APhEx 16, 2017 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 03/06/2017
Accettato il: 10/10/2017
Redattore: Paolo Labinaz & Francesca Ervas

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N° 16 GIUGNO 2017

T E M I

Ipotesi del Continuo

Claudio Ternullo[*]

L'Ipotesi del Continuo, formulata da Cantor nel 1878, è una delle congetture più note della teoria degli insiemi. Il Problema del Continuo, che ad essa è collegato, fu collocato da Hilbert, nel 1900, fra i principali problemi insoluti della matematica. A seguito della dimostrazione di indipendenza dell'Ipotesi del Continuo dagli assiomi della teoria degli insiemi, lo status attuale del problema è controverso. In anni più recenti, la ricerca di una soluzione del Problema del Continuo è stata anche una delle ragioni fondamentali per la ricerca di nuovi assiomi in matematica.

[*] Indirizzo di posta elettronica: claudio.ternullo@univie.ac.at. Vorrei rivolgere un ringraziamento particolare ai due revisori anonimi, che hanno contribuito a migliorare significativamente una precedente versione di questo articolo.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

L'articolo fornisce un quadro generale dei risultati matematici fondamentali, e un'analisi di alcune delle questioni filosofiche connesse al Problema del Continuo.

INDICE

1. Considerazioni preliminari

L'Ipotesi del Continuo (CH)[1] è una delle principali congetture "aperte" della teoria degli insiemi. Il Problema del Continuo, a cui essa è collegata, è stato e, per certi versi, è ancora, uno dei suoi problemi fondamentali. Esso si può formulare in questo modo:

PROBLEMA DEL CONTINUO. Qual è la *cardinalità transfinita* dell'insieme dei numeri reali (il continuo)? Ovverosia, *quanti* punti vi sono nella retta reale?

Esistono due formulazioni "classiche" di CH, che vale la pena citare subito in maniera estesa (anche se verranno riprese più avanti).

[1] Nel testo si è sempre preferito utilizzare gli acronimi inglesi, che sono notevolmente più conosciuti e usati di quelli italiani. In particolare, l'Ipotesi del Continuo è CH (*Continuum Hypothesis*), l'Ipotesi Generalizzata del Continuo è GCH (*Generalised Continuum Hypothesis*) e il Problema del Continuo è CP (*Continuum Problem*).

IPOTESI DEL CONTINUO. (i) Ogni sottoinsieme infinito del continuo (di $\mathbb{R}$) è o *numerabile*, e cioè, ha la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ (che si indica con $\aleph_0$) oppure ha la cardinalità dei reali stessi (che si indica con $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$). (ii) $\mathbb{R}$ ha la più piccola cardinalità transfinita dopo il numerabile (che si indica con $\aleph_1$).

Le due formulazioni sono equivalenti se si assume l'Assioma di Scelta (*Axiom of Choice*, AC). CP si può considerare ancora "insoluto", sebbene il suo status esatto sia controverso. Come vedremo più avanti, esistono insiemisti che ritengono che CP sia stato risolto in maniera più che soddisfacente. La storia di CH ha, peraltro, determinato un ripensamento globale della nozione stessa di *soluzione* in teoria degli insiemi (e in matematica), in quanto strettamente collegata alle questioni di indipendenza e indecidibilità. CH è, infatti, com'è noto, l'esempio canonico di proposizione matematica indipendente dagli assiomi ZFC (Zermelo-Fraenkel+AC, v. nota 4). La generalizzazione di CH, ovverosia l'Ipotesi Generalizzata del Continuo (GCH), è l'asserzione:

IPOTESI GENERALIZZATA DEL CONTINUO. Dato un qualunque ordinale transfinito α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Anche GCH è indipendente da ZFC. Sia CH che GCH hanno avuto un'importanza fondamentale per la teoria degli insiemi e per il suo sviluppo, sebbene, dopo la dimostrazione di indipendenza, non siano molti gli insiemisti che ritengano che CP sia una questione centrale nella teoria degli insiemi contemporanea.

L'importanza di CP per la filosofia della matematica è molteplice, in quanto esso chiama in causa temi centrali di questa disciplina, alcuni dei quali possono già essere citati brevemente: (a) la questione dell'indeterminatezza insiemistica; (b) la questione di cosa conti come una soluzione in matematica (e se vi possano essere più soluzioni di un problema matematico, e in che senso); (c) i nuovi assiomi, e la loro giustificabilità; d) il dibattito fra realisti e anti-realisti.

Da un punto di vista storico, lo sviluppo della teoria degli insiemi può essere vista come un tentativo di risolvere CP (ovverosia, di dimostrare o confutare CH). Kanamori, per esempio, si è espresso così, in merito:

> La teoria degli insiemi ebbe il suo inizio non come una qualche fondazione astratta per la matematica, ma piuttosto come scenario per l'articolazione e la

> soluzione del *Problema del Continuo*: determinare se ci siano più di due potenze immerse nel continuo (Kanamori 1996, 5).

Gli fa eco Koellner:

> Fu il tentativo, da parte di Cantor, di dimostrare questa ipotesi [CH, *nota mia*] che lo condusse a sviluppare la teoria degli insiemi come una branca sofisticata della matematica (Koellner 2016, 1).

Quindi, se è accettabile il punto di vista secondo cui trovare una soluzione di CP sia ormai di scarso interesse, è comunque impossibile, ancora oggi, non riconoscere lo stretto legame fra CP e lo sviluppo di alcune delle più importanti aree di ricerca della teoria degli insiemi contemporanea.

Questo articolo contiene un'analisi di alcuni degli aspetti fondamentali di CH (e, inevitabilmente, anche di GCH). Date, tuttavia, la complessità e la varietà dei temi che vi sono connessi, esso non può che rappresentare un sorvolo generale. Sebbene l'articolo abbia un contenuto essenzialmente matematico, quasi tutte le dimostrazioni sono state omesse. In alcuni casi, la matematica di CP è così sofisticata da rendere impossibile anche un mero sorvolo. Tuttavia, nella bibliografia finale vengono indicate letture specifiche che sono necessarie per un'ulteriore conoscenza tecnica del problema.

La struttura dell'articolo è la seguente. Nella sezione 2, si discute la storia primitiva di CP e CH, in particolare il contributo cantoriano. Nella sezione 3, vengono presi in esame gli unici risultati di aritmetica cardinale e teoria descrittiva degli insiemi dimostrabili in ZFC. La sezione 4 ricostruisce i contributi di Gödel e Cohen che hanno portato alla dimostrazione di indipendenza. La sezione 5 discute alcuni sviluppi recenti in teoria degli insiemi e il loro impatto su CH. La sezione 6 esamina le questioni filosofiche fondamentali che hanno animato il dibattito concernente la questione. La sezione 7 contiene una bibliografia ragionata.

I lettori che non abbiano alcuna conoscenza, o abbiano solo una conoscenza di base, della teoria degli insiemi possono tranquillamente saltare i dettagli delle sezioni 3, 4 e 5, e assimilarne solo i contenuti fondamentali (che vengono, peraltro, riepilogati alla fine).

2. Il contributo cantoriano

La teoria degli insiemi affonda le proprie radici nel lavoro svolto da Cantor in analisi (in particolare, in una serie di suoi lavori pubblicati fra il 1870 e il 1872). Nell'affrontare il problema dell'unicità della rappresentazione di una funzione attraverso serie trigonometriche, Cantor si imbatté in questioni che avevano a che fare con la topologia dei reali, questioni da cui prese le mosse la teoria degli insiemi "transfiniti". Vediamo in che modo.

Nel 1874 Cantor era in grado di dimostrare che esistono diversi ordini di infinito. Il principio su cui si basava questa "scoperta" era quello dell'*equipotenza* fra due insiemi, secondo cui:

PRINCIPIO 1. Dati due insiemi A e B, A ha la stessa cardinalità di B (e si scrive $|A| = |B|$) se e solo se esiste una funzione *biiettiva* $f: A \longrightarrow B$ fra gli elementi di A e gli elementi di B. (Si noti, invece, che risulta $|A| < |B|$ se e solo se esiste una $f: A \rightarrow B$ che sia solo *iniettiva*, ma non *surgettiva*, fra gli elementi di A e B).

Con in mano il PRINCIPIO 1, Cantor fu presto in grado di dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una corrispondenza biunivoca fra punti del continuo *lineare* e n-uple del continuo n-*dimensionale* (ovverosia che $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$) e, inoltre, che la cardinalità di $\mathbb{R}$ era uguale a quella di un qualunque suo sottoinsieme *continuo* (preso un intervallo $[a, b]$, per esempio, la cardinalità dell'insieme corrispondente ad $[a, b]$ è uguale a quella di tutto $\mathbb{R}$!). Ma, soprattutto, Cantor dimostrò il seguente teorema, che segna l'inizio stesso della teoria degli insiemi:

TEOREMA 1. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. *Dim.* Con un procedimento diagonale, si definisce un reale r_{diag} che non può apparire nell'immagine di qualunque funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ora, Cantor sapeva che esistevano insiemi infiniti di punti nel continuo che avevano la cardinalità di $\mathbb{N}$, e insiemi che avevano quella di $\mathbb{R}$ (che, come sappiamo già, si indica anche con $\mathfrak{c}$). Fu lecito, a questo punto, chiedersi se esistessero insiemi di punti di cardinalità intermedia fra quella di $\mathbb{N}$ e quella di $\mathbb{R}$. In Cantor (1878), comparve per la prima volta CH nella forma seguente:

IPOTESI DEL CONTINUO. Dato un qualunque insieme di punti $P \subseteq \mathbb{R}$, o $|P| = |\mathbb{N}|$ oppure $|P| = \mathfrak{c}$.

Negli anni seguenti, Cantor ampliò le sue ricerche su insiemi di punti e cardinalità infinite (o "transfinite", come egli le chiamerà a breve). In particolare, egli perseguì due linee di ricerca, una basata sulla nozione di *insieme derivato* di punti, e una su quella di *tipo d'ordine*, o *ordinale* di un insieme (v. Cantor 1879-1884).

Per quanto concerne la prima linea di ricerca, consideriamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1. p si definisce punto di accumulazione di un insieme di punti P se, dato un qualunque intorno I di p (un intervallo che contiene p), esiste sempre, in I, un $q \neq p$, tale che $q \in P$.

Si definisce insieme derivato di P (e si indica con P') l'insieme dei punti di accumulazione di P. Ora, può accadere che: (1) $P' \subseteq P$, e cioè che P contenga tutti i suoi punti d'accumulazione, o che: (2) $P \subseteq P'$, e cioè che tutti i punti di P siano punti di accumulazione. Nel caso (1), P si definisce *chiuso* (e il suo complemento in $\mathbb{R}$ si definisce *aperto*), mentre nel caso (2), P si dice *denso in sé stesso*. Un insieme per cui valgano (1) e (2) si definisce *perfetto*.

Per esempio, l'insieme chiuso che corrisponde all'intervallo chiuso $[0,1]$ è perfetto, mentre l'insieme aperto che corrisponde all'intervallo aperto $(0,1)$ non lo è, in quanto 0 e 1 sono punti di accumulazione dell'insieme non contenuti in esso.

Cantor concentrò la propria attenzione sugli insiemi *perfetti*, in quanto dimostrò che essi, così come quelli *aperti*, hanno tutti la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$. Questo risultato fu, poi, esteso, da Cantor e Bendixson, anche agli insiemi semplicemente chiusi attraverso il seguente teorema:

TEOREMA 2 (CANTOR-BENDIXSON). Sia $P \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di punti chiuso tale che $|P| > \aleph_0$. Allora esiste sempre una scomposizione $P = Q + R$ tale che:

(1) $|Q| \leq \aleph_0$
(2) R è perfetto, e quindi, $|R| = \mathfrak{c}$

Col TEOREMA 2 in mano, Cantor poteva finalmente asserire che tutti gli insiemi di punti: (1) aperti; (2) chiusi; (3) perfetti soddisfacevano CH. Ben presto emerse, tuttavia, che esistevano insiemi di reali che non soddisfacevano CH (v. sez. 3.2).

Lo studio delle cardinalità di insiemi di punti, e dei loro insiemi derivati, aveva condotto Cantor a mettere a punto una procedura interessante, che avrebbe preparato il terreno per il secondo sviluppo fondamentale della teoria degli insiemi. Egli aveva mostrato che, dato un insieme di punti P non perfetto, cioè tale che $P' \neq P$, poteva accadere che, iterando l'operazione di derivazione n volte, si avesse che $P^{n+1} = P^n$. Ma poteva accadere che per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, $P^{n+1} \neq P^n$ (ma, in ogni caso, risultava che $P^{n+1} \subset P^n$). In quest'ultimo caso, Cantor definì una derivata *transfinita*: $P^{\omega} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P^n$, e poi la derivata di questa $(P^{\omega})' = P^{\omega+1}$ e così via.

Per quanto riguarda la seconda linea di ricerca, che porta alla formulazione della nozione di *tipo d'ordine*, essa si basa su un'interpretazione particolare degli ordinali transfiniti (come ω) che, come abbiamo visto, Cantor aveva introdotto nei suoi lavori sugli insiemi infiniti di punti come *indici* dell'operazione di derivazione:

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \dots\ \omega+\omega, \omega+\omega+\omega, \dots, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{\omega}, \dots \quad [\mathbf{1}]$$

Ciascuno di essi fu caratterizzato da Cantor come un tipo d'ordine di un insieme infinito, cioè fu interpretato come una *disposizione* particolare degli elementi di un insieme infinito *bene ordinato*. Il concetto di *buon ordinamento* è fondamentale nello sviluppo della teoria cantoriana e riceve la sua prima formulazione esplicita in Cantor (1883b). La formulazione cantoriana, sebbene leggermente più articolata, è, nella sostanza, equivalente a questa:

DEFINIZIONE 2 (BUON ORDINAMENTO). Un insieme A si dice *bene ordinato* se ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un elemento *minimo*.

In quell'opera, poi, Cantor sostiene di poter dimostrare un principio fondamentale concernente il buon ordinamento, un principio che egli definisce una "legge del pensiero" ("Denkgesetz", v. Cantor 1883b, in Cantor 1932, p. 169), e che è equivalente al teorema del buon ordinamento:

TEOREMA 3 (BUON ORDINAMENTO). Dato un qualunque insieme A, A è sempre bene ordinabile (ha, cioè, un tipo d'ordine).

