Un caso storico irrisolto: le critiche di Popper alla Logica Quantistica di Birkhoff e von Neumann

Antonio Venezia

Gruppo di Storia della Fisica - Dipartimento di Scienze Fisiche - Università "Federico II"
via Cintia, Monte S. Angelo, 80126 Napoli.

e-mail: antkon.venezia@libero.it

Introduzione

L'articolo [3] "The Logic of Quantum Mechanics" (1936) di Birkhoff e von Neumann (in breve BvN) segna la data di nascita degli studi sulla logica della Meccanica Quantistica (MQ). In questo famoso scritto, BvN avanzano la proposta di una logica non classica per la MQ, caratterizzandola in termini di strutture algebriche (i *reticoli ortomodulari*) non booleane (essenzialmente perché non distributive). I risultati di questo lavoro furono quasi ignorati per circa venti anni; solo negli anni sessanta furono ripresi per essere migliorati (da Jauch, Piron ed altri esponenti del cosiddetto "approccio algebrico") o criticati.

La critica più dura alla proposta di BvN fu formulata da Popper in un articolo [12] apparso su **Nature** nel 1968. Questo articolo rappresenta un vero e proprio problema di storia della scienza; con esso Popper metteva in radicale discussione l'approccio algebrico; ci si sarebbe dunque aspettata una forte reazione da parte dei sostenitori di questo approccio, ma Jauch scrisse una risposta che non fu mai pubblicata; così come la controreplica dello stesso Popper. Nel 1974 Jammer [9] riporta questa mancata *querelle* nella sua fondamentale opera *The philosophy of Quantum Mechanics*, e indica una breve nota di un articolo del 1970 [10] come l'unica risposta pubblica di Jauch alla critica di Popper, facendo però intendere che la questione era tutt'altro che risolta. Nello stesso anno in cui Jammer sollevava la questione della critica di Popper, E. Scheibe [13] pubblica quella che tutt'oggi resta la risposta più articolata allo scritto [12] in difesa di BvN. Sono occorsi quindi circa sei anni perché la comunità scientifica si accorgesse della posizione non in linea di Popper. Molti di più però ce ne vorranno per fare chiarezza sulla vicenda. Tanto è vero che nel 2000 Dalla Chiara e Giuntini hanno ripreso [4] la questione aggiungendo nuovi spunti di riflessione sul perché Popper sbagliava.

Nelle pagine seguenti (paragrafo 1) esaminerò l'articolo [12], riprendendo e integrando alcune dimostrazioni fatte da Popper per argomentare la sua tesi: il reticolo di BvN è unicamente complementato e perciò booleano.

Nel paragrafo 2, illustrerò poi le due principali obiezioni a questa tesi, riguardanti la nozione di probabilità (Popper non tiene conto del fatto che la funzione di probabilità di BvN non è quella classica), e l'unicità dell'ortocomplemento (Popper sbaglia a considerare il reticolo di BvN unicamente complementato). Esporrò a questo proposito la nota di Jauch e gli articoli [13] e [4]. Il mio primo intento è di offrire in questo modo un quadro bibliografico il più completo possibile e aggiornato sulla vicenda.

Nel paragrafo 3, infine mostrerò che l'articolo di Popper è un esempio interessante per la storia della scienza; esso rappresenta una critica che, seppur debole matematicamente, resiste invece da un punto di vista dei fondamenti di una teoria fisica. In particolare mostrerò che è ancora valida l'idea di Popper di impostare lo studio della Logica Quantistica (LQ) a partire dall'analisi del principio di indeterminazione, invece che da strutture matematiche astratte; e che questa analisi giustifica quella caratterizzazione intuizionista (in cui la doppia negazione non afferma) della LQ, che BvN avevano esplicitamente contestato con la loro proposta del 1936.

1. L'articolo di Popper

Popper annunzia che la sua obiezione alla proposta fatta da BvN nel 1936 si basa su "semplici risultati della teoria della probabilità o teoria della misura". Dopo aver riassunto l'articolo [3], Popper usa alcuni risultati della teoria dei reticoli ottenuti da von Neumann (1939) e Birkhoff (1940) per definire un *reticolo algebrico* **L** *misurabile*. Indicherò con a, b, c … gli elementi di **L**; 1 e 0 sono rispettivamente l'elemento unità (che Popper indica con U) e l'elemento nullo (che Popper indica con Z) di **L**.

