive na úrovni pojmové analýzy. Soudy tohoto druhu proto nerozšiřují naše poznání; jelikož se v nich pouze vysvětluje pojem, který stojí na místě subjektu, nazývá je Kant *vysvětlující soudy*. V analytických soudech typu *Staří mládenci jsou neženatí* tak pouze objasňujeme někomu snad nejasný pojem *staromládenectví*. Samotný význam tohoto objasnění však nelze přeceňovat; jedná se o pouhé zachycení lingvistické konvence, které nehraje pro filosofii nikterak důležitou roli. Zdůvodnění možnosti takovýchto soudů spadá do pravomocí tzv. *obecné logiky*, což je podle Kanta disciplína, kterou vytvořil a současně i uzavřel Aristoteles a které proto není třeba věnovat velkou pozornost. Daleko důležitější roli než analytické soudy mají prý soudy syntetické. Tyto soudy na rozdíl od soudů analytických rozšiřují naše poznání, a proto je Kant rovněž nazývá *rozšiřující soudy*. Jejich charakteristickým znakem je, že pojem predikátu není obsažen v pojmu subjektu. K tomu, abych mohl uskutečnit spojení subjektu s predikátem, musím proto vystoupit za hranice pojmu. Musí tedy existovat nějaké *X*, o něž se rozvažování opře, když rozpoznává, že určitý predikát, který v pojmu subjektu neleží, k pojmu subjektu přesto náleží. K soudům, které tímto způsobem překračují úroveň pojmů, patří v prvé řadě soudy empirické. Oním *X*, které umožní spojení subjektu s predikátem, je zde empirický názor. Tyto soudy nazývá Kant *syntetické a posteriori*. Jelikož neplatí ani obecně ani nutně, nemají k problematice založení matematiky žádný vztah a necháme je v další diskusi zcela stranou. Vedle těchto z našeho hlediska nezajímavých soudů, však existuje daleko zajímavější skupina. Soudy, které v této skupině nalézáme, spojují totiž „přednosti" předcházejících dvou skupin. Jsou podobně jako analytické *a priori* a platí proto obecně a nutně a podobně jako soudy syntetické rozšiřují naše poznání (nezůstávají na půdě pouhé pojmové analýzy).[2] Oním *X*, které umožní spojení subjektu s predikátem je v případě matematiky čistý názor času a prostoru. Díky těmto dvěma formám se nám svět jeví uspořádaný do časoprostorových souvislostí. Toto uspořádání však není dáno světem, ale povahou poznávajícího subjektu. *Pokud* [tedy] *odejmeme* [poznávací] *subjekt*, říká Kant, *prostor a čas zmizí: ježto jevy nemohou existovat o sobě, nýbrž pouze v nás*.

S Kantovými závěry se můžeme konfrontovat dvojím způsobem. Zaprvé jako filosofové a zadruhé jako vědci. Právě tento dvojí úhel pohledu měl, jak se domnívám, velký vliv na to, že se v 19. stol. filosofie a věda vzájemně přiblížily. Za vrchol vzájemného přibližování se vědy a filosofie je třeba považovat vznik logického positivismu v první polovině 20. století.

Zastavme se nejprve v krátkost u filosofické reakce na Kantovo pojetí matematiky. Je třeba předeslat, že skutečně negativní reakce nebyla díky všeobecně uznávané autoritě našeho myslitele příliš silná. Vzešla především z pera B. Bolzana, tedy autora, který byl jednak vyškolen v prostředí tradice druhé scholastiky a jednak myšlenkově navazoval na G. W. Leibnize.[3] Představitelé druhé scholastiky brali z vcelku pochopitelných důvodů Kanta s rezervou. Snad to byla i tato okolnost, která způsobila, že z Bolzana vyrostl první vážný, i když ve své době nedoceněný, Kantův kritik.

---

[2] Kantovy úvahy o různých typech soudů nalezneme v:[14], s. 39 – 41.

[3] Jan Šebestík v: [22] s. 2, charakterizuje pražské vědecké prostředí, v němž Bolzano vyrostl, takto: *Po ztrátě nezávislosti Českého království na začátku třicetileté války přestala být Praha jednou z laboratoří, v nichž se pracovalo na moderní vědě, avšak španělští jezuité, zvláště Caramuel Lobkowitz a Rodrigo de Arriaga zde rozvinuli modernizovanou scholastickou filosofii, která byla později zkombinována s populárním leibnizianismem.*

Bolzano vytýká Kantovi v podstatě to, že ačkoli se snažil o objektivní založení věd a matematiky, svým řešením vnesl do úvah tohoto druhu zcela nežádoucí prvek subjektivismu. Vychází-li totiž nutnost našeho poznání (která je pro oba myslitele nutným atributem poznání matematického) z poznávacího subjektu, pak prý musí existovat subjektivní vědomí nutnosti, či jakési nutkání spojit subjekt s predikátem. V takovém případě by však čistý názor nebylo možno redukovat na nic jiného než vnitřní pud našeho poznání. Takovýto závěr by však nepochybně vedl k subjektivistickému založení matematiky. Pokud by chtěl Kant tomuto zničujícímu důsledku své koncepce uniknout, musel by prý uznat, že ono vědomí nutnosti je vyjádřitelné v dalším soudu. Tento soud by však musel být opět syntetický *a priori*. To je však rovněž nepřijatelné, neboť otázka o možnosti matematiky byla Kantem redukována právě na otázku možnosti syntetických soudů *a priori*. Chceme-li vysvětlit v čem spočívá nutnost syntetických soudů *a priori*, nemůžeme to činit pomocí soudů stejného druhu. Zdá se proto, že z filosofického hlediska je Kantovo řešení velmi diskutabilní (srov. [3], §62).

Bolzanova kritika není podle mého mínění okrajovou záležitostí, kterou by mohli Kantovi stoupenci beze slova přejít. Přijmeme-li totiž oprávněnost jejího závěru, podle nějž je nutnost našich soudů dána pouhým ze subjektu vycházejícím nutkáním, pak nutnost všech soudů je dána v podstatě psychologickými faktory. Tím se však ocitáme nebezpečně blízko koncepce D. Huma, podle nějž nutnost našich soudů je dána psychologickým faktorem – zvykem. Je však známo, že právě tento skeptický důsledek Humovy filosofie se Kant pokusil svojí vlastní koncepcí překonat.

3. Kantova filosofická koncepce a rozvoj exaktních věd

Je třeba zdůraznit, že Kantově koncepci nezasadil rozhodující úder žádný z filosofů, ale samotný rozvoj vědních disciplín, o jejichž filosofické založení se ve své práci pokusil. Připomeňme proto nyní v krátkosti, jaký skok věda po Kantově smrti udělala.