Il teorema del buon ordinamento costituisce uno dei capisaldi della "costruzione" cantoriana del transfinito. Tuttavia, come fu ben presto chiaro, esso è tutt'altro che una legge del pensiero autoevidente. Dopo l'uscita di scena di Cantor, il continuatore fondamentale della sua opera, Zermelo, dedicò parte dei suoi primi sforzi in teoria degli insiemi a

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

dimostrarlo tramite un principio più generale, ovverosia l'Assioma di Scelta, formulabile in questo modo:

ASSIOMA DI SCELTA (AC). Dato una famiglia S di insiemi, esiste sempre una funzione di scelta f su S.

Una *funzione di scelta*, intuitivamente, è una "legge" tramite cui è possibile selezionare, per ogni insieme A in S, un elemento dell'insieme. Zermelo introdusse AC in Zermelo (1904) e dimostrò che AC$\leftrightarrow$ BUON ORDINAMENTO. AC comparve già nella lista degli assiomi che Zermelo elencò in Zermelo (1908b) a costituire un frammento di quella che sarebbe divenuta l'assiomatizzazione standard degli insiemi, ZFC (formulata, nella sua forma definitiva, in Zermelo 1930, e per cui rimandiamo, ancora una volta, alla nota 4). Vedremo, fra pochissimo, come CH sia formulabile in presenza di AC.

In Cantor (1883b), Cantor enucleò una dottrina degli ordinali transfiniti che va ben oltre la prima serie $[\mathbf{1}]$. Infatti, egli si rese conto di poter dimostrare che tutti gli ordinali in $[\mathbf{1}]$ costituivano essi stessi un insieme. Egli dimostrò che questo insieme aveva una cardinalità *strettamente* maggiore del numerabile ($> \aleph_0$). Essendo bene ordinato, l'insieme stesso aveva un tipo d'ordine, che egli indicò con ω_1. A questo punto la serie degli ordinali poteva essere continuata in maniera analoga alla serie $[\mathbf{1}]$:

$$\omega_1, \omega_1 + 1,\ \omega_1 + 2, \dots ,\omega_1 +\ \omega, \dots , \omega_1 +\ \ \omega^{\omega}, \dots ,\ \ \omega_1 + \omega_1, \dots\ [\mathbf{2}]$$

La serie $[\mathbf{2}]$, a sua volta, aveva una cardinalità strettamente superiore a quella della serie $[\mathbf{1}]$, e tipo d'ordine ω_2, e così via. Cantor fu, quindi, in grado di definire nuovi tipi d'ordine e un'intera "scala" di cardinalità transfinite corrispondenti. In Cantor (1895-97), egli iniziò a utilizzare una notazione speciale, che usava la prima lettera dell'alfabeto ebraico, $\aleph$ (*aleph*). Egli istituì la seguente corrispondenza: $|\omega_\alpha| = \aleph_\alpha$, in cui α è un qualunque ordinale transfinito. Egli aveva precedentemente stabilito che $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. CP, quindi, in presenza di AC, consisteva ora nel dover determinare quale $\aleph$ corrispondesse a $\mathfrak{c}$.

Un terzo, e conclusivo, sviluppo delle sue ricerche in teoria degli insiemi condusse Cantor a definire un ulteriore insieme, che avrebbe consentito di sviluppare appieno l'aritmetica cardinale transfinita, ovvero l'*insieme potenza* (o *delle parti*), che consiste di tutti i sottoinsiemi di un dato insieme A (e che si indica con $\wp(A)$). In particolare, egli dimostrò, usando la stessa tecnica utilizzata per il TEOREMA 1, che:

TEOREMA 4. $|A| < |\wp(A)|$.

Ora, è possibile rappresentare ogni $r \in \mathbb{R}$ attraverso una successione infinita di 0 e 1, cioè attraverso una funzione $f: \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$. La funzione è un elemento dell'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ a $\{0, 1\}$ che si può indicare con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (o ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$). Cantor aveva mostrato che, anche per insiemi infiniti A e B, la cardinalità di $|A^B|$ era uguale a $|A|^{|B|}$. Ne derivava che $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\{0,1\}|^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$ e, quindi, che $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. CH si poteva formulare, quindi, in questo modo:

IPOTESI DEL CONTINUO. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Le ragioni storiche per cui Cantor fu indotto a formulare CH non sono facilmente comprensibili: si veda, su questo punto, Moore (1989).

Per riepilogare, Cantor pose le basi degli sviluppi futuri della teoria degli insiemi, e formulò CH, sperando di poterne dare rapidamente una dimostrazione. I suoi tentativi rimasero frustrati, e le ragioni di queste difficoltà sono esaminate nelle prossime sezioni.

3. Aritmetica cardinale e insiemi di reali

3.1 Aritmetica cardinale

I due lasciti cantoriani, la teoria del transfinito e la teoria degli insiemi di punti, costituirono la base per il lavoro successivo su CH. Una nuova generazione di insiemisti si diede, fra il Novecento e gli anni Trenta, a indagare il problema con strumenti nuovi. I risultati che ottennero, tuttavia, furono importanti, ma tutt'altro che risolutivi (una sintesi di tutti questi risultati si trova in Sierpiński 1934). La ragione del loro insuccesso verrà brevemente illustrata nella prossima sezione: i matematici lavoravano (quasi sempre) in ZFC (o ZF, o teorie equivalenti), e gli assiomi di ZF(C) non sono in grado né di dimostrare né confutare CH.

Sebbene ZFC sia "debole", alcuni dei risultati dimostrabili in esso su CH hanno certamente un grande valore. Iniziamo la nostra analisi dall'aritmetica cardinale, e cioè dalle leggi che governano le operazioni fondamentali fra cardinali transfiniti (gli $\aleph$).

Anzitutto, fra il 1904 e il 1908, Jourdain e Hausdorff generalizzarono CH, formulando:

IPOTESI GENERALIZZATA DEL CONTINUO (GCH). Per ogni ordinale transfinito α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Da allora, CH fu visto come un caso specifico di GCH (e le due proposizioni sono, come si vedrà, intimamente connesse). Poi, Cantor aveva dimostrato che, dato un insieme A di cardinalità finita o infinita κ, $\wp(A)$ aveva cardinalità 2^κ (che, per il TEOREMA 4, è sempre maggiore di κ). Quindi, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ fu, per un po' di tempo, l'unico risultato concreto che si potesse citare in riferimento a CH (nell'ottica di GCH, generalizzabile in $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$, per ogni α). In ZFC si può fare di meglio, ma per mostrarlo dobbiamo richiamare la teoria delle *cofinalità*.

Esistono due tipi fondamentali di ordinali: *successori* ($\omega + 2, \omega_1 + \omega + 2, \omega_4 + 17, ...$), che sono successori di qualche altro ordinale, e *limite* ($\omega, \omega^2 + \omega, \omega_\omega + \omega, ...$), che non sono successori di altri ordinali. Questi ultimi, però, possono essere visti come *limiti* di *sequenze* di ordinali. Per esempio, $\omega = \lim_{n \to \omega} n$. Si considerino le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 3. Si definisce β-sequenza (o sequenza di lunghezza β) una sequenza di ordinali $\{\alpha_\kappa\}$ (con $\kappa < \beta$) *crescente* (cioè, tale che, se $\mu < \nu$, allora $\alpha_\mu < \alpha_\nu$). Se risulta: $\lim_{\kappa \to \beta} \alpha_\kappa = \alpha$, allora si dice che la sequenza è *cofinale* in α.

DEFINIZIONE 4. Dato un ordinale limite α, si dice che β è la *cofinalità* di α (e si indica con $cf(\alpha)$) se e solo se β è il *più piccolo* ordinale tale che esiste una β-sequenza di ordinali tale che $\lim_{\kappa \to \beta} \alpha_\kappa = \alpha$.

I cardinali transfiniti sono particolari ordinali limite (ordinali *iniziali*), e la definizione di cofinalità può esservi estesa in maniera automatica: computare la cofinalità di un cardinale significa stabilire qual è il più piccolo *ordinale limite* β tale che esiste una β-sequenza il cui limite è il cardinale stesso (per esempio, $cf(\aleph_0) = \omega$, in quanto la più piccola β-sequenza il cui limite è $\aleph_0$ ha *lunghezza* ω. Si noti, peraltro, che la cofinalità è sempre un *cardinale*). Si possono avere due tipi di cardinale:

DEFINIZIONE 5. Dato un cardinale κ, κ si definisce *regolare* se $cf(\kappa) = \kappa$, *singolare* se $cf(\kappa) < \kappa$.

Esempi di cardinali regolari sono $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_{17}$, di cardinali singolari, invece, $\aleph_\omega, \aleph_{\omega_\omega}, \aleph_{\omega+\omega}$. Ora, tutti i cardinali singolari citati non possono essere la potenza (cardinalità) del continuo. Questo risultato rimarchevole si dimostra come corollario di un teorema più generale su somme e potenze transfinite.

DEFINIZIONE 6. Siano $\sum_{i\in I}$ e $\prod_{i\in I}$ le operazioni generalizzate di somma e prodotto di cardinali definite su un insieme di indici I nel seguente modo: $\sum_{i\in I}\kappa_i = |\bigcup X_i|$ e $\prod_{i\in I}\kappa_i = |\prod X_i|$, dove $|X_i| = \kappa_i$ e $X_i = \{i: i \in I\}$ è una famiglia di insiemi disgiunti a due a due.

TEOREMA 5 (KÖNIG). Dati due cardinali κ e λ, se, per ogni i, risulta che $\kappa_i < \lambda_i$, allora:

$$\sum_{i\in I}\kappa_i < \prod_{i\in I}\lambda_i$$

COROLLARIO 1. Per tutti gli α, $cf(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$. In particolare, $cf(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$.[2]

Il teorema di König è l'unico risultato positivo che si possa dimostrare su CH (GCH) in ZFC. Il teorema esclude che un cardinale la cui cofinalità sia numerabile (quali quelli citati poc'anzi) sia il valore di $\mathfrak{c}$. Quindi, sappiamo, per esempio, che $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$, $2^{\aleph_0} \neq \aleph_{\omega_\omega}$, … Non possiamo stabilire altro in ZFC. Vi sono, tuttavia, altri risultati interessanti concernenti 2^κ, se κ è, rispettivamente, *regolare* o *singolare*.

Un risultato fondamentale è quello di Easton, ottenuto col *forcing* (v. sez. 4):

---

[2] Si riporta, per completezza, la dimostrazione. Si noti che, se $cf(2^{\aleph_\alpha}) = \beta$, allora si può definire $2^{\aleph_\alpha} = \Sigma_{i<\beta}\,\kappa_i$, dove, per ogni i, $\kappa_i < 2^{\aleph_\alpha}$. Quindi, poniamo, per ogni i, $\lambda_i = 2^{\aleph_\alpha}$, e otteniamo, tramite il TEOREMA 5:

$$\Sigma_{i<\beta}\,\kappa_i < \Pi_{i<\beta}\,2^{\aleph_\alpha}$$

dove $\Sigma_{i<\beta}\,\kappa_i = 2^{\aleph_\alpha}$. Ora, $\Pi_{i<\beta}\,2^{\aleph_\alpha} = (2^{\aleph_\alpha})^\beta$, e quindi abbiamo che $2^{\aleph_\alpha} < (2^{\aleph_\alpha})^\beta$, che è vero solo se $\beta > \aleph_\alpha$.

TEOREMA 6 (EASTON). Sia κ un cardinale *regolare*. Qualunque valore di 2^{κ}, purché compatibile col teorema di Cantor ($2^{\kappa} > \kappa$) e König ($cf(2^{\kappa}) > \kappa$), è *coerente* con ZFC.

Il teorema di Easton ci dice, sostanzialmente, che il valore del continuo è quasi completamente indeterminato in ZFC, e che può essere manipolato a piacimento in qualunque modello di ZFC ottenuto col *forcing*. Qualche anno più tardi, sempre in ZFC, Silver e Shelah hanno ottenuto dei risultati interessanti concernenti, questa volta, cardinali *singolari*. Silver ha dimostrato che:

TEOREMA 7 (SILVER). Sia κ un cardinale *singolare*, tale che $cf(\kappa) > \aleph_0$. Se GCH è valida per tutti i $\lambda < \kappa$, allora GCH vale anche per κ.

Il teorema di Silver ci dice, quindi, che GCH non può essere falsa, per la prima volta, a $\aleph_{\omega_1}$.

Dato un cardinale κ, si dice che κ è un cardinale *strong limit (limite forte)*, se risulta che, per ogni $\lambda < \kappa, 2^{\lambda} < \kappa$. In anni più recenti Shelah ha dimostrato (sempre in ZFC!) che:

TEOREMA 8 (SHELAH). Se $\aleph_{\omega}$ (che è singolare) è anche un cardinale *limite forte*, allora: $2^{\aleph_{\omega}} < \aleph_{\omega_4}$.

3.2 Insiemi definibili di reali

Cantor aveva dimostrato CH per insiemi infiniti di punti aperti, chiusi e perfetti (sez. 2) e sperava di estendere questo risultato a qualunque insieme di punti non numerabile. In particolare, sperava di poter dimostrare che, dato un insieme infinito non numerabile di punti, esso fosse o *perfetto*, o avesse la *proprietà dell'insieme perfetto* (PIP), ovverosia contenesse un sottoinsieme *perfetto* (il TEOREMA 2 (CANTOR-BENDIXSON) aveva, per esempio, fornito una dimostrazione della PIP per gli insiemi chiusi).

Tuttavia, già nel 1908, Bernstein dimostrò che esistevano insiemi infiniti di reali che non soddisfacevano la PIP: la dimostrazione faceva uso di AC, quindi mostrava chiaramente che, assumendo AC, era impossibile portare a termine il programma cantoriano. I risultati successivi mostrarono che la PIP viene meno al livello di particolari insiemi definibili di reali, di cui parleremo a breve.

Già a partire dall'inizio del Novecento una nuova generazione di insiemisti si diede ad un'investigazione robusta delle proprietà degli insiemi di punti, concepiti come insiemi definibili di reali[3].

In teoria descrittiva degli insiemi, i reali si definiscono come elementi dello *spazio di Baire* $\mathcal{N} = \omega^\omega$ (la collezione di tutte le funzioni $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) e quello di *spazio polacco*. Uno spazio polacco è una generalizzazione della nozione di *retta reale* ($\mathcal{N}$ stesso, in ogni caso, è un esempio di spazio polacco). Uno spazio polacco è: 1) *separabile* (ovverosia, contiene un sottoinsieme denso numerabile, si pensi a $\mathbb{Q}$), 2) *completo* (in esso tutte le successioni di Cauchy convergono) e 3) *metrizzabile* (in esso, cioè, si può definire una distanza $d(x, y) = |x - y|$).

