ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LV, numer 1 – 2007

MARCIN TKACZYK

ZAŁOŻENIOWE SYSTEMY NORMALNYCH LOGIK MODALNYCH

W niniejszym tekście jest zaprezentowany system logiki modalnej K, zbudowany metodą założeniową, czyli metodą dedukcji naturalnej opracowaną przez J. Słupeckiego i L. Borkowskiego, a także dowody odpowiednich twierdzeń o równoważności prezentowanego systemu oraz aksjomatycznego ujęcia logiki modalnej K. Ponadto pokazana jest metoda budowania metodą założeniową wielu mocniejszych od K normalnych systemów modalnych w oparciu o rezultaty uzyskane dla systemu K.

Dotychczasowe próby budowania systemów modalnych metodą założeniową pochodzą od jednego z twórców tej metody, L. Borkowskiego[1]. Wyniki Borkowskiego podlegają jednak pewnym ograniczeniom.

Przede wszystkim Borkowski uzyskał jedynie założeniowe systemy S4 i S5, należące do najmocniejszych systemów modalnych. Nie wiadomo, jak z tych systemów uzyskać systemy słabsze. Ponadto Borkowski odwołuje się w sposób istotny bądź do pojęcia implikacji ścisłej $\prec$, bądź do indeksowania zmiennych zdaniowych. Część reguł przyjętych przez Borkowskiego ma wreszcie faktycznie charakter definicji w postaci dwóch odwrotnych schematów wnioskowania, gwarantowanych przez dwie implikacje, składające się na definicyjną równoważność. Tymczasem do specyfiki założeniowego

Ks. dr MARCIN TKACZYK – Katedra Logiki na Wydziale Filozofii Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego Jana Pawła II; adres do korespondencji: Al. Racławickie 14, 20-950 Lublin; e-mail: tkaczyk@kul.lublin.pl

[1] Por. L. B o r k o w s k i, *O terminach modalnych*, [w:] t e n ż e, *Studia logiczne. Wybór*, Lublin 1990, s. 138-173; t e n ż e, *O pewnym systemie logicznym opartym na regułach i jego zastosowaniu przy nauczaniu logiki matematycznej*, rozdz. III: *Nieklasyczne rachunki logiczne*, [w:] t e n ż e, *Studia logiczne. Wybór*, s. 174-183.

systemu logiki klasycznej należy niezawieranie pierwotnych reguł zastępowania definicyjnego.

W związku z zarysowanymi uwagami zachodzi potrzeba kontynuowania dzieła Słupeckiego i Borkowskiego przez rozbudowę metody założeniowej. Jest to cel niniejszego tekstu.

1. AKSJOMATYZACJA SYSTEMU K

Doniosłość systemu logiki modalnej K bierze się stąd, że — używając terminologii E. J. Lemmona — jest to najsłabsza *normalna logika modalna*. Wszelkie normalne systemy logiki modalnej (a są to systemy najczęściej przez logików badane) zawierają system K. Standardowa (aczkolwiek nie jedyna) aksjomatyzacja systemu K przedstawia się następująco[2].

System K jest nadbudowany nad klasycznym rachunkiem zdań i zawiera oprócz podstawień jego tez jeden aksjomat osobliwy, zwany często wzorem (K):

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \tag{1}$$

definicję

$$(\Box\phi) \overset{\text{def}}{=} (\neg\Diamond\neg\phi) \tag{2}$$

oraz – oprócz reguł podstawiania i odrywania — regułę procedury dowodowej

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash (\Box\phi)} \tag{3}$$

Sławny system T – przykładowo – powstaje z systemu K przez dołączenie wzoru $(\Box p \to p)$, a system D – przez dołączenie wzoru $(\Box p \to \Diamond p)$.

2. ZAŁOŻENIOWY SYSTEM KLASYCZNEGO RACHUNKU ZDAŃ

Założeniowy system klasycznego rachunku zdań J. Słupeckiego i L. Borkowskiego opiera się na następujących założeniach: siedem pierwotnych re-

[2] Por. G. E. Hughes, M. J. Cresswell, *A New Introduction to Modal Logic*, London–New York 1996, s. 25.