Secondo Popper, un reticolo algebrico **L** è *misurabile* se esiste una funzione misura m (a valori reali) tale che:

R1-R2 $a = b \Leftrightarrow m(a)=m(b)$ per ogni m (limitata e additiva); cioè a e b sono fisicamente identici se e solo se hanno la stessa misura.

R3 Per ogni funzione m (limitata e additiva) devono esistere due numeri reali k_0 e k_1 tali che $k_0=m(0)$ e $k_1=m(1)$

R4 Per <u>ogni</u> m (limitata e additiva) deve valere $m(a)+m(b)=m(0)+m(a\vee b)$

La relazione **R4** richiede una precisazione. In realtà nel suo articolo Popper ha scritto:

$$m(a)+m(b)=m(1)+m(a\vee b) \qquad (\textbf{R4-bis})$$

Questa relazione, a mio giudizio, è scorretta. Infatti, come adesso si vedrà, la funzione m può essere interpretata come una probabilità; di conseguenza la somma delle probabilità di due eventi a e b, appartenenti allo stesso spazio, non può superare la probabilità $m(1)$ dell'evento certo, contrariamente a quanto asserito nella **R4-bis**. L'unica maniera di evitare questa difficoltà è di pensare che nella relazione **R4-bis** Popper ha scambiato 0 con 1 (o, per usare la sua notazione, Z con U). Nel prosieguo userò la relazione **R4** al posto della **R4-bis**.

Partendo da questa definizione, Popper vuole dimostrare che il reticolo definito da BvN è misurabile. Riporto dettagliatamente qui di seguito le argomentazioni di Popper. La strategia che egli utilizza consiste nell'analizzare il testo dell'articolo di BvN allo scopo di evidenziare alcune proprietà del loro reticolo algebrico che siano riconducibili alle relazioni **R1** … **R4**.

Popper si sofferma essenzialmente sui seguenti due passaggi dell'articolo [3] di BvN (ho sottolineato alcuni punti chiave per la discussione successiva):

- "Le seguenti tre condizioni sulle proposizioni sperimentali a, b, riguardanti un dato sistema fisico, sono equivalenti:
  (3a) Il rappresentante matematico di a è un sottoinsieme del rappresentante matematico di b.
  (3b) a implica b; cioè se si può predire a con certezza, si può predire b con certezza
  (3c) Per qualunque insieme statistico di sistemi, la probabilità di a è al più la probabilità di b." ([3], p. 827)
- "Si può dimostrare che la **legge modulare** è una conseguenza dell'<u>esistenza</u> di una funzione numerica d, con le proprietà:
  D1: se $a\supset b$, allora $d(a)>d(b)$
  D2: $d(a)+d(b)=d(a\cap b)+d(a\cup b)$
  … le condizioni **D1** e **D2** descrivono parzialmente le proprietà formali della <u>probabilità</u>" (p. 832, ibid.)

Partendo da queste affermazioni Popper dimostra che la funzione d di BvN è la sua funzione misura m.

Infatti nel reticolo di BvN la funzione di probabilità (e quindi anche d per le proprietà **D1** e **D2**) gode della proprietà **R1-2**; anzi l'equivalenza di (3b) e (3c), scrive Popper (p. 683, ibid.) "asserisce qualcosa di più forte della **R1-2**"; infatti dire che (3b) è equivalente a (3c) significa che $m(a)\leq m(b)$ se e solo se a implica b, cioè $a\subseteq b$ (usando la (3a)); quindi nel limite della disuguaglianza di (3c), vale la **R1-2**.

Inoltre, sempre perché d descrive una probabilità, esisterà un numero reale k_0 tale che $k_0=d(0)$, e un numero k_1 tale che $k_1=m(1)$: la teoria classica della probabilità ci dice che $k_0=0$ e $k_1=1$; in generale basta che $k_0\leq k_1$ per un qualsiasi intervallo $[k_0, k_1]$. Quindi d verifica la **R3**.