Si consideri, ora, la seguente definizione:

DEFINIZIONE 7. Un insieme di reali $A \subset X$, dove X è uno spazio polacco, è *Borel* se appartiene a uno delle seguenti collezioni di sottoinsiemi di $\mathcal{N}$: $\Sigma_1^0 =$ la collezione di tutti gli insiemi aperti; $\Pi_1^0 =$ la collezione di tutti gli insiemi chiusi; in generale, sia $\Sigma_\alpha^0 =$ la collezione di tutti gli insiemi $A = \bigcup_1^\infty A_n$, dove A_n appartiene a qualche Π_β^0, con $\beta < \alpha$ e, viceversa, $\Pi_\alpha^0 =$ la collezione di tutti gli $A = \bigcap_1^\infty A_n$, dove A_n appartiene a qualche Σ_β^0, con $\beta < \alpha$, e $\alpha < \omega_1$.

In termini più semplici, tutti gli insiemi di Borel sono o insiemi aperti o chiusi, o insiemi che si ottengono da unioni o intersezioni di un numero *numerabile* di insiemi aperti o chiusi. Si ha che:

TEOREMA 9 (HAUSDORFF, ALEKSANDROV). Tutti gli insiemi di Borel hanno la PIP, quindi verificano CH.

Ci sono altre "famiglie" di insiemi di reali che sono importanti nella teoria descrittiva degli insiemi. Si considerino le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 8. Un insieme di reali A è *analitico* se è l'immagine di una funzione *continua* $f: \mathcal{N} \to X$, dove X è uno spazio polacco (cioè, se $A = f(\mathcal{N})$).

---

[3] Con "insieme definibile di reali" s'intende, qui, e, in generale, nella *teoria degli insiemi descrittiva*, che di questi insiemi si occupa, un insieme di reali che si definisce a partire da altri insiemi di reali, già dati, attraverso l'iterazione di qualche operazione insiemistica (come *unione, intersezione e complementazione*).

DEFINIZIONE 9. Dato un insieme di coppie ordinate $X \times Y \subset \mathcal{N}$, si definisce *proiezione* di $S \subset X \times Y$ in X l'insieme $P = \{x \in X : \exists y \ (x, y) \in S\}$.

Attraverso l'operazione di *proiezione* (e *complementazione*), si può definire una gerarchia di insiemi proiettivi (a partire da Σ_1^1) in questo modo: $\Sigma_{n+1}^1 =$ la collezione di tutti gli insiemi ottenuti tramite proiezione di tutti gli insiemi in Π_n^1, e $\Pi_n^1 =$ la collezione dei complementi di tutti gli insiemi in Σ_n^1. Esiste una relazione precisa fra insiemi *analitici* e *proiettivi*: gli analitici sono, infatti, esattamente gli insiemi in Σ_1^1 nella gerarchia dei proiettivi (e i loro complementi, gli insiemi *co-analitici*, sono in Π_1^1). Si dimostra che:

TEOREMA 10 (SUSLIN). Tutti gli insiemi analitici hanno la PIP, quindi verificano CH.

Tuttavia, Gödel costruì un modello di ZFC, di cui discuteremo nella prossima sezione, in cui vi sono insiemi proiettivi che non hanno la PIP. L'*uniformità* degli insiemi definibili di reali rispetto alla PIP (e CH), quindi, si spezza, in ZFC, già al livello degli insiemi proiettivi.

In conclusione: in entrambi i due lasciti cantoriani, la teoria astratta e la teoria descrittiva degli insiemi, si possono trovare risultati importanti, ma non risolutivi, concernenti CH. Nella prima, si dimostra (in ZFC) che $2^{\aleph_0}$ non può essere alcune particolari cardinalità transfinite, ma che, in generale, potrebbe essere *quasi* qualunque di esse. Questo significa che, in ZFC, $2^{\aleph_0}$ e, in generale, 2^{κ}, per qualunque $\kappa > \aleph_0$, sono fortemente sottodeterminati. L'altra ci dice che CH (e GCH), in presenza di AC, sono veri solo per alcune classi di insiemi di reali, ma non per molte altre, vanificando, così, la speranza cantoriana di trovare una dimostrazione di CH attraverso lo studio di insiemi definibili di reali.

4. Indipendenza

Abbiamo avuto modo di segnalare già più volte che i risultati citati nelle sezioni precedenti sono dimostrabili in ZFC, ovverosia, usando gli assiomi che furono formulati da Zermelo e Fraenkel nei primi anni del Novecento (con il fondamentale contributo di Skolem)[4]. Il fallimento dei tentativi di

[4] Si danno, qui di seguito, gli enunciati di tutti gli assiomi di ZFC (seguendo la notazione in uso in Jech 2006, 3): 1. ESTENSIONALITÀ. Dati due insiemi X e Y, $X = Y$ se e solo se X e Y hanno gli stessi elementi. 2. COPPIA. Dati X e Y, esiste $\{X, Y\}$. 3. UNIONE. Dato X, esiste $\bigcup X$. 4. INSIEME POTENZA. Dato X, esiste l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $X, \wp(X)$. 5. SEPARAZIONE. Per ogni proprietà P, esiste $X = \{x \in Y : P(x)\}$. 6. INFINITO. Esiste ω. 7.

dimostrare CH fece sorgere il sospetto che ZFC fosse debole, e che, quindi, ci fosse bisogno di nuovi assiomi. Vedremo in cosa sia consistito e come sia stato articolato questo programma nella sez. 5. Qui farò brevemente cenno alla questione dell'indipendenza.

Se ZFC è coerente, allora per il teorema di completezza, ha uno o più modelli. Ne deriva che: se esiste un modello di ZFC in cui CH è vera, allora (a) CH *non è confutabile* in ZFC; se esiste un modello di ZFC in cui CH è falsa, allora (b) CH *non è dimostrabile* in ZFC; (c) se valgono (a) e (b), allora CH è *indipendente* da ZFC.

Nel 1938 Kurt Gödel mostrò che esisteva un modello di ZFC in cui CH è vera, stabilendo così (a), mentre Paul Cohen, nel 1963, trovò un modello di ZFC in cui CH è falsa, stabilendo, così, (b). Con la dimostrazione di Cohen si otteneva, definitivamente, anche (c). Le tecniche che entrambi usarono aprirono una pagina nuova, e fondamentale, non solo nella storia di CH, ma in quella della teoria degli insiemi. Da allora, le dimostrazioni di indipendenza da ZFC (o di una qualche loro estensione) sono diventate una delle principali aree di ricerca in teoria degli insiemi. La teoria degli insiemi contemporanea è, essenzialmente, la teoria dei modelli di ZFC.

Cominciamo con (a), cioè con la dimostrazione di Gödel. Per capirla un po' più nel dettaglio, bisogna fare cenno a V, la *gerarchia cumulativa degli insiemi*, che è ritenuta, intuitivamente, come *l'universo* di tutti gli insiemi, i cui livelli si definiscono in questo modo:

$$V_0 = \emptyset$$
$$V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$$
$$V_\lambda = \bigcup V_\alpha, \ \ \alpha < \lambda$$

RIMPIAZZAMENTO. Data una funzione ϕ definita su X, esiste l'insieme $Y = \{y: y = \phi(x), \forall x \in X\}$. 8. SCELTA. Data una famiglia di insiemi $\mathcal{F}$, esiste una funzione di scelta f su $\mathcal{F}$. 9. FONDAZIONE. Ogni $x \in X$ contiene un elemento y tale che $X \cap y = \emptyset$.

Nella formulazione di SEPARAZIONE e RIMPIAZZAMENTO intervengono le nozioni vaghe di *proprietà* e di *funzione*. Nelle formulazioni della teoria degli insiemi al prim'ordine, queste nozioni vaghe sono rimpiazzate da quella precisa di *formula del prim'ordine (con parametri)*, che rende i due assiomi *schemi d'assiomi* (ovverosia, infiniti assiomi, uno per ogni formula).

Si noti, infine, che gli assiomi della teoria contenuti originariamente in Zermelo (1930) sono diversi da quelli citati sopra, in quanto, in quell'articolo, SEPARAZIONE e RIMPIAZZAMENTO sono formulati al second'ordine. Si veda, su questo punto, anche la nota 9.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

dove λ è un ordinale limite. V è l'unione di tutti i V_α, e si vede abbastanza facilmente che $V \vDash$ZFC.

Il modello di Gödel non è altro che una sotto-gerarchia di V, che contiene solo una parte degli insiemi che stanno in V. Questo sotto-universo è L, l'universo *costruibile*. L contiene tutti gli ordinali esattamente come V, quindi ha esattamente la stessa "altezza" di V, ma contiene, però, per ogni livello indicizzato da un ordinale successore, solamente sottoinsiemi del livello precedente che siano "definibili", dove il concetto di "definibile" viene fissato in maniera precisa in questo modo:

DEFINIZIONE 10 (INSIEME DEFINIBILE). Un insieme X è definibile in un modello M se e solo se esiste una formula del prim'ordine ϕ nel linguaggio di M che lo definisce (eventualmente usando come parametri insiemi $a_1, \ldots, a_n \in M$)).

Quindi L si definisce in questo modo:

$$L_0 = \emptyset$$
$$L_{\alpha+1} = def(L_\alpha)$$
$$L_\lambda = \bigcup L_\alpha, \ \alpha < \lambda$$

dove λ è un ordinale limite, e $def(L_\alpha)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di L_α definibili nel senso della DEFINIZIONE 8. Ora, Gödel fu in grado di dimostrare che:

TEOREMA 11 (GÖDEL). 1) $L \vDash$CH, e, in generale, $L \vDash$GCH. Inoltre, 2) $L \vDash$AC.

Abbiamo, quindi, stabilito (a): CH non è confutabile in ZFC. Inoltre, per (2), se ZF è coerente, AC non può essere confutato da essa.

Ora consideriamo (b). Alcuni anni dopo la dimostrazione di Gödel, Cohen, come ricordato, fu in grado di dimostrare che, se ZFC è coerente, esistono modelli di ZFC in cui CH (e GCH) è violata. La tecnica che egli creò, detta di *forcing*, si impose come uno degli strumenti fondamentali per costruire modelli di (frammenti di) ZFC ed estensioni. Il *forcing* è così difficile che qui si può solo fare un accenno alla costruzione di Cohen usata nella dimostrazione del 1963.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

L'idea generale è quella di avere un modello numerabile degli assiomi, diciamo M, che si chiama *modello base* (*ground model*), e "aggiungere" dei nuovi reali a quel modello. In particolare, aggiungerne in numero superiore ad $\aleph_1$. In realtà, "aggiungere" qui significa soltanto garantire che il modello "dica" che esistano più di $\aleph_1$ reali. Quanti reali esistano "realmente" non ha alcuna importanza, ed è qui che si rivela tutta l'innovatività del metodo di Cohen. Per cominciare, si cerca di "ampliare" il modello base con un nuovo reale r. Come dev'essere concepito questo reale? In maniera tale che non si "confonda" con altri reali eventualmente *già* in M. Si dice che questo reale dev'essere *generico,* cioè tale da essere diverso da ogni reale definibile in M. Si può rendere questa nozione ancora più precisa: il nostro r deve *evitare* tutte le proprietà che sono definibili (ed *evitabili*) in M. Vediamo come.

Noi ci rappresentiamo i reali, e in particolare il nostro r come sequenza infinita di 0 e 1. Consideriamo, ora, le approssimazioni *finite* p di r: le p costituiscono un ordine parziale $\mathbb{P}$ in M. Ora, essendo p finita, p è estendibile (per esempio da q), e indichiamo con $p \leq q$ la proposizione 'q estende p'. Inoltre, un insieme D si dice *denso* in $\mathbb{P}$, se per ogni $p \in \mathbb{P}$, esiste uno $q \in D$ tale che $p \leq q$. Ora, una proprietà ϕ di p si definisce *evitabile*, se, dato $q \leq p$, tutti le estensioni di q *non* hanno quella proprietà, e si dimostra che l'insieme di tutti gli q che estendono p, tali che tutte le estensioni di q non hanno ϕ, è un insieme *denso* in $\mathbb{P}$. Anche l'inverso vale: un insieme denso in $\mathbb{P}$ corrisponde ad una proprietà *evitabile*.

Per ottenere un reale r generico, quindi, nel senso specificato prima, è necessario definire un r che intersechi tutti gli insiemi densi in $\mathbb{P}$ (che eviti, cioè, *tutte* le proprietà *evitabili*). Inoltre, se r esiste, esso non può essere in M. Infatti, se fosse in M, la proprietà di "non essere un segmento iniziale di r" individuerebbe un insieme denso D_r in M evitabile, quindi $r \cap D_r \neq \emptyset$, ma questo è impossibile per definizione. Che r esista davvero, però, si può dimostrare con un procedimento diagonale già introdotto per il TEOREMA 1. Ora, si può definire $M[r]$ come il modello base ampliato con r, dove r è $\mathbb{P}$-generico. A questo punto la chiave consiste nell'iterare la costruzione, per esempio, $\aleph_2$ volte, ottenendo una sequenza di $\mathbb{P}$-generici $\{r_\alpha : \alpha < \omega_2\}$. Una volta ottenuta un'estensione generica $M[G]$ di M con $\aleph_2$ reali, si dimostra che $M[G] \vDash \mathfrak{c} = \aleph_2$.

Usando sempre il forcing, Cohen ottenne un'estensione $M[G]$ che violasse anche GCH e AC, dimostrando, quindi, che:

TEOREMA 12 (COHEN). Se ZFC è coerente, allora lo sono anche: 1) ZFC+¬CH; 2) ZFC+¬GCH. Inoltre, se ZF è coerente, allora lo è anche 3) ZF+¬AC.

il che stabilì (b), ovverosia che CH (GCH) non può essere dimostrata in ZFC, ma anche (c), ovverosia che CH (GCH) è indipendente da ZFC. Inoltre, 25 anni dopo Gödel (1938), si ebbe anche la conferma che AC è indipendente dagli altri assiomi di ZF.

Per ricapitolare, sia CH che GCH sono indipendenti dagli assiomi della teoria degli insiemi, ovverosia ZFC: nella teoria, essi non possono essere né dimostrati, né confutati. La dimostrazione, nella sua completezza, fu raggiunta da Cohen nel 1963. I metodi che sono stati usati per produrre la dimostrazione sono diventati due strumenti fondamentali nella teoria degli insiemi contemporanea per ottenere risultati di *indipendenza*.