Newtonovská fyzika 19. stol. se připravovala k velké revoluci, k níž došlo díky Einsteinovi na počátku 20. století. Právě neúspěšné novokantovské pokusy interpretovat relativistickou fyziku je třeba považovat za jednu z příčin vzniku nového způsobu filosofování – logického positivismu. Z novokantovských pozic na pozice nové filosofie přešli při pokusech interpretovat relativistickou fyziku především M. Schlick (srov. [22])a H. Reichenbach (srov. [20]). Další důležitou oblastí, v níž došlo k zásadní změně, je geometrie. Díky úvahám o pátém axiomu totiž vznikly tzv. *neeuklidovské geometrie*. Filosoficky reflektovali vznik nových geometrií především H. Helmholtz, H. Poincaré a D. Hilbert. Jak problematiku relativistické fyziky, tak problematiku neeuklidovských geometrií[4] necháme nicméně stranou; podrobněji budeme sledovat pouze vývoj v oblasti tzv. *infinitezimálního počtu*, tj. matematické disciplíny, u jejíhož zrodu stál I. Newton a G. W. Leibniz a bez níž by byla moderní fyzika nemyslitelná. Vznik infinitezimálního počtu má na Kantův filosofický systém poněkud jiný dopad než vznik neeuklidovských geometrií a relativistické fyziky. Na rozdíl od těchto později jmenovaných disciplín totiž žádné z Kantových tezí přímo neodporuje. Kant byl dokonce velmi pravděpodobně zárodečnou podobou infinitezimálního počtu do jisté míry inspirován. Nepříznivé důsledky pro jeho pojetí matematiky a tím i apriorního poznání jako takového představuje až pozdější snaha o nalezení pevných základů tohoto nového oboru, tj. snaha o jeho rigorisaci. Čistě matematické aspekty této tématiky v našich úvahách pomineme; soustředíme se především na filosofické aspekty postupného procesu rigorisace.

Abychom pronikli k jádru problému, je nutné nejprve nastínit, co lze pod pojmem *rigorisace* rozumět. Coffa ve své knize *The semantic tradition from Kant to Carnap* předkládá tezi, že na rigorisační proces můžeme pohlížet dvojím způsobem([6], 26): Lze jej v prvé řadě spojovat s tradiční epistemologií. Rigorisací určité vědy pak rozumíme hledání nezpochybnitelného základu, o nějž se diskutovaná disciplína opírá. Prvním filosofem, který tímto způsobem přistoupil k rigorisaci vědy, byl nepochybně R. Descartes, který nalezl nezpochybnitelný základ všech věd v myslícím Já, tedy v samotném poznávajícím subjektu. Ačkoli se Kant pokusil Descartův přístup překonat, i u něj nadále nacházíme při úvahách o založení věd odvolání se na poznávající subjekt. I on, když se zabývá založením matematiky, se totiž dovolává subjektem založeného názoru prostoru a času.

Na rigorisaci však lze podle Coffy pohlížet i poněkud jinak. Důležité nemusí být výhradně dosažení oné descartovské jistoty, na které stavíme „chrám“ vědy, ale můžeme ji chápat jako snahu o „pouhé“ objasnění pojmů, které v příslušné vědní disciplíně používáme. Samotnému objasnění lze přitom rozumět různým způsobem: můžeme mu rozumět ve

[4] Problematikou neeuklidovských geometrií se podrobněji zabývám v [23].

smyslu kantovského *vysvětlení* pojmu pojmem v rámci analytického soudu (v rámci analytického soudu *Starý mládenec je neženatý* objasňujeme či vysvětlujeme pojem *staromládenectví*); kontext objasnění však můžeme pojmout i širším způsobem – nemusíme se omezit na kontext jediné věty, při objasňování můžeme i poukázat na inferenční souvislosti mezi větším počtem vět, v nichž se problematický pojem vyskytuje.

O objasnění přirozeně usilujeme jak v rámci běžné komunikace, tak v rámci vědeckého diskursu. Rozdíl mezi běžným a vědeckým objasněním pak spočívá pouze v tom, že na proces objasnění ve vědě klademe vyšší nároky – vědecké objasnění musí být rigorosní. Klíčovou roli v něm hraje nejenom přesná definice, ale i důkaz. Usilujeme-li tedy v tomto smyslu o rigorisaci nějaké vědecké disciplíny, pak nám nejde o nic jiného než o přesné vyjasnění pojmů, které v příslušné vědecké disciplíně používáme.

Coffa srovnává právě uvedené dva způsoby rigorisace takto: *Hledání rigorosity může být a také často bylo hledáním neotřesitelného základu („Grund"). Nicméně bylo rovněž hledáním jasného vysvětlení pojmů příslušné disciplíny*. ([6], 26 – 27) Hledání rigorosity v prvém smyslu slova pak lze podle jeho mínění ztotožnit s hledáním esence či podstaty a v druhém smyslu slova je pak náš výzkum ztotožnitelný s hledáním významu.

4. Rigorisace infinitesimálního počtu

Po tomto předběžném vysvětlení se již můžeme zevrubněji zamyslet nad problematikou infinitesimálního počtu. Ačkoli se okamžitě ukázalo, že je tato nová matematická disciplína velice výkonná a pro praxi užitečná, její založení bylo velmi chatrné. To se týkalo jak verze, kterou předložil Newton, tak verze Leibnizovy. Zatímco ústředním pojmem Leibnizovy teorie byla nekonečně malá kvantita, vycházel Newton z rychlosti změny, tj. z tzv. *fluxe*. Společným rysem obou řešení byla snaha objasnit pojmy infinitesimálního počtu pomocí odvolání se na naši představivost, tedy ve své podstatě k oblasti názoru či intuice. Každý matematický pojem či postup tak musel být pro matematika 18. stol. v určitém smyslu objasněn představou, tj. musel být názorný. Takovéto pokusy o objasnění matematických pojmů vedly přirozeně i Kanta, který se s infinitesimálním počtem seznámil pravděpodobně v jeho anglické podobě, k závěru, že matematiku je třeba založit právě na názoru prostoru a času. Kantovy ambice však byly nepochybně filosofické a jeho řešení do matematiky zcela jistě nepatří. Jedná se o spekulativní reflexi soudobého vývoje ve vědě, o níž Kant, jak známo, projevoval velký zájem.

Matematické objasňování pojmů infinitesimálního počtu pomocí „základnějších“ pojmů prostoru a času, ze kterého Kant při svých úvahách vycházel, však vedlo k vážným obtížím. Jak Leibnizovo, tak Newtonovo řešení totiž zabředávalo do celé řady rozporů a nejasností. Pokud totiž matematikové chtěli objasnit pojmy infinitesimálního počtu pomocí názorných představ, pak zcela přirozeně narazili na problém nekonečně malých a nekonečně velkých veličin, k jejichž povaze patří, že jsou s představami a názorností neslučitelné. Tyto nejasnosti pak vedly jak k rozporuplným metodikám výpočtu, tak k rozporuplnému způsobu vyjadřování.

Není divu, že prakticky orientovaným matematikům takovéto nedostatky zpočátku příliš nevadily. Nová disciplína se totiž ukázala jako nástroj, který je pro vědu velice užitečný. Abychom odbyli všechny možné námitky stačí prý pouze upozornit na to, že Newton i Leibniz vytvořili velice užitečný a výkonný prostředek k popisu chování funkcí.