guł dołączania nowych wierszy do dowodu o dziesięciu schematach oraz jedna pierwotna reguła tworzenia dowodu, mianowicie reguła tworzenia założeniowego dowodu nie wprost[3]. Reguły dołączania nowych wierszy do dowodu pozwalają na wnioskowanie odpowiednio według następujących schematów:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{RO} & (\phi \to \psi), \phi \vdash \psi \\
\mathrm{DK} & \phi, \psi \vdash (\phi \wedge \psi) \\
\mathrm{OK} & (\phi \wedge \psi) \vdash \phi \\
 & (\phi \wedge \psi) \vdash \psi \\
\mathrm{DA} & \phi \vdash (\phi \vee \psi) \\
 & \psi \vdash (\phi \vee \psi) \\
\mathrm{OA} & (\phi \vee \psi), (\neg\phi) \vdash \psi \\
\mathrm{DE} & (\phi \to \psi), (\psi \to \phi) \vdash (\phi \equiv \psi) \\
\mathrm{OE} & (\phi \equiv \psi) \vdash (\phi \to \psi) \\
 & (\phi \equiv \psi) \vdash (\psi \to \phi)
\end{array}
\tag{4}
$$

Natomiast reguła tworzenia założeniowego dowodu nie wprost stwierdza, że za tezę wolno uznać wszystkie i tylko takie wyrażenia o postaci

$$\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to \cdots \to (\phi_{n-1} \to \phi_n)...)) \quad (n \geq 1) \tag{5}$$

dla których istnieje założeniowy dowód nie wprost, to znaczy taki skończony ciąg wyrażeń, że

— w $n-1$ jego wierszach występują wyrażenia $\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_{n-1}$ jako założenia twierdzenia,
— w n wierszu występuje wyrażenie $(\neg\phi_n)$ jako założenie dowodu nie wprost,
— wszystkie pozostałe wiersze są uprzednio dowiedzionymi tezami lub zostają uzyskane z wierszy wcześniejszych za pomocą reguł dołączania nowych wierszy do dowodu (4), oraz
— w dowodzie występują dwa wiersze sprzeczne.

Wtórna w systemie jest reguła tworzenia założeniowego dowodu wprost, różniąca się od reguły tworzenia dowodu nie wprost tym, że z założeń twierdzenia, bez założenia dowodu nie wprost, należy w analogiczny sposób wyprowadzić wyrażenie ϕ_n zamiast dwóch wyrażeń sprzecznych.

[3] Por. L. B o r k o w s k i, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Lublin 1991, s. 31-38.

J. Słupecki i L. Borkowski udowodnili, że tak określony system jest równoważny klasycznemu rachunkowi zdań, to znaczy istnieje założeniowy dowód nie wprost dla wszystkich i tylko tych wyrażeń klasycznego rachunku zdań, że wyrażenia te sprawdzają się w klasycznej matrycy dwuwartościowej czyli są też tezami aksjomatycznych systemów klasycznego rachunku zdań.

3. OKREŚLENIE ZAŁOŻENIOWEGO SYSTEMU K

Konstruowany założeniowy system logiki modalnej K oprzemy na przedstawionym w paragrafie 2 założeniowym systemie klasycznego rachunku zdań. Ponieważ, jak wspomniano w paragrafie 2, istnieje dowód, że system Słupeckiego i Borkowskiego jest równoważny innym systemom klasycznego rachunku zdań, wolno nam uznać, że jest on też równoważny systemowi aksjomatycznemu klasycznego rachunku zdań, na którym opiera się przedstawiony w paragrafie 1 aksjomatyczny system logiki modalnej K.

Pokażemy dwa sposoby, na jakie można uzyskać założeniowy system logiki modalnej K z założeniowego systemu klasycznego rachunku zdań. Pierwszy sposób jest bardziej intuicyjny, drugi sposób jest mniej intuicyjny, ale doskonalszy formalnie. Pokażemy, że oba sposoby są inferencyjnie równoważne, tj. dają ten sam zbiór tez, oraz że są równoważne systemowi aksjomatycznemu.

Przy pierwszym sposobie wprowadzamy jedną pierwotną regułę dołączania nowych wierszy do dowodu, uzupełniając listę (4). Nowa reguła zezwala na dołączanie nowych wierszy do dowodu zgodnie ze schematem

$$\frac{(\Box\phi_1),(\Box\phi_2),\ldots,(\Box\phi_{n-1})}{(\Box\phi_n)} \tag{6}$$

jeżeli wyrażenie $(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to \cdots \to (\phi_{n-1} \to \phi_n)\ldots)))$ jest uprzednio dowiedzioną tezą.