Infine, scrive Popper, "la **D2** è formalmente identica a **R4**"; infatti, entrambe le proposizioni esprimono l'additività delle funzioni *d* e *m*. La **D2** è la generalizzazione di **R4** a due eventi generici; infatti **D2** si riduce a **R4** quando gli eventi *a* e *b* sono indipendenti, cioè $a \cap b=0$ (quindi anche $a \wedge b=0$, dato che all'intersezione di due punti di un reticolo corrisponde la congiunzione tra le proposizioni che quei punti rappresentano). In questo modo la **R4** esprime lo stesso concetto dell'assioma 3 di Kolmogorov; cioè se due eventi sono indipendenti ($a \wedge b=0$), la somma delle probabilità è uguale alla probabilità dell'unione (che corrisponde al connettivo $\vee$) dei rispettivi spazi di definizione.
A partire da queste osservazioni Popper conclude che il reticolo di BvN è un reticolo misurabile.
A questo punto egli dimostra i seguenti teoremi:
Teorema 1: Ogni reticolo **L** misurabile è <u>unicamente</u> complementato [cioè per ogni suo elemento esiste ed è unico il complemento].
Infatti, essendo **L** misurabile, vale la **R3**:

$$m(0)+m(1)= k_0+k_1=k$$

essendo *k* una costante dipendente da *m*. Ora, ammettiamo per assurdo che per *a* esistano due distinti complementi e indichiamoli con *b* e *c*: in **L**, $a \vee b=1$ e $a \wedge b=0$, e lo stesso per *c*. Usando **R4** si ottiene:

$$m(a)+m(b)=m(0)+m(1)=k$$
$$m(a)+m(c)=m(0)+m(1)=k$$

cioè $m(a)+m(b)=m(a)+m(c)$ e quindi $m(b)=m(c)$; usando **R1-2** si trova che $b=c$. Quindi il complemento di *a* è unico e viene da Popper indicato con *a'*. Per esso vale

$$m(a)=k-m(a') \qquad \mathbf{(1)}$$

Teorema 2: Ogni **L** misurabile è modulare.
Secondo me, la dimostrazione presentata da Popper omette alcuni passaggi, risultando poco chiara. Quella che segue è una mia interpolazione. Date le due coppie di eventi indipendenti (*a* e *b*) e (*b* e *c*) scriviamo la relazione dell'associatività:

$$[m(a)+m(b)]+m(c)=m(a)+[m(b)+m(c)]$$

Adesso applichiamo la **R4** (additività) ai termini nella parentesi quadra:

$$[m(1)+m(a \vee b)]+m(c)=m(a)+[m(1)+m(b \vee c)] \quad \Leftrightarrow \quad m(a \vee b)+m(c)=m(a)+m(b \vee c) \quad \mathbf{(2)}$$

Ammettiamo che $a \subseteq c$; volendo sfruttare di nuovo l'additività nella **(2)**, occorre usare la relazione generalizzata **D2** (infatti con l'ipotesi $a \subseteq c$, gli eventi $a \vee b$ e *c* non sono più indipendenti; la stessa considerazione vale per *a* e $b \vee c$). Quindi

$$m[(a \vee b) \wedge c]+m[(a \vee b) \vee c]=m[a \wedge (b \vee c)]+m[a \vee (b \vee c)] \qquad \mathbf{(3)}$$

Usando il fatto che $a \subseteq c$, e <u>ammettendo l'associatività e la commutatività dell'operazione di unione</u>[1] tra elementi del reticolo (corrispondente all'operazione logica $\vee$) si può scrivere:

$$(a \vee b) \vee c= b \vee (a \vee c)=b \vee c \qquad a \vee (b \vee c)= (a \vee b) \vee c=b \vee c$$

La **(3)** allora diventa:

$$m[(a \vee b) \wedge c]=m[a \wedge (b \vee c)] \qquad \mathbf{(4)}$$

Usando **R1-2** si ha:

$$(a \vee b) \wedge c= a \wedge (b \vee c) \qquad \mathbf{(5)}$$

Riassumendo: se *a* implica *c* ($a \subseteq c$), vale la **(5)**. Quest'ultima relazione altro non è che la **legge modulare**.
Teorema 3: ogni reticolo **L** unicamente complementato è Booleano qualora soddisfi almeno una delle seguenti proprietà:
(a) **L** è modulare
(b) **L** è finito

[1] Questa assunzione non è esplicitamente fatta da Popper; ma è a mio giudizio indispensabile per ottenere il risultato della sua dimostrazione.

(c) **L** è ortocomplementato, cioè se $a\subset b'$ allora $b\subset a'$, essendo a' (risp.: b') il complemento di a (b).

(d) **L** è misurabile e la sua misura soddisfa la relazione: se $a\subseteq b$ allora $m(a)\leq m(b)$.