Závažnost problému si paradoxně jako první uvědomili filosofové, k nimž se teprve později připojili teoretičtěji orientovaní matematikové. Prvním kritikem chatrného založení infinitesimálního počtu tak byl G. Berkeley, který v závěru své kritiky píše ([2], 69, cituji podle [6]):

> Nic není jednoduššího než si vymyslet výrazy či soustavu symbolů … Tyto výrazy jsou skutečně jasné a zřetelné, a pro mysl není vůbec obtížné si je myslet i za hranicemi označitelného. Když ovšem odstraníme roušku a nahlédneme pod ni, když tedy necháme stranou výrazy, a místo nich budeme pozorně uvažovat o samotných věcech, o nichž se předpokládá, že jsou jimi vyjádřeny či označeny, pak se setkáme s prázdnem, temnotou a zmatkem. Ba, jestliže se nemýlím, přímo s nemožnostmi a spory.

Zprvu nebral filosofovy výtky nikdo příliš vážně. Postupem času však začali nad založením infinitesimálního počtu pociťovat vážné rozpaky i někteří teoretičtěji orientovaní matematikové. Navenek se to projevilo především tím, že v roce 1784 berlínská akademie předložila vědeckému světu problém založení kalkulu. Případní řešitelé se měli pokusit vysvětlit právě roli, kterou hrají v rámci kalkulu nekonečně malé a nekonečně velké veličiny. Zadání, které cituji podle ([6], 25), znělo takto:

> Je dobře známo, že vyšší matematika [*tj. infinitesimální počet*] neustále pracuje s nekonečně velkými a nekonečně malými kvantitami. Geometři a dokonce i antičtí analytikové nicméně vždy usilovali o to, aby se vyhnuli všemu, co se přibližuje nekonečnu. Někteří moderní analytikové tvrdí, že termíny v obratu „nekonečná veličina“ si vzájemně odporují. Nadějí akademie proto je, že se podaří vysvětlit, jak je možné, že z kontradiktorického předpokladu bylo odvozeno mnoho pravdivých teorémů …

Na výzvu berlínské akademie reagoval jako první francouzský matematik Lagrange, který se r. 1797 ve své práci *Théorie des fonctions analytiques* pokusil vzniklý problém řešit redukcí problematických veličin na teorii čísel. Ačkoli byl jeho pokus po věcné stránce neúspěšný, naznačil jakým směrem půjde další vývoj. Další důležitý krok naznačeným směrem učinil Bolzano, jehož práci lze považovat za skutečný počátek rigorisace infinitesimálního počtu.

K pochopení Bolzanova přínosu je nejprve třeba předeslat dvě zásady, jichž se musíme při dokazování matematických pravd držet: 1. I když se zdá, že je matematická věta naprosto zřejmá, musíme bezpodmínečně hledat její důkaz. Je totiž prý bezpodmínečně nutné *vyvodit všechny pravdy matematiky z jejich nejzazších počátků, čímž se získá větší zřetelnost, správnost a řád ve všech pojmech této vědy* ([5], III, cituji podle [24], 3). 2. Při vlastním dokazování je třeba používat pouze pojmy, které jsou obsaženy v dokazované větě. Je tedy nepřípustné vést důkaz pomocí pojmů, které jsou s danou oblastí nesourodé. Důkazy, které tento požadavek nerespektují, hřeší proti Aristotelově zásadě, podle níž je nepřijatelné vést důkaz *tak, že by se přecházelo z jednoho rodu do druhého …* ([1], 40).

Úspěšné a vlivné rozvinutí těchto zásad, které podstatnou měrou vedlo k rigorisaci infinitesimálního počtu, nalézáme v dalším Bolzanově spise *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes* (*Čistě analytický důkaz teorému*) [4]. Problém, kterým se zde zabýval, je zdánlivě triviální. Jde o důkaz teorému o střední hodnotě. Podle tohoto teorému musí spojitá funkce, která nabývá hodnot nad i pod nulovou osou, nabývat i hodnoty nulové – musí alespoň v jednom bodě nulovou osu protnout. Jelikož je uvedený teorém naprosto názorný, stačí k prokázání jeho platnosti (alespoň běžnému člověku) pouhá představa či náčrtek. Takovýto postup zřejmě zvolili i Bolzanovi předchůdci a postupy tohoto druhu měl před očima i samotný Kant, když uvažoval o základech matematiky. K větě o střední hodnotě je třeba přistoupit ve světle právě formulovaných zásad. 1. I když se může zdát nadbytečné vyžadovat v jejím případě důkaz, je třeba jej podat. Získáme tím *větší zřetelnost, správnost a řád v pojmech vědy,* stanovíme tím – moderně řečeno – rigorosní základy infinitesimálního počtu. 2. Při provádění samotného důkazu se však musíme navíc držet Aristotelovy zásady, podle níž je nepřípustné vést důkaz za pomoci pojmů, které jsou s danou oblastí nesourodé. Vyjdeme-li tedy při dokazování věty o střední hodnotě z náčrtku či představy, pak jsme *de facto* vyšli z geometrických pojmů a diskutovaná věta platí pouze v oblasti geometrie. Stejně tak problematické by prý bylo vyjít při důkazu této „triviální" věty z (pro tuto větu) klíčového pojmu *spojitosti*. Spojitost totiž byla v Bolzanově době definována pomocí pojmů času a pohybu. Nevýhody tohoto postupu však byly v podstatě obdobné jako v předcházejícím případě. Tentokrát však do matematiky pronikly navíc pojmy, které stojí naprosto mimo oblast této disciplíny. Z důkazu je proto třeba vytlačit všechny cizorodé pojmy a vést jej naprosto analytickým, tj. logickým způsobem. Bolzanův vlastní pokus o důkaz tohoto druhu má sice ještě technické nedostatky, nicméně jedná se o jeden z prvních pokusů nalézt pevné základy matematiky.

Bolzanova rigorisace kalkulu, kterou jsme dokumentovali na důkazu věty o střední hodnotě, však nemá význam pouze v oblasti matematiky – nutně se dotýká i filosofických úvah. Spis *Čistě analytický důkaz teorému* je totiž praktickou ukázkou toho, jak při dokazování určité věty postupovat čistě analytickou metodou. Při důkazu se nikde, jak bylo tehdy běžné, nedovoláváme našeho názoru či intuice. Kantovou chybou bylo, že se při svých filosofických úvahách nechal inspirovat těmi dobovými matematickými praktikami, v jejichž rámci se právě názorné, a tudíž mimo pojmovou oblast stojící, prostředky používali. Nevzal v úvahu, že se v jeho době již vyskytovaly práce, jejichž autoři začínali oblast názorného postupně opouštět. Např. Lagrange nemá ve své teorii funkcí ani jeden obrázek, v algebře se pracuje s imaginárními veličinami atd.[5] Je patrné, že právě tyto progresivní trendy Kant nezachytil a reflektoval ty oblasti matematiky, v jejichž rámci hrál názor nadále klíčovou roli. Necháme-li se však svést praktikami tradiční matematiky a připustíme-li společně s Kantem, že názorné prostředky nemají pojmovou povahu, pak jsme již pouhý krok od nesprávného závěru, podle nějž důvod spojení subjektu s predikátem musí spočívat v jakémsi nekonceptuálním *X*. Geometrický, ale i každý jiný důkaz v oblasti matematiky bude pro nás podobně jako pro Kanta řetězcem úsudků, v jejichž rámci jsme vedeni názorem (srov. [16] B 745 / A 717, s. 434). Bolzanův matematický postup však ukázal, že názorné prostředky jsou v oblasti přesných matematických úvah nežádoucí a že mohou vést ke zmatkům, o nichž hovořil Berkeley. Důvod spojení subjektu s predikátem je proto třeba hledat v Kantem nedoceněné sféře logiky respektive pojmové analýzy.

