氏　　　名	徳　尾　健　司（とく　お　けん　じ）
学位の種類	博　士（人間・環境学）
学位記番号	人　博　第　220　号
学位授与の日付	平成 16 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	人間・環境学研究科人間・環境学専攻
学位論文題目	Extended Quantum Logics （拡張された量子論理）
論文調査委員	（主査）教授 宇敷重廣　教授 高崎金久　助教授 櫻川貴司

論　文　内　容　の　要　旨

本論文は，非古典論理の一つである量子論理を2つの立場から拡張するものである。論文の第一部では，量子論理を高階に拡張し，量子論理に基づく集合論の形式的体系（以下，体系という）を新たに与える。また第二部では，扱える命題の範囲を拡張した量子論理を与える。

準備は量子論理の既存の研究のうち，必要な部分のまとめである。量子論理の研究はBirkhoffとvon Neumannによって始められた。量子力学では，ヒルベルト空間の閉部分空間が物理系に関する命題にあたると考えられる。閉部分空間全体の集合は，包含関係を順序と捉えると∧（下限，論理ではandにあたる），∨（上限，or）が存在し，束となる。この束では否定にあたる演算も定義され，束をある種の論理と見なせる。ただし，分配則 $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ が一般には成り立たず，古典論理の代数的なモデルであるブール束よりは条件が弱い。以上を一般化して，最大元と最小元があり，A^*（補元，not）が定義され，De Morganの法則が成り立つ束をオーソ束といい，さらに $A \wedge (A \Rightarrow B) \leq B$ が成り立つ束をオーソモジュラ束という（ここで $A \Rightarrow B = A^* \vee (A \wedge B)$）。

量子論理においても古典論理や直観論理と同様に形式的体系とモデルが与えられている。モデルとしては上記の束による代数的なモデル以外に多世界モデルがある。量子論理の多世界モデルは，様相論理や直観論理におけるクリプキモデルの量子論理版で，世界間の到達可能関係Rを反射対称関係とし，さらに命題の真偽値の取り方を制限したものである。代数的なモデルによる意味づけと多世界モデルによる意味づけは等価となる。

すべてのモデルで真であれば体系で証明できることとその逆は，完全性と健全性と呼ばれ，古典命題論理や一階述語論理では重要かつ基本的な性質である。これらは量子論理の場合にも命題論理や一階述語論理において成立する。

第一部では型理論の手法を用いて量子論理を高階に拡張し，量子論理に基づく集合論の新しい体系を与え，モデルを定義し，健全性と完全性を証明する。また，単純なモデルを与えることで，体系の無矛盾性と，体系が古典論理よりも真に弱いことを示す。これらは本論文で初めて得られた結果である。

量子論理に基づく集合論の体系は竹内外史のものがすでに知られているが，等号に関する性質が条件付でないと成り立たない。結果として，等号が成り立つ条件を個々の論理式に付けた形で数学を展開する必要がある。それに対し第一部で与える体系では，等号に関する性質が通常の古典論理や直観論理とほぼ同様に成立する。

ここでは，型理論の手法を用いて，以下のように体系を構築する。最初に基本的な型 A_1，$A_2, \ldots$ を定め，それらから直積 $A \times B$ と冪集合 PA を有限回適用して構成される型と，論理式の型 Ω のみを体系の中で扱う。項の構成は通常の型理論と同様に，型による制限に合うように行う。このように構成された項に対して，公理と推論規則を与える。なお，ここでの体系はオーソモジュラであり，PA が集合の型となる。通常の古典論理に基づく集合を領域にして，体系に対する一般モデルを与える。ただし，Ω に対応する領域はオーソモジュラ束である。

第一部の体系が健全であること，すなわちある論理式が体系で証明できればすべてのモデルで真となることが証明できる。

その逆の完全性は，体系のリンデンバウム代数を構築することによって証明される。リンデンバウム代数とは，論理式Aを仮定してBが証明でき（$A \vdash B$），その逆も成り立つときに$A{=}B$と定義し，自由変数のない論理式全体の集合の同値類を取ったものである。代数がオーソモジュラ束であり，なおかつモデルの他の条件が満たされていることがいえ，結果として代数がモデルとなることが証明される。このことから，完全性が証明される。

体系が無矛盾であり，なおかつ古典論理よりも真に弱いことを示すために，6つの元からなる簡単なオーソモジュラ束と有限集合を領域として実際にモデルを構築する。

第二部では従来の量子命題論理（以下TQL，Traditional Quantum Logicと記す）を拡張した命題論理の体系EQL (Extended Quantum Logic) を新たに定義し，その基本的な性質を証明する。

TQLでは，観測結果が与えられた範囲に入る確率が1になるような物理系の状態を命題として扱えた。それに対しEQLでは，任意の与えられた確率以上の場合も命題として表現できるように論理を拡張する。これは，TQLの多世界モデルでは世界間の関係Rが2値であったのを，I (= [0, 1]) 値を取るように拡張することによって実現できる。

以下では，関係Rの値域をIの有限部分集合で {0, 1} を含む集合（ここではJと記す）に制限する。まず，従来から存在する様相命題論理Bを拡張して様相論理MBを新たに定義し，公理系を与え，モデルを定義する。MBは様相がパラメータとしてJの元を取る論理で，その多世界モデルの関係RもJ値を取る。EQLからMBへの変換を定義し，それが埋め込みであること，すなわち変換前と後で論理式の正しさが変わらないことを証明する。MBの公理系の，モデルに対する健全性と完全性を証明できる。MBは様相論理として有限モデル性を満たし，論理式の恒真性が決定可能であるという良い性質を持つ。