Dato che la (*a*) e la (*c*) sono state dimostrate separatamente da von Neumann e Birkhoff, Popper dimostra solo (d) e (c). In particolare mostra che (d) è riducibile a (c): se $a\subseteq b$, allora - per la (d) - $m(a)\leq m(b)$. Poiché **L** è unicamente complementato, segue per la **(1)** che

$$k\text{-}m(a')\leq k\text{-}m(b') \quad \Rightarrow \quad m(b')\leq m(a')$$

Usando **R1-2** si ottiene:

$$b'\subseteq a'$$

In conclusione se $a\subseteq b$ allora $b'\subseteq a'$. Poiché **L** è booleano [(b')'=*b*] si ottiene la (c).

Teorema 4: il reticolo proposto da BvN è un reticolo booleano perché soddisfa le condizioni (a), (b), (c), (d).

In questo modo, scrive Popper, "la MQ resta conforme alla Logica Classica (LC); …. BvN hanno solo indebolito questa struttura [logica classica] … Questo gioco però ha uno scarso interesse se non vi sono *buone ragioni* per omettere o indebolire una particolare assiomatizzazione."

Le ragioni addotte da BvN per questo indebolimento sono due: il principio di indeterminazione e l'esperimento concettuale che essi propongono per falsificare la proprietà distributiva. Riguardo il primo motivo, scrive Popper (p. 685, ibid.):

"[BvN]sembrano sperare di poter dimostrare che la congiunzione di due variabili incompatibili che potrebbero violare il principio di Heisenberg, possa essere esclusa eliminando la legge distributiva. Questa [speranza] resta un'ipotesi e non è mai dimostrata."

Neanche l'esperimento concettuale che essi propongono alla fine del loro articolo riesce a dimostrare questa ipotesi. A questo riguardo è utile ricordare in che cosa consiste l'esperimento in questione. BvN scrivono (p. 831, [3]): "se x è una proposizione sperimentale corrispondente all'osservazione del pacchetto d'onda ψ su un lato [ad esempio a destra] di un piano π dello spazio fisico, se x' descrive l'osservazione di ψ sull'altro lato [ad esempio a sinistra] di π e se y corrisponde all'osservazione di ψ in uno stato simmetrico rispetto a π", allora si ha:

$$y\cap (x\cup x') \neq (y\cap x) \cup (y\cap x')$$

Per capire perché vale la disuguaglianza occorre interpretare x' (la posizione speculare rispetto a π) come il complemento di x; infatti BvN pongono $(x\cup x')=\mathbf{1}$, cioè vale il terzo escluso, essendo x' logicamente equivalente alla negazione di x. Occorre inoltre interpretare y come una proprietà incommensurabile con quelle espresse da x e x'. Infatti BvN usano le relazioni $(y\cap x)=\mathbf{O}$ e $(y\cap x')=\mathbf{O}$. Quindi il primo membro dà:

$$y\cap\mathbf{1}=y$$

mentre il secondo membro è:

$$\mathbf{O}\cap\mathbf{O}= \mathbf{O}$$

Secondo Popper, è scorretto interpretare x', che è la negazione logica di x, come la posizione speculare di ψ rispetto al piano π; asserire x' significa dire che "ψ non sta a destra di π" e questa proposizione non può essere confusa con la frase "ψ sta a sinistra di π". Quindi secondo Popper, è sbagliato scrivere $(y\cap x')=\mathbf{O}$ perché la frase y= "ψ è simmetrica rispetto a π" non è detto che sia incompatibile con la frase x'="ψ non sta a destra di π".

Commenta Popper (p. 685, [12]):

"Vista l'impossibilità matematica da parte di BvN di ricavare il fallimento della proprietà distributiva dalle regole R1-R4, si ci doveva aspettare che il loro esperimento concettuale, che usa dopo tutto la logica della negazione classica, contenesse un errore. E' interessante notare che il tipo di cambiamento nella LC che potrebbe realizzare ciò che BvN suggeriscono [con il loro esperimento concettuale] è il rifiuto del terzo escluso, così come proposto da Brouwer, ma da loro rifiutato[2].”

Seguendo questa intuizione di Popper e sviluppandola formalmente, mostrerò nel paragrafo 3 che è possibile una caratterizzazione intuizionista (secondo cioè la logica di Brouwer) della LQ, riconducendo proprio alla formulazione del principio di indeterminazione la necessità di una negazione non classica in MQ.

2. Le obiezioni a Popper

Nonostante la dura critica a BvN, l’articolo di Popper è passato in secondo piano. I motivi possono essere tre:

1. Popper sbagliava in maniera grossolana. Ma allora perché non rispondere pubblicamente e distruggere la sua tesi? Sarebbe stato doveroso scientificamente, e, data la grande visibilità dell’autore, chiunque ne avrebbe guadagnato in popolarità.
2. Popper aveva ragione e sarebbe stato volutamente (e scorrettamente) ignorato dagli altri autori.
3. Popper aveva ragione solo in parte.