[5] Za toto historické doplnění vděčím L. Kvaszovi.

Námi diskutovaný vztah mezi Kantovou filosofií a matematikou 18. a 19. stol. velmi přehledně shrnuje v ([21], 145, cituji podle [18]) B. Russell:

> Když si Kant povšimnul, že geometrové [*ale i ostatní matematikové*] jeho doby [*18. stol.*] nebyli s to dokázat svoje teorémy čistou argumentací, ale utíkali se mnohdy k obrázkům, vymyslel teorii matematického usuzování, podle které není matematické vyvozování nikdy čistě logickou záležitostí, ale vždy vyžaduje podporu názoru. Celkový trend moderní matematiky spojený s narůstajícím zdůrazňováním přesnosti však tomuto kantovskému pojetí protiřečí [*Russell má na mysli matematiku 19. stol., tj. právě Bolzana a jeho následníky*].

Důkaz věty o střední hodnotě patří sice primárně k dějinám matematiky, nicméně má, jak je vidět, i závažné filosofické důsledky. Vezmeme-li totiž vážně Bolzanovo analytické objasňování matematických pojmů, pak role názoru v matematice musí degradovat na pouhý mnohdy nepřesný a zavádějící pedagogický prostředek. Rigorisace kalkulu tak proměnila matematiku v té míře, že bylo třeba odmítnout Kantovy filosofické závěry i z jiných než z filosofických důvodů.

Bolzano se tedy pokouší zpochybnit Kantovo pojetí nejenom filosoficky (viz závěr §2), ale i tak, že objasňuje pojmy, s nimiž se v infinitesimálním počtu setkáváme. I když takovéto objasnění samo nemá filosofickou povahu, může, jak jsme viděli, diskvalifikovat určitý filosofický postoj, který se díky pojmové nejasnosti určité disciplíny vytvořil.[6] Kantovo filosofické založení matematiky totiž vyrůstá ze skutečnosti, že matematikové objasňovali pojmy infinitesimálního počtu nekorektním způsobem.

5. Vznik moderní logiky

V procesu rigorisace matematiky ve smyslu objasňování jejích pojmů pokračovali další velcí matematikové 19. stol. – R. Weierstrass, G. Cantor, R. Dedekind. Weierstrassovým žákem byl jeden z nejvýznamnějších filosofů 20. stol. Edmund Husserl. Ten se ve svém habilitačním spise z r. 1887 ([15], 294)zamýšlí nad dosavadním vývojem v oblasti infinitesimálního počtu takto:

> V současné době vládne obecný souhlas v tom, že rigorosní a dokonalé rozvinutí vyšší analýzy [*tj. infinitesimálního počtu*], které nechává stranou všechny pomocné pojmy geometrie, by mělo vycházet ze samotné elementární aritmetiky, jíž je analýza založena. Avšak tato elementární aritmetika má své jediné založení v pojmu čísla.

---

[6] S tezí, že vývoj matematiky zpochybnil Kantova filosofická východiska, zajímavým způsobem polemizuje Ladislav Kvasz ve stati [16].

Z uvedeného citátu je patrné, že Husserl píše svoji habilitační práci v době, kdy byl proces rigorisace, u jehož zrodu stál především Bolzano, úspěšně dokončen. K objasňování pojmů infinitesimálního počtu se již přestaly používat pojmy prostoru a času, ale začalo se používat pojmů aritmetiky a (v omezené míře) též logické nauky o třídách. Jelikož v tomto procesu hraje podle Husserla klíčovou roli aritmetika, lze tento proces výstižně nazvat *aritmetizací vyšší analýzy*, respektive *infinitesimálního počtu*. Dodejme však, že v samém srdci aritmetiky stojí základnější dosud neobjasněný pojem čísla. Podle některých matematiků 19. stol. proto nebylo žádoucí považovat aritmetizaci infinitesimálního počtu za konečné slovo k problematice rigorisace matematiky. Klíčovou roli v tomto ohledu sehrál německý matematik a filosof G. Frege, který si předsevzal postavit matematiku ještě na pevnějších základech než jeho předchůdci. Je obecně známo, že Fregův projekt v podstatě ztroskotal, a že se jeho autorovi nedostalo ani patřičného docenění. Význam jeho práce patřičně docenili až Fregovi následníci. Ti, ačkoli si jasně uvědomili jeho neúspěch v oblasti založení matematiky, v něm rozpoznali myslitele, který stojí u zrodu analytické filosofie a moderní matematické logiky. Podívejme se nejprve na to, jak došlo k tomu, že primárně matematické snahy daly podnět ke vzniku moderní logiky.

Frege si podobně jako Bolzano uvědomil, že v procesu rigorisace hraje klíčovou roli logický důkaz. Důkaz však podle jeho mínění nehraje důležitou roli pouze v případě dokazování nových matematických teorémů, ale je jej třeba (podobně jako to činil Bolzano, když dokazoval teorém o střední hodnotě) vyžadovat někdy i v případě, ve kterém příslušné matematické tvrzení považujeme za samozřejmé (srov. [10], §1). Užití důkazu ve druhém smyslu pak nemá za cíl objevit novou matematickou pravdu, ale především objasnit problematický matematický pojem (Fregovi šlo primárně o pojem čísla).

Problémem však je, že nároky na přesnost důkazu jsou v rámci procesu rigorisace daleko vyšší než v případě důkazu nového matematického teorému. Úspěšnost důkazu nového teorému lze (ponecháme-li stranou chyby měření) totiž mnohdy ověřit induktivně – např. součet úhlů trojúhelníka vychází vždy 180°. Při pouhém objasňování pojmu však těžko můžeme hledat oporu v indukci, jelikož dokazovaná pravda bývá i bez důkazu na první pohled zřejmá. Cílem rigorisace je proto naprosto přesné vystižení logických vztahů mezi větami, v nichž se vyskytuje problematický pojem (např. *spojitost*, *číslo*). Chceme-li zjišťovat logické vztahy, pak nutně musíme zabezpečit, aby důkaz, který při objasňování pojmu používáme, byl rozčleněn na neproblematické logické kroky, a navíc, aby byla zaručena jeho čistě logická povaha, tj. při dokazování můžeme provádět právě jen ony neproblematické logické kroky a neodvolávat se k mimo-logickým záležitostem. Nesmíme se proto v žádném případě odvolávat na matematickou intuici, která bývá spojována s naší představou prostoru a času. Krok tímto směrem by vedl k tomu, že by se v rámci našeho důkazu vyskytly cizorodé prvky a nám by se v důsledku toho nepodařilo vystihnout logické souvislosti mezi větami, v nichž se diskutovaný pojem vyskytuje. V rámci důkazu, který má být rigorosní, proto musíme vycházet pouze z toho, co je obsaženo v premisách, a nesmíme se, tak jak to činili matematikové v Kantově době, odvolávat k názoru, tj. k entitě, která má mimo-logickou povahu – vyvozování nesmí být vedeno pomocí názoru. Naším prvořadým úkolem proto je odstranit nebezpečí konfuse, ke které může v procesu dokazování dojít.