Reguła (6) jest, jak pokażemy, równoważna aksjomatowi (1) oraz regule (3). Pozostaje jednak definicja (2), którą trzeba przyjąć jako odrębne założenie. Tutaj tkwi główny mankament techniczny omawianego rozwiązania. Do specyfiki systemu założeniowego należało bowiem dotąd, że nie występowały w nim pierwotne reguły zastępowania definicyjnego. Wprowadzenie takiej reguły nie jest żadną katastrofą, zwłaszcza że odpowiednie reguły definicyjne są wtórne w założeniowym systemie klasycznego rachunku zdań. Ponadto większość reguł przyjmowanych dla uzyskania systemu modalnego w pracach Borkowskiego ma również faktycznie charakter definicji przyjętych w postaci dwóch odwrotnych schematów wnioskowania. Jednakże wprowadzenie definicji stanowi odejście od pewnej specyfiki systemu założeniowego.

Powstaje zatem pytanie, czy nie można by zbudować założeniowego systemu logiki modalnej K w taki sposób, by uniknąć wskazanej niedogodności. Rzeczywiście, jest taka możliwość, którą obecnie przedstawimy jako drugie rozwiązanie zadanego problemu.

Założeniowy system logiki modalnej K można uzyskać z założeniowego systemu klasycznego rachunku zdań przez przyjęcie dwóch pierwotnych reguł dołączania nowych wierszy do dowodu (względnie jednej reguły o dwóch schematach). Reguły te pozwalają na dołączanie nowych wierszy do dowodu według schematu

$$\frac{(\Box\phi_1),(\Box\phi_2),\ldots,(\Box\phi_{n-1})}{(\neg\Diamond\neg\phi_n)} \tag{7}$$

oraz według schematu

$$\frac{(\neg\Diamond\neg\phi_1),(\neg\Diamond\neg\phi_2),\ldots,(\neg\Diamond\neg\phi_{n-1})}{(\Box\phi_n)} \tag{8}$$

w obu wypadkach pod tym warunkiem, że wyrażenie

$$(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to \cdots \to (\phi_{n-1} \to \phi_n)\ldots)))$$

jest uprzednio dowiedzioną tezą. W takim ujęciu uzyskuje się system K bez potrzeby przyjmowania reguł definicyjnych.

Podsumowując, założeniowy system logiki modalnej K można uzyskać z założeniowego systemu klasycznego rachunku zdań na dwa sposoby: przyjmując dodatkową regułę (6) i zarazem przyjmując z systemu aksjomatycznego logiki modalnej K regułę zastępowania definicyjnego (2) lub też przyjmując obok założeń klasycznego rachunku zdań reguły (7) i (8) bez konieczności akceptowania jakichkolwiek innych założeń.

4. RÓWNOWAŻNOŚĆ SYSTEMÓW ZAŁOŻENIOWYCH K

Dowiedziemy, że obydwa sposoby budowania założeniowego systemu logiki modalnej K przedstawione w paragrafie 3 są równoważne.

Lemat 1. *Reguły (7) i (8) są wtórne względem reguły (6) i definicji (2) na gruncie założeniowego systemu klasycznego rachunku zdań.*

D o w ó d: Załóżmy, że pewne wyrażenie $(\neg\Diamond\neg\phi)$ zostało wprowadzone do dowodu na mocy reguły (7). Wówczas na mocy reguły (6) wolno do dowodu dołączyć wyrażenie $(\Box\phi)$, z którego przez zastosowanie definicji (2) otrzymujemy wyrażenie $(\neg\Diamond\neg\phi)$.

Załóżmy teraz, że pewne $(\Box\phi)$ zostało dołączone do dowodu na mocy reguły (8). Wówczas do dowodu należą odpowiednie wyrażenia

$$(\neg\Diamond\neg\phi_1),(\neg\Diamond\neg\phi_2),\dots,(\neg\Diamond\neg\phi_m),$$

z których przez zastosowanie definicji (2) otrzymujemy wyrażenia

$$(\Box\phi_1),(\Box\phi_2),\dots,(\Box\phi_m),$$

które wolno dołączyć do dowodu, w oparciu zaś o te wyrażenia, na mocy reguły (6), wolno włączyć do dowodu wyrażenie $(\Box\phi)$. To kończy dowód.

Lemat 2. *Reguła (6) jest wtórna względem reguł (7) i (8) na gruncie założeniowego systemu klasycznego rachunku zdań.*

D o w ó d: Załóżmy, że pewne wyrażenie $(\Box\phi)$ zostało dołączone do dowodu zgodnie z regułą (6). Wówczas do dowodu należą odpowiednie wyrażenia

$$(\Box\phi_1),(\Box\phi_2),\dots,(\Box\phi_m).$$

Z uwagi na te wyrażenia oraz regułę (7) do dowodu wolno dołączyć wyrażenie $(\neg\Diamond\neg\phi)$.