5. Nuovi assiomi

Dopo la dimostrazione di Cohen, si aprì una nuova stagione della teoria degli insiemi. Anzitutto, molti matematici ritennero che CH e GCH avessero perso importanza, in quanto indimostrabili in ZFC. Altri, invece, ritennero che ZFC fosse "debole" e che andassero cercati nuovi assiomi. D'altro canto, per il primo teorema di incompletezza di Gödel, se ZFC è coerente, allora esistono delle proposizioni nel linguaggio della teoria che ZFC non è né in grado di dimostrare né di confutare, quindi è pienamente sensato "rinforzare" ZFC per cercare di dimostrare proposizioni che essa non decide.

La ricerca di questi nuovi assiomi per estendere ZFC costituisce uno dei compiti fondamentali della teoria degli insiemi contemporanea, sebbene le ragioni che motivano questo programma non siano esclusivamente legate a CH. Il problema se sia sensato perseguire questo programma ha delle ricadute filosofiche, che esamineremo nell'ultima sezione. In questa sezione, invece, discuterò vari nuovi assiomi, e le loro conseguenze su CP. I risultati matematici sono, ancora una volta, perlopiù, solo enunciati. La bibliografia fornisce opportuni riferimenti ad ulteriori articoli tecnici.

5.1 Grandi cardinali

Una classe fondamentale di assiomi è quella dei *grandi cardinali*, che originano, in parte, da principi analoghi a quelli esplorati da Cantor quando introdusse ω, in parte da metodi definitori più complessi.

I grandi cardinali costituiscono uno degli sviluppi più affascinanti della teoria degli insiemi contemporanea, per varie ragioni. Per esempio, si dice che una proposizione ϕ ha *forza di coerenza* (traduzione italiana del più comune *consistency strength*) maggiore di ψ se risulta: Con(ZFC+ϕ) $\rightarrow$ Con(ZFC+ψ), uguale se Con(ZFC+ϕ) $\leftrightarrow$ Con(ZFC+ψ), minore se Con(ZFC+ψ) $\rightarrow$ Con(ZFC+ϕ). Ora, dati due qualunque assiomi di grandi cardinali ϕ e ψ, risulta (quasi) sempre uno dei due risultati sopra.

Produrre una scala di forze di coerenze è, quindi, fondamentale: se la forza di coerenza di una proposizione della teoria degli insiemi è uguale a quella di un grande cardinale ϕ, si deduce, sempre per il teorema di incompletezza, che quella proposizione è indecidibile in ZFC. In questo modo, l'ordine lineare prodotto dalle forze di coerenza dei grandi cardinali è diventato una sorta di strumento di misurazione dell'indecidibilità (e anche della probabilità della coerenza) di qualunque proposizione insiemistica.

Vi sono, essenzialmente, due classi di grandi cardinali (e di assiomi corrispondenti). La prima è compatibile con $V = L$ (per cui vedi sez. 5.4), l'altra incompatibile. I cardinali che appartengono alla prima classe vengono anche definiti "piccoli grandi cardinali", gli altri "grandi grandi cardinali". I "piccoli grandi cardinali" derivano da generalizzazioni di proprietà di cardinali già esistenti in ZFC. Per esempio, $\aleph_0$ è un cardinale limite (cardinale *limite forte*, in particolare, cioè tale che $\forall n < \aleph_0, 2^n < \aleph_0$) ed è *regolare* (cioè, come abbiamo visto nella sezione 3, $cf(\aleph_0) = \aleph_0$). Esistono altri cardinali che abbiano entrambe queste proprietà? La risposta, in ZFC, è negativa. Se ve ne fosse uno, si potrebbe dimostrare la coerenza di ZFC in ZFC, il che è una palese violazione del secondo teorema di incompletezza di Gödel: infatti, se $\kappa > \aleph_0$ limite e regolare esiste, allora $V_\kappa \models$ ZFC. Il più piccolo κ con queste caratteristiche, il più piccolo "piccolo grande cardinale" si chiama *inaccessibile*.

Ora, supponiamo sia data una *classe* di inaccessibili $< \theta_\alpha >$.[5] Se questa classe avesse una cardinalità (fosse, cioè, un insieme in una classe più grande, per esempio), questa cardinalità sarebbe un altro κ tale che $\kappa =$

---

[5] In ZFC non esistono classi *proprie* (come V), cioè collezioni "troppo grandi" per essere insiemi, ma è comunque possibile definire classi tramite formule (del prim'ordine). Su questo punto, si veda Drake 1973, 113.

θ_κ. κ si definisce *iper-inaccessibile*. Gli iper-inaccessibili generalizzano, a loro volta, una proprietà del primo inaccessibile, per cui, se κ è inaccessibile, allora $\kappa = \aleph_\kappa$. Un cardinale che ha questa proprietà è un *punto fisso*. Risulta fondamentale anche specificare il concetto di punto fisso di una *funzione normale*:

DEFINIZIONE 11. Data la classe di tutti gli ordinali Ord, si definisce *funzione normale* in Ord una funzione: 1) crescente (cioè, tale che per ogni $\alpha < \beta$ risulta $f(\alpha) < f(\beta)$); 2) continua (cioè tale che se α è un ordinale limite, $f(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} f(\xi)$). α si definisce *punto fisso* di una *funzione normale* se risulta $f(\alpha) = \alpha$.

Mahlo usò la nozione di punto fisso di una funzione normale per generare un altro "piccolo grande cardinale":

DEFINIZIONE 12 (MAHLO). Un cardinale κ si definisce *Mahlo* se ogni funzione normale definita su κ ha un punto fisso *regolare*.

E risulta:

TEOREMA 13. Con(ZFC+$\exists\kappa$ Mahlo) → Con(ZFC+$\exists\kappa$ inaccessibile).

Altri "piccoli grandi cardinali" si ottengono generalizzando o proprietà di linguaggi formali (*compattezza*) o *principi di riflessione*. I principi di riflessione postulano una "somiglianza" fra V e un qualche suo segmento iniziale V_α, e possono essere motivati, intuitivamente, dal principio (già formulato, in maniera diversa, da Cantor) secondo cui V è *indescrivibile*. Dal momento che l'idea della riflessione è motivata, quindi, da intuizioni circa collezioni quali V, i "piccoli grandi cardinali", che sono motivati da principi di riflessione, sono ritenuti anch'essi intuitivamente plausibili.

I "grandi grandi cardinali" si possono ottenere, invece, tutti utilizzando un'altra tecnica sofisticata, quella delle *immersioni elementari*.

DEFINIZIONE 13. Date due strutture M e N, si dice che $j\colon M \to N$ è un'*immersione elementare* di M in N (e si indica con $M \prec N$) se per ogni formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ e per tutti gli $a_1, \dots, a_n \in M$ si ha che: $M \vDash \phi(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow N \vDash \phi(j(a_1), \dots, j(a_n))$.[6]

[6] Il concetto di *immersione elementare* è anche derivabile da quello di *isomorfismo*. Un isomorfismo è una funzione biiettiva fra due strutture, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, che fa corrispondere a

Il primo “grande grande cardinale” che si definisce attraverso immersione elementare è un cardinale *misurabile*. Questo cardinale venne isolato da Ulam in lavori concernenti la nozione di *misura di Lebesgue*, di cui non possiamo occuparci qui. In seguito, però, si comprese che l’esistenza di una cardinale di questo tipo è equivalente all’esistenza di un’immersione elementare: $j: V \to M$, dell’universo di tutti gli insiemi, in un suo *sottouniverso* M. In particolare, dato un cardinale κ, κ si dice punto critico dell’immersione se κ è il più piccolo cardinale tale che: $j(\kappa) \neq \kappa$. Il punto critico di j è, appunto, un cardinale misurabile.

L’immersione elementare appena definita può essere ulteriormente manipolata per produrre altri “grandi grandi cardinali”. Per esempio, la nozione di cardinale *forte* si ottiene generalizzando quella di γ-forte, che si definisce in questo modo:

DEFINIZIONE 14. Un cardinale κ è γ-forte se esiste $j: V \to M$ con punto critico κ e $V_{\kappa+\gamma} \subseteq M$. κ è *forte* se e solo se è γ-forte, per ogni ordinale γ.

Ancora, un cardinale *supercompatto* si ottiene dalla definizione di cardinale γ-compatto.

DEFINIZIONE 15. Un cardinale κ è γ-compatto se esiste $j: V \to M$ con punto critico κ e $M^{\gamma} \subseteq M$. κ è *supercompatto* se e solo se è γ-compatto, per ogni ordinale γ.

Nelle immersioni elementari prese in considerazioni si cerca di far “assomigliare” M quanto più possibile a tutto V. Ma esiste un’immersione elementare di V con sé stesso? Kunen ha dimostrato (usando AC) che:

TEOREMA 14 (KUNEN). Non esiste un’immersione elementare non banale (cioè, diversa dall’identità) $j: V \to V$.

Ora, si scoprì abbastanza presto che i grandi cardinali non hanno alcun effetto “risolutivo” su CP. Si dimostrò infatti che:

---

elementi del dominio di $\mathfrak{A}$ elementi del dominio di $\mathfrak{B}$ in maniera tale che $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ soddisfino le stesse f*ormule*, ovverosia, siano *elementarmente equivalenti*. Un’immersione è un isomorfismo fra una struttura $\mathfrak{A}$ e una *sottostruttura* di una struttura $\mathfrak{B}$, ovverosia una qualche $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{B}$. Un’immersione elementare $j: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ è un’immersione la cui immagine è una *sottostruttura* di $\mathfrak{B}$ che è *elementarmente equivalente* ad $\mathfrak{A}$.

TEOREMA 15 (LÉVY-SOLOVAY). Dato κ misurabile in V, κ è misurabile anche in una qualunque estensione generica di V, $V[G]$[7].

Il risultato fu poi esteso, più tardi, a tutti i grandi cardinali. Questo risultato implica che i grandi cardinali non sono sensibili al *forcing*, e quindi non variano al variare del valore del continuo, il che significa che non incidono sul suo valore.

5.2 Assiomi di determinatezza

Gli assiomi di determinatezza implicano la *determinatezza* (la cui definizione diamo più sotto) di particolari insiemi di reali, nel contesto di un gioco infinito a due giocatori che viene formulato in questo modo.

Si consideri un sottoinsieme di un intervallo reale, per esempio $A \subset [0, 1]$ e due giocatori che scelgono, a turno, due numeri (fanno delle mosse): *0* o *1*. In un gioco infinito, le scelte del giocatore I e del giocatore II costituiranno, nella loro successione, una sequenza di *0* e *1* che codifica un reale, r. Se risulta che $r \in A$, allora vince I, se $r \notin A$, allora vince II. Una *strategia vincente* è una funzione che assume come valori *0* o *1*, e che si rivela vincente a prescindere dalle mosse dell'avversario. Non è chiaro che esista *sempre* una strategia vincente. Se esiste, allora il gioco, e l'insieme su cui è definito, si definiscono *determinati*. Mycielski e Steinhaus proposero il seguente assioma:

ASSIOMA DI DETERMINATEZZA [AD] (MYCIELSKI-STEINHAUS). Tutti i giochi infiniti a due giocatori sono determinati.

AD ha delle conseguenze estremamente interessanti, in particolare implica che ogni insieme di reali gode della PIP, in questo modo confermando CH. Tuttavia, AD ha un grosso problema: contraddice AC, quindi è incoerente con ZFC (quindi AD dimostra CH sono nella prima forma, che non richiede AC).

A causa di questo fatto, AD è generalmente ritenuto implausibile come nuovo assioma. Se AD è implausibile, alcune sue versioni più "deboli", coerenti con AC, lo sono meno. Ad esempio:

---

[7] $V[G]$ è un "abuso di notazione" (in quanto non *esiste*, letteralmente, un'estensione dell'universo degli insiemi) per indicare un'estensione, ottenuta tramite *forcing*, di un modello "assimilabile" a V (per esempio, il modello base numerabile M della sez. 4).

ASSIOMA DI DETERMINATEZZA PROIETTIVA (*Projective Determinacy*, PD). Tutti i *giochi proiettivi* (tali, cioè, che l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ è proiettivo) sono determinati.

L'indagine sulla determinatezza ha prodotto risultati sorprendenti, che collegano determinatezza e grandi cardinali. Un primo risultato fondamentale è:

TEOREMA 16 (MARTIN). Se esiste un cardinale misurabile, allora tutti i *giochi analitici* sono determinati.

Procedendo più in alto nella scala delle *forze di coerenza* dei grandi cardinali, si trovò che c'era un grande cardinale da cui era possibile ottenere ulteriori risultati di questo tipo, il cardinale di Woodin, la cui definizione, estremamente complessa, riportiamo per completezza:

DEFINIZIONE 16 (CARDINALE DI WOODIN). δ è Woodin se e solo se per tutti gli $A \subset V_\delta$ ci sono $\kappa < \delta$ tali che per tutti i $\lambda < \delta$ esiste un'immersione elementare $j: V \rightarrow M$ con punto critico κ, tale che $j(\kappa) > \lambda$, $V_\lambda \subset M$, e $A \cap V_\lambda = j(A) \cap V_\lambda$.

Si consideri ora $L(\mathbb{R})$. Questa struttura è definita esattamente come l'universo costruibile di Gödel, ma, in più, contiene, dall'inizio, tutti i reali. Grazie all'identificazione dei cardinali di Woodin si potè dimostrare:

TEOREMA 17 (MARTIN-STEEL-WOODIN). Se ci sono infiniti cardinali di Woodin, ed un misurabile sopra di essi, allora tutti i giochi definiti su $A \subset L(\mathbb{R})$ sono determinati (cioè, ne consegue $AD^{L(\mathbb{R})}$). Inoltre:

TEOREMA 18 (WOODIN). ZFC+ "esistono n cardinali di Woodin con un misurabile sopra di essi" $\vdash PD$.

il che mostra che PD è derivabile da un'altra classe di nuovi assiomi, quelli dei "grandi grandi cardinali".

Assiomi come PD o $AD^{L(\mathbb{R})}$ si definiscono assiomi di *determinatezza definibile*. Tutti gli assiomi di determinatezza definibile implicano la PIP (limitatamente alla classe di insiemi di cui asseriscono la determinatezza), e, quindi, CH. Tuttavia, come abbiamo visto, solo AD fornisce una soluzione globale, ma al prezzo di negare AC.