Problémem, jehož šíři si uvědomil Bolzano jenom částečně, však bylo, že matematika 19. stol. dosud neměla v rukou adekvátní nástroj, pomocí nějž by zajistila jednoznačnost logického důkazu. Právě tento nedostatek si citelně uvědomil Frege, který svým úvahám o založení aritmetiky předeslal své *Pojmové písmo* [9], tj. spis, v němž nalezneme autorovu představu jak při rigorosním dokazování postupovat. Aby byl důkaz v rámci procesu rigorisace akceptovatelný musí být *bez mezer*, tj. rozložený na základní logické kroky. Právě tento rozklad zamezí tomu, aby se *vetřelo cokoli z názoru* ([9], v). V této své snaze Frege explicitně odporuje Kantovi, u nějž nacházíme myšlenku, že důkaz má právě být veden za pomoci názoru.

Pro účely matematické argumentace, v jejímž rámci se nesmíme odvolávat k názoru, je však přirozený jazyk nevhodný. Je proto třeba navázat na Leibnizovu myšlenku obecné charakteristiky, tj. na projekt výstavby jazyka, který jednoznačným způsobem zachytí naše myšlení. Zatímco Leibniz při realizaci svého projektu neuspěl, je výsledkem Fregových snah to, co dnes nazýváme *formálním systémem*. Pro formální systém je charakteristický jednak formální jazyk a jednak odvozovací pravidla, pomocí nichž je stanoveno, které logické kroky jsou povolené. Máme-li k dispozici formální sytém, není již obtížné říci, jak by měl vypadat rigorosní respektive formální důkaz: Jedná se o posloupnost formulí – poslední formulí této posloupnosti je dokazovaný teorém. Pro každou z formulí posloupnosti dále platí, že je buď axiomem (premisou), anebo jsme ji získali užitím odvozovacích pravidel na předcházející řádky důkazu. Takováto definice důkazu umožňuje jeho mechanickou kontrolu, při jejímž provádění se nemusíme a ani nemůžeme odvolávat ke Kantovu názoru.

Vznik nové logiky tudíž jednak rozšířil možnosti techniky vedení důkazu, jednak rozšířil i možnosti objasňování. Od Kanta, který chápal logiku jako definitivně uzavřenou disciplínu a který v důsledku toho chápal objasnění, respektive vysvětlení, pouze ve spojení s určitým typem analytického soudu (obecný kladný), tedy došlo k výraznému posunu. Jak samotný důkaz, tak objasnění byly totiž podle Kantových představ pro svoji primitivnost ve své podstatě nezajímavé – důkaz se omezoval na nevýkonnou aristotelskou sylogistiku; objasnění se uskutečňovalo pomocí analytického soudu, pomocí nějž lze pouze objasnit, jaké složky má na místě subjektu stojící pojem. Primitivnost soudobé logiky a fakt, že matematikové jak při důkazech tak při objasňování svých pojmů používali názorných prostředků, vedly proto Kanta k závěru, že matematik musí proniknout za oblast vymezenou pojmy. Fregova logika a její aplikace při rigorisaci matematiky však ukazují, že v celé řadě případů se nemusíme uchylovat k názorným prostředkům a můžeme v pojmy vymezené oblasti setrvat.

6. Logizace aritmetiky

Fregovým úmyslem však nebylo pouhé vytvoření jakéhosi *organonu* matematiky. Ve svém *Pojmovém písmu* viděl pouhý nutný nástroj ke splnění svého skutečného cíle, jímž bylo rigorisovat aritmetiku. Podobně jako se jeho předchůdci snažili rigorisovat pojmy infinitesimálního počtu tak, že věty, v nichž se tyto pojmy vyskytovaly, redukovali na věty, v nichž se vyskytovaly aritmetické pojmy, snaží se nyní Frege prokázat, že věty aritmetiky lze dále redukovat na věty logiky. Posledním pojmem aritmetiky by tak neměl být pojem čísla či jednotky (jak uvádí Husserl), ale logické pojmy. Logiku bychom proto podle Frega neměli degradovat na pouhý nástroj – její věty by měly stát v samotných základech aritmetiky. Tímto postojem se Frege zcela otevřeně hlásí k logicismu. Snaha logizovat aritmetiku, která byla jeho hlavním životním projektem, však skončila jak známo nezdarem.[7] Ačkoli tuto prohru Frege těžce nesl, je třeba

[7] Neúspěchy Fregových a později i Russellových snah vyvolaly ve 20. stol. určitou skepsi ohledně možnosti stanovit logické základy aritmetiky. V současné době jsme však opět

konstatovat, že se paradoxně jednalo o neúspěch velice plodný. Jeho prvním plodem je, jak jsme právě vysvětlili, vznik moderní logiky.

Nyní se zamyslíme nad tím, jaké plody přinesl další po *Pojmovém písmu* publikovaný spis *Základy aritmetiky* [10]. V tomto spise se Frege neformálním způsobem zabýval povahou aritmetiky. Na způsobu jeho přístupu k tomuto problému je patrné, že Frege jako snad první v dějinách filosofie vykonal (i když ne vždy zcela důsledně) krok, který dnes nazýváme *obrat k jazyku*. Díky této skutečnosti se *Základy aritmetiky* považují za vůbec první spis analytické filosofie.

Abychom pochopili, v čem spočívá naznačená novost přístupu k filosofickým problémům, zamyslíme se nad otázkou *Co je číslo jedna nebo co znamená znak 1* ([10], 3), kterou si Frege klade hned v úvodu svých *Základů*. Na první pohled vyznívá tato otázka poněkud dvojznačně! Jde v ní o to, abychom odhalili esenci čísla 1, nebo v ní jde spíš o význam znaku *1*? Úvahy nad tímto problémem nás vedou zpět ke Coffovu rozlišení, podle nějž lze procesu rigorisace rozumět dvojím způsobem: Buď jako epistemologickému úsilí o nalezení nezpochybnitelného základu, které ve svých důsledcích vede k otázce po esenci, nebo jako snaze objasnit problematické pojmy, jež vede k otázkám, které se týkají významu.

