Arch. math. Logik 24 (1984), 101–118

EINE LOGIK VAGER SÄTZE *

Franz von Kutschera

Kit Fine hat in (1975) einen Rahmen für Semantiken vager Sätze entwickelt, in denen nicht nur das Prinzip der Wahrheitsdefinitheit aufgegeben wird – eine solche Semantik wäre schon die partieller Interpretationen –, sondern die möglichen Präzisierungen vager Sätze gewissen Restriktionen unterworfen sind, in denen sich Bedeutungspostulate für sie ausdrücken. In diesem Rahmen hat sich Fine für eine *super-truth-Theorie* entschieden, die dazu führt, daß logische Wahrheit mit klassischer Wahrheit zusammenfällt. Da damit aber trotz Aufgabe des Prinzips der Wahrheitsdefinitheit am *tertium non datur* festgehalten wird, erfordert diese Theorie eine Umdeutung der logischen Operatoren gegenüber dem klassischen Vorgehen, die intuitiv wenig befriedigend ist. Im Rahmen von Fine soll daher hier eine andere Semantik vager Sätze entwickelt und gegen die Argumente Fines verteidigt werden. Ferner soll eine Logik angegeben werden, die bzgl. dieser Semantik vollständig und widerspruchsfrei ist. Dabei zeigt sich, daß diese Logik in ihrem aussagenlogischen Teil mit der *direkten* Logik identisch ist, die in (1969) von einem ganz anderen intuitiven Ansatz her entwickelt wurde. Daher kann die hier angegebene Semantik auch dazu dienen, die intuitive Basis dieser Logik zu erweitern. Auf diesen Punkt will ich im folgenden jedoch nicht näher eingehen.

1. Partielle Interpretationen und D-Interpretationen

Im folgenden sei L eine prädikatenlogische Sprache mit $\neg$, $\wedge$, $\supset$, Λ als logischen Grundoperatoren, Gegenstandskonstanten (kurz GK), Gegenstandsvariablen (kurz GV) und Prädikatkonstanten (kurz PK) jeder Stellenzahl $\geqq 1$. Der Satzbegriff sei wie üblich festgelegt. Die Operatoren $\vee$ und V werden durch $A \vee B := \neg(\neg A \wedge \neg B)$ und $VxA[x] := \neg \Lambda x \neg A[x]$ definiert. $a, b, c, \ldots$ seien Mitteilungszeichen für GK, $x, y, z, \ldots$ für GV, $F, G, H, \ldots$ für PK, und $A, B, C, \ldots$ für Sätze.

Eine klassische oder *totale* Interpretation von L über dem Objektbereich U ist eine Funktion, V, die allen GK von L Objekte aus U zuordnet, allen n-stelligen PK von Teilmengen von U^n, und die allen Sätzen von L Wahrheitswerte aus $\{w, f\}$ so zuordnet, daß gilt: $V(F(a_1, \ldots, a_n)) = w$ gdw. $V(a_1), \ldots, V(a_n) \in V(F)$, $V(\neg A) = w$

* Eingegangen am 21. 9. 1982.

gdw. $V(A)=f$, $V(A \wedge B)=w$ gdw. $V(A)=V(B)=w$ und $V(\Lambda x A[x])=w$ gdw. für alle V' mit $V' \underset{a}{=} V$ gilt $V'(A[a])=w$. Dabei besage $V' \underset{a}{=} V$, daß V' mit V übereinstimmt bis auf höchstens die Werte $V'(a)$ und $V(a)$. In der klassischen Logik kann man wie üblich $\supset$ durch $\neg$ und $\wedge$ definieren.

Partielle Interpretationen, die nicht allen Sätzen von L Wahrheitswerte zuordnen, lassen sich in verschiedener Weise definieren. Zunächst gibt es drei Quellen der Vagheit oder Indeterminiertheit von Sätzen: Die Vagheit von Namen, die Vagheit des Objektbereichs und die Vagheit von Prädikaten. Wie Fine in (1975) bemerkt, lassen sich die beiden ersten Vagheiten auf die letzte reduzieren: Vage Namen lassen sich durch vage Prädikate ersetzen, vage Quantoren durch Quantoren mit einem wohldefinierten Objektbereich, die durch ein vages Prädikat relativiert sind. Es genügt also, solche partielle Interpretationen V zu betrachten, die über einem wohlbestimmten Objektbereich U definiert sind und jeder GK genau ein wohlbestimmtes Element von U zuordnen, für die aber $V(F)$ für jede n-stellige PK F eine Funktion aus $\{w, f\}^{(U^n)}$ zuordnen. Dabei sei $M^{(N)}$ die Menge der Funktionen, welche eine Teilmenge von N in die Menge M abbilden. Wir setzen

$$V^w(F) := \{(u_1, \ldots, u_n) : V(F)(u_1, \ldots, u_n) = w\}$$

und

$$V^f(F) := \{(u_1, \ldots, u_n) : V(F)(u_1, \ldots, u_n) = f\}.$$

Dabei seien die u_i $(i=1, \ldots, n)$ Variable für Objekte aus U.

Es gibt zweitens verschiedene Möglichkeiten partielle Wahrheitsbedingungen für logisch komplexe Sätze festzulegen. Die Auswahl wird sich dabei auf folgende drei Prinzipien stützen, die Fine angegeben hat:

F (*Fidelität*): *Die Wahrheitsbedingungen sollen mit den klassischen dort übereinstimmen, wo diese anwendbar sind.*

Es geht ja nicht darum, den logischen Operatoren eine ganz neue Deutung zu geben.

S (*Stabilität*): *Wahrheitswerte bleiben bei Präzisierungen erhalten.*

Wir schreiben „$V(A)=u$“ für „V ist für A nicht definiert“. „$V(A) \neq u$“ besagt also, daß $V(A)$ definiert, d.h. $=w$ oder $=f$ ist. V' ist eine *Erweiterung* oder Präzisierung von V – symbolisch $V' \geqq V$ –, wenn V und V' Interpretationen über demselben Objektbereich sind, wenn für alle GK a gilt $V'(a)=V(a)$ und für alle PK F $V^w(F) \subset V'^w(F)$ und $V^f(F) \subset V'^f(F)$. S läßt sich dann so formulieren: S′: Ist $V' \geqq V$ und $V(A) \neq u$, so ist $V'(A)=V(A)$.

M (*Maximale Determiniertheit*): *$V(A)$ soll immer dann definiert sein, wenn das nach F und S möglich ist.*

F, S und M zeichnen nun eindeutig den üblichen Begriff einer partiellen Interpretation aus:

D1.1: Eine *partielle Interpretation* von L ist ein Paar $\mathfrak{M} = \langle U, V \rangle$, für das gilt:
1) U ist eine nichtleere Objektmenge.
2) V ist eine Funktion, die jeder GK a von L ein Objekt $V(a) \in U$ zuordnet, jeder n-stelligen PK F von L eine Funktion $V(F) \in \{w, f\}^{(U^n)}$, und die Sätze von L Wahrheitswerte aus $\{w, f\}$ so zuordnet, daß gilt:
   a) $V(F(a_1, \ldots, a_n)) = w$ gdw. $V(a_1), \ldots, V(a_n) \in V^w(F)$
   $V(F(a_1, \ldots, a_n)) = f$ gdw. $V(a_1), \ldots, V(a_n) \in V^f(F)$
   b) $V(\neg A) = w$ gdw. $V(A) = f$
   $V(\neg A) = f$ gdw. $V(A) = w$
   c) $V(A \wedge B) = w$ gdw. $V(A) = V(B) = w$
   $V(A \wedge B) = f$ gdw. $V(A) = f$ oder $V(B) = f$
   d) $V(\Lambda x A[x]) = w$ gdw. für alle V' mit $V' \underset{a}{=} V$ gilt
   $V'(A[a]) = w$
   $V(\Lambda x A[x]) = f$ gdw. es ein V' mit $V' \underset{a}{=} V$ gibt, so daß
   $V'(A[a]) = f$.

Dabei soll die GK a in (2d) nicht in $\Lambda x A[x]$ vorkommen.
Partielle Interpretationen liefern nun keine passende Semantik vager Sätze. Vage Sätze wie „Hans ist groß“ (bei Fehlen genauer Kriterien dafür, bis zu welcher Größe eine Person als „klein“ und von welcher Größe an sie als „groß“ gilt) unterscheiden sich von einfach uninterpretierten wie „Hans ist groß“ dadurch, daß sie nicht einfach bedeutungslos sind, sondern die Festlegungen über ihre Bedeutung nur nicht ausreichen, um ihnen eindeutig einen Wahrheitswert zuordnen zu können. Ihre Bedeutung besteht darin, daß es für sie gewisse Bedeutungspostulate gibt; daß Relationen zwischen ihrem Wahrheitswert und dem anderer Sätze festgelegt sind, aufgrund derer man z. B., ohne die Prädikate „groß“ und „klein“ genauer zu präzisieren, sagen kann, daß die Sätze „Hans ist groß“ und „Hans ist klein“ nicht zugleich wahr sein können. Solche Bedeutungspostulate kann man nach Fine als Restriktionen für Präzisierungen einer Interpretation darstellen: In unserem Fall kann aufgrund des Bedeutungspostulats keine Präzisierung der Prädikate „groß“ und „klein“ zugleich beide Sätze erfüllen, und umgekehrt kann man durch diese Forderung an zulässige Präzisierungen das Bedeutungspostulat darstellen.
Wenn man solche Bedeutungspostulate – Fine spricht von *penumbral connections* – in der Objektsprache darstellen will, so wird man dazu die Implikation verwenden und diese nicht im klassischen Sinn durch $\neg$ und $\wedge$ definieren, sondern als Grundoperator ansehen, der nicht mehr wahrheitsfunktional ist, sondern unter Bezugnahme auf mögliche Präzisierungen ähnlich definiert wird, wie Konditionale in der intensionalen Semantik unter Bezugnahme auf zugängliche mögliche Welten definiert werden.
Das führt zu folgendem Interpretationsbegriff – wir reden von „D-Interpretationen“ im Blick darauf, daß sie die direkte Logik auszeichnen –:

D1.2: Eine *D-Interpretation* von $\boldsymbol{L}$ ist ein Quadrupel $\mathfrak{M} = \langle U, I, S, V \rangle$, für das gilt:
1) U ist ein nichtleerer Objektbereich.
2) I ist eine nichtleere Indexmenge.
3) Für alle $i \in I$ ist S_i eine Teilmenge von I mit
   a) $i \in S_i$
   b) $j \in S_i \wedge k \in S_j \supset k \in S_i$.
4) Für alle $i \in I$ ist V_i eine Funktion mit den Eigenschaften einer partiellen Interpretation von $\boldsymbol{L}$ über U. Ferner soll gelten
   a) $V_i(a) = V_j(a)$ für alle $j \in I$ und alle GK a.
   b) $j \in S_i \supset V_j \geqq V_i$
   c) $V_i(A \supset B) = w$ gdw. für alle $j \in S_i$ mit $V_j(A) = w$ auch $V_j(B) = w$ gilt.
   $V_i(A \supset B) = f$ gdw. $V_i(A) = w$ und $V_i(B) = f$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man fordern, daß es für jede D-Interpretation $\langle U, I, S, V \rangle$ ein $i_0 \in I$ gibt mit $S_{i_0} = I$.
Es gilt dann, wie man durch Induktion nach dem Grad der Sätze A leicht beweist, das Prinzip der Stabilität – hier in der Form:

S1.1: Ist $j \in S_i$ und $V_i(A) \neq u$, so ist $V_j(A) = V_i(A)$ für alle Sätze A von $\boldsymbol{L}$.

Mit S1.1 erkennt man, daß die Bedingung (4c) von D1.2 auch die Prinzipien F und M erfüllen.

D1.3: Eine D-Interpretation $\mathfrak{M} = \langle U, I, S, V \rangle$ *erfüllt* einen Satz A gdw. $V_i(A) = w$ ist für alle $i \in I$. A ist *D-wahr* gdw. alle D-Interpretationen A erfüllen. Ein Schluß von $A_1, \ldots, A_n$ auf B ist *$\mathfrak{M}$-gültig* gdw. für alle $i \in I$ gilt: Ist $V_i(A_1) = \ldots = V_i(A_n) = w$, so ist auch $V_i(B) = w$. Ein Schluß ist *D-gültig* gdw. er $\mathfrak{M}$-gültig ist für alle D-Interpretationen $\mathfrak{M}$.

2. Intuitive Argumente

K. Fine hat sich in (1975) für eine andere Semantik vager Sätze entschieden. Er fordert:

C (*Completabilität*): *Für alle* $i \in I$ *gibt es ein* $j \in S_i$, *so daß* V_j *eine totale Interpretation ist.*

Er setzt dann: $V_i(A) = w$ (bzw. f) gdw. für alle $j \in S_i$, für die V_j eine totale Interpretation ist, gilt $V_j(A) = w$ (bzw. f), und definiert $\supset$ in klassischer Weise. Dann muß man aber die entsprechenden Wahrheitsbedingungen in D1.1 und D1.2 ersetzen durch: $V_i(A \wedge B) = f$ gdw. es für alle $j \in S_i$ ein $k \in S_j$ gibt mit $V_k(A) = f$ oder $V_k(B) = f$.
$V_i(\Lambda x A[x]) = f$ gdw. es für alle $j \in S_i$ ein $k \in S_j$ und ein V' mit $V' \underset{a}{=} V_k$ gibt mit $V'(A[a]) = f$ (a komme wieder in $\Lambda x A[x]$ nicht vor). Ein Satz $A \wedge B$ kann also

falsch sein, selbst wenn sowohl A wie B indeterminiert sind; obgleich sowohl A wie B so präzisiert werden können, daß sie wahr wie falsch werden, gibt es in diesem Fall doch keine Präzisierung, die beide Sätze wahr macht.

Fine gibt zwei Argumente für diese *super-truth*-Theorie an:

1. Sie ist die einzige, die alle Bedeutungspostulate erfaßt. Da die Sätze „Hans ist groß" (A) und „Hans ist klein" (B) nicht zugleich wahr sein können, muß $A \wedge B$ nach Fine falsch sein, und das erfordert die obige Bedingung für $V_i(A \wedge B) = f$.

Fine benutzt hier jedoch das Prinzip „Was nicht wahr sein kann, muß falsch sein, und was nicht falsch sein kann, muß wahr sein", das keineswegs intuitiv überzeugend ist, und das zu einer Deutung der Konjunktion führt, die zwar nicht dem Buchstaben, aber dem Geist des Fidelitätsprinzips widerspricht.[1] Deutlicher wird das noch im Fall der Sätze $C \vee \neg C$, die nach Fine wahr sind, obwohl C (und damit auch $\neg C$) indeterminiert sein kann.

Bei unserem Ansatz hingegen werden Bedeutungspostulate nur durch Implikationen erfaßt. Im obigen Beispiel gilt $A \supset \neg B$ und $B \supset \neg A$, so daß $A \wedge B$ nicht wahr sein kann; daraus folgt aber nicht, daß $A \wedge B$ falsch ist. Und $C \vee \neg C$ kann nie falsch sein; daraus folgt aber nicht, daß dieser Satz wahr ist. Bei der Implikation müssen wir daher von der klassischen Deutung abweichen, aber damit setzen wir uns nicht von der normalen Sprache ab. Denn anders als die Operatoren $\neg$, $\wedge$ und Λ, deren Wahrheitsbedingungen sehr eng den Gebrauchsprinzipien für „nicht", „und" und „alle" in der normalen Sprache entsprechen, gelten die klassischen Wahrheitsbedingungen für $\supset$ nicht für das „wenn–dann" der normalen Sprache. Das wird viel besser durch intensionslogische Konditionale erfaßt, und die in D1.2 erklärte Implikation hat jedenfalls die Grundeigenschaften einer Folgebeziehung, wie sie das „wenn–dann" ausdrückt.

2. Die *super-truth*-Theorie ist die einzige, die den Bedingungen F, C, und S genügt.

C ist jedoch nicht in allen Fällen akzeptabel. Man kann den Satz, der zur Antinomie von Russell führt „Die Klasse aller Klassen, die sich nicht selbst enthalten, enthält sich selbst" als indeterminiert ansehen. Dann ist er aber *wesentlich* indeterminiert: jede Zuordnung eines Wahrheitswerts ergibt einen Widerspruch. Und wenn es in der zugrundegelegten Sprache einen Operator „ist mehrdeutig" gibt (Mehrdeutigkeit läßt sich als Fall von Vagheit im hier diskutierten weiten Sinn dieses Wortes ansehen), so ist der Satz „A ist mehrdeutig" bei allen vollständigen Präzisierungen falsch, sollte also nach Fine auch bei einer Interpretation falsch sein, in welcher A tatsächlich mehrdeutig ist.

Unser Argument für die Semantik der D-Interpretationen anstelle der Fineschen *super-truth*-Theorie ist also: Wir wollen keine Komplettierbarkeit voraussetzen, wir wollen im Fall der natursprachlich fundierten Operatoren $\neg$, $\wedge$ und Λ nahe an der klassischen Deutung bleiben, und wir wollen $\supset$ so deuten, daß dieser

---

[1] Dieses Prinzip wäre im Sequenzenkalkül $\boldsymbol{D}$ von Abschnitt 5 durch die Regeln $\Delta, A \rightarrow \vdash \Delta \rightarrow \sim A$ und $\Delta, \sim A \rightarrow \vdash \Delta \rightarrow A$ wiederzugeben, die $\boldsymbol{D}$ zu einem Kalkül der klassischen Logik erweitern.

Operator die Grundeigenschaften einer Folgebeziehung hat und sich damit Bedeutungsbeziehungen ausdrücken lassen.