5.3 Assiomi di Forcing

Gli assiomi di Forcing nascono dalla combinazione di varie proprietà insiemistiche complesse. Il capostipite di questi assiomi è l'assioma di Martin. Nella sezione 4, abbiamo visto come il forcing di Cohen si basi sull'individuazione di un *filtro* $\mathbb{P}$-generico G in M. Questo filtro corrisponde all'esistenza di un reale "generico". L'assioma di Martin può essere visto come l'estensione del forcing a modelli M base *non numerabili*, in particolare a modelli di cardinalità $\aleph_1$. Tuttavia, in questa estensione, $\mathbb{P}$ va ridefinito in maniera specifica, per evitare effetti "indesiderati". In particolare, $\mathbb{P}$ deve soddisfare quella che viene definita la *countable chain condition* (c.c.c.), che si può illustrare in questo modo.

$\mathbb{R}$ si definisce come l'unico insieme (a meno di isomorfismi) linearmente ordinato, illimitato, denso, completo che contiene un sottoinsieme denso numerabile (v. anche la definizione di *spazio polacco* in sez. 3.2). La c.c.c. è, invece, la condizione che ogni collezione di intervalli *aperti* disgiunti a due a due sia, al massimo, *numerabile*. Se rimpiazziamo la condizione di "avere un sottoinsieme denso numerabile" con la c.c.c. otteniamo ancora una descrizione di un continuo isomorfo ad $\mathbb{R}$?

Una linea che soddisfi: 1) tutte le altre proprietà di $\mathbb{R}$ eccetto quella di "avere un sottoinsieme denso numerabile"; 2) la c.c.c., e che 3) non sia isomorfa ad $\mathbb{R}$, si chiama *linea di Suslin*. L'ipotesi di Suslin (SH, *Suslin's Hypothesis*), è che non esistano linee di Suslin (ovverosia che una linea di questo tipo *deve* essere isomorfa ad $\mathbb{R}$) ed è anch'essa *indipendente* da ZFC. Infatti, si dimostra che:

TEOREMA 19. (JECH, JENSEN) Se ZFC è coerente, allora anche ZFC+SH e ZFC+¬SH sono coerenti.

Ora, l'assioma di Martin (*Martin's Axiom*, MA) può essere formulato in questo modo:

ASSIOMA DI MARTIN. In ogni $\mathbb{P}$ che soddisfa la c.c.c. esiste un $G \subseteq \mathbb{P}$ che interseca tutti gli insiemi D_α *densi* di $\mathbb{P}$ $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Ulteriori assiomi di forcing si ottengono da MA attraverso un indebolimento della c.c.c. e variando la cardinalità di M. Due ulteriori assiomi fondamentali sono il *Proper Forcing Axiom* (PFA) formulato da Shelah, e il *Martin's Maximum* (MM), formulato da Foreman, Magidor e, ancora, Shelah. Ora, si dimostra che:

TEOREMA 20. Tutti gli assiomi di forcing (MA, PFA, MM) implicano ¬CH. PFA e MM implicano $\mathfrak{c} = \aleph_2$ e PD.

Gli assiomi di forcing, quindi, hanno un grande "successo" o, per utilizzare la terminologia standard, sono molto ben confermati "estrinsecamente" (v. sez. 6). Tuttavia, è difficile pensare che esprimano qualche proprietà genuina degli insiemi. Per questo motivo, ritenere che essi possano costituire una soluzione a CP è estremamente controverso.

5.4 Costruibilità ed Estensioni (incluso $\mathbf{V = L^{\Omega}}$)

Gödel aveva formulato il seguente assioma:

ASSIOMA DI COSTRUIBILITÀ (*Constructibility Axiom*, CA). $V = L$.

CA è indipendente da ZFC, esattamente come CH e GCH. Come gli assiomi di forcing, $V = L$ è ben confermato "estrinsecamente". Si noti che:

TEOREMA 21. ZFC+$V = L \vdash$ CH, GCH, ¬SH + altri importanti principi combinatori.

Tuttavia, pochi insiemisti lo riterrebbero un assioma "vero" della teoria degli insiemi. La ragione è che $V = L$ implica che l'universo sia "minimale", cioè, corrisponda al più piccolo *modello interno* di ZFC. Per modello interno di ZFC, si intende una classe $M \subset V$, tale che M contenga tutti gli ordinali e risulti $M \vDash ZFC^M$ (ovverosia, soddisfi tutte le formule nel linguaggio di ZFC relativizzate ad M). Inoltre, L non contiene "grandi grandi cardinali", come dimostrato in:

TEOREMA 22 (SCOTT). Se esiste un cardinale misurabile, allora $V \neq L$.

e questo risultato può essere esteso a "grandi grandi cardinali" più *forti* dei misurabili. In particolare i sostenitori, quindi, dei "grandi grandi cardinali", insisterebbero sull'implausibilità di $V = L$. Gödel stesso, che ne fu l'ideatore, non credeva in CA.

Tuttavia, dopo l'uscita di scena, per così dire, di $V = L$, sono emerse delle "estensioni" di L che rendono più appetibili alcune versioni più forti di CA. Come abbiamo detto, L è il più piccolo modello interno di ZFC. Questo significa che può essere "dilatato"? In particolare, è possibile generare modelli "simili ad L" che contengano, ad esempio, grandi cardinali non contenuti in L? La risposta è positiva. Il *programma dei modelli interni*, come è stato battezzato, analizza modi in cui si possono produrre L più "ampi", che comprendano, in particolare, grandi cardinali che non esistono in L. L'approccio consiste nell'"arricchire", in maniera diretta, L, generando un L^U(dove U è quello che si chiama un *ultrafiltro normale*) in cui compaiano i grandi cardinali desiderati. Questo approccio ha consentito di ottenere un L^U che arrivi a contenere cardinali di Woodin.

Un altro approccio, dovuto, fondamentalmente, a Dodd e Jensen, è basato, ancora una volta, su immersioni elementari. Jensen mostrò che l'esistenza di un'immersione elementare $j: L \to L$ è equivalente all'esistenza di un insieme, $0^\#$. Ora, si ponga $L^\# = L \cup 0^\#$. L'iterazione di j su $L^\#$, questa volta, ci dà uno $0^{\#\#}$, con cui si può definire $L^{\#\#}$ e così via. Tutti questi modelli "arricchiti" si chiamano *topi* (*mice*), e l'unione di tutti i "topi" ci dà quello che è definito *core model*, K. Se definiamo un'ulteriore immersione elementare $j: K \to K,$ otteniamo l'L^U esaminato precedentemente, in cui esiste un cardinale misurabile. Il *core model programme*, come il programma è generalmente noto, consiste nell'estensione progressiva del *core model* a ulteriori grandi cardinali seguendo un approccio bottom-up (dal basso). In questo caso, il *core model* più "inclusivo" è arrivato a comprendere cardinali di Woodin.

In anni recenti, Woodin ha dedicato notevoli energie all'estensione del *core model programme* nel tentativo di includere cardinali supercompatti attraverso il metodo degli *extenders*, a cui non è possibile nemmeno fare cenno qui. Un risultato che è emerso è che, se esistesse un $L[\tilde{E}]$, in cui $\tilde{E}$ è una sequenza di extenders, che contiene un *supercompatto*, $L[\tilde{E}]$ ci darebbe una teoria *stutturale* accurata di tutti i modelli interni "arricchiti" di grandi cardinali. In un certo senso, questo $L[\tilde{E}]$ si potrebbe vedere come un L "finale" (*ultimate* L), che Woodin indica con il simbolo L^Ω. Woodin ha sostenuto la seguente tesi in anni recenti:

CONGETTURA DI WOODIN (ULTIMATE L). Esiste L^Ω, e ZFC+$V = L^\Omega$ dimostra praticamente tutti le proposizioni indecidibili in ZFC. In particolare, ZFC+$V = L^\Omega$ dimostra CH e GCH.

Ogni discussione sull'accettabilità di $V = L^\Omega$ come l'assioma "definitivo" della teoria degli insiemi è, com'è chiaro, rinviata all'attuazione completa del *core model programme* nella maniera postulata da Woodin. Tuttavia, anche nel caso in cui il programma avesse pieno successo, non è chiaro che l'assioma costituirebbe una soluzione definitiva di CP.

5.5 Multiverso e assolutezza

Uno degli sviluppi più recenti del lavoro nei fondamenti della teoria degli insiemi è la nozione di *multiverso* insiemistico. Il fenomeno di indipendenza da ZFC è più vasto di quanto i pionieri della teoria degli insiemi si aspettassero. Da un punto di vista strettamente logico, questo fatto ha una spiegazione immediata: la teoria degli insiemi al prim'ordine ha una pluralità di modelli in cui il valore di verità di varie proposizioni (inclusa CH) può essere variamente manipolato. La teoria degli insiemi al second'ordine, per esempio ZFC_2, è, invece, *quasi-categorica*, come mostrato da Zermelo (sempre in Zermelo 1930), nel senso che due qualunque modelli di ZFC possono differire solo in "altezza", non in "ampiezza", e l'altezza è data da qualche "piccolo grande cardinale"[8]. In ZFC_2, CH è *determinatamente* o vera o falsa, contrariamente a quanto accade in ZFC. Ma la nozione della verità al second'ordine è, a dir poco, problematica (v. sez. 6).

Qualcosa di simile all'invarianza del second'ordine si può tentare anche al prim'ordine, tramite la nozione di *assolutezza*. Data una formula ϕ del prim'ordine si dice che ϕ è assoluta fra due modelli M e N se risulta: $M \vDash \phi^M \leftrightarrow N \vDash \phi^N$. Trovare un qualche tipo di assolutezza per ϕ significa, quindi, trovare dei principi che rendono ϕ vera (o falsa) in una famiglia sufficientemente ampia di modelli. La nozione di "famiglia sufficientemente ampia di modelli" può essere resa più precisa attraverso la nozione di multiverso. Un multiverso è una collezione di modelli degli assiomi. Si possono definire differenti multiversi. Qui ci occuperemo di multiversi nei quali è possibile trovare dei risultati interessanti relativi a CH.

Il primo genere di multiverso è il multiverso $\mathbb{V}$ comprendente tutte le estensioni generiche di ZFC (e i *modelli interni* di queste estensioni), ovverosia tutti i modelli $M[G]$ di ZFC che sono estensioni di modelli base

[8] ZFC_2 è la formulazione originale degli assiomi di Zermelo-Fraenkel (con AC) in Zermelo (1930), che abbiamo citato più volte, in cui due assiomi, fra quelli citati nella nota 4, ovverosia SEPARAZIONE e RIMPIAZZAMENTO sono al second'ordine (cioè, i quantificatori si applicano anche a variabili predicative). Come abbiamo visto (nota 4), nelle versioni al prim'ordine, le variabili predicative stanno per ogni formula del prim'ordine producibile, il che implica che essi siano, in realtà, *schemi d'assiomi*. Per maggiori dettagli, si veda Shapiro 1991, 85-86.

ottenuti tramite forcing. Questo multiverso è stato definito originariamente da Woodin (un'altra versione, più complessa, ma molto simile, è stata proposta da Steel). Per indagare la nozione di verità in $\mathbb{V}$, Woodin ha anche definito una nuova "logica", chiamata Ω-logica, che è una logica che formalizza la nozione di *invarianza* nel multiverso $\mathbb{V}$. L'Ω-logica ha una nozione di soddisfacibilità di questo tipo:

DEFINIZIONE 17. Data T, una teoria nel linguaggio degli insiemi, si dice che $T \vDash_{\Omega} \phi$ se e solo se risulta che, $\forall M \in \mathbb{V}, M \vDash T \rightarrow M \vDash \phi$.

In altri termini, ϕ è vera nell'Ω-logica, se e solo se ϕ è vera in *ogni* modello in $\mathbb{V}$. L'insieme delle proposizioni vere secondo l'Ω-logica costituisce l'insieme delle proposizioni invarianti rispetto al forcing. Woodin introduce anche una nozione di derivabilità nell'Ω-logica, '$\vdash_{\Omega}$', che implica l'esistenza di un insieme che si definisce "universalmente Baire" con delle caratteristiche peculiari, che non possiamo citare qui. Una questione fondamentale è se la nozione di derivabilità corrisponda a quella di soddisfacibilità nell'Ω-logica. Woodin ha formulato la seguente congettura:

Ω-CONGETTURA. $T \vdash_{\Omega} \phi \leftrightarrow T \vDash_{\Omega} \phi$ (se si assume l'esistenza di una classe di cardinali di Woodin).

Il ruolo dell'Ω-congettura è fondamentale per i propositi di Woodin. In Woodin (2001), infatti, egli fece vedere come si potesse dimostrare una violazione uniforme di CH in $\mathbb{V}$, attraverso l'adozione di un assioma di forcing, che egli chiamò $(\star)$. Egli dimostrò, infatti, che:

TEOREMA 23 (WOODIN). Dato un qualunque ϕ, risulta sempre ZFC+$(\star) \vdash_{\Omega}$ "$< H(\omega_2) \vDash \phi >$" oppure ZFC+$(\star) \vdash_{\Omega}$ "$< H(\omega_2) \vDash \neg\phi >$". In particolare, ZFC+$(\star) \vdash_{\Omega}$ "$< H(\omega_2) \vDash 2^{\aleph_0} = \aleph_2 >$".

Questo risultato ha bisogno di qualche commento: 1) l'assioma $(\star)$ ci consente di "decidere" qualunque proposizione della complessità di CH per la struttura $H(\omega_2)$. In un certo senso, ci dà una visione "completa" di questa struttura; 2) in particolare, l'assioma decide che CH è falsa in $H(\omega_2)$. Ma cos'è $H(\omega_2)$? È la collezione di tutti gli insiemi la cui cardinalità è *ereditariamente* inferiore a $\aleph_2$ (cioè, tali che i propri elementi e gli elementi di questi e *così via* hanno, al massimo, cardinalità $\aleph_1$). Si può vedere che tutte le proposizione dell'aritmetica del terz'ordine (ovverosia, le proposizioni che, come CH, riguardano tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$) sono formulabili in $H(\omega_2)$. In secondo luogo, il risultato ci dimostra l'"inviolabilità" di $\neg$CH in $\mathbb{V}$, nel senso che $\neg$CH diviene assoluto in $\mathbb{V}$, tramite l'assioma ($\star$). Ma questo risultato più ampio è possibile solo se è verificata l'Ω-congettura (che consente di stabilire l'equivalenza di derivabilità e soddisfacibilità in $\mathbb{V}$).

