Franz von Kutschera

Gottlob Frege

Eine Einführung in sein Werk

Walter de Gruyter · Berlin · New York

1989

Gedruckt auf säurefreiem Papier
(alterungsbeständig – pH 7, neutral)

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Kutschera, Franz von:
Gottlob Frege : eine Einführung in sein Werk / Franz von Kutschera. – Berlin ; New York : de Gruyter, 1989
(De-Gruyter-Studienbuch)
ISBN 3-11-012129-8

Satz und Druck: Arthur Collignon GmbH, Berlin
Buchbinder: Lüderitz & Bauer, Berlin

Vorwort

Gottlob Frege gehört zu den Pionieren der modernen Logik, ja er kann als deren eigentlicher Begründer angesehen werden. Sein Werk ist daher zunächst für die Geschichte der Logik von Interesse, darüber hinaus aber auch für die der Philosophie. Denn die Logik ist nicht nur eine philosophische Disziplin, sondern sie hat auch als Organon begrifflicher Analysen in unserem Jahrhundert für die gesamte Philosophie erhebliche Bedeutung gewonnen. Freges Überlegungen zur Philosophie der Mathematik, zur Sprachphilosophie, zum Psychologismus und Idealismus gehen zudem über die Grenzen der formalen Logik hinaus. Seine Ideen haben aber nicht nur historisches Interesse. Sie erweisen sich auch in den gegenwärtigen Diskussionen als fruchtbar und man kann seine Schriften noch heute mit Gewinn lesen. Ich selbst habe durch sie den Zugang zur Logik und Sprachphilosophie gefunden. Angeregt durch Seminare von Wilhelm Britzelmayr haben wir uns als Studenten in einer kleinen Gruppe, zu der auch Jim Bartlett, Hans-Dieter Sluga und Peter Krauss gehörten, intensiv mit Freges Texten befaßt. Mein Interesse an ihm ist durch die Jahre hin lebendig geblieben und ich habe seit dem Wintersemester 1964/65 in München, Kiel und Regensburg mehrfach Vorlesungen und Seminare über seine Schriften gehalten und dabei immer die Erfahrung gemacht, daß sie wegen ihrer vorbildlichen Klarheit und ihres Scharfsinns für die Hörer eine außerordentlich anregende Lektüre waren.

Dieses Buch ist aus diesen Vorlesungen entstanden und wendet sich wiederum primär an Studenten. Sein Ziel ist es, ihnen das Werk Freges zu erschließen und sie zum Studium der Originaltexte anzuregen. Daher habe ich viele, zum Teil auch längere Zitate in den Text aufgenommen. Sie sollen nicht nur meine Aussagen über seine Theorien und Ansichten belegen, sondern den Leser auch mit der Diktion und dem Argumentationsstil Freges vertraut machen und zeigen, mit welcher oft geradezu klassischen Klarheit er seine Gedanken formuliert und wie treffsicher er die Probleme erfaßt und analysiert.

Die Sekundärliteratur zu Frege ist inzwischen fast unübersehbar geworden. Was mich trotzdem zur Veröffentlichung meiner Vorlesung bestimmt hat, ist erstens, daß bisher eine knappe und übersichtliche Einführung fehlt, wie ich sie hier zu geben versuche. Ein zweiter Grund ist mein Unbehagen mit einem erheblichen Teil der Sekundärliteratur. Wie im Fall anderer Autoren ist auch hier eine Art Industrie entstanden, die vielfach nur selbst erzeugte Bedürfnisse befriedigt. In vielen Arbeiten geht es nicht mehr so sehr um Darstellung, Analyse und Kritik von Gedanken Freges, als um die Diskussion von Meinungen anderer Autoren über ihn. Die Werke Freges sind von exemplarischer Klarheit. Es gibt sicher auch bei ihm einige problematische Punkte, aber von ihnen könnte eine so umfangreiche Industrie kaum leben. Ein skrupulöser Forscher, der heute ein Buch über Frege schreiben und dabei die Sekundärliteratur ausführlich behandeln will, wird zu einem Originaltext von 5 Zeilen mit klarem, eindeutigen Sinn etwa 50 Seiten schreiben müssen – Seiten, die zum Verständnis des Textes kaum etwas beitragen. Das Ziel einer Darstellung der Ideen Freges ist daher mit dem einer Auseinandersetzung mit ihren Interpretationen kaum mehr vereinbar. Da ich hier das schlichte Ziel einer Einführung und Hinführung zur Lektüre Freges verfolge, werde ich daher nur gelegentlich auf Arbeiten über ihn hinweisen, und nur auf solche, die fruchtbare Beiträge zur Analyse oder Kritik seiner Gedanken enthalten. Was eine Einführung neben der Darstellung der zentralen Gedanken Freges liefern sollte, sind Erläuterungen oder Präzisierungen, falls sie notwendig erscheinen – was oft nicht der Fall ist –, Hinweise auf die gegenwärtige Behandlung seiner Probleme und auf Lücken oder Fehler in seinen Diskussionen. Die Problematik einiger seiner grundlegenden Voraussetzungen kann im Rahmen dieser Darstellung freilich nur angedeutet werden. Es handelt sich dabei erstens um seinen Realismus bzgl. abstrakter Entitäten wie Propositionen, Begriffe und Klassen, und zweitens um seine realistische Semantik, seine Konzeption der Sprache als Abbild der Realität. In beiden Fällen ließe sich die Problematik nur von alternativen Theorien her zureichend verdeutlichen, aber die sind bisher nicht ausführlich entwickelt worden und eine Diskussion der vorliegenden Ansätze würde den Rahmen dieser Einführung sprengen.