3. Die direkte Logik

Die Semantik der D-Interpretationen zeichnet die direkte Logik aus, die in ihrem aussagenlogischen Teil in (1969) angegeben wurde. Sie läßt sich durch folgenden Satzkalkül D^* charakterisieren:

A1: $A \supset (B \supset A)$
A2: $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
A3: $\neg A \supset (A \supset B)$
A4: $A \supset (\neg B \supset \neg (A \supset B))$
A5a: $\neg (A \supset B) \supset A$
b: $\neg (A \supset B) \supset \neg B$
A6: $A \supset \neg\neg A$
A7: $\neg\neg A \supset A$
A8: $A \supset (B \supset A \wedge B)$
A9a: $A \wedge B \supset A$
b: $A \wedge B \supset B$
A10a: $\neg A \supset \neg (A \wedge B)$
b: $\neg B \supset \neg (A \wedge B)$
A11: $(\neg A \supset C) \supset ((\neg B \supset C) \supset (\neg (A \wedge B) \supset C)$
A12: $\Lambda x A[x] \supset A[a]$
A13: $\neg A[a] \supset \neg \Lambda x A[x]$
R1: $A, A \supset B \vdash B$
R2: $A \supset B[a] \vee C \vdash A \supset \Lambda x B[x] \vee C$
R3: $\neg A[a] \supset B \vdash \neg \Lambda x A[x] \supset B$

In R2 und R3 darf die GK a nicht in der Konklusion vorkommen. Für den Vollständigkeitsbeweis beziehen wir uns jedoch auf einen im Sinn von (1969) verallgemeinerten Sequenzenkalkül der direkten Logik, mit dem Unterschied, daß wir hier aus Gründen formaler Einfachheit Sequenzen (kurz SQ) mit mehreren Hinterformeln (kurz HF) zulassen. Als *Formeln* bezeichnen wir die Ausdrücke A und $\sim A$, wo A ein Satz von L ist. Als Mitteilungszeichen für Formeln verwenden wir $S, T, U, \ldots \Delta, \Gamma, \ldots$ seien im folgenden (endliche, evtl. leere) Formelreihen, wobei wir die Formeln durch Kommata trennen. SQ haben die Gestalt $\Delta \rightarrow \Gamma$. Enthält eine Regel mehrere SQ als Prämissen, so trennen wir diese durch ein Semikolon.

Der SQ-Kalkül $\boldsymbol{D}$ der direkten P.L. soll nun folgende Axiome und Regeln enthalten:

RF: $S \rightarrow S$
WS: $A, \sim A \rightarrow$
VT: $\Delta, S, T, \Delta' \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, T, S, \Delta' \rightarrow \Gamma$

HT: $\Delta \rightarrow \Gamma, S, T, \Gamma' \vdash \Delta \rightarrow \Gamma, T, S, \Gamma'$
VV: $\Delta \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, S \rightarrow \Gamma$
HV: $\Delta \rightarrow \Gamma \vdash \Delta \rightarrow S, \Gamma$
VK: $\Delta, S, S \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, S \rightarrow \Gamma$
HK: $\Delta \rightarrow S, S, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow S, \Gamma$
TR: $\Delta \rightarrow S, \Gamma;\ \Delta, S \rightarrow \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \Gamma$

HN1: $\Delta \rightarrow {\sim} A, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$
VN1: $\Delta, {\sim} A \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, \neg A \rightarrow \Gamma$
HK1: $\Delta \rightarrow A, \Gamma;\ \Delta \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow A \wedge B, \Gamma$
VK1: $\Delta, A, B \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \wedge B \rightarrow \Gamma$
HI1: $\Delta, A \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow A \supset B$
VI1: $\Delta \rightarrow A, \Gamma;\ \Delta, B \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \supset B \rightarrow \Gamma$
HA1: $\Delta \rightarrow A[b], \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \Lambda x A[x], \Gamma$
VA1: $\Delta, A[a] \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, \Lambda x A[x] \rightarrow \Gamma$

HN2: $\Delta \rightarrow A, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow {\sim}\neg A, \Gamma$
VN2: $\Delta, A \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, {\sim}\neg A \rightarrow \Gamma$
HK2: $\Delta \rightarrow {\sim} A, {\sim} B, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow {\sim} A \wedge B, \Gamma$
VK2: $\Delta, {\sim} A \rightarrow \Gamma;\ \Delta, {\sim} B \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, {\sim} A \wedge B \rightarrow \Gamma$
HI2: $\Delta \rightarrow A, \Gamma;\ \Delta \rightarrow {\sim} B, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow {\sim} A \supset B, \Gamma$
VI2: $\Delta, A, {\sim} B \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, {\sim} A \supset B \rightarrow \Gamma$
HA2: $\Delta \rightarrow {\sim} A[a], \Gamma \vdash \Delta \rightarrow {\sim} \Lambda x A[x], \Gamma$
VA2: $\Delta, {\sim} A[b] \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, {\sim} \Lambda x A[x] \rightarrow \Gamma$

Dabei dürfen die GK b in HA1 und VA2 nicht in der Konklusion vorkommen.
D ist äquivalent mit ***D****** in dem Sinn, daß in ***D*** eine SQ $\Delta \rightarrow \Gamma$ genau dann beweisbar ist, wenn in ***D****** die Disjunktion der Γ-Formeln ohne Elimination einer GK für die Annahmeformeln aus Δ aus diesen ableitbar ist.[2] Dabei ist zunächst das Zeichen $\sim$ überall in $\Delta \rightarrow \Gamma$ durch $\neg$ zu ersetzen; ist Γ leer, so ist es durch eine Kontradiktion wie $\neg(C \supset C)$ zu ersetzen.
D ohne die *I*-Regeln ist ein Kalkül der Minimallogik, in dem genau jene SQ beweisbar sind, die bei allen partiellen Interpretationen gültig sind.
In ***D*** sind genau jene SQ Theoreme, die bei Ersetzung von $\sim$ durch $\neg$ *D*-gültige Schlüsse darstellen. Daß in ***D*** *nur* solche SQ beweisbar sind, kann man leicht dadurch verifizieren, daß man zeigt, daß die Axiome von ***D*** diese Eigenschaften haben und daß die Regeln von ***D*** sie von den Prämissen auf die Konklusion vererben. Der Vollständigkeitsbeweis stützt sich auf eine Umformung von ***D***, die zu einem mechanischen Beweisverfahren für ***D*** führt.[3] Dazu gehen wir zunächst von ***D*** zu einem äquivalenten Kalkül ***D'*** über, der im Effekt nur semantische Regeln enthält.

[2] Für diese Terminologie vgl. z. B. Kutschera und Breitkopf (1979), S. 98.
[3] Für die direkte Aussagenlogik wird der Vollständigkeitsbeweis in (1983) nach dem üblichen, an Henkin orientierten Verfahren bewiesen.

Für $\boldsymbol{D}$ kann man zunächst nach dem üblichen Verfahren die Eliminierbarkeit der Regel TR beweisen. Ersetzt man ferner RF, WS und HI1 durch die äquivalenten Prinzipien

RF⁺: $\Delta(S) \rightarrow \Gamma(S)$

WS⁺: $\Delta(A, \sim A) \rightarrow$

HI1⁺: $\Delta, A \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$,

so lassen sich auch VV und HV eliminieren. ($\Delta(S_1, \ldots, S_n)$ sei eine Formelreihe die $S_1, \ldots, S_n$ enthält.) Denn wird in einem Beweis die SQ $\Delta, S \rightarrow \Gamma$ durch VV aus der SQ $\Delta \rightarrow \Gamma$ gewonnen, so erhält man daraus einen Beweis für $\Delta, S \rightarrow \Gamma$ ohne diese Anwendung von VV, indem man S als Vorderformel (kurz VF) in $\Delta \rightarrow \Gamma$ und alle darüber stehenden SQ einsetzt. Dabei sind evtl. GK durch andere zu ersetzen, damit die Bedingungen für HA1 und VA2 nicht verletzt werden. Man zeigt aber leicht: Ist eine SQ beweisbar, in deren Formeln die GK a vorkommt, so ist auch jene SQ beweisbar, die daraus entsteht, daß man a überall durch eine andere GK b ersetzt. Im Fall der Regel HV argumentiert man entsprechend, wobei die Verdünnungsformel S nur in jenen SQ über $\Delta \rightarrow S, \Gamma$ als HF einzusetzen ist, die nicht Prämissen von HI1$^+$ sind oder über solchen Prämissen stehen.
Man kann endlich auch auf die Regeln VK und HK verzichten, wenn man die semantischen Regeln (HN1 bis VA2) so umformt, daß die Hauptformel (kurz HPF), d.h. die in der Konklusion neu eingeführte Formel, in die Prämisse(n) eingesetzt wird. Diese Regeln bezeichnen wir als PHN1, PHN2 usf. PHN1 lautet also z.B.: $\Delta \rightarrow \sim A, \neg A, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$, und PHI1$^+$ lautet: $\Delta, A \rightarrow B, A \supset B \vdash \Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$. Diese Regeln erhält man aus den früheren mit VK und HK. Im Fall der Regel PHI1$^+$ ergibt sich der Beweis mit HI1$^+$ so:

$$\begin{array}{cl} \dfrac{\Delta, A \rightarrow B, A \supset B \quad B, A \supset B \rightarrow B}{\Delta, A \rightarrow B} & \begin{array}{l}\mathrm{RF}^+ \\ \mathrm{TR}\end{array} \\ \Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma & \mathrm{HI1}^+ \end{array}$$

Umgekehrt erhält man aus den P-Regeln die früheren Regeln mit VV und HV. Bei Verwendung der P-Regeln sind nun VK und HK eliminierbar. Denn jede beweisbare SQ ist ohne VV und HV beweisbar und neue Formeln werden durch die semantischen P-Regeln nicht eingeführt. In einem Beweis $\mathfrak{B}$ von $\Delta, S, S \rightarrow \Gamma$ stehen also in allen SQ darüber zwei Vorkommnisse von S im Antezedens; streicht man jeweils eins, so bleiben die Axiome in $\mathfrak{B}$ Axiome und die Regelanwendungen bleiben korrekt. Im Fall von HK argumentiert man ebenso, wobei aber die Streichung nur bis zu den Konklusionen von PHI1$^+$ reicht.
Es ist also der SQ-Kalkül – wir nennen ihn $\boldsymbol{D}'$ –, der die Axiome RF$^+$ und WS$^+$ enthält und die Regeln VT, HT und die semantischen Regeln PHN1 bis PVA2 (wobei PHI1 durch PHI1$^+$ ersetzt ist), mit $\boldsymbol{D}$ äquivalent. Für diesen Kalkül – und damit für $\boldsymbol{D}$ – wollen wir nun ein Verfahren zur Konstruktion von Herleitungen angeben, auf das sich der Vollständigkeitsbeweis für $\boldsymbol{D}$ beziehen wird.