Téměř celé Fregovo dílo je podle mého soudu dokladem toho, že autorovým primárním zájmem je rigorisace matematiky v neepistemologickém smyslu. Nejde mu tedy primárně o esenci čísla jedna, ale o význam, který spojujeme s příslušným znakem. Frege tedy navazuje na matematickou tradici 19. stol., jejíž nositelé se pokoušeli objasňovat pojmy infinitesimálního počtu pomocí pojmů aritmetiky; narozdíl od svých předchůdců se však pokouší sestoupit ještě o patro hlouběji. Temným a objasnění (či rigorisaci) vyžadujícím pojmem je podle jeho soudu samotné číslo, tedy ústřední pojem samotné aritmetiky.[8]

Pojem čísla rigorosně objasníme tak, že ukážeme (především pomocí důkazu), jak věty, v nichž se vyskytují číslovky, souvisí s větami jinými (základnějšími). Číslovky se pak vyskytují ve zvláštním typu vět, které náš autor nazývá *číselné údaje* (*Zahlangabe*). Na první pohled je však patrné, že celá záležitost v sobě skrývá další dosud neřešený problém: existuje totiž jistě celá řada různých typů vět a nám dosud není jasno, jakého

svědky pokusů o znovuvzkříšeni logicismu. Na tyto nové tendence v našem prostředí upozornil František Gahér [14].

[8] Výrazu „pojem" užívám v jeho běžném smyslu. Fregovo rozlišení mezi pojmem a předmětem nehraje v rámci mých úvah žádnou roli.

typu jsou ony jiné základnější věty, pomocí nichž máme aritmetiku rigorisovat. Mill by např. jistě upřednostnil empirické výroky a v Kantově případě by klíčovou roli sehrály výroky, které mají vztah k časové posloupnosti atd. Pokud by se tedy dejme tomu Mill pokusil o rigorisaci v neepistemologickém smyslu, jistě by vyžadoval, aby věty matematiky (protože samy v podstatě patří k empirické vědě) byly objasňovány pomocí *a posteriorních* vět, které mají vztah k empirickému názoru. Kant by naproti tomu vyžadoval syntetické věty *a priori*, které mají vztah k čistému názoru času.

V první části *Základů* se Frege s názory tohoto druhu kriticky vypořádává. Chce-li nicméně nabídnout řešení jiné, musí předložit vlastní úvahu o tom, jakého druhu jsou věty, s nimiž v rámci aritmetiky pracujeme, musí se jinými slovy zamyslet nad povahou aritmetiky. Řešení tohoto úkolu není samoúčelné. Pronikneme-li totiž k povaze aritmetiky, respektive vět, se kterými v aritmetice pracujeme, ukáže se tím i povaha vět, pomocí nichž by bylo možné matematiku dále rigorisovat. Na Fregově myšlenkové práci v tomto ohledu však není zajímavý samotný závěr (tj. dnes těžko udržitelný logicismus), ale to, jakým způsobem ve prospěch svého pojetí aritmetiky argumentuje. V rámci svých úvah totiž náš autor zcela explicitně zaměří svoji pozornost na oblast jazyka. Nezačíná tedy spekulovat o povaze či esenci čísla, ale v prvé řadě se zaměří na věty, v nichž se vyskytují číslovky (číselné údaje). Sám Frege si zřejmě uvědomoval, že jeho myšlenkový postup je revoluční; později o něm totiž hovoří jako o *nejzákladnějším výsledku* své práce ([11], ix).

Číselné údaje mají podle Frega podobu vět, které získáme jako odpověď na otázku *Kolik?* Příkladem číselného údaje je proto např. věta *Jupiter má čtyři měsíce*, kterou získáme jako odpověď na otázku *Kolik má Jupiter měsíců?* Chceme-li v našem zkoumání povahy číselných údajů postoupit dále, pak se je třeba dále tázat, čeho se věty tohoto druhu týkají? Frege odmítá připustit, že pojednávají o určitých předmětech (např. o třídě měsíců) či o našich subjektivních stavech (jako jsou naše představy či reprezentace). Ten, kdo nám klade otázku *Kolik*, prý nechce, abychom charakterizovali určitý předmět, ale spíše vyžaduje, abychom charakterizovali určitý pojem. V odpovědi na otázku *Kolik má Jupiter měsíců?* tedy charakterizujeme pojem *být Jupiterovým měsícem*. Naše odpověď *Jupiter má čtyři měsíce* tedy přesně vzato říká: *pod pojem Jupiterův měsíc spadají čtyři individua*. Věty aritmetiky, o nichž Fregovi předchůdci předpokládali, že se odvolávají k čemusi mimo-logickému (Mill hovoří o *empi-*

rickém názoru, Kant naproti tomu o názoru čistém), jsou tedy ve skutečnosti věty o pojmech. Avšak věty, v jejichž rámci charakterizujeme pojmy, nemohou patřit jinam než do oblasti logiky. Budeme-li tedy chtít objasnit věty s číslovkami, budeme muset hledat jejich souvislosti s větami logiky. Jinými slovy: aritmetiku je třeba objasňovat či rigorisovat pomocí logiky.

Tento závěr však skrýval především v druhé polovině 19. stol. vážné nebezpečí. Vždyť samotnou logiku považovali filosofové tohoto období mnohdy za disciplínu, která se zabývá naším myšlením, a proto patří do oblasti empirické psychologie. Přijali-li bychom tedy v 19.stol. převládající pojetí logiky, měla by v důsledku toho empirické základy nejenom logika, ale samozřejmě i aritmetika. Pokud by se tedy Frege kriticky nevyrovnal s psychologismem v logice, vedly by jeho úvahy o založení matematiky v podstatě k témuž závěru jako úvahy Millovy.[9] Millovo pojetí však Frege, jak již víme, velmi razantně odmítá. Není proto divu, že odpověď na tento problém může nalézt jedině v očistě logiky od psychologie, respektive od snah jejího založení v subjektu. Doklad toho, že tento úkol bere náš autor velmi vážně, nalezneme již v úvodu *Základů*, kde Frege formuluje principy, jimiž se bude při svých zkoumáních řídit. První z těchto principů totiž zní: *je třeba ostře oddělit psychologické od logického, subjektivní od objektivního* ([10], 9).