Nessun autore ha seguito la strada 1. L’unica prova a sostegno della tesi 2 è la mancata *querelle* indicata da Jammer. Resta la tesi 3 sostenuta dalla nota di Jauch-Piron e dagli articoli di Scheibe e Dalla Chiara-Giuntini.

Le obiezioni a Popper riguardano essenzialmente due punti:

1. L’unicità dell’ortocomplemento.
2. La nozione di probabilità.

Il seguito è una sintetica esposizione del pensiero degli autori precedentemente citati.

La nota di Jauch-Piron del 1970 è troppo breve e rapida per considerarla una risposta alla critica articolata di Popper. Essa si limita ad indicare *en passant* dove Popper sbaglia, senza dare però ulteriori dettagli. Data la sua brevità riporto testualmente la nota:

“Popper fa una assunzione in più, cioè che <u>per tutti gli stati</u>

$$m(a)+m(b)=m(a\cup b)+m(a\cap b) \qquad \textbf{(J1)}$$

(il funzionale $m(a)$ sul reticolo, con valori tra *0* e *1*, rappresenta lo stato del sistema); questa assunzione non è vera in Meccanica Quantistica [ad esempio se *a* e *b* rappresentano grandezze coniugate che non si possono misurare simultaneamente a causa del principio di indeterminazione].”

In realtà però non è Popper che introduce la relazione **(J1)**. Popper sostiene (p. 683, ibid.) che questa relazione è stata usata direttamente da BvN, e mostra che essa si riduce alla **R4** per eventi indipendenti (che sono eventi compatibili[3] a causa del principio di indeterminazione). La prima questione da risolvere è dunque se Popper ha riportato fedelmente il pensiero di BvN.

L’articolo [13] di Scheibe può darci un aiuto a questo proposito. Secondo Scheibe, “Popper non ha capito l’articolo di BvN” (p. 326, [13]), ed anche se il suo argomento è “abbastanza valido, sfortunatamente non tutte le sue premesse sono vere” (p. 322, ibid.).

La prima premessa non vera, secondo Scheibe, riguarda proprio l’insieme delle assunzioni fatte da Popper nelle relazioni **R1** … **R4**. Infatti Popper, “invece di lasciare la relazione [**D2**] nella sua forma esistenziale, come essa compare nel richiamo marginale di BvN, postula che ogni funzione nel reticolo gode della proprietà **R4**” (p. 325, [13]). Ma, secondo Scheibe, ciò è falso, perché già nel suo famoso libro del 1932 [11] von Neumann aveva dimostrato che la **D2** vale solo per una restrizione della classe delle generiche funzioni *d* (che BvN chiamano “thermodynamic weight of states”) ad elementi *a* e *b compatibili*.

In effetti il libro di von Neumann del 1932 contiene questa dimostrazione; il fatto che nell’articolo del 1936 questa restrizione viene data per scontata e non viene puntualizzata potrebbe avere indotto Popper a formulare la **R4** in maniera più generica, invece di utilizzarla solo per eventi compatibili.

[2] Infatti BvN chiudono il loro articolo rifiutando esplicitamente l’accostamento della loro logica a quella intuizionista di Brouwer ([3], p. 837).

[3] Due elementi del reticolo sono **compatibili** se rappresentano grandezze fisiche misurabili simultaneamente.

L'aver trascurato la limitazione implica che anche i teoremi dimostrati da Popper non valgono in generale, ma solo per elementi compatibili del reticolo.

La seconda premessa non vera nell'articolo di Popper riguarda, secondo Scheibe, la nozione di reticolo unicamente ortocomplementato. Scheibe fa innanzitutto notare che la proprietà distributiva della LC non è sostituita nella LQ dalla proprietà modulare (che è in comune tra LC e LQ), ma dall'*assioma di irriducibilità*, secondo cui, a parte i due elementi (1 e 0), in un reticolo **L** non ci sono altri elementi che sono *compatibili* con tutti gli elementi di **L**. Popper nel suo articolo ignora del tutto questo assioma, che è in disaccordo con l'unicità del complemento. Infatti lo stesso von Neumann nelle sue lezioni degli anni 35-36 dimostrava che l'irriducibilità è caratterizzata dal fatto che, a parte gli elementi 1 e 0 di un reticolo, nessun altro elemento ha un unico complemento. Quindi, sostiene Scheibe, BvN non potevano parlare di reticolo unicamente complementato, neanche implicitamente così come sostenuto da Popper.