Ponadto do dowodu zawsze wolno dołączyć tezę klasycznego rachunku zdań $(\phi\rightarrow\phi)$. Stąd zaś i z $(\neg\Diamond\neg\phi)$ z uwagi na regułę (8) do dowodu wolno dołączyć wyrażenie $(\Box\phi)$, co kończy dowód.

Lemat 3. *Definicja (2) jest wyprowadzalna z reguł (7) i (8) na gruncie założeniowego systemu klasycznego rachunku zdań.*

D o w ó d: Ponieważ w założeniowym systemie klasycznego rachunku zdań wtórna jest reguła zastępowania członów równoważności (dowodzona w zwykły sposób, przez indukcję po długości wyrażenia), wystarczy udowodnić, że tezą założeniowego systemu K uzyskanego przez dołączenie do założeniowego systemu klasycznego rachunku zdań reguł (7) oraz (8) jest wyrażenie

$$(\Box p\equiv\neg\Diamond\neg p)$$

odpowiadające definicji (2).

Dowodzimy implikacji w prawą stronę. Załóżmy, że $(\Box p)$. Z uwagi na tezę $(p \to p)$ do dowodu wolno dołączyć na mocy reguły (7) $(\neg\Diamond\neg p)$.

Dowodzimy implikacji w lewą stronę. Załóżmy, że $(\neg\Diamond\neg p)$. Z uwagi na tezę $(p \to p)$ na mocy reguły reguły (8) do dowodu wolno dołączyć $(\Box p)$. To kończy dowód.

Twierdzenie 1. *Założeniowe systemy logiki modalnej K uzyskane przez dołączenie do założeniowego systemu klasycznego rachunku zdań reguły (6) i definicji (2) lub też reguł (7) oraz (8) są inferencyjnie równoważne.*

Twierdzenie to wynika z lematów 1, 2 oraz 3.

5. RÓWNOWAŻNOŚĆ SYSTEMÓW ZAŁOŻENIOWYCH Z SYSTEMEM AKSJOMATYCZNYM

Z uwagi na twierdzenie 1 wystarczy udowodnić równoważność jednego z systemów założeniowych z systemem aksjomatycznym modalnej logiki K, by automatycznie uzyskać rezultat dotyczący obu tych systemów. Przeprowadzimy dowód dla systemu uzyskanego przez dołączenie do założeniowego systemu klasycznego rachunku zdań reguły (6) i definicji (2). W tym celu dowiedziemy następujących lematów.

Lemat 4. *Wzór (1) jest tezą założeniowego systemu logiki modalnej K.*

Dowód: Załóżmy $(\Box(p \to q))$ oraz $(\Box p)$. Tezą jest wyrażenie

$$(p \to q) \to (p \to q).$$

Stąd na mocy reguły (6) wyprowadzamy $(\Box q)$, co kończy dowód.

Lemat 5. *Reguła procedury dowodowej (3) jest wtórna w założeniowym systemie logiki modalnej K.*

Dowód: Załóżmy, że ϕ jest tezą. Na mocy reguły (6), przy $n = 1$, do bezzałożeniowego dowodu wolno dołączyć $(\Box\phi)$, zatem $(\Box\phi)$ też jest tezą, co kończy dowód.

Lemat 6. *Reguła wnioskowania (6) jest wtórna w aksjomatycznym systemie logiki modalnej K.*

Dowód: Załóżmy, że pewne wyrażenie o postaci

$$\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to \cdots \to (\phi_{n-1} \to \phi_n)...))$$

jest tezą. Stąd na mocy reguły (3) tezą jest

$$\Box(\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to \cdots \to (\phi_{n-1} \to \phi_n)...)))$$

Stąd przez $(n-1)$-krotne stosowanie aksjomatu (1) wykazujemy, że tezą jest wyrażenie

$$\Box\phi_1 \to (\Box\phi_2 \to (\Box\phi_3 \to \cdots \to (\Box\phi_{n-1} \to \Box\phi_n)...)),$$

które jest gwarantem niezawodności schematu wnioskowania odpowiadającego regule (6), co kończy dowód.