Un altro esempio di multiverso è quello definito da S. Friedman e collaboratori in anni recenti e chiamato "iperuniverso" ($\mathbb{H}$). $\mathbb{H}$ consiste semplicemente di tutti i *modelli numerabili transitivi* di ZFC.[9] S. Friedman ha intensamente indagato una serie di principi di massimalità, in particolare un principio che è definito *Inner Model Hypothesis* (IMH):

DEFINIZIONE 18. (IMH) Dato un qualunque ϕ, se ϕ è vera in un modello *interno* di un modello *esterno* di V, allora esiste un modello *interno* di V in cui ϕ è vera.

IMH è un principio di massimalità nel senso che presuppone che V sia una struttura estremamente ricca di *modelli interni* che soddisfano tutte le verità che potrebbero trovarsi in un modello interno di qualche sua *estensione*. IMH è stato ulteriormente rafforzato in due principi ulteriori, SIMH (*Strong IMH*) e CPIMH (*Cardinal-Parameter IMH*), in cui IMH è ristretto a ϕ formulati, rispettivamente, con parametri particolari[10].

C'è una difficoltà fondamentale in IMH, SIMH e CPIMH e cioè il riferimento a "estensioni" di V. Per definizione, V non può essere "esteso" (vedi nota 7), quindi non è chiaro che IMH abbia un senso determinato. Per aggirare questa difficoltà, Friedman e collaboratori utilizzano una logica particolare, ovverosia, la V-logica, che consente di parlare di "estensioni" di V in V stesso. Ora, Friedman ha dimostrato che:

TEOREMA 24 (S. FRIEDMAN). In tutti i membri di $\mathbb{H}$ che soddisfano SIMH o CPIMH, CH è *falsa*.

---

[9] I modelli transitivi, in particolare, transitivi numerabili sono strumenti fondamentali, per varie ragioni, per costruire modelli di ZFC (per esempio, per il *forcing*, ma anche come *modelli interni*, che abbiamo già definito prima, sez. 5.4). Un insieme (e modello) x è transitivo se, per ogni elemento y di x, vale: $y \in x \leftrightarrow y \subseteq x$.

[10] Si noti, però, che le versioni di questi principi più intensamente indagate sono quelle che combinano questi principi di massimalità con un altro principio di massimalità, e cioè $\#$, per cui si ottengono: IMH$\#$, SIMH$\#$, CPIMH$\#$. Anche questi principi implicano $\neg$CH in in membri di $\mathbb{H}$ che li soddisfino. Rinvio ad Antos *et al.* (2015) o a Friedman e Ternullo (2016) per ulteriori dettagli su questo e altri aspetti del programma dell'iperuniverso.

I risultati di Woodin e S. Friedman cercano di trovare una soluzione per CP che individua, come strategia, quella dell'*assolutezza* in un multiverso (o *porzione* di multiverso) determinato. Tuttavia, entrambe le soluzioni proposte dipendono da diverse assunzioni accessorie, che le rendono accettabili solo in parte. Questi risultati, però, dimostrano un fatto rimarchevole, e cioè che esistono soluzioni precise (e uniformi) a CP anche all'interno di un contesto "plurale" come quello di un multiverso.

5.6 Ulteriori assiomi: simmetria

In conclusione di questa sezione, vale la pena citare un assioma che ha suscitato discussione in anni recenti, ma a cui è stata data attenzione più per le sue peculiarità concettuali, che per il suo valore matematico intrinseco.

L'assioma è stato proposto da Freiling e parte da un esperimento mentale, per così dire. Supponiamo di lanciare due freccette, x e y, su un bersaglio (per semplicità poniamo che il bersaglio sia l'intervallo chiuso $[0,1]$ che, come sappiamo, contiene tanti punti quanti $\mathbb{R}$). Ora, definiamo $A_x \subset [0,1]$ come il sottoinsieme *numerabile* di A associato a x e con $A_y \subset [0,1]$ l'analogo per y. Dal punto di vista intuitivo, se lancio la freccetta x, la probabilità che essa colpisca un elemento di A_y sembra minima, dal momento che A_y è "sparso". Lo stesso ragionamento si applica a y.

Sulla base di questo esperimento mentale, sembra, quindi, naturale postulare il seguente principio (o assioma):

ASSIOMA DI SIMMETRIA [AS] (FREILING). Dati due insiemi A_x e A_y numerabili in $\mathbb{R}$, è sempre possibile trovare due reali x e di y tali che $x \notin A_y$ e $y \notin A_x$.

Ora, si ha che:

TEOREMA 25. AS$\rightarrow \neg$CH.

Si noti, però, che AS implica $\neg$CH solo nella forma "forte" ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), quella, cioè, che richiede l'assunzione di AC, che è essenziale per la dimostrazione del TEOREMA 25.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

Alcuni hanno dedotto che l'assioma di simmetria, dunque, indicherebbe solo che il continuo *non è bene ordinabile* (lasciando in sospeso se CH, nella forma "debole", sia ancora vero), ma questo fatto, a sua volta, implicherebbe la falsità di AC, il che non è accettabile per la maggioranza degli insiemisti. È vero, però, che Freiling non sembra aver inteso il suo assioma in questo modo. L'accettabilità dell'assioma è, a dir poco, controversa, ma un fatto rimane: l'assioma ha un nucleo di intuitività innegabile, che rende CH un principio, quanto meno, "strano", in presenza di AC.

In conclusione, alcuni nuovi assiomi hanno un impatto su CH, altri (come i grandi cardinali), invece, no. Tuttavia, quelli che lo risolvono in un modo o nell'altro non sono sempre accettabili sulla base di criteri condivisi. Nella versione *multiversista* della teoria degli insiemi, CH e la sua negazione sono interpretate come proprietà di alcuni universi, ma non di altri, e quindi esaminare quando CH è vero o falso significa studiare diversi scenari ontologici egualmente possibili per la teoria degli insiemi stessa. Anche nell'ambito di questa versione della teoria degli insiemi, tuttavia, è possibile indurre delle risposte *uniformi* attraverso l'uso di particolari assiomi (o principi generali, come quelli di massimalità).

6. Questioni filosofiche

Come abbiamo avuto già modo di notare varie volte, l'analisi di CP implica la presa in esame di diverse questioni di natura filosofica, che hanno a che fare con la nozione stessa di "soluzione": CP è stato risolto? E se sì, in che senso una soluzione è stata trovata? In caso contrario, qual è lo status di CH, GCH e delle altre proposizioni della teoria degli insiemi che non sono decidibili in ZFC e sono decise variamente dai nuovi assiomi? Una visione "pluralista", che implichi l'ammissibilità di *più* soluzioni diverse per le proposizioni indecidibili in ZFC, è inevitabile?

Il primo a intervenire su queste questioni con un contributo divenuto, per varie ragioni, classico, fu Gödel in un articolo del 1947 (poi ripubblicato con un'appendice nel 1963). Nell'articolo Gödel sostiene che:

> È da notare, tuttavia, che sulla base del punto di vista adottato qui, una dimostrazione dell'indecidibilità della congettura di Cantor (CH, *nota mia*) dagli assiomi accettati della teoria degli insiemi (ZFC, *nota mia*) […] non risolverebbe in alcun modo il problema. Se il significato dei termini primitivi della teoria degli insiemi […] è accettato come corretto, ne segue che i concetti e i teoremi descrivono una qualche realtà ben determinata, in cui la congettura di Cantor è o vera o falsa. Quindi la sua indecidibilità dagli assiomi […] può solo significare

> che gli assiomi non contengono una descrizione completa di quella realtà (Gödel 1947/63, in Benacerraf-Putnam 1983, 476).

Il punto di vista di Gödel è quello che viene definito *platonismo*. Esistono diverse versioni del platonismo in matematica, ma tutte concordano nell'idea che la matematica abbia a che fare con un dominio di *oggetti* o di *concetti* che sono indipendenti dalla nostra mente e dalle nostre costruzioni. Secondo questa concezione, CH ha un valore di verità determinato (nel mondo *platonico*), indipendente, al limite, dalla nostra capacità di trovarlo. Tuttavia, una descrizione più completa della realtà insiemistica si può ottenere, secondo Gödel, tramite un'estensione di ZFC. Per esempio, nel lavoro citato, Gödel alludeva alla possibilità che i grandi cardinali possano fornire una soluzione a CP (*ibid.*, 476-477). Egli ammette, tuttavia, che alcuni di questi assiomi (i "grandi grandi cardinali", in particolare) siano meno giustificati *intuitivamente* ("intrinsecamente") degli assiomi di ZFC, ma ritiene che, se essi fornissero delle risposte a problemi insoluti come CP, dovrebbero essere accettati al pari degli altri assiomi, se non altro, per la loro efficacia (sarebbero, cioè, comunque giustificati "estrinsecamente"). Questa affermazione, secondo Gödel, si può estendere a qualunque altro assioma dimostri di essere efficace nel senso spiegato. Da allora, il programma di estensione di ZFC è noto come "programma di Gödel" (GP, *Gödel's Programme*).

GP, nella versione platonistica, presenta diversi problemi. Anzitutto, i grandi cardinali non costituiscono una soluzione per CP, come si è visto nella sezione 5.1. Poi, la concezione della giustificazione "estrinseca" degli assiomi è problematica in generale, in quanto non esistono criteri condivisi concernenti la nozione di "successo" in matematica[11]. Infine, la concezione platonistica della matematica che sottende GP è, epistemologicamente, molto controversa.

Una visione completamente differente è quella offerta da Cohen. A proposito della questione se la dimostrazione di indipendenza rappresenti una soluzione di CP, egli si esprime in questo modo:

> Il mio personale punto di vista è che io vedo l'attuale soluzione del problema come completamente soddisfacente. Io ritengo che sia l'unica soluzione possibile. Ci dà la sensazione di ciò che è possibile e di ciò che è impossibile, e in questo senso, io credo si dovrebbe essere soddisfatti. Ci saranno articoli filosofici, ma non credo che qualunque articolo matematico dica che c'è una risposta diversa da quella che [CH] è indecidibile (in Kanamori 2009, 116).

[11] Per un'articolazione di questa nozione in teoria degli insiemi, si vedano, in particolare, Maddy (1996, 1997) o Koellner (2009, 2013).

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

Il punto di vista di Cohen è abbastanza diffuso fra gli insiemisti. In effetti, nell'ambito della pratica della teoria degli insiemi, CP riveste ancora un ruolo centrale solo per coloro che hanno un interesse di tipo "filosofico" nei confronti del problema stesso. Per tutti gli altri, che sono senza dubbio la maggioranza, il problema è stato risolto in maniera soddisfacente, come dice Cohen, e non riveste alcun interesse.

Tuttavia, la questione se il problema sia stato risolto o meno ha un valore filosofico intrinseco, e l'idea di Cohen, sotto questo aspetto, può essere definita genericamente "formalistica":[12] la soluzione di CP non dipende dalla comprensione di una qualche realtà matematica *extra-mentale*, come congetturato da Gödel, ma solo dai risultati che siamo in grado di dimostrare in un determinato sistema assiomatico. È interessante anche notare quello che Cohen (1966) dice a proposito della confutabilità di CH, che, secondo lui, sarebbe intuitivamente suggerita dal fatto che:

> L'insieme C [i.e., il continuo, *nota mia*] è […] generato da un principio totalmente nuovo e più potente, ovverosia dall'Assioma dell'Insieme Potenza. È irragionevole pensare che qualunque descrizione di un cardinale più grande che cerchi di costruire quel cardinale da idee che derivano dall'Assioma di Rimpiazzamento possa mai raggiungere C. Quindi C è più grande di $\aleph_n, \aleph_\omega, \aleph_\alpha$, dove $\alpha = \aleph_\omega$. Questo punto di vista vede C come un insieme incredibilmente ricco, datoci da un assioma completamente nuovo, che non può essere avvicinato da un processo di costruzione per gradi (Cohen 1966, 151).

In questo passo Cohen sostiene che l'assioma dell'insieme potenza sia del tutto "peculiare" rispetto agli altri assiomi. Anche altri autori hanno ritenuto che le difficoltà connesse a CP derivassero da difficoltà connesse proprio alla nostra concezione matematica dell'insieme potenza. La concezione matematica ordinaria dell'insieme potenza è basata, infatti, sulla nozione di "sottoinsieme arbitrario", una nozione che ha spinto, in anni recenti, un autore come Feferman a dichiarare CP un problema "vago". La posizione di Feferman si inquadra in una più ampia critica a PG sulla base di due punti fondamentali, che possono essere pensati come una sorta di programma fondazionale alternativo, il "programma di Feferman": 1) la matematica "ordinaria" è, sicuramente, tutta formalizzabile in ZFC; 2) tuttavia, una comprensione *genuina* del contenuto e del significato degli asserti matematici si limita, essenzialmente, a teorie *predicative* dell'aritmetica del second'ordine (per cui vedi Simpson 2009). La nozione di insieme potenza in ZFC è *impredicativa* (fa cioè riferimento a una *totalità*

[12] Per le concezioni platonista e formalista della matematica, si vedano i riferimenti nella bibliografia finale.

già postulata come esistente, mentre le nozioni predicative escludono questa possibilità), quindi non può essere compresa in maniera completa. La conseguenza di 1) e 2) è che CP è un problema che sorge nella matematica impredicativa, e quindi non può avere una soluzione o, in ogni caso, una soluzione condivisa. Anche accettando che tutta la teoria ZFC sia dotata di un significato genuino, non ci sarebbe, comunque, alcuna necessità di trovare nuovi assiomi, perché i nostri scopi fondazionali sono tutti soddisfatti ben sotto il "livello" di ZFC. Feferman compendia questa posizione in questo modo:

> La mia posizione, com'è ampiamente noto, è che l'Ipotesi del Continuo è ciò che ho definito un'asserzione intrinsecamente vaga, e che il continuo stesso, ovverosia l'insieme potenza dei numeri naturali, non è un oggetto matematico definito. È, piuttosto, una concezione che noi abbiamo della totalità di sottoinsiemi "arbitrari" dell'insieme dei numeri naturali, una concezione che è sufficientemente chiara da consentirci di attribuire molte proprietà evidenti a quell'oggetto supposto come esistente, ma che non può essere affinata in nessun modo per determinare o fissare quell'oggetto stesso (Feferman *et al.* 2000, 405).