In conclusione l'analisi di Scheibe smonta alcune premesse matematiche che Popper ha erroneamente attribuito a BvN e di cui si è servito per formulare la sua tesi, che risulta di conseguenza fortemente ridimensionata nei risultati, in particolar modo risulta inutilizzabile la sua dimostrazione dell'unicità dell'ortocomplemento nel reticolo di BvN.

Se la critica di Scheibe ha confutato in maniera evidente un risultato matematico dell'articolo di Popper, altre questioni restavano irrisolte in quell'articolo: prima fra tutte l'interpretazione fatta da Popper secondo cui la funzione *d* di BvN era una funzione di probabilità classica restava valida oppure no?

In un recente articolo [4] Dalla Chiara e Giuntini hanno affrontato proprio questo problema sostenendo, al contrario di Popper, che la funzione *d* è una funzione di probabilità di tipo non classico. Gli autori di questa critica contestano a Popper la definizione di *funzione misura* mediante le relazioni **R1** … **R4**, perché secondo loro mentre la **R1-2** definisce una funzione, le restanti proprietà **R3** e **R4** definiscono una classe di funzioni troppo ampia per la MQ, perché include anche la misura classica (eventi compatibili e non); essi riconoscono però che (p. 9, [4])

"la distinzione tra la probabilità classica e quella quantistica non è chiaramente sottolineata nell'articolo di BvN del 1936"

Di nuovo per confutare Popper occorre rifarsi ad altri scritti. Quanto meno si può dire che l'articolo [3] di BvN non è stato un articolo chiarissimo, nonostante abbia segnato la nascita della LQ. Occorre dunque fare una distinzione tra quanto espone l'articolo originario di BvN e quanto hanno aggiunto le correzioni fatte a quel lavoro negli anni successivi. A partire dagli anni sessanta[4] alcuni autori hanno sviluppato tecnicamente una distinzione tra **probabilità quantistica** e **probabilità classica** (formalizzata da Kolmogorov). In particolare si è sostenuto che la probabilità classica non è in grado si esprimere in meccanica quantistica le proprietà della *probabilità condizionale* (ovvero la probabilità di un evento dopo la misura di un altro evento) e della *probabilità sequenziale* (ovvero di un insieme temporalmente ordinato di eventi). Infatti nel primo caso la teoria classica ci dice che la probabilità condizionale di due eventi A e B è sempre zero quando la corrispondente probabilità dell'evento $A \cup B$ è zero. In MQ se A e B sono due eventi incommensurabili a causa del principio di indeterminazione, allora si può avere che la probabilità $A \cup B$ è zero, ma la probabilità condizionale di avere un valore per B data una misura di A è diversa da zero. Lo stesso ragionamento vale per una sequenza di misure; la probabilità dipende dall'ordine in cui si eseguono le misure.

Questo approccio alla probabilità quantistica non è stato però condiviso da tutti gli studiosi della LQ. Ad esempio Wallace Garden ha mostrato [16] che si può caratterizzare la LQ a partire dalla probabilità classica; basta scegliere come fondamentale non lo spazio degli eventi, ma quello degli stati. In questo tipo di approccio la probabilità (classica) di una proposizione viene ad essere la misura di un insieme di stati della teoria (quantistica) in cui le proposizioni sono vere. In altre

[4] Il punto di riferimento per la rinascita degli studi logico-quantistici fu il libro di G. Mackey *The mathematical foundations of Quantum Mechanics* (1963).

parole, invece di costruire ex novo le regole della probabilità, si limitano le regole della probabilità classica a quelle proposizioni che la MQ ritiene accettabili.
Esiste dunque una difficoltà oggettiva in letteratura nello sconfessare Popper riguardo la sua interpretazione probabilistica dell'articolo di BvN. A mio giudizio questa difficoltà è dovuta a come si considerano di solito i fondamenti di una teoria fisica: per definire la logica di una teoria si studia il rapporto tra la parte sperimentale della teoria e la sua parte matematica. Negli approcci algebrici in particolare, la logica è di fatto definita attraverso la matematica. Allora non si dovrebbe cercare di chiarire il rapporto logica-matematica-esperimento manipolando le regole della probabilità; poiché parlare di probabilità in definitiva significa occuparsi dello stesso rapporto tra matematica ed esperimenti. Quindi non si può usare la teoria della probabilità per giustificare le regole della logica, perché si creerebbe in questo modo un circolo vizioso.