Im folgenden berücksichtigen wir Anwendungen der Regeln VT und HT meist nicht, sehen also im Effekt SQ, die auseinander durch Anwendungen dieser Regeln hervorgehen, als gleich an. Das ist unproblematisch, weil diese Gleichheit entscheidbar ist.

4. Ein mechanisches Beweisverfahren für die direkte Logik

Dieses Verfahren besteht in der Konstruktion von Beweisen in $\boldsymbol{D}'$ von unten, d.h. beginnend mit der SQ, deren Beweisbarkeit geprüft werden soll, indem man die Umkehrungen der Regeln von $\boldsymbol{D}'$ anwendet bis man auf SQ der Gestalt RF^+ oder WS^+ stößt. Die Umkehrungen der oben angegebenen P-Regeln bezeichnen wir als UP-Regeln. Es ist also z.B. UPHK1 die Regel $\Delta \rightarrow A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow A, A \wedge B, \Gamma$; $\Delta \rightarrow B, A \wedge B, \Gamma$, und $\mathrm{UPHI1}^+$ ist die Regel $\Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B, A \supset B$. Mit diesen Regeln wird also eine SQ Σ' oder ein SQ-Paar Σ'; Σ'' aus einer SQ Σ abgeleitet. Wir nennen dann Σ' bzw. Σ'; Σ'' *unmittelbare Folge* von Σ.
Wir bezeichnen im folgenden endliche Folgen von durch Semikola getrennten SQ als *SQ-Sätze* (kurz SS). Eine SQ heißt *geschlossen,* wenn sie die Form RF^+ oder WS^+ hat. Ein SS heißt *geschlossen,* wenn alle seine SQ geschlossen sind. Ein SS Θ' heißt *unmittelbare Folge* eines SS Θ, wenn eine SQ oder ein SQ-Paar von Θ' unmittelbare Folge einer SQ von Θ ist und die übrigen SQ von Θ' mit den anderen SQ von Θ übereinstimmen.

D4.1: Eine *Herleitung* aus der SQ Σ ist eine Folge $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ von SS, für die gilt:
a) Θ_1 ist Σ,
b) Θ_{n+1} ist unmittelbare Folge von Θ_n.

Eine Herleitung aus Σ, die mit einem geschlossenen SS endet, läßt sich von unten nach oben als Beweis von Σ in $\boldsymbol{D}'$ lesen. Nennen wir eine Herleitung *geschlossen,* wenn sie einen geschlossenen SS enthält, so gilt also wegen der Äquivalenz von $\boldsymbol{D}'$ mit $\boldsymbol{D}$:

S4.1: Eine SQ Σ ist in $\boldsymbol{D}$ beweisbar gdw. es eine geschlossene Herleitung aus Σ gibt.

Das anzugebende Verfahren zur Konstruktion von Herleitungen besteht nun darin, Herleitungen aus Σ zu bestimmen, die immer dann geschlossen sind, wenn überhaupt eine Herleitung aus Σ geschlossen ist. Im Gegensatz zur Minimallogik oder klassischen Logik gelingt das aber im Fall der direkten Logik nicht allein durch eine geschickte Reihenfolge der Regelanwendungen. Denn ergibt die Herleitung eine SQ $\Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$, so gibt es keine mechanisch anwendbaren Kriterien dafür, ob eine Anwendung von $\mathrm{UPHI1}^+$ geschickter ist oder Anwendungen vonUPHA2 oder UPVA1, die zu Unterformeln $\sim A[a]$ bzw. A[a] führen, die in Γ bzw. Δ noch nicht vorkommen. Wir müssen daher ein Verfahren wählen, bei dem diese Alternativen zugleich verfolgt werden, also mehrere Herleitungen zugleich entwickelt werden.

Ein solches Herleitungssystem stellt sich als ein Baum von SS dar, wobei jeder Ast eine Herleitung aus einer SQ Σ ist. Verzweigungen der Äste ergeben sich durch Anwendungen der folgenden Regel, die UPHI1^{+} ersetzt:

R: $\Delta \rightarrow A_1 \supset B_1, \ldots, A_n \supset B_n, \Gamma \vdash \Delta, A_1 \rightarrow B_1, A_1 \supset B_1; \ldots; \Delta, A_n \rightarrow B_n, A_n \supset B_n; \Delta \rightarrow A_1 \supset B_1, \ldots, A_n \supset B_n, \Gamma.$

Dabei sollen in Γ keine Formeln der Gestalt $C \supset D$ vorkommen. Enthält Δ keine VF der Gestalt $\Lambda x C[x]$ und Γ keine HF der Gestalt $\sim \Lambda x C[x]$, so entfällt die letzte SQ in der Konklusion von R.
Ist Θ ein SS der Gestalt $\Sigma_1; \ldots; \Sigma_m$ $(1 \leqq k \leqq m)$ und hat Σ_k die Gestalt der Prämisse von R, so sind alle SS

$$\Sigma_1; \ldots; \Sigma_{k-1}; \Delta, A_j \rightarrow B_j, A_j \supset B_j; \Sigma_{k+1}; \ldots; \Sigma_m \quad (j=1, \ldots, n)$$

und der SS Θ selbst *unmittelbare Folgen* von Θ. (Wir werden in D4.2 diese Regel weiter spezifizieren, so daß sich Θ als Konklusion von Θ als Prämisse unterscheidet.) Die Konklusion $\Delta \rightarrow A_1 \supset B_1, \ldots, A_n \supset B_n, \Gamma$ bezeichnen wir als *normale* unmittelbare Folge der Prämisse von R, und den SS Θ, der sie enthält, als *normale* unmittelbare Folge des SS Θ, auf den R angewendet wird.

D3.2: Ein *Herleitungssystem* aus einer SQ Σ ist ein Baum aus SS, für den gilt:
1) Σ ist der Ursprung des Baums.
2) SS, die im Baum unmittelbar über einem SS stehen, sind dessen unmittelbare Folgen.
3) Die Anwendungen der *UP*-Regeln (ohne UPHI1^{+}) und R werden bei der Konstruktion des Baumes folgenden Restriktionen und Modifikationen unterworfen:
   a) Auf keine geschlossene SQ wird eine Regel angewendet.
   b) Die HPF werden in der Konklusion unterstrichen. Auf unterstrichene Formelvorkommnisse (kurz FV) werden keine Regeln angewendet.
   c) Es sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Abzählung aller GK von L, wobei man mit jenen GK beginnt, die in Σ vorkommen. Die Regeln UPHA1 und UPVA2 werden so angewendet, daß b (die dabei neu eingeführte GK) die erste GK (in dieser Abzählung) ist, die in der Prämisse nicht vorkommt.
   d) Die Regeln UPHA2 und UPVA1 werden so angewendet, daß a die erste GK ist, für welche die HF $\sim A[a]$ bzw. die VF $A[a]$ nicht in der Prämisse vorkommt.
   e) Die Regel R wird nur dann angewendet, wenn andere Regeln nach (b) nicht mehr anwendbar sind. Dann werden in der normalen Konklusion die Unterstreichungen aller VF der Gestalt $\Lambda x C[x]$ und aller HF der Gestalt $\sim \Lambda x C[x]$ getilgt, und in den übrigen Konklusionen werden die Unterstreichungen aller VF der Gestalt $D \supset E$ getilgt.
   f) Sind nach (b) keine Regeln auf eine offene SQ mehr anwendbar, die VF der Gestalt $\Lambda x A[x]$ oder HF der Gestalt $\sim \Lambda x A[x]$ enthält, so werden die

Unterstreichungen dieser Formeln getilgt. (Dieser Fall kann also nur eintreten, wenn die SQ nur Atomformeln und unterstrichene Formeln enthält.) Diese Regel bezeichnen wir als H.

4) Jeder SS, auf den sich nach (3) noch eine Regel anwenden läßt, hat im Baum einen SS über sich, falls nicht ein anderer Ast des Baums bereits mit einem geschlossenen SS endet.

Ein Herleitungssystem heißt *geschlossen*, wenn es einen Ast enthält, der mit einem geschlossenen SS endet.
Es gilt nun:

S4.2: Ist ein Herleitungssystem aus der SQ Σ geschlossen, so ist Σ in $\boldsymbol{D}$ beweisbar.

Das ergibt sich mit S4.1 einfach daraus, daß jeder Ast eines Herleitungssystems aus Σ, der mit einem geschlossenen SS endet, eine Herleitung aus Σ ist.
Die Konstruktion von Herleitungssystemen stellt nun, wenn man die Äste gleichmäßig entwickelt, ein mechanisches Beweisverfahren dar, d. h. ein Verfahren, mit dem man zu jeder SQ Σ einen Beweis findet, wenn es einen solchen gibt. Der Vollständigkeitsbeweis des nächsten Abschnitts macht von dieser Tatsache zwar keinen Gebrauch, wir wollen sie aber hier dennoch wegen ihres allgemeinen Interesses für die direkte Logik beweisen. Im Blick auf S4.1 und S4.2 ist zu zeigen:

S4.3: Gibt es eine geschlossene Herleitung aus der SQ Σ, so ist jedes Herleitungssystem aus Σ geschlossen.