A questa posizione ha risposto Hauser in Hauser (2002). L'argomento di Hauser è che, invece, CP non sia per niente vago, in quanto l'idea di Feferman è legata solo a pregiudizi concernenti la matematica impredicativa che sono implausibili. A proposito del *predicativismo* per come enunciato dal suo fondatore, e cioè Poincaré, Hauser nota che:

> La sua insistenza [riferito a Poincaré, *nota mia*] su queste definizioni predicative sorse dalla preoccupazione che le circolarità contenute nel ragionamento impredicativo potessero condurre a contraddizioni simili a quelle scoperte da Russell e altri (Hauser 2002, 260).

In realtà, però, come Hauser dice più avanti:

> […] l'evoluzione matematica della teoria degli insiemi suggerisce considerazioni del tutto diverse. Prima di tutto il *concetto iterativo* [*corsivo mio*] degli insiemi, affinato e ora ampiamente accettato, non ha ancora prodotto la benché minima contraddizione (*ibid.*, 262).

Per Hauser, quindi, il concetto *impredicativo* di insieme, fissato nella forma di "concetto iterativo di insieme", una volta venuta meno la paura di ulteriori contraddizioni che erano da imputare alla nostra concezione naïve di "insieme", è del tutto accettabile. Di conseguenza, anche l'idea di "sottoinsieme arbitrario" (di ℕ, in particolare) che è connessa al concetto impredicativo è accettabile, e, quindi, CH non può essere ritenuta un'asserzione vaga, in nessun senso rilevante del termine.

Fra le altre cose, Hauser, sempre nell'articolo citato, sostiene una versione di GP *oggettivistica*, ma non platonistica nel senso gödeliano. Secondo Hauser, il platonismo gödeliano è causa di controversie in parte ingiustificate, ma, in ogni caso, esiste un modo alternativo per rendere accettabile una visione oggettivistica della matematica, e cioè tramite l'identificazione di procedure che ci diano una garanzia progressiva dell'"affidabilità" di una soluzione condivisa di CP. Il "programma di Hauser", per così dire, consisterebbe:

> […] in una posizione che può essere caratterizzata, in nuce, come preferenza per l'*oggettività* in opposizione a quella per gli *oggetti*, e implica una duplice inversione di priorità: la prima è uno spostamento dell'attenzione dall'ontologia all'epistemologia, ovverosia, tutte le questioni concernenti l'esistenza e la natura di entità matematiche sono discusse esclusivamente nel contesto della verità matematica (*ibid*., 265).

La concezione di Hauser è che sia possibile, quindi, trovare ancora una "soluzione" condivisa di CP attraverso un progressivo affinamento delle nostre intuizioni concettuali. In questo senso, una soluzione sarebbe oggettiva non nel senso di una sua "pre-esistenza" ideale, ma nel senso di una sua "esaustività" di tipo epistemologico.

In un articolo più recente (Koellner 2013), Koellner sembra aver provato a sostanziare in maniera più solida l'idea anti-pluralista di Hauser, descrivendo due strategie combinate: 1) l'indicazione di un "ordine evidenziale" (*evidentness order*) di asserzioni della matematica all'interno della gerarchia di *interpretabilità* di teorie formali e 2) un processo giustificatorio basato su un misto di ragioni estrinseche (basate sul "successo") ed intrinseche (basate, a loro volta, sul punto 1)).

Per quanto riguarda 1): una teoria T_1 si dice interpretabile in una teoria T_2 (e si indica con $T_1 \leq T_2$) se T_2 dimostra tutti i teoremi di T_1. In particolare, T_1 è strettamente interpretabile in T_2 $(T_1 < T_2)$ se, oltre ai teoremi di T_1, T_2 dimostra altri teoremi non dimostrabili da T_1. Per esempio, banalmente, ZFC $<$ ZFC+Con(ZFC). Questo significa che ZFC+Con(ZFC) è di *grado superiore*, rispetto a ZFC, nella gerarchia di interpretabilità di teorie formali. Per ogni grado della gerarchia di interpretabilità è possibile indicare due asserzioni ϕ e ψ che sono dimostrativamente equivalenti o si implicano vicendevolmente, tali, però, che: a) ϕ è *meno evidente* di ψ, ma b) l'evidenza di ϕ è comunque giustificata da quella di ψ, proprio in virtù del loro essere dimostrativamente equivalenti. In questo modo, secondo Koellner, è possibile definire una gerarchia di proposizioni evidenti, connessa a quella di interpretabilità. Quanto più una proposizione è evidente, tanto più *basso* è il livello che occupa in questa gerarchia evidenziale.

Per quanto riguarda 2), Koellner ritiene che una proposizione, giustificata estrinsecamente, possa, comunque, ricevere un supporto intrinseco dal fatto che essa abbia delle conseguenze *intrinsecamente plausibili* (abbia, cioè, come conseguenze, proposizioni di livello "basso" nella gerarchia evidenziale). Ora, secondo Koellner, un assioma descritto nella sez. 5.2, PD (o assiomi dimostrativamente equivalenti nella *gerarchia di interpretabilità*), riceve conferma, fondamentalmente, attraverso 2), essendo giustificato, perlopiù, estrinsecamente, ma avendo anche conseguenze intrinsecamente plausibili di livello "basso" nella gerarchia evidenziale definita tramite 1). PD è, quindi, "globalmente" giustificato attraverso la strategia appena definita, il che ci consente di assumere una posizione anti-pluralista per quanto riguarda $H(\omega_1)$ (la struttura, cioè, in cui gli insiemi proiettivi di reali sono definiti).

Questo successo, come riconosce Koellner stesso, non sembra, però, ripetersi al livello immediatamente superiore, al livello, cioè, di $H(\omega_2)$ e CH, in quanto è più difficile applicare la stessa strategia a qualche principio (assioma) rilevante per quella struttura. È vero che i risultati di Woodin mostrano che $\neg$CH è più giustificato rispetto a CH, ma l'assioma $(\star)$, che è lungi dall'essere intrinsecamente evidente, non sembra nemmeno avere conseguenze che siano "intuitivamente plausibili" nel senso chiarito prima. Questo significa, quantomeno, che rimane ancora molto lavoro da fare nella direzione di una giustificazione "globale" di CH o $\neg$CH (o di qualche assioma che implichi l'uno o l'altro) analoga a quella ottenuta per PD.

Il multiverso insiemistico, come indicato nella sez. 5.5, sembra del tutto in linea con una posizione pluralista. Tuttavia, esistono forme varie di "multiversismo". Per esempio, la posizione di S. Friedman è comunque orientata verso la ricerca di principi di massimalità (come IMH) "ottimali" che decidano CH, il che implicherebbe una riduzione del multiverso alla porzione che soddisfa quei principi.

Invece, la posizione di Hamkins è una posizione pluralista radicale, per cui ogni valore del continuo nel multiverso è una soluzione legittima di CP. Più specificamente, egli dice:

> Dal punto di vista del multiverso, di conseguenza, l'ipotesi del continuo è un problema risolto; è scorretto descrivere CH come un problema aperto. La risposta a CH consiste nella dettagliata ed estesa conoscenza che gli insiemisti hanno ottenuto circa la misura in cui essa è vera o è falsa nel multiverso, del modo in cui si può ottenere essa o la sua negazione in combinazione con altre

> varie proprietà insiemistiche. Naturalmente, ci sono e ci saranno sempre delle questioni relative al fatto che sia possibile ottenere CH o la sua negazione con questa o quella ipotesi, ma il punto è che i fatti più importanti ed essenziali concernenti CH sono pienamente compresi, e questi fatti costituiscono la risposta al problema [posto da] CH (Hamkins 2012, 429).

La posizione di Hamkins affonda le proprie radici in una versione del platonismo denominata "rigogliosa" che si deve a Balaguer (1998), secondo cui ogni collezione di assiomi individua *almeno* una realtà esistente (un universo) della teoria degli insiemi. Il platonismo rigoglioso costituisce un estremo dello spettro delle posizioni su CH, in cui l'altro estremo è occupato dall'universismo radicale di Gödel. Gödel riteneva, infatti, come abbiamo visto, che CH fosse indeterminato, ma solo "temporaneamente", lasciando aperta la possibilità di deciderne, in maniera del tutto *oggettiva*, la verità o falsità.

Vi sono altre posizioni *realiste* che invece sostengono che CH sia determinata. Queste posizioni nascono da considerazioni concernenti la logica del second'ordine. ZFC_2, la teoria degli insiemi al second'ordine, come abbiamo visto, è una teoria "praticamente" categorica: in particolare, in tutti i suoi modelli, o CH è *sempre vero* oppure è *sempre falso*. Martin ha recentemente usato quest'argomento per difendere un realismo in valori di verità (*truth-value realism*, che consiste nell'idea che tutte le proposizioni della matematica siano *determinate*, cioè che abbiano sempre un valore di verità *oggettivo*) in teoria degli insiemi. La sua premessa è che:

> …per la maggioranza dei nostri scopi, la nozione corretta di assiomatizzazione è la nozione al prim'ordine, tuttavia io ritengo che ci sia un vantaggio negli assiomi al second'ordine e nel teorema di categoricità che Zermelo dimostrò per questi assiomi in Zermelo (1930). Gli assiomi al second'ordine sono intimamente connessi al *concetto di insieme* [*corsivo mio*], e il teorema di categoricità di Zermelo dimostra che il concetto di insieme è sufficientemente fine da precludere un numero eccessivo di instanziazioni complete di esso (Martin 2001, 6).

La concezione di verità (e dimostrabilità) al second'ordine, tuttavia, è problematica, per varie ragioni, ed è vista come sospetta da molti insiemisti e filosofi (fra cui, storicamente, Quine). È difficile, quindi, vedere come essa possa produrre una difesa efficace dell'anti-pluralismo su CH. Anche ammettendo la ragionevolezza della posizione di Martin, non ne sapremmo di più circa il valore di $\mathfrak{c}$: ZFC_2 ci dice, infatti, solo che CH è determinato, non in che modo lo sia.

Possiamo avviarci, dunque, a delle osservazioni conclusive. Da questo breve sommario, ci sembra di poter, quanto meno, affermare che il problema di cosa sia una soluzione di CP non può essere disgiunto da una seria analisi filosofica. Cosa questo implichi o debba implicare per la pratica matematica non può essere discusso esaurientemente qui. Secondo la prospettiva naturalista, quale quella, per esempio, di Maddy (1996), sono i matematici a decidere, sulla base dei propri criteri interni, cosa conti come una soluzione, e in che senso. Da quello che abbiamo visto sopra, tuttavia, ci sono fondate ragioni per dubitare che questo sia realmente possibile. Oltretutto, per la maggioranza dei praticanti della teoria degli insiemi, CP è un problema, sostanzialmente, risolto, ma questo non significa che "la" soluzione data sia quella più accettabile in termini filosofici. Chi, invece, guarda alla teoria degli insiemi come a una teoria fondazionale, intrisa di un forte significato filosofico, sente ancora l'urgenza di continuare il lavoro di analisi.

In ogni caso, il lettore ha ormai tutti gli strumenti per giudicare da sé se CP (e CH) siano stati risolti e, se sì, se lo siano in maniera soddisfacente e, in caso contrario, da dove potremmo ragionevolmente attenderci una soluzione. Nel frattempo, è verosimile congetturare che CP (e CH) rimarranno una fonte di ispirazione matematica per l'ulteriore sviluppo della teoria degli insiemi e, al contempo, una delle aree di indagine più avvincenti della filosofia della matematica.

7. Ulteriori letture

Qui di seguito, il lettore può trovare l'indicazione di ulteriori approfondimenti, che, data la complessità e vastità del tema, completano e mettono maggiormente a fuoco alcuni dei punti presi in esame. Inoltre, nell'articolo quasi tutte le dimostrazioni sono state omesse, ed è opportuno indicare, ora, dove possano essere trovate.

I riferimenti che seguono concernono quattro aree fondamentali: (i) aspetti matematici e filosofici di PC; (ii) la teoria degli insiemi, le sue tecniche, il suo sviluppo storico; (iii) le questioni di filosofia della matematica che sono strettamente connesse a PC; (iv) i più recenti sviluppi in teoria degli insiemi che hanno un impatto su PC.

Per quanto riguarda la teoria degli insiemi, nella sua generalità, un articolo introduttivo di ottimo livello è Bagaria (2008). Dello stesso autore è anche la più recente voce "Set Theory" della *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Bagaria 2017). Lo stato dell'arte della disciplina è in Foreman e Kanamori (2010), che contiene sezioni su tutti gli argomenti più rilevanti in teoria degli insiemi, e anche un'introduzione storica, come sempre doviziosa di dettagli, a cura di Kanamori. Jech (2006) è un eccellente (e molto più agile) compendio. Un'introduzione sintetica, ma molto pregevole, alla teoria degli insiemi è anche Hrbacek e Jech (1999). Tutti i risultati matematici, e le relative dimostrazioni, citati nell'articolo si possono trovare in Jech (2006), Kanamori (2009) e, infine, Kunen (2011), che illustra, in particolare, le dimostrazioni di indipendenza e le tecniche fondamentali usate. Su L e *forcing*, molto buoni anche i capp. 13 e 14 di Jech (2006). Il libro di Cohen (Cohen 1966) è, per certi aspetti, ancora la migliore introduzione "intuitiva" al *forcing* (interessante è anche l'articolo Cohen 1963). Una riesposizione diversa del *forcing*, basata sui modelli a "valori booleani", è quella che si trova in un altro classico, Bell (2011). Su $V = L$ un testo fondamentale è Devlin (2009). Sull'aritmetica cardinale, si veda, di nuovo, Jech (2006), in particolare il cap. 5. Chi fosse interessato a un'analisi molto tecnica può anche consultare Shelah (1994). Un'introduzione classica alla teoria descrittiva degli insiemi è Kechris (1995). Moore (1989) fornisce dei dettagli importanti sulle questioni storiche fino ai primi del '900.