3. Valutazioni

Per uscire dal cortocircuito tra logica-matematica-probabilità ed esperimenti ho proposto [14] di definire il rapporto tra logica e teoria fisica, considerando non solo la parte sperimentale e matematica della teoria fisica, ma anche i principi, primo fra tutti in MQ quello di indeterminazione. A sostegno di questa tesi voglio mostrare come l'analisi logica del principio di Heisenberg permetta di uscire dal suddetto cortocircuito.
Il principio di indeterminazione esprime una impossibilità (l'impossibilità di misure con assoluta precisione di variabili coniugate di uno stesso sistema e allo stesso tempo), che può essere formalizzata con la seguente frase doppiamente negata:
"<u>Non</u> è vero che x e p siano misurabili sullo stesso sistema con precisione assoluta [<u>non</u> relativa]"(1)
essendo x e p due variabili coniugate (ad esempio posizione e momento).
Voglio mostrare che il principio di indeterminazione si può correttamente esprimere solo con una frase doppiamente negata che non coincide con la corrispondente affermativa (quindi risulta indispensabile la logica non classica di tipo intuizionista).
Indico con A la proposizione "x e p sono misurabili sullo stesso sistema con precisione relativa". Con questa posizione la (1) diventa:

non è vera $\neg$A (2)

La frase positiva corrispondente alla (2) è:

è vera A (3)

La (3) asserisce che "è vero che si può misurare con precisione relativa x e p"; il che, senza ulteriori precisazioni, non è né vero, né falso: non è vero perché quando $\Delta x\, \Delta p < \hbar/2$, x e p non si possono misurare, neanche con precisione relativa; non è falso perché se $\Delta x\, \Delta p > \hbar/2$, la misura si può fare.
La stessa cosa si può dire per la negazione di (3); infatti la proposizione

non è vera A (4)

significa che non è vero che si possono misurare x e p con precisione relativa; questa proposizione come la (3), senza ulteriori precisazioni, non è né vera né falsa.
Riassumendo: sono indeterminate le proposizioni (3) e (4), mentre è vera la (2). Segue che per esprimere il principio di indeterminazione occorre una logica in cui la doppia negazione (2) non coincide con la corrispondente frase positiva (3): la logica intuizionista soddisfa questo requisito.
Il rifiuto del terzo escluso quindi è indispensabile per esprimere un principio fondamentale della MQ. In questo senso, secondo me, Popper aveva ragione nel sostenere che "il tipo di cambiamento nella LC che potrebbe realizzare ciò che BvN suggeriscono [con il loro esperimento concettuale] è il rifiuto del terzo escluso, come proposto da Brouwer, ma rifiutato da BvN".
Intesa in questo modo, la critica di Popper trova una più ampia motivazione in termini di fondamenti di una teoria scientifica, e suggerisce una concreta alternativa all'approccio algebrico di BvN[5]. Utilizzando i risultati raggiunti da A. Drago [5] nello studio della logica delle teorie fisiche

[5] In realtà Popper non è stato l'unico autore a sostenere una caratterizzazione intuizionista della LQ. Nel mio lavoro di tesi ho esaminato in dettaglio gli articoli di altri autori (A. Fine [6], Bell e Hallett [2], Gauthier [7] e Adelman e Corbett

classiche, ho illustrato tecnicamente questa alternativa nel mio lavoro di tesi [15], mostrando in che modo si può realizzare in una teoria fisica, in particolare nella MQ di Heisenberg, il passaggio dalla logica non classica alla matematica, inversamente a quanto hanno realizzato BvN, i quali dalla matematica dello spazio di Hilbert hanno ottenuto la logica della MQ.