Wir beweisen zunächst:

a) Jeder Herleitung $\mathfrak{H}$ aus Σ läßt sich eine Herleitung $\mathfrak{H}^+$ so zuordnen, daß gilt

α) $\mathfrak{H}^+$ ist Anfangsstück eines Astes eines Herleitungssystems aus Σ.

β) Ist Θ der End-SS von $\mathfrak{H}$ und Θ^+ jener von $\mathfrak{H}^+$, so gibt es zu jeder SQ Σ^+ von Θ^+ eine SQ Σ' von Θ und eine Abbildung f der in Σ' vorkommenden GK in die Menge jener, die in Σ^+ vorkommen, so daß $f(\Sigma')$ in Σ^+ enthalten ist.

Dabei sei $f(S)$ jene Formel, die aus S entsteht durch Ersetzung jeder GK a in S durch die GK $f(a)$, $f(S_1, \ldots, S_n \rightarrow T_1, \ldots, T_m)$ sei entsprechend $f(S_1), \ldots, f(S_n) \rightarrow f(T_1), \ldots, f(T_n)$. Und Σ'' soll in Σ''' *enthalten* sein – symbolisch $\Sigma'' \subset \Sigma'''$ –, wenn alle VF von Σ'' VF von Σ''' sind und alle HF von Σ'' HF von Σ'''. Statt $f(S)$ schreiben wir auch S^f, statt $f(\Delta) \subset \Delta'$ auch $\Delta \subset_f \Delta'$. Aus (β) folgt: Ist Θ geschlossen, so auch Θ^+. Denn ist Σ' geschlossen, so auch $f(\Sigma')$, also für $\Sigma' \subset_f \Sigma^+$ auch Σ^+. Sind also alle SQ Σ' aus Θ geschlossen, so auch jede SQ Σ^+ aus Θ^+.
Im folgenden sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Abzählung der GK, die wir der Konstruktion von $\mathfrak{H}^+$ zugrundelegen. (Die GK, die in der SQ Σ vorkommen, sind also die ersten in dieser Abzählung.) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach der Länge l von $\mathfrak{H}$. Ist $l = 1$, so ist die Behauptung für $f(a_i) = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ trivial, wo $a_1, \ldots, a_n$ die GK sind, die in Σ vorkommen.
Es sei nun die Behauptung bereits bewiesen für alle Herleitungen der Länge l, und es sei $\mathfrak{H}$ eine Herleitung der Länge $l+1$. Der vorletzte SS von $\mathfrak{H}$ sei $\Theta = \Sigma_1; \ldots; \Sigma_n$ und der letzte SS Θ' von $\mathfrak{H}$ entstehe daraus durch Anwendung einer Regel auf die

SQ Σ_i $(1 \leqq i \leqq n)$ von Θ. Σ_i' bzw. $\Sigma_{i1}'; \Sigma_{i2}'$ sei die Konklusion zu Σ_i. Nach Induktionsvoraussetzung (kurz I.V.) gibt es zu der Herleitung bis Θ eine Herleitung $\mathfrak{H}^+$, die (a) genügt. Ihr letzter SS sei Θ^+ und $\Sigma_{i1}^+, \ldots, \Sigma_{im}^+$ seien die SQ von Θ^+, für die gilt $\Sigma_i \subset_{f_{ij}} \Sigma_{ij}^+$ $(j=1, \ldots, m)$. Wo keine Verwechslungen entstehen, schreiben wir kurz f für f_{ij}.

1) Ist $\Sigma_i = \Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$ und $\Sigma_i' = \Delta, A \rightarrow B, A \supset B$, so haben die Σ_{ij}^+ die Gestalt $\Delta' \rightarrow A^f \supset B^f, \Gamma'$, wo $f(\Delta) \subset \Delta'$ und $f(\Gamma) \subset \Gamma'$. Ist nun $A^f \supset B^f$ in Σ_{ij}^+ unterstrichen, so ist A^f in Δ' und B^f in Γ'. B^f kann nicht durch eine Anwendung von R in $\mathfrak{H}^+$ eliminiert worden sein, da sonst auch $A^f \supset B^f$ eliminiert worden wäre. Dann gilt also $\Sigma_i \subset_f \Sigma_{ij}^+$. Ist $A^f \supset B^f$ in Σ_{ij}^+ nicht unterstrichen, so sind entweder alle anderen nichtatomaren Formeln in Σ_{ij}^+ unterstrichen; dann wenden wir in $\mathfrak{H}^+$ auf Σ_{ij}^+ die Regel R mit der Konklusion $\Sigma_{ij}^{+\prime} = \Delta', A^f \rightarrow B^f, A^f \supset B^f$ an. Es gilt dann $\Sigma_i' \subset_f \Sigma_{ij}^{+\prime}$. Oder es sind nicht alle anderen nichtatomaren Formeln in Σ_{ij}^+ unterstrichen. Dann sind in $\mathfrak{H}^+$ zuerst Regeln darauf anzuwenden. Das ist nach endlich vielen Schritten geschehen, da jede Anwendung einer Regel außer H und R im normalen Ast die Summe der Grade der nichtunterstrichenen Formeln reduziert. Zwischen zwei H-Anwendungen (oder Anwendungen von R im normalen Ast) liegen aber wieder nur endlich viele Schritte. Der SS, den wir so aus Σ_{ij}^+ in $\mathfrak{H}^+$ erhalten, sei $\Sigma_{ij1}^+; \ldots; \Sigma_{ijr}^+$. Jedes Σ_{ijk}^+ $(k=1, \ldots, r)$ hat die Gestalt $\Delta'' \rightarrow A^f \supset B^f, \Gamma''$, wobei $\Delta' \subset \Delta''$ und $\Gamma' \subset \Gamma''$. Denn durch keine Regel außer R werden Formeln eliminiert. Auf alle Σ_{ijk}^+ wenden wir nun in $\mathfrak{H}^+$ R an mit der Konklusion $\Delta'', A^f \rightarrow B^f, \Gamma''$. Es gilt dann $\Sigma_i' \subset_f \Sigma_{ijk}^+$ für alle k. Die von den Σ_{ij}^+ verschiedenen SQ werden unverändert mitgeführt, so daß sich am Ende von $\mathfrak{H}^+$ ein SS Θ'^+ ergibt, der zu Θ in der Relation (β) steht.

2) Ist $\Sigma_i = \Delta, A \supset B \rightarrow \Gamma$, $\Sigma_{i1}' = \Delta, A \supset B \rightarrow A, \Gamma$ und $\Sigma_{i2}' = \Delta, A \supset B, B \rightarrow \Gamma$, so haben die Σ_{ij}^+ die Gestalt $\Delta', A^f \supset B^f \rightarrow \Gamma'$, wo $f(\Delta) \subset \Delta'$ und $f(\Gamma) \subset \Gamma'$. Ist $A^f \supset B^f$ in Σ_{ij}^+ unterstrichen, so ist entweder A^f in Γ' – dann ist $\Sigma_{i1}' \subset_f \Sigma_{ij}^+$ – oder es ist B^f in Δ' – dann ist $\Sigma_{i2}' \subset_f \Sigma_{ij}^+$. A^f kann als HF nicht eliminiert worden sein, denn sonst wäre dabei die Unterstreichung von $A^f \supset B^f$ getilgt worden, also – da $A^f \supset B^f$ unterstrichen ist – darauf nach der letzten Anwendung von R wieder UPVI1 angewendet worden. Ist $A^f \supset B^f$ in Σ_{ij}^+ nicht unterstrichen, so wenden wir darauf die Regel UPVI1 in $\mathfrak{H}^+$ an und erhalten so die SQ $\Sigma_{ij1}^+ = \Delta', A^f \supset B^f \rightarrow A^f, \Gamma'$ und $\Sigma_{ij2}^+ = \Delta', A^f \supset B^f, B^f \rightarrow \Gamma'$. Dann gilt $\Sigma_{i1}' \subset_f \Sigma_{ij1}^+$ und $\Sigma_{i2}' \subset_f \Sigma_{ij2}^+$.

3) Ist $\Sigma_i = \Delta \rightarrow \Lambda x A[x], \Gamma$ und $\Sigma_i' = \Delta \rightarrow A[a], \Lambda x A[x], \Gamma$ (wobei a nicht in der Prämisse vorkommt), so haben die Σ_{ij}^+ die Gestalt $\Delta' \rightarrow \Lambda x A^f[x], \Gamma'$, wo $f(\Delta) \subset \Delta'$ und $f(\Gamma) \subset \Gamma'$. Ist $\Lambda x A^f[x]$ in Σ_{ij}^+ unterstrichen, so steht in Γ' eine Formel $A^f[b]$. Diese Formel kann in $\mathfrak{H}^+$ nicht durch R eliminiert worden sein, denn sonst wäre auch $\Lambda x A^f[x]$ eliminiert worden. Wir erweitern nun die Abbildung f durch die Festsetzung $f(a) = b$, die möglich ist, da a nicht in Σ_i vorkommt. Es gilt dann $\Sigma_i' \subset_f \Sigma_{ij}^+$. Ist $\Lambda x A^f[x]$ in Σ_{ij}^+ nicht unterstrichen, so wenden wir in $\mathfrak{H}^+$ auf Σ_{ij}^+ die Regel UPHA1 an und erhalten eine SQ $\Delta' \rightarrow A^f[b], \Lambda x A[x], \Gamma'$. Wir setzen dann wieder $f(a) = b$.