Sulla nascita della teoria degli insiemi e lo sviluppo della teoria cantoriana esiste una letteratura copiosa. Ancora fondamentali, come monografie, sono Dauben (1979) e Hallett (1984). Per una biografia e un'analisi del pensiero di Cantor, si veda anche il più recente Purkert e Ilgauds (1987) e Lavine (1994). Importanti anche Grattan-Guinness (2000), e Ferreirós (2011). Fra gli articoli specialistici, merita una menzione particolare Moore (1989). L'articolo è una vera e propria miniera di informazioni, ed è un peccato che l'autore non abbia completato la storia di CH, come progettato, fino ai nostri giorni (ulteriori informazioni si trovano, però, in Moore (2011), che affronta la storia primitiva di GCH). Il lettore italiano può trovare un'analisi, anche storica, della teoria cantoriana nell'introduzione di Rigamonti a Cantor (2012). Una parziale traduzione inglese di alcuni dei lavori più importanti di Cantor (fra cui Cantor 1878 e 1883b) è nel secondo volume di Ewald (1996). Si veda anche il sempre utilissimo van Heijenoort (1967), che contiene alcuni scritti cantoriani e fonti coeve.

Per quanto attiene agli sviluppi più recenti in teoria degli insiemi e, in particolare, ai nuovi assiomi, un resoconto classico, ancora valido, per certi aspetti, è Maddy (1988). Della stessa autrice, si vedano, inoltre, i capp. 5 e 6 di Maddy (1997). Sui principi di riflessione: Koellner (2009) e il meno recente Tait (2003). Ulteriori sviluppi in Welch (2012). Per un'introduzione al programma dell'iperuniverso, si veda il citato Friedman e Ternullo (2016). Una rassegna dei principi di massimalità è in Incurvati (2016). Su

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

Ω-logica e Ultimate L si vedano i due contributi di Woodin, Woodin (2011a) e (2011b). Bagaria, Castells e Larson (2011) presenta tutti i risultati fondamentali dell'Ω-logic. Su *inner model programme*, *core model programme* e grandi cardinali, si veda l'articolo conciso, ma filosoficamente pregnante, Jensen (1995). Steel ha presentato la sua teoria del multiverso in Steel (2014). La posizione multiversista "radicale" è presentata nel già citato Hamkins (2012). Per una classificazione generale di teorie del multiverso, si vedano Väänänen (2014) e Antos *et al.* (2015). Una buona discussione filosofica dell'assioma di simmetria si può trovare sempre in Maddy (1988).

Infine, alcune indicazioni concernenti le questioni filosofiche. Una buona introduzione ai temi centrali della filosofia della matematica è sempre Shapiro (2000), da integrare, magari, con il recentissimo Linnebo (2017b), che contiene una discussione anche del problema dei nuovi assiomi. Potter (2004) affronta gran parte delle questioni fondamentali di filosofia della teoria degli insiemi. Per la questione filosofica dell'*indecidibilità* (*assoluta*), si vedano Koellner (2006) e (2009). Il libro di Arrigoni (2007) discute molto bene la questione della *giustificazione* degli assiomi. I lavori di Maddy, già più volte citati, Maddy (1996) e (1997), sono imprescindibili. Maddy è, poi, tornata a discutere assiomi vecchi e nuovi in Maddy (2011). Molto utile, per un inquadramento della concezione platonista in matematica, è Linnebo (2017a). Il platonismo matematico (più in generale, il realismo in matematica) e le questioni filosofiche ad esso relative (quali indispensabilità, olismo e connessioni col logicismo) è discusso, in maniera articolata, in Panza e Sereni (2010). Le diverse forme di realismo sono messe bene a fuoco da Shapiro in Shapiro (2000). Per la posizione formalista, si vedano, per esempio, i contributi classici di von Neumann (1931) e Curry (1954). Utile anche la voce della *Stanford Encyclopedia of Philosophy* di Weir, Weir (2015), e Detlefsen (2005). Il programma predicativista in matematica (e il "programma di Feferman") sono discussi, con dovizia di particolari, da Feferman (2005). La concezione gödeliana (e GP) sono ampiamente discussi, oltreché nei volumi di Wang, in particolare Wang (1996), anche in Parsons (2014), Martin (2005) e Hauser (2006). Sulla logica (e teoria degli insiemi) del second'ordine, si vedano il già citato Shapiro (1991), Väänänen (2001), e gli ulteriori contributi di Shapiro (2005) e Jané (2005).

Bibliografia

Antos, C., Friedman, S.-D., Honzik, R., Ternullo, C., 2015, «Multiverse Conceptions in Set Theory», *Synthese*, 192(8), 2463-2488.

Arrigoni, T., 2007, *What is Meant by V?*, Mentis, Paderborn.

Arrigoni, T., Friedman, S.-D., 2013, «The Hyperuniverse Program», *Bulletin of Symbolic Logic*, 19(1), 77-96.

Bagaria, J., 2008, «Set Theory», in Gowers, T. - Barrow-Green, J. - Leader, I. (eds) *Princeton Companion of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, pp. 615-634.

Bagaria, J., 2017, «Set Theory», *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/set-theory/).

Bagaria, J., Castells, N., Larson, P., 2011, «An Ω-Logic Primer» in *Set Theory*, Birkhäuser, Basel, pp. 1-28.

Balaguer, M., 1998, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Bell, J., 2011, *Set Theory*. *Boolean-Valued Models and Independence*, Oxford University Press, Oxford.

Benacerraf, P., Putnam, H. (eds), 1983, *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge.

Cantor, G., 1878, «Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84, 242-258.

Cantor, G., 1879-84, «Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten 1-6», *Mathematische Annalen*, **1**, (1879), 15, 1-7; **2**, (1880), 17, 357-55; **3**, (1882), 20, 113-21; **4**, (1883a), 21, 51-58; **5**, (1883b) [*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*], 21, 545-586; **6**, (1884a), 23, 453-488.

Cantor, G., 1895-97, «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, I-II», *Mathematische Annalen*, (1895), 46, 481-512; (1897), 49, 207-246.

Cantor, G., 1932, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalt*, Springer, Berlin.

Cantor, G., 2012, *La formazione della teoria degli insiemi (Scritti 1872-1899)*, Mimesis, Milano.

Cohen, P. J., 1963, «The Independence of the Continuum Hypothesis», *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, I (vol. 50, 1143-1148), II (vol. 51, 105-110).

Cohen, P. J., 1966, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York.

Curry, H., 1954, «Remarks on the definition and nature of mathematics», *Dialectica*, 8, 228-33 (ristampato in Benacerraf-Putnam, 1983, pp. 202-206).

Dauben, J., 1979, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, 1979.

Detlefsen, M., 2005, «Formalism», in Shapiro, S. (ed) *The Oxford Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford, pp. 236-317.

Devlin, K., 2009, *The Axiom of Constructibility*, Springer, Berlin.

Ewald, W., 1996, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 2 voll., Oxford, Clarendon.

Feferman, S., 1987, «Infinity in Mathematics: is Cantor necessary?», in Toraldo di Francia, G. (ed), *L'Infinito nella Scienza*, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, pp. 151-209.

Feferman, S., 2005, «Predicativity», in Shapiro, S. (ed) *The Oxford Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford, pp. 590-624.

Feferman, S., Friedman, H., Maddy, P., Steel, J., 2001, «Does Mathematics Need New Axioms?», *Bulletin of Symbolic Logic*, 6(4), 401-446.

Ferreirós, J., 2011, *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Birkhäuser, Basel.

Foreman, M., Kanamori, A. (eds), 2010, *Handbook of Set Theory*, 3 voll., Springer, Berlin.

Friedman, S., Ternullo, C., 2016, «The Search for New Axioms in the Hyperuniverse Programme», in Sereni, A., Boccuni, F. (eds) *Objectivity, Realism, and Proof (FilMat Studies in the Philosophy of Mathematics)*, Springer, Berlin, pp. 165-88.

Gödel, K., 1938, «The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis», *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 24, pp. 556-57.

Gödel, K., 1947, «What is Cantor's Continuum Problem?», *American Mathematical Monthly*, 54, 515-525 (ristampato, con un'aggiunta del 1963, in Benacerraf-Putnam, 1983, pp. 470-485)

Grattan-Guinness, I. (ed), 2000, *The search for mathematical roots. 1870-1940: Logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor to Russell and Gödel*, Princeton University Press, Princeton.

Hallett, M., 1984, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford University Press, Oxford.

Hamkins, J. D., 2012, «The Set-Theoretic Multiverse», *Review of Symbolic Logic*, 5(3), 416-449.

Hauser, K., 2002, «Is Cantor's Continuum Problem Inherently Vague?»,

Philosophia Mathematica, 10, 257-85.
Hauser, K., 2006, «Gödel's Program Revisited. Part I: the Turn to Phenomenology», *Bulletin of Symbolic Logic*, 12(4), 524-590.
(van) Heijenoort, J. (ed), 1967, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic. 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge (MA)
Hrbacek, K., Jech, T., 1999, *Introduction to Set Theory*, Taylor & Francis, Boca Raton (FL).
Incurvati, L., 2016, «Maximality Principles in Set Theory», *Philosophia Mathematica*, 25(2), 59-193.
Jané, I., 2005, «Higher-Order Logic Reconsidered», in Shapiro, S. (ed) *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford, 2005, pp. 781-810.
Jech, T., 2006, *Set Theory. The Third Millennium Edition*, Springer, Berlin.
Jensen, R., 1995, «Inner Models and Large Cardinals», *Bulletin of Symbolic Logic*, 1(4), 393-407.
Kanamori, A., 1996, «The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen», *Bulletin of Symbolic Logic*, 2(1), 1-71.
Kanamori, A., 2009, *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings*, Springer, Berlin.
Kechris, A., 1995, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, Berlin.
Kunen, K., 2011, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, College Publications, London.
Koellner, P., 2006, «On the Question of Absolute Undecidability», *Philosophia Mathematica*, 14(2), 153-88.
Koellner, P., 2009, «On Reflection Principles», *Annals of Pure and Applied Logic*, 157, pp. 206-19.
Koellner, P., 2014, «Large Cardinals and Determinacy», *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/large-cardinals-determinacy/).
Koellner, P., 2016, «Continuum Hypothesis», in *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (http://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/continuum-hypothesis).
Lavine, S., 1994, *Understanding the Infinite*, Harvard University Press, Cambridge (MA).
Linnebo, Ø., 2017a, «Platonism in the Philosophy of Mathematics», *Stanford Encyclopedia of Philosophy*

(https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/platonism-mathematics/).
Linnebo, Ø., 2017b, *Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton .
Martin, D. A., 2001, «Multiple Universes of Sets and Indeterminate Truth-Values», *Topoi*, 20, 5-16.
Maddy, P., 1988, «Believing the Axioms, I-II», *Journal of Symbolic Logic*, I, 53(1), 481-511; II, 53(2), 736-764.
Maddy, P., 1996, «Set-Theoretic Naturalism», *Bulletin of Symbolic Logic*, 61, 2, 490-514.
Maddy, P., 1997, *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.
Maddy, P., 2011, *Defending the Axioms*, Oxford University Press, Oxford.
Martin, D., 2005, «Gödel's Conceptual Realism», *Bulletin of Symbolic Logic*, 11(2), 207-224.
Moore, G. H., 1989, «Towards a History of Cantor's Continuum Problem», in Rowe, D., McCleary, J. (eds), *The History of Modern Mathematics. Vol 1: Ideas and their Reception*, Academic Press, San Diego, pp. 79-121.
Moore, G. H., 2011, «Early History of the Generalized Continuum Hypothesis: 1878-1938», *Bulletin of Symbolic Logic*, 17(4), 489-532.
Panza, M., Sereni, A., 2010, *Il problema di Platone*, Carocci, Roma.
Parsons, C., 2014, «Platonism and Mathematical Intuition in Gödel's Thought», in *id. Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century*, Harvard University Press, Harvard, pp. 153-187.
Potter, M., 2004, *Set Theory and its Philosophy*, Oxford University Press, Oxford.
Purkert, W., Ilgauds, H.-J., 1987, H. J. *Georg Cantor*, Teubner, Leipzig.
Shapiro, S., 1991, *Foundations without Foundationalism. A Case for Second-Order Logic*, Clarendon Press, Oxford.
Shapiro, S., 2000, *Thinking About Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.
Shapiro, S., 2005, «Higher-Order Logic», in Shapiro, S. (ed) *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford, pp. 751-780.
Shelah, S., 1994, *Cardinal Arithmetic*, Oxford University Press, Oxford.
Sierpiński, W., 1934, *L'hypothèse du continu*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk, Warszawa-Lwów.
Simpson, S. G., 2009, *Subsystems of Second-Order Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

Steel, J., 2014, «Gödel's Program», in Kennedy, J. (ed), *Interpreting Gödel. Critical Essays*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 153-179.

Tait, W. W., 2003, «Zermelo's Conception of Set Theory and Reflection Principles» in Schirn, M. (ed) *The Philosophy of Mathematics Today*, Clarendon Press, Oxford, pp. 469-484.

Väänänen, J., 2001, «Second-Order Logic and the Foundations of Mathematics», *Bulletin of Symbolic Logic*, 7(4), 504-520.

Väänänen, J., 2014, «Multiverse Set Theory and Absolutely Undecidable Propositions», in Kennedy, J. (ed) *Interpreting Gödel. Critical Essays*, Cambridge University Press, Cambridge, 180-208.

Von Neumann, J., 1931, «The formalist foundations of mathematics», *Erkenntnis*, 91-121 (ristampato in Benacerraf-Putnam, 1983, pp. 61-65).

Wang, H., 1996, *A Logical Journey*, MIT Press, Cambridge (MA).

Weir, A., 2015, «Formalism in the Philosophy of Mathematics», *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/formalism-mathematics/).

Welch, P., 2012, «Global Reflection Principles», pre-print (https://people.maths.bris.ac.uk/~mapdw/CLMPS-Helsinki-2015.pdf).

Woodin, W. H., 2001, «The Continuum Hypothesis I-II», *Notices of the American Mathematical Society*, I, 48(6), 567-576; II, 48(7), 681-90.

Woodin, W. H., 2011a, «The Realm of the Infinite», in Woodin, W. H., Heller, M. (eds), *Infinity. New Research Frontiers*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 89-118.

Woodin, W. H., 2011b, «The Transfinite Universe», in Baaz, M., Papadimitriou, C. H., Scott, D. S., Putnam, H. (eds), *Horizons of Truth. Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 449-474.

Zermelo, E., 1904, «Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann», *Mathematische Annalen*, 59, 514-516 (ripubblicato in Van Heijenoort, 1967, pp. 139-141).

Zermelo, E., 1908, «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre», *Mathematische Annalen*, 65, 107-28 (ripubblicato in Van Heijenoort, 1967, pp. 200-215).

Zermelo, E., 1930, «Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre», *Fundamenta Mathematicae*, 16, 29-47 (ripubblicato in Ewald, 1996, pp. 1219-1233).