Conclusioni

A trent'anni dall'articolo di Popper, si può affermare che egli aveva ragione solo in parte.
Aveva ragione nel sostenere che la proposta originaria di BvN manca di una chiara interpretazione fisica in termini del principio di indeterminazione, il quale effettivamente, a mio giudizio, non soddisfa la legge del terzo escluso, che invece vale nel reticolo ortomodulare (in cui la doppia negazione afferma).
Popper però non aveva ragione nel sostenere che il reticolo ortomodulare è unicamente complementato. Ma l'errore matematico di Popper è da attribuire anche alla poca chiarezza nella interpretazione probabilistica originaria di BvN del reticolo ortomodulare (la discussione che ho riportato sulla proprietà **R4** ne è una evidente testimonianza). Ovviamente Popper non ha ragione se questa critica viene rivolta agli approcci algebrici in generale; perché a partire dagli anni sessanta Jauch, Piron ed altri autori hanno corretto e migliorato la proposta originaria di BvN, introducendo una distinzione tra probabilità quantistica e probabilità classica che era sconosciuta nel 1936 a BvN e che ancora oggi non è condivisa da tutti gli studiosi di LQ.
Secondo me, Popper aveva ragione nel sostenere che la vera differenza tra la LC e la LQ è la legge del terzo escluso, anche perché studiosi successivi come Fine (1972), Bell-Hallett (1982), Gauthier (1983) e Adelmann-Corbett (1995) hanno costruito tecnicamente questa alternativa.
Popper però non aveva ragione nel voler verificare questa alternativa solo con l'analisi di un esperimento (seppure concettuale), come quello di BvN; infatti la logica di un esperimento sì-no è la logica classica; solo l'analisi dei principi permette di riconoscere la legge della doppia negazione anche in MQ.
Per tutti questi motivi, l'aver trascurato l'articolo di Popper è stata una occasione mancata per riflettere sulla logica e sui fondamenti di una teoria scientifica così importante come la MQ.

Bibliografia

1. Adelman M., Corbett J. V. "An intuitionistic model for Quantum Mechanics", **Macquarie Mathematics Reports**, Sidney (1991).
2. Bell J. e Hallett M. "Logic, quantum logic and empiricism", **Philosophy of Science**, 49 (1882), pp. 355-379.
3. Birkhoff G. e von Neumann J. "The Logic of Quantum Mechanics", **Annals of Mathematics**, 37 (1936), pp. 823-843.
4. Dalla Chiara M. L. e Giuntini R. "Popper and the logic of Quantum Mechanics", preprint.
5. Drago A. *Le due opzioni*, La Meridiana, Molfetta (1991); "The process of induction as a non classical logic's double negation: evidence from classical scientific theories", **Mathware and soft computing**, 3 (1996), pp. 295-308.
6. Fine A. "Some conceptual problems of Quantum Theory", in R. S. Colodny *Paradigms and Paradoxes*, Pittsbourgh (1972), pp. 3-31.
7. Gauthier Y. "Quantum Mechanics and the local observer", **International Journal of theoretical physics**, vol. 22, n. 12 (1983), pp. 1141-1152.

[1]) che hanno scelto di differenziare la LC e la LQ in termini della validità o meno della legge della doppia negazione. Da questa analisi è risultato che la caratterizzazione intuizionista della LQ fino ad oggi non è stata affrontata in maniera efficace, o perché i connettivi non sono stati studiati in maniera corretta (è il caso della congiunzione in Fine), oppure perché, pur riconoscendo l'importanza della doppia negazione, non si è riuscito a precisarne la semantica (è il caso di Bell-Hallett e quello di Gauthier), o, infine, perché la semantica ha trovato problemi matematici che ne hanno impedito lo sviluppo e limitato la validità a casi particolari (l'esperienza della doppia fenditura e la teoria dei fasci nell'articolo di Adelman-Corbett).

8. Hughes I. G. “Quantum logic”, **Sc. Am.** 245 (1981), pp. 146-157.
9. Jammer M. *The Philosophy of Quantum Mechanics,* Wiley (1974), pp. 342-353.
10. Jauch J. M., Piron C. “What is Quantum Logic?”, in C. G. Goebel and N. Nambu (eds.), **Essay in Theoretical Physics**, University of Chicago Press, Chicago 1970, pp. 166-181.
11. Neumann, J. von *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, 1932.
12. Popper K. R. “Birkhoff and von Neumann’s interpretation of quantum mechanics”, **Nature**, vol. 219, 1968, pp. 682-685.
13. Scheibe Erhard “Popper and Quantum Logic”, **Brit. J. Phil. Sci. 25** (1974), pp. 319-328.
14. Venezia A. “I diversi approcci alla logica quantistica: due classificazioni e loro interpretazione”, in E. Schettino (ed.): **Atti del XX Conv. Naz. Storia Fis. Astron.**, in stampa.
15. Venezia A. “La logica della Meccanica Quantistica: analisi storico critica”, Tesi di Laurea, Università Federico II, A. A. 2000, Napoli.
16. Wallace Garden *Modern Logic and Quantum Mechanics*, Adam Hilger Ltd, Bristol (1984).