4) Ist $\Sigma_i = \Delta \rightarrow \sim \Lambda x A[x], \Gamma$, $\Sigma_i' = \Delta \rightarrow \sim A[b], \sim \Lambda x A[x], \Gamma$, so haben die Σ_{ij}^+ die Gestalt $\Delta' \rightarrow \sim \Lambda x A^f[x], \Gamma'$, wo wieder $f(\Delta) \subset \Delta'$ und $f(\Gamma) \subset \Gamma'$ gilt. Ist $\sim \Lambda x A^f[x]$

in Σ_{ij}^+ unterstrichen, so kommen in Γ' Formeln $\sim A^f[a_1], \ldots, \sim A^f[a_k]$ vor. (Wäre eine dieser Formeln bei einer R-Anwendung eliminiert worden, so auch $\sim \Lambda x A \cdot [x]$. Diese Formel wäre also danach in $\mathfrak{H}^+$ wieder als HF eingeführt worden, und nach der Regel über die Anwendung von UPHA2 wären dann die $\sim A[a_1]$, $\sim A[a_2], \ldots$ sukzessive eingeführt worden.) Ist b eine GK, die nicht in Σ_i vorkommt, so erweitern wir f durch die Festlegung $f(b) = a_1$; dann gilt $\Sigma_{i'} \subset_f \Sigma_{ij}^+$. Kommt b schon in Σ_i vor, so ist entweder $f(b) = a_1$ oder...oder $= a_k$ – dann gilt $\Sigma_{i'} \subset_f \Sigma_{ij}^+$ – oder $f(b) = a_s$ für ein $s > k$. Dann wenden wir in $\mathfrak{H}^+$ auf Σ_{ji}^+ solange andere Regeln an – R immer mit der normalen Konklusion – bis wir auf SQ Σ_{ijk}^+ der Gestalt $\Delta'' \rightarrow \sim \Lambda x A[x], \Gamma''$ stoßen, in denen $\sim \Lambda x A[x]$ nicht unterstrichen ist, und auf die wir in $\mathfrak{H}^+$ UPHA2 mit der Konklusion $\Sigma_{jik}^{+\prime} = \Delta'' \rightarrow \sim A[a_s], \sim \underline{\Lambda x A[x]}, \Gamma''$ anwenden dürfen. Da dabei keine Formeln eliminiert werden, gilt für alle diese SQ $\Delta' \subset \Delta''$, $\Gamma \subset \Gamma''$, also $\Sigma_i' \subset_f \Sigma_{ijk}^{+\prime}$. Nach endlich vielen Schritten ergeben sich nach den obigen Überlegungen immer solche Σ_{ijk}^+ für alle j.
In den Fällen, in denen Σ_i' bzw. $\Sigma_{i1}'; \Sigma_{i2}'$ aus Σ_i in $\mathfrak{H}$ durch andere Regeln als UPHI1$^+$, UPVI1, UPHA1 oder UPHA2 entsteht, argumentiert man entsprechend.

Aus (a) folgt nun sofort
(b) Gibt es eine geschlossene Herleitung $\mathfrak{H}$ aus Σ, so auch ein geschlossenes Herleitungssystem $\mathfrak{S}$ aus Σ. Denn der geschlossene Ast $\mathfrak{H}^+$ eines Herleitungssystems aus Σ, den es nach (a) zu $\mathfrak{H}$ gibt, läßt sich zu einem System $\mathfrak{S}$ vervollständigen. Es bleibt also zum Beweis von S4.3 noch zu zeigen:
(c) Gibt es ein geschlossenes Herleitungssystem $\mathfrak{S}$ aus Σ, so ist auch jedes andere Herleitungssystem $\mathfrak{S}^+$ aus Σ geschlossen.
Es sei $\mathfrak{S}$ geschlossen und $\mathfrak{A}$ sei ein geschlossener Ast von $\mathfrak{S}$. $a_1, a_2, \ldots$ sei die Abzählung der GK, die $\mathfrak{S}$ zugrundeliegt, $b_1, b_2, \ldots$ jene von $\mathfrak{S}^+$. Wir setzen voraus, daß die GK, die in Σ vorkommen bei beiden Abzählungen dieselben Nummern erhalten. (Man kann ja das Herleitungsverfahren so festlegen, daß die GK in Σ von links nach rechts die ersten in der jeweils gewohnten Abzählung sein sollen.) Es sei $f(a_i) = b_i$. Ersetzen wir jede SQ Σ' in $\mathfrak{A}$ durch die SQ $f(\Sigma')$, so ist der so entstehende Ast $\mathfrak{A}'$ korrekt im Sinne der Abzählung $b_1, b_2, \ldots$ gebildet, da bei dieser Abbildung die Ordnungsrelationen zwischen den GK erhalten bleiben. Auch $\mathfrak{A}'$ ist geschlossen. Zu $\mathfrak{S}'$ gibt es nun in $\mathfrak{S}^+$ einen Ast $\mathfrak{A}^+$, der sich von $\mathfrak{A}'$ nur dadurch unterscheidet, daß in ihm manche Regeln, die Anwendungen von H und R vorausgehen, in anderer Reihenfolge angewendet werden. Zwei benachbarte Anwendungen solcher Regeln lassen sich aber ohne Änderung des Gesamtergebnisses vertauschen, wie man leicht verifiziert. Ist also $\mathfrak{A}'$ geschlossen, so auch $\mathfrak{A}^+$, und damit $\mathfrak{S}^+$.
Das Beweisverfahren über die Konstruktion eines Herleitungssystems ist im aussagenlogischen Fall ein *Entscheidungsverfahren*, nicht aber im prädikatenlogischen Fall. Denn hat die Konstruktion eines Herleitungssystems $\mathfrak{S}$ aus Σ nach n Schritten noch keinen geschlossenen SS ergeben, so bleibt offen, ob eine weitere Entwicklung von $\mathfrak{S}$ einen solchen SS liefert oder nicht.

Der Beweis des Vollständigkeitssatzes im nächsten Abschnitt stützt sich auf einen Satz über Herleitungssysteme, dem zunächst einige terminologische Festsetzungen vorauszuschicken sind.
Ein *Faden* eines Herleitungssystems $\mathfrak{S}$ ist eine Folge $f=\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ von SQ, für die gilt: Es gibt einen Ast $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$, so daß f aus jedem SS von $\mathfrak{A}$ genau eine SQ enthält und daß Σ_{n+1} $(n \geqq 0)$ unmittelbare Folge von Σ_n oder mit Σ_n identisch ist. Wir reden im folgenden von „Fäden" auch im Sinn *reduzierter Fäden*. Ein reduzierter Faden entsteht aus einem Faden im obigen Sinn, indem gerade soviele SQ herausgestrichen werden, daß keine identischen SQ mehr aufeinander folgen.
Wir teilen die Fäden in *Abschnitte* ein. Die Schnittstellen der Abschnitte eines Fadens f liegen zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden SQ Σ_n und Σ_{n+1} von f, bei denen Σ_{n+1} eine nicht-normale Konklusion von Σ_n nach der Regel R ist. Der erste Abschnitt f^1 von f reicht also von der Anfangs-SQ Σ bis zur Prämisse der ersten Anwendung von R in f mit nicht-normaler Konklusion – falls es eine Anwendung von R auf SQ von f gibt, andernfalls umfaßt f^1 den gesamten Faden f. Und der $(n+1)$-te Abschnitt f^{n+1} von f reicht von der n-ten unmittelbaren nicht-normalen Folge einer SQ von f nach R bis zur Prämisse der $(n+1)$-ten Anwendung von R auf eine SQ von f – gibt es keine solche Anwendung von R, so umfaßt f^{n+1} den gesamten Rest von f.

D4.3: Ein *Fadenbund* eines Herleitungssystems $\mathfrak{S}$ ist eine kleinste, nichtleere Menge $\mathfrak{H}$ von Fäden von $\mathfrak{S}$, für die gilt: Wird die Regel R auf eine SQ Σ eines Fadens f von $\mathfrak{H}$ angewendet und sind $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ die Konklusionen zu Σ – wir nennen den Faden f dann *verzweigt* –, so enthält $\mathfrak{H}$ zu jeder SQ Σ_i $(i=1, \ldots, n)$ einen Faden f_i, der bis Σ mit f übereinstimmt und sich dann mit Σ_i fortsetzt.

Fadenbünde, die nur offene Fäden (d.h. Fäden ohne geschlossene SQ) enthalten, nennen wir *offen*.
Es gilt nun der für den Vollständigkeitsbeweis zentrale Satz:

S4.4: Zu jedem Herleitungssystem $\mathfrak{S}$ aus einer in $\boldsymbol{D}$ nicht beweisbaren SQ Σ gibt es einen offenen Fadenbund $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{S}$.