論文審査の結果の要旨

本論文は2つの観点から量子論理を拡張している。第一部では，量子論理を高階に拡張することにより，集合論の形式的体系を新しく与えている。また，第二部では，量子論理が扱える命題の範囲を拡張している。特に第一部の結果は，通常に近い等号を持つ量子論理的集合論の体系として評価できるものとなっている。

量子論理は，様相記号を持たない非古典論理として歴史があり，1930年代前後から代数的な性質の研究がかなり行われている。ただし体系の研究は相対的に少なく，量子論理に基づいた数学の研究や計算機科学などへの応用はあまり行われていない。

その原因のひとつとして，集合論や数学を展開できるような体系の研究が少なかったことを挙げられる。体系そのものの研究が進まないと量子論理に限らず，論理そのものの理解が進みにくいのに加えて，数学を展開する際などに，古典論理的に考えがちな人間を補助するために体系が必要だからである。数学を展開するのに十分な強さとよい性質（普通に使える等号があるなど）を持つ体系が必要である。

量子論理に基づく集合論の研究は少ないが，竹内外史による研究が知られている。これは古典論理によるブール値モデルの集合論のブール束を量子論理の束Lに置き換えたもので，論理式を解釈するとLの元となり，集合を解釈すると（普通の）集合からLへの関数となる。また，竹内は量子論理に基づく数学の可能性を示した。ただし，この集合論では等号に関する性質が条件付でしか成り立たず，数学を展開する際には個々の論理式に条件を加える必要がある。例えば等号の推移律が一般には成り立たない。

本論文の第一部の体系も，量子論理の束値の集合論である。しかし，等号の反射律，代入規則は公理であり，定理として対称律や推移律も成り立つ。この等号は，通常の等号に近い良い性質を持っている。ただし，$\vdash \phi(x) \Leftrightarrow \psi(x)$ が成り立つ時に $\vdash \{x \in \mathrm{A} \mid \phi(x)\} = \{x \in \mathrm{A} \mid \psi(x)\}$ は成り立つが，$\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x) \vdash \{x \in \mathrm{A} \mid \phi(x)\} = \{x \in \mathrm{A} \mid \psi(x)\}$ は一般には成立しない。後者を成立させると古典論理の集合論となる。これは，量子論理では良い性質を持った⇒(imply) が原理的に存在せず，また等号の代入公理は論理式の奥にまで影響を与え，ある意味で高階の対象を述語の引数に取る集合論では，等号の性質が論理にまで影響を及ぼすためである。第一部の体系はこのように微妙なところで，古典論理にはならずに量子論理に基づきながら，通常に近い等号を体系に入れることに成功している。この結果は，量子論理的な数学を展開する上で，重要な貢献になり得るものである。

第一部では，一般モデルを定義し，体系の健全性と完全性を証明している。一般に健全性は最低限必要な条件であり，証明は比較的易しい。完全性は成り立つ方が望ましいが，原理的に成り立たない場合もあり，またその証明は相対的に難しい。第一部で採用されているリンデンバウム代数による完全性の証明の手法は見通しの良い方法である。ここで証明すべきことは，リンデンバウム代数がオーソモジュラ束になることと，モデルになるための他の条件を満たすことである。証明によって，体系とモデルがうまく定義されていることがわかる。

第一部の体系の制限としては，型付の集合論であるため，任意の集合の和集合をそのまま取ったりすることはできないことと，通常の集合論のようには超限的な定義を行えないことである。また，集合の外延性や選択公理も第一部の体系には入っていない。これらは今後の研究課題である。第一部の体系は，量子論理に基づく数学を展開するのにこれらが必要かどうか，体系を拡張することができるかどうかを研究する土台となる。

第二部では，従来の量子論理TQLを拡張して，新しい論理EQLとそのモデルを与えている。TQLでは，与えられた範囲に観測値が確率1で入るような物理系の状態が命題に相当する。それに対し，EQLでは観測値が与えられた範囲に，与えられた確率以上で入る状態も命題として表現できる。

TQLでは，ヒルベルト空間の長さ1のベクトルを世界とする多世界モデルを作る際，ベクトル同士の内積が0でないときに1，0のときに0として2値の到達可能性Rを定義する。ところが元の内積は2値ではない。ここに拡張の余地を発見したのが第二部の要点である。すなわち到達可能性を2値から［0，1］に広げると，命題の範囲を拡張できる。ここでは，EQLの形式的体系は直接与えずに，様相論理Bを拡張して様相論理MBを定義し，MBのモデルを与え，EQLからMBへの埋め込みを与え，健全かつ完全なMBの体系を与えている。直接的にEQLの体系を与える代わりに，良い性質を持つMBへの埋め込みによって間接的にEQLの体系を与えたことになる。

なお，第一部の結果は，すでに International Journal of Theoretical Physics **42**，27-38（2003）に掲載されている。また，第二部の結果は，Journal of Philosophical Logic **32**，549-563（2003）に掲載されて，評価を得ている。

本論文は，人間が環境を量子物理学的に認知する形式の数学的な基礎を構築するものであり，人間と環境の交わりを究明するという本研究科設置趣旨に適合し，環境情報認知論講座にふさわしい内容となっているといえる。

よって本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また，平成16年1月22日，論文内容とそれに関連した試問を行った結果，合格と認めた。