7. Obrat k jazyku

Dospějeme-li společně s Fregem k logicismu, pak musíme uznat, že je třeba z aritmetiky vytlačit všechny kantovské syntetické soudy a důvod pravdivosti aritmetických soudů hledat pouze v jejich logické struktuře. Jinými slovy: přijetím Fregova logicismu opouštíme oblast syntetických soudů *a priori* a obracíme svoji pozornost výhradně ke Kantem zanedbávané oblasti analytického. Mohlo by se zdát, že obratem k analytickému (tj. k pojmovému) je završen i obrat k jazyku. Tento závěr by však podle mého mínění byl předčasný a příliš zjednodušující. To platí především pro Bolzana, v menší míře však i pro Frega. Nepopiratelným přínosem obou autorů je totiž pouze to, že se důsledně vymanili z vlivu novověké

[9] O principu kontradikce např. Mill říká: *Domnívám se naopak, že je to … jedna z našich prvních a nejdůvěrněji známých generalizací získaných na základě smyslové zkušenosti. Jejím nejhlubším základem je to, jak se domnívám, že kladné a záporné přesvědčení jsou dva mentální stavy, které se vylučují. To zjišťujeme pomocí zcela prostého pozorování našeho duševního života* ([19], 31).

filosofie, podle níž je skutečnou sférou filosofie oblast subjektivity – oblast vědomí. Ani pro jednoho totiž nemohou matematické entity (matematické propozice) náležet ani k vnitřnímu proudu vědomí ani k vnějšímu světu. Musí proto oba uznat existenci oblasti, kterou Frege nazývá „třetí říše“. To, co k ní patří se shoduje s obsahy našeho vědomí v tom, že to rovněž není vnímatelné smysly, s věcmi vnějšího světa zas v tom, že „obyvatelé třetí říše“ nepotřebují žádného nositele, k jehož vědomí by to patřili (srov.: [8], 64). Na první pohled je však patrné, že jazyk v běžném slova smyslu do oblasti třetí říše patřit nemůže. Každá promluva je totiž vnímatelná, a díky tomu musí náležet k vnějšímu světu. Zdá se proto, že o obratu k jazyku nemůže být ani u jednoho z autorů žádná řeč.

Tento závěr by však byl z celé řady důvodů příliš radikální. V první řadě je třeba zopakovat, že oba filosofové obracejí svou pozornost k objektivně dané oblasti a tím překonávají subjektivismus novověké filosofie. Tento krok pak přinejmenším připravuje půdu pro pozdější obrat k jazyku. Mohli bychom sice namítnout, že ona objektivní oblast, o niž projevují Bolzano a Frege zájem, má daleko blíže k Platonově říši idejí než k jazyku, ale i zde existuje důležitý posun, který dává tušit blízkost vzniku nového přístupu k filosofickým problémům. Ideální entity, o nichž zde je řeč, totiž určitým způsobem souvisí s jazykem a je to právě jazyk, pomocí nějž se k těmto problematickým entitám vztahujeme. Věta, jakožto posloupnost zvuků či znaků, se vztahuje k ideálním entitám: v pojetí Bolzanově k tzv. *větě o sobě*, v pojetí Fregově k *myšlence*.

Fregův postoj k jazyku je však v celé řadě ohledů vyhraněnější než postoj Bolzanův a v hlavních rysech jej lze již považovat za uskutečnění nového obratu ve filosofii. Z našeho hlediska je zajímavá myšlenka, kterou nalézáme v jeho poznámkách pro Darmstädtera. Vztah mezi jazykem a myšlenkou zde náš autor precizuje takto: *Větu lze považovat za obraz myšlenky v tom ohledu, že vztah mezi částí a celkem myšlenky v jisté míře odpovídá vztahu mezi částí a celkem věty* ([12], 68). Z úryvku je patrné, že jediný přístup, který k myšlenkám respektive ideálním matematickým entitám můžeme mít, je přístup přes jazyk. Jazyková struktura, i když ne vždy adekvátním způsobem, totiž zachycuje strukturu myšlenky. Ještě radikálnější zájem o jazyk je však patrný ze způsobu, jímž Frege usiluje o výše zmíněné *ostré oddělení psychologického od logického, subjektivního od objektivního* ([10], 9). Rozhodnutí brát uvedené oddělení vážně a učinit z něj dokonce jednu ze zásad výkladu v *Základech* totiž staví našeho autora před závažný problém. Jeho filosofičtí předchůdci se totiž (v závislosti na Descartově obratu k vědomí) domnívali, že základ veškerého poznání je třeba hledat v subjektu. To však, jak již víme, odporovalo Fregovým představám o založení aritmetiky. Máme-li základy této disciplíny považovat za objektivně dané, pak je třeba právě oblast subjektivního či psychologického opustit. Učiníme-li však tento odvážný krok, pak se před námi objevuje kantovsky zabarvená otázka: *Jakým způsobem nám může být dané číslo, jestliže o něm nemůžeme mít žádnou představu či názor?* ([10], §62) Odpovědí na ni je druhá hlavní zásada *Základů*, s níž je čtenář seznámen hned v úvodu tohoto spisu. Zde Frege formuluje tezi, kterou dnes nazýváme princip kontextuality.[10] Podle tohoto principu se *po významu slova* [tj. i číslovky] *musíme ptát v kontextu věty a nikoli, když slovo stojí samostatně* ([10], x). To, že se význam slova (respektive matematický pojem) musí objasňovat v kontextu, bylo do jisté míry implicitně zřejmé i těm Fregovým předchůdcům (především Bolzanovi), kteří rigorisovali matematiku pomocí důkazu. Z tohoto důvodu je lze považovat za předchůdce obratu k jazyku. Narozdíl od svých předchůdců však Frege tento princip ve svých *Základech* jednak stanovil a jednak se jím programově řídil, a právě to činí z jeho knihy snad vůbec první práci v oblasti analytické filosofie. Při řešení filosofických problémů se totiž jejich autor programově obrátil k dosud explicitně netematizované oblasti jazyka.

Jaký je tedy vlastně Fregův skutečný postoj k jazyku? Není rozhodně jednoznačný: To je patrné nejenom z jeho zmínek o „třetí říši“, ale i z jeho pozdějších úvah, v nichž reflektuje svůj neúspěch při řešení Russellova paradoxu, jímž byla zpochybněna jeho koncepce logicismu. Svoje neúspěchy začal připisovat právě našemu jazyku, v němž lze bez problémů vytvořit mimo jiné i termíny formy *extenze pojmu F*. Existence termínů tohoto druhu nás pak vede k falešné představě, že těmto termínům odpovídají Russellovým paradoxem problematizované logické předměty. *Hlavní úkol logika* proto podle Frega *spočívá v osvobození se od jazyka* ([12], 68). Podobné vyjádření nalézáme ve stati „Erkenntnisquellen“, kde se říká, že *velký díl filosofické práce spočívá v ... boji s jazykem* ([13], 270).

Ve Fregových pracích tak nalézáme obojí: jednak důsledně provedený obrat k jazyku, jednak i značnou nedůvěru, kterou k jazyku v průběhu své další práce náš autor pojal. Toto napětí si uvědomuje i M. Dummett. Ve své práci *Origins of Analytical Philosophy* ukazuje, že Fregova pozdější nedůvěra k jazyku může celkovou tendenci jeho myšlení snad v mnohém zatemnit, nicméně revoluční rysy a postupy jeho práce zůstávají i přes to nadále zřejmé a nezpochybněné (srov. [7], kap. 2).

[10] O souvislosti těchto dvou principů výstižně pojednává V. Kolman ([17], 761 – 762).