Twierdzenie 2. *Założeniowe systemy logiki modalnej K są inferencyjnie równoważne aksjomatycznemu systemowi logiki modalnej K.*

Dowód: Z lematów 4, 5, 6 wynika równoważność systemu aksjomatycznego i systemu założeniowego opartego na regule (6) i definicji (2), należącej do tego systemu, jak też do systemu aksjomatycznego. Z twierdzenia 1 wynika równoważność obu przedstawionych ujęć założeniowych. To wystarczy dla dowodu.

6. ZAŁOŻENIOWE SYSTEMY INNYCH NORMALNYCH LOGIK MODALNYCH

Najczęściej badane systemy normalnych logik modalnych powstają z systemu K przez dołączenie odpowiednich osobliwych aksjomatów, których głównym funktorem jest często funktor implikacji. Można wymienić następujące aksjomaty:

$$\Box p \to \Diamond p \tag{9}$$

$$\Box p \to p \tag{10}$$

$$p \to \Box\Diamond p \tag{11}$$

$$\Box p \to \Box\Box p \tag{12}$$

$$\Diamond p \to \Box\Diamond p \tag{13}$$

System D powstaje przez dołączenie do systemu K wzoru (9). System T – przez dołączenie wzoru (10). System B — przez dołączenie do systemu K wzorów (10) i (11). System S4 powstaje z K przez dołączenie wzorów (10) i (12), a system S5 przez dołączenie (10) oraz (13).

Łatwo udowodnić – za pomocą twierdzenia o dedukcji oraz naszych twierdzeń (1) oraz (2) – następujące twierdzenie

Twierdzenie 3. *Jeżeli pewien aksjomatyczny system normalnej logiki modalnej $\mathcal{L}$ powstaje z aksjomatycznego systemu K przez dołączenie do K osobliwych aksjomatów o postaci* $(\phi_1 \rightarrow \psi_1), (\phi_2 \rightarrow \psi_2), \ldots, (\phi_n \rightarrow \psi_n)$, *to założeniowy system $\mathcal{L}$, inferencyjnie równoważny odpowiedniemu systemowi aksjomatycznemu, powstaje przez dołączenie do założeniowego systemu logiki modalnej K przez dołączenie osobliwych pierwotnych reguł dołączania nowych wierszy do dowodu o schematach*

$$\phi_1 \vdash \psi_1$$
$$\phi_2 \vdash \psi_2$$
$$\ldots$$
$$\phi_n \vdash \psi_n$$

Na przykład założeniowy system T uzyskujemy przez dołączenie do założeniowego systemu K reguły o schemacie $(\Box\phi) \vdash \phi$, a system S5 przez dołączenie do K reguł o schematach $(\Box\phi) \vdash \phi$ oraz $(\Diamond\phi) \vdash (\Box\Diamond\phi)$. Nie ma przy tym znaczenia, którą z zaprezentowanych metod budowy założeniowego systemu K wybierzemy.

BIBLIOGRAFIA

Borkowski L.: O terminach modalnych, [w:] tenże, Studia logiczne. Wybór, Lublin: TN KUL 1990, s. 138-173.

— O pewnym systemie logicznym opartym na regułach i jego zastosowaniu przy nauczaniu logiki matematycznej, rozdz. III: Nieklasyczne rachunki logiczne, [w:] tenże, Studia logiczne. Wybór, Lublin: TN KUL 1990, s. 174-183.

— Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości, Lublin: TN KUL 1991.

Hughes G. E., Cresswell M. J.: A New Introduction to Modal Logic, London and New York: Routledge 1996.

NATURAL DEDUCTION SYSTEMS OF NORMAL MODAL LOGICS

Summary

Most normal modal logics have been constructed as axiomatic systems rather than natural deduction. However, a lot of them have Gentzen-style or Kalish-Montague-style counterparts. Unfortunately, very few systems have Słupecki-Borkowski-style natural deduction counterparts. To fill in the gap is an aim of the present paper.

The system K is developed as a Leśniewski-Borkowski-style natural deduction system in two ways. Equivalence of the systems is proved. A way is described to develop other normal systems beginning with the given system K.

Translated by Marcin Tkaczyk

Słowa kluczowe: logika modalna, normalna logika modalna, dedukcja naturalna, system założeniowy.

Key words: modal logic, normal modal logic, natural deduction.

Information about Author: Rev. Dr. MARCIN TKACZYK – Chair of Logic, Faculty of Philosophy, The John Paul II Catholic University of Lublin; address for correspondence: Al. Racławickie 14, 20-950 Lublin; e mail: tkaczyk@kul.lublin.pl