Beweis: (a) Ist Σ nicht in $\boldsymbol{D}$ beweisbar, so enthält jede Herleitung $\mathfrak{H}$ aus Σ einen offenen Faden, der nur in $\boldsymbol{D}$ nicht beweisbare SQ enthält. Denn da die Umkehrungen der *UP*-Regeln, mit denen Herleitungen konstruiert werden, d.h. die *P*-Regeln, Deduktionsregeln des mit $\boldsymbol{D}$ äquivalenten Kalküls $\boldsymbol{D}'$ sind, wäre sonst jede unter allen beweisbaren SQ der offenen Fäden stehende SQ, insbesondere also Σ selbst, beweisbar. (b) Da das Herleitungssystem $\mathfrak{S}$ aus Σ ein System von Herleitungen aus Σ ist, gibt es nach (a) einen offenen Faden f von $\mathfrak{S}$, der nur unbeweisbare SQ enthält. f soll zu $\mathfrak{H}$ gehören. Ist f unverzweigt, so ist $\{f\}$ ein offener Fadenbund von $\mathfrak{S}$. Verzweigt sich f, wobei Σ'_r die Prämisse und $\Sigma'_{r1}, \ldots, \Sigma'_{rm}$ die Konklusionen der r-ten Anwendung von R auf eine SQ von f sind, so sind mit Σ'_r auch alle Σ'_{ri} $(i=1, \ldots, m)$ wegen PHI1$^+$ unbeweisbar. Es gibt also nach (a) zu jedem i wieder einen Faden f_{ri}, der mit f bis zur SQ Σ'_r übereinstimmt und sich dann mit Σ'_{ri} fortsetzt, offen ist und nur unbeweisbare SQ enthält. Auch die f_{ri} sollen nun für alle r zu $\mathfrak{H}$ gehören. $\mathfrak{H}$ wird dann für die f_{ri} so erweitert wie für f, usf. $\mathfrak{H}$ sei die Menge, die man durch dieses Auswahlverfahren erhält. $\mathfrak{H}$ ist dann ein offener Fadenbund von $\mathfrak{S}$.

Aus S4.4 ergibt sich mit S4.3, daß es zu jedem offenen Herleitungssystem einen offenen Fadenbund gibt. Denn ist ein Herleitungssystem aus Σ offen, so gibt es nach S4.3 keine geschlossene Herleitung aus Σ, nach S4.1 ist Σ dann also unbeweisbar, so daß die Bedingung von S4.4 erfüllt ist.

Zu jedem Faden f eines offenen Fadenbundes $\mathfrak{H}$ und jedem Abschnitt f^n von f, der mit einer SQ Σ endet, die VF der Gestalt $\Lambda x A[x]$ oder HF der Gestalt $\sim\Lambda x A[x]$ enthält, gibt es in $\mathfrak{H}$ nach der Regel R genau einen Faden f', der mit f bis zum Abschnitt f^n inklusive übereinstimmt und für den f'^n den gesamten restlichen Faden f' umfaßt. f' ist jener Faden, der sich nach Σ mit der normalen Konklusion von Σ nach R fortsetzt und im weiteren Verlauf bei allen Verzweigungen mit der normalen Konklusion. (Da beim Übergang von der Prämisse einer R-Anwendung nur normalen Konklusion keine Formeln eliminiert werden, enthält f'^n in allen SQ VF $\Lambda x A[x]$ oder HF $\sim\Lambda x A[x]$.) Wir nennen f'^n die *normale Entsprechung* zu f^n. Im folgenden sei $E(f^n)$ die *normale Entsprechung* zu f^n, falls es eine solche gibt, d.h. falls f^n mit einer SQ endet, die VF $\Lambda x A[x]$ oder HF $\sim\Lambda x A[x]$ enthält; andernfalls sei $E(f^n)=f^n$.

5. Die Vollständigkeit von *D*

Jede SQ $\Delta\rightarrow\Gamma$ stellt einen verallgemeinerten Schluß dar, wenn wir $V_i(\sim A) = V_i(\neg A)$ setzen und festlegen, daß $\Delta\rightarrow S_1,\ldots,S_n$ $\mathfrak{M}$-gültig ist – $\mathfrak{M}$ sei wieder $\langle U, I, S, V\rangle$ –, wenn für alle i gilt: Macht V_i alle Formeln aus Δ wahr, so auch eine der Formeln $S_1,\ldots,S_n$. $\Delta\rightarrow$ soll $\mathfrak{M}$-gültig sein, wenn für kein i V_i alle Formeln aus Δ wahr macht.

Wir haben schon betont, daß ***D*** semantisch widerspruchsfrei ist. Es gilt also

S5.1: In ***D*** sind nur *D*-gültige Schlüsse beweisbar.

D ist nun auch vollständig, d.h.:

S5.2: Jeder *D*-gültige Schluß ist in ***D*** beweisbar.

Beweis: Ist die SQ Σ nicht in ***D*** beweisbar, so gibt es nach S4.2 ein offenes Herleitungssystem $\mathfrak{S}$ aus Σ und nach S4.4 dazu einen offenen Fadenbund $\mathfrak{H}$. Unter Bezugnahme auf $\mathfrak{H}$ wird eine *D*-Interpretation $\mathfrak{M}=\langle U, I, S, V\rangle$ wie folgt definiert:

1) U sei die Menge der natürlichen Zahlen.

2) I sei eine Indexmenge für die Abschnitte der Fäden aus $\mathfrak{H}$. Besagt „$A(i, f, n)$", daß i der Index des n-ten Abschnitts des Fadens f ist, und „$f =_n f'$", daß f und f' bis

zu ihren n-ten Abschnitten inklusive übereinstimmen, so gilt: Aus $A(i, f, m)$ und $A(i, f', m')$ folgt $m = m'$ und $f =_m f'$.
3) S wird mit Hilfe der Relation Q definiert: iQj gelte gdw. es einen Faden f aus $\mathfrak{H}$ und Zahlen m, n gibt, so daß $A(i, f, m)$, $A(j, f, n)$ und $m \leqq n$ ist. Q ist dann totalreflexiv und transitiv. Denn gilt $A(i, f, m)$, $A(j, f, n)$, $A(j, f', m')$, $A(k, f', n')$, $m \leqq n$, $m' \leqq n'$, so gilt nach der 2. und 3. dieser Bedingungen und (2) $n = m'$ und $f =_n f'$. Wegen $m \leqq n$ gilt also auch $f =_m f'$, also $A(i, f', m)$, $A(k, f', n')$ und $m \leqq n'$. Setzen wir also $S_i = \{j \in I : iQj\}$, so gelten die Bedingungen (3a, b) von D1.2.
4) Es sei $I(i)$ die Menge der VF von i und der VF von $E(i)$, und $II(i)$ die Menge der HF von i und der HF von $E(i)$.
Es gilt dann
α1) $I(i) \cap II(i) = \Lambda$.
Denn alle VF von i sind VF von $E(i)$, alle HF von i HF von $E(i)$. Es genügt also zu zeigen, daß es keine Formel gibt, die in $E(i)$ zugleich als VF und als HF vorkommt. In $E(i)$ werden aber keine Formeln eliminiert (HF werden nur beim Übergang von f^n zu f^{n+1} eliminiert, aber nicht in ein und demselben Abschnitt eines Fadens), so daß gilt: Käme S als VF in der j-ten SQ von $E(i)$ vor und in der k-ten SQ von $E(i)$ als HF, so käme S in der SQ mit der Nummer $\max(j, k)$ von $E(i)$ sowohl als VF wie als HF vor; diese SQ und damit die entsprechenden Fäden von $\mathfrak{H}$ wären also geschlossen, im Widerspruch zur Wahl von $\mathfrak{H}$. Ebenso erkennt man:
α2) Gilt $A \in I(i)$, so nicht $\sim A \in I(i)$.
5) Wir definieren nun die Funktion V von $\mathfrak{M}$ so, daß gilt:
a) $V_i(a_n) = n$ für alle GK a_n und $i \in I$. Dabei sei $a_1, a_2, \ldots$ die in der Konstruktion des Herleitungssystems $\mathfrak{S}$ verwendete Abzählung der GK von L.
b) $V_i^w(F) = \{(n_1, \ldots, n_m) : F(a_{n_1}, \ldots, a_{n_m}) \in I(i)\}$
$V_i^f(F) = \{(n_1, \ldots, n_m) \sim F(a_{n_1}, \ldots, a_{n_m}) \in I(i)\}$
für alle $i \in I$ und alle m-stelligen PK F von L.
Es gilt $V_i^w(F) \cap V_i^f(F) = \Lambda$ wegen (α2).
Nach (a) und (b) gilt (im Blick auf D1.2,4 und D1.1,2a):
β1) $V_i(A) = w$ gdw. $A \in I(i)$
$V_i(A) = f$ gdw. $\sim A \in I(i)$, für alle Atomformeln A.
Nach (α1) gilt also auch für alle Atomformeln A und alle $i \in I$
β2) Ist $A \in II(i)$, so ist $V_i(A) \neq w$.
Ist $\sim A \in II(i)$, so ist $V_i(A) \neq f$.
Es gilt ferner für alle Atomformeln A und $i \in I$:
c) Ist $j \in S_i$ und $V_i(A) \neq u$, so ist $V_j(A) = V_i(A)$.
Denn ist $j \in S_i$, also iQj, so gilt $I(i) \subset I(j)$, da VF in $\mathfrak{S}$ nie eliminiert werden. Damit ist die Bedingung D1.2,4b erfüllt. $\mathfrak{M} = \langle U, I, S, V \rangle$ ist also eine D-Bewertung.
Wir zeigen nun durch Induktion nach dem Grad g von A, daß für jeden Satz A von L und alle $i \in I$ gilt:
γ) Ist $A \in I(i)$, so $V_i(A) = w$; ist $\sim A \in I(i)$, so ist $V_i(A) = f$; ist $A \in II(i)$, so ist $V_i(A) \neq w$; ist $\sim A \in II(i)$, so ist $V_i(A) \neq f$.
Diese Behauptung gilt nach (β) für $g = 0$. Für den Induktionsschritt benötigen wir folgende Hilfssätze:

δ) Zu jeder nichtatomaren Formel eines Abschnitts i, die nicht VF der Gestalt $\Lambda x A[x]$ oder HF der Gestalt $\sim \Lambda x A[x]$ oder $A \supset B$ ist, treten in i Nebenformeln auf, nämlich die VF $\sim A$ zur VF $\neg A$, die VF A zur VF $\sim \neg A$, die VF A, B zur VF $A \wedge B$, die VF $\sim A$ oder $\sim B$ zur VF $\sim A \wedge B$, die VF A, $\sim B$ zur VF $\sim A \supset B$, eine VF $\sim A[a]$ zur VF $\sim \Lambda x A[x]$, die VF B oder die HF A zur VF $A \supset B$, die HF $\sim A$ zur HF $\neg A$, die HF A zur HF $\sim \neg A$, die HF A oder B zur HF $A \wedge B$, die HF $\sim A$, $\sim B$ zur HF $\sim A \wedge B$, die HF A oder $\sim B$ zur HF $\sim A \supset B$, eine HF $A[a]$ zur HF $\Lambda x A[x]$.

Denn ist die *HPF* in der ersten SQ Σ' von i bereits unterstrichen, so treten die entsprechenden Nebenformeln schon in Σ' auf. Andernfalls wird auf sie nach D4.2 in i eine *UP*-Regel angewendet. Jeder Anwendung einer Regel zur Konstruktion eines Herleitungssystems auf eine SQ Σ' außer R und H reduziert die Summe der Grade der nicht unterstrichenen FV in Σ'. Nach endlich vielen Schritten sind also nur mehr R oder H anwendbar, und bis dahin sind auf alle nicht unterstrichenen VF und alle jene HF, die nicht die Gestalt $A \supset B$ haben, die entsprechenden *UP*-Regeln angewendet worden.

ε) Zu jeder VF $A \supset B$ von i treten in allen $j \in S_i$ B als VF oder A als HF auf. Das gilt nach (δ) für i, und folgt der Abschnitt j auf i, so wird in der Anfangs-SQ von j nach D4.2,3e die Unterstreichung von $A \supset B$ getilgt, also in j die Regel UPVI1 auf $A \supset B$ angewendet.

ζ) Zu jeder HF $A \supset B$ von i gibt es ein $j \in S_i$ mit A als VF und B als HF. Das ergibt sich aus D3.2,3e und der Regel R.

η) Zu jeder VF der Gestalt $\Lambda x A[x]$ und jeder HF der Gestalt $\sim \Lambda x A[x]$ von i gehören die Formeln $A[a]$ bzw. die Formeln $\sim A[a]$ für alle GK a zu $I(i)$ bzw. $II(i)$.

Gibt es zu i kein j mit $j \in S_i$, so wird in i nicht die Regel R angewendet, also keine HF eliminiert. Nach endlich vielen Schritten wird also jeweils H angewendet, und spätestens vor der $(n+1)$-ten H-Anwendung treten die VF $A[a_n]$ und die HF $\sim A[a_n]$ in i auf. Gibt es zu i ein j mit $j \in S_i$ und treten in i VF $\Lambda x A[x]$ oder HF der Gestalt $\sim \Lambda x A[x]$ auf, so gibt es zu i eine normale Entsprechung $E(i)$, in der keine HF eliminiert werden und nach jeweils endlich vielen Schritten H angewendet wird. Dann ergibt sich die Behauptung wie oben, da auch die VF und HF von $E(i)$ nach (4) Elemente von $I(i)$ bzw. $II(i)$ sind.

Es sei nun die Behauptung (γ) bereits für alle $g \leqq m$ bewiesen. Dann gilt sie auch für $g = m+1$:

Ist $\neg A \in I(i)$, so nach (δ) $\sim A \in I(i)$, also nach I.V. $V_i(A) = f$, also $V_i(\neg A) = w$.
Ist $\sim \neg A \in I(i)$, so nach (δ) $A \in I(i)$, also nach I.V. $V_i(A) = w$, also $V_i(\neg A) = f$.
Ist $\neg A \in II(i)$, so nach (δ) $\sim A \in II(i)$, also nach I.V. $V_i(A) \neq f$, also $V_i(\neg A) \neq w$.
Ist $\sim \neg A \in II(i)$, so nach (δ) $A \in II(i)$, also nach I.V. $V_i(A) \neq w$, also $V_i(\neg A) \neq f$.
Ist $A \wedge B \in I(i)$, so nach (δ) $A, B \in I(i)$, also nach I.V. $V_i(A) = V_i(B) = w$, also $V_i(A \wedge B) = w$.
Ist $\sim A \wedge B \in I(i)$, so nach (δ) $\sim A$ oder $\sim B \in I(i)$, also nach I.V. $V_i(A) = f$ oder $V_i(B) = f$, also $V_i(A \wedge B) = f$.

Ist $A \wedge B \in II(i)$, so nach (δ) A oder $B \in II(i)$, also nach I.V. $V_i(A) \neq w$ oder $V_i(B) \neq w$, also $V_i(A \wedge B) \neq w$.

Ist $\sim A \wedge B \in II(i)$, so nach ($\delta$) $\sim A$, $\sim B \in II(i)$, also nach I.V. $V_i(A) \neq f \neq V_i(B)$, also $V_i(A \wedge B) \neq f$.

Ist $A \supset B \in I(i)$, so nach (ε) für alle $j \in S_i$ $B \in I(j)$ oder $A \in II(j)$, also nach I.V. $V_j(B) = w$ oder $V_j(A) \neq w$, also $V_i(A \supset B) = w$.

Ist $\sim A \supset B \in I(i)$, so nach ($\delta$) A, $\sim B \in I(i)$, also nach I.V. $V_i(A) = w$ und $V_i(B) = f$, also $V_i(A \supset B) = f$.

Ist $A \supset B \in II(i)$, so gibt es nach (ζ) ein $j \in S_i$, so daß $A \in I(j)$ und $B \in II(j)$, nach I.V. gilt also $V_j(A) = w$ und $V_j(B) \neq w$, also $V_i(A \supset B) \neq w$.

Ist $\sim A \supset B \in II(i)$, so nach ($\delta$) $A \in II(i)$ oder $\sim B \in II(i)$, also nach I.V. $V_i(A) \neq w$ oder $V_i(B) \neq f$, also $V_i(A \supset B) \neq f$.

Ist $\Lambda x A[x] \in I(i)$, so gilt nach (η) für alle GK a $A[a] \in I(i)$, nach I.V. also $V_i(A[a]) = w$, also – da alle Objekte aus V nach (1), (5a) Namen haben – $V_i(\Lambda x A[x]) = w$.

Ist $\sim \Lambda x A[x] \in I(i)$, so nach ($\delta$) $\sim A[a] \in I(i)$ für eine GK a, also nach I.V. $V_i(A[a]) = f$, also $V_i(\Lambda x A[x]) = f$.

Ist $\Lambda x A[x] \in II(i)$, so nach (δ) $A[a] \in II(i)$ für eine GK a, also nach I.V. $V_i(A[a]) \neq w$, also $V_i(\Lambda x A[x]) \neq w$.

Ist $\sim \Lambda x A[x] \in II(i)$, so gilt nach ($\eta$) für alle GK a $\sim A[a] \in II(i)$, nach I.V. also $V_i(A[a]) \neq f$, also – da alle Objekte aus V Namen haben – $V_i(\Lambda x A[x]) \neq f$.

Es sei nun i ein Index eines ersten Abschnitts eines Fadens aus $\mathfrak{H}$. Dann sind alle VF jener in ***D*** unbeweisbaren SQ Σ, aus der $\mathfrak{S}$ ein Herleitungssystem ist, in $I(i)$ und alle HF von Σ sind in $II(i)$. Setzen wir wieder $V_i(\sim A) = V_i(\neg A)$, so macht also V_i alle VF, aber keine HF von Σ wahr. Σ stellt also keinen $\mathfrak{M}$-gültigen Schluß, und damit auch keinen D-gültigen Schluß dar. Eine SQ, die einen D-gültigen Schluß darstellt, ist also in ***D*** beweisbar.

LITERATUR

Fine, K.: Vagueness, truth, and logic. Synthese **30** 265–300 (1975).

Kutschera, F.v.: Ein verallgemeinerter Widerlegungsbegriff für Gentzenkalküle. Arch. math. Logik **12** 104–118 (1969).

Kutschera, F.v.: Valuations for direct propositional logic. Erkenntnis **19**, 253–260 (1983).

Kutschera, F.v., Breitkopf, A.: Einführung in die moderne Logik. Freiburg i.B. [4]1979.

Franz von Kutschera
Fakultät für Philosophie,
Sport u. Kunstwissenschaften
Universität Regensburg
Universitätsstraße 31
Postfach
D-8400 Regensburg
Bundesrepublik Deutschland