8. Závěr

Proces rigorisace tedy vyvrcholil tím, že raní analytičtí filosofové razantně odmítli Kantovu koncepci, podle níž je třeba hledat založení matematiky mimo konceptuální respektive jazykovou oblast (tj. v oblasti čistého názoru prostoru a času). Raní analytičtí filosofové (Frege, Russell a další) na rozdíl od Kanta tvrdili, že při úvahách o založení této disciplíny oblast pojmového čili oblast logiky opustit nesmíme. To, že matematika je taková, jaká je, nemohlo proto podle jejich mínění být dáno povahou na myšlení nezávislého předmětu, jímž se v rámci této disciplíny zabýváme, ale povahou samotného myšlení. Další vývoj nicméně ukázal, že předpoklad matematiky redukované na myšlení, tj. na logiku, vede ke zničujícím paradoxům. Postupně tak začínalo být patrné, že samotným objasňováním matematických pojmů lze stěží dosáhnout pozitivního výsledku. Odmítneme-li však z tohoto důvodu matematiku převést na logiku, vyvstanou před námi opět staré filosofické otázky. Znovu se lze ptát: s jakým druhem entit vlastně matematikové pracují? o čem tedy tito vědci uvažují? čím je dána nutnost tvrzení, s nimiž se v této disciplíně setkáváme?

Není-li tedy matematika redukovatelná na logiku, pak zde zřejmě musí existovat nějaký předmět, o němž matematik logicky uvažuje a který zakládá nutnost matematických tvrzení. Je proto opět nutné hledat to, co Coffa s jistým despektem nazývá *hledáním neotřesitelného základu*. Musíme si proto znovu společně s Fregem položit otázku, co je číslo. Na tuto otázku je však třeba odpovědět nikoli objasňováním významu, který spojujeme s číslovkou (tak jak to činil ve svých úvahách Frege), ale zamyšlením se nad esencí této filosoficky záhadné entity. Takové úvahy by však paradoxně mohly přispět i k určité rehabilitaci Kantovy filosofie. Vyplývá z nich totiž, že musí existovat dva druhy apriorních pravd: ty, jejichž pravdivost je dána pouhým významem (analytické soudy, logické pravdy); a ty, jejichž pravdivost je dána ještě něčím jiným než významem použitých výrazů (soudy syntetické *a priori*).

Jaký má tedy význam rigorisace infinitesimálního počtu pro filosofii respektive pro její dějiny? V prvé řadě je třeba zdůraznit, že díky tomuto procesu matematikové a filosofové začínali postupně projevovat zájem o jazyk. Tento proces sehrál tedy důležitou úlohu při obratu k jazyku, tj. při vzniku analytické filosofie. Je však třeba upozornit na to, že samotný proces rigorisace nevedl k žádnému jednoznačnému filosofickému závěru ohledně založení matematiky. Zvláště v současné době platí, že žádné z filosofických řešení založení matematiky není ani definitivním vítězem ani definitivně poraženým (jak jsme ukázali na příkladu samotného Kanta). Mohlo by se proto zdát, že rigorisace neměla na filosofii jiný než historický vliv. Taková odpověď by však ponechala stranou důležité východisko analytické filosofie: Nutným (a někdy i dostatečným) předpokladem řešení filosofických problémů je totiž přesné (tj. rigorosní) pochopení jazyka, který užíváme. Rigorisace infinitesimálního počtu se tak stala určitým paradigmatickým příkladem toho, jak by měl analytický filosof při řešení svých problémů postupovat.

Filosofický ústav AV ČR
Jilská 1, 111 00 Praha
sousedik@site.cas.cz

LITERATURA

[1] ARISTOTELES (1962): *Druhé Analytiky*. Praha.

[2] BERKELEY, G. (1951): The Analyst. In: *The Works of George Berkeley*. Vyd. A. Luce, sv. 4, Nelson, London.

[3] BOLZANO, B. (1981): Něco o kritické filosofii a některých novějších filosofiích v Německu. In: *Výbor z filosofických spisů*. Přeložil J. Loužil, Praha.

[4] BOLZANO, B. (1817): *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege*. Gottlieb Hass, Praha.

[5] BOLZANO, B. (1804): *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*. Přetištěno in: Geometrické práce, Praha 1948.

[6] COFFA, J. A. (1991): *The semantic tradition from Kant to Carnap*. Cambridge University Press.

[7] DUMMETT, M. (1996): *Origins of Analytical Philosophy*. Harvard University Press.

[8] FREGE, G. (1994): Der Gedanke: eine logische Untersuchung. In: *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*. Do češtiny přeložil J. Fiala, in: *Scientia & Philosophia* 6/1994.

[9] FREGE, G. (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. L. Nerbert, Halle.

[10] FREGE, G. (2002): *Základy aritmetiky: logicko – matematické skúmanie pojmu čísla*. Do slovenštiny přeložil P. Balko, vydal Filozofický ústav SAV jako přílohu časopisu Organon F.

[11] FREGE, G. (1966): *Grundgesetze der Arithmetik: begriffsschriftlich abgeleitet*. 2 svazky Jena 1893, 1903. Repr. *Grundgesetze der Arithmetik*, Hildesheim.

[12] FREGE, G. (1980): *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Přeložil H. Kaal, vyd. B. Mcguinness. Oxford.

[13] FREGE, G. (1979): *Posthumous Writings*: Do angličtiny přeložil P. Long a R. White. Oxford.

[14] GAHÉR, F. (2003): Oživenie logicismu (čo by mal/mohol filozof vedieť o logicizme). In: Havlík, V. (ed.): *Metoda – význam – intence. Popperovské motivy v současném analytickém myšlení*. Filosofia, Praha, 163 – 187.

[15] HUSSERL, E. (1936). *Über den Begriff der Zahl*. Habilitationsschrift. In: *Philosophie der Arithmetik*. International Congress for the Unity of Science, Paris.
[16] KANT, I. (2001): *Kritika čistého rozumu*. Přeložil J. Loužil, Praha.
[17] KOLMAN, V. (2002): K Fregově údajnému holismu. In: *Filosofický časopis* 50, č. 5.
[18] KVASZ, L. (2005): Hintika a Friedman o Kantovej filozofii geometrie. In: Sousedík, P. (ed.): *Jazyk – logika – věda*. Filosofia, Praha, 233 – 252.
[19] MILL, J., S. (1995): *A System of Logic, Raciocinative and Inductive*. Citováno podle: O důkazu a nutných pravdách. In: *Co je analytický výrok*. Praha.
[20] REICHENBACH, H. (1920): *Relativitätstheorie und Erkenntnis Apriori*. Berlin.
[21] RUSSELL, B. (1993): *Introduction to Mathematical Philosophy*. Routlege, London.
[22] SCHLICK, M. (1915): Die philosophische Bedeutung des Relativitätsprinzips. In: *Zeitschrifft für Philosophie und philosophische Kritik* 159, 129 – 175.
[23] SOUSEDÍK, P. (2004): Helmholzovy úvahy o založení geometrie. In: *Používanie, interpretácia a význam jazykových výrazov*. Bratislava, 212 – 230.
[24] ŠEBESTÍK, J. (2000): Bolzano, Exner a počátky analytické filosofie. In: Fiala, J. (ed.): *Analytická filosofie – druhá čítanka*. Plzeň, 1 – 32.