Die Darstellung der Gedanken Freges folgt in diesem Buch in großen Zügen ihrer Entwicklung im Werk Freges. Um eine leichtere Kontrolle der Zitate zu ermöglichen, werden nicht die Seiten der kleineren Originalarbeiten Freges angegeben, sondern jene der „Kleinen Schriften", die I. Angelelli 1967 herausgegeben hat (im folgenden KS). Alle Schriften Freges sind heute in Neuauflagen bzw. in diesem Sammelband leicht zugänglich. Auf häufiger zitierte Arbeiten wird mit Kürzeln wie KS, BS oder GGA verwiesen, die im Literaturverzeichnis erklärt werden. Die Zitate sind in einigen Punkten der heutigen Orthographie angeglichen.

Das Buch setzt beim Leser elementare Logikkenntnisse voraus. Man kann zwar Logik auch aus Freges Schriften lernen, aber einfacher und schneller lernt man sie heute doch aus einem modernen Lehrbuch.

Meinen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern Frau Brigitte Weininger, Frau Ute Klipp, Herrn Dr. Uwe Meixner und Herrn Ulrich Krämer danke ich herzlich für mühevolle Schreibarbeiten, für die Durchsicht des Manuskripts, die Überprüfung der Zitate und die Mithilfe bei den Korrekturen. Dem Verlag Walter de Gruyter gilt mein Dank dafür, daß er das Buch zu einem auch für Studenten erschwinglichen Preis herausbringt.

Franz von Kutschera

Inhalt

1 Das Leben Freges

Gottlob Frege gilt heute zu Recht als die zentrale Figur unter denen, die zur Begründung der modernen Logik beigetragen haben, und es ist auch nicht übertrieben, wenn man ihn oft als den bedeutendsten Logiker nach Aristoteles bezeichnet. Seine Leistungen sind aber erst spät verstanden und anerkannt worden. Zu seinen Lebzeiten galt er weithin als erfolgloser, unbedeutender Hochschullehrer. Er hat nie das Berufsziel der akademischen Laufbahn, eine ordentliche Professur erreicht. In Jena, wo er 44 Jahre lehrte, wurde er nur von Ernst Abbe anerkannt, der ihn freilich mehr als Forscherpersönlichkeit schätzte, als daß er sein Werk hätte beurteilen können. Noch 1908 schreibt der Universitätskurator von Eggeling an die „Durchlauchtigsten Erhalter der Großherzoglich Herzoglich Sächsischen Gesamtuniversität Jena", von einer besonderen Ehrung Freges zu seinem 60. Geburtstag könne abgesehen werden, da seine Lehrtätigkeit von untergeordneter Bedeutung und ohne Vorteil für die Universität sei. Er durfte in seiner Stellung auch keinen Mitarbeiterkreis bilden, so daß er keinen Schüler hatte – R. Carnap und L. Wittgenstein haben nur kurz bei ihm gehört. Sein Werk fand erst ab 1902 eine breitere Anerkennung – E. Husserl war übrigens einer der ersten, der in seiner „Philosophie der Arithmetik" (Bd. I, 1891) anerkennend auf Frege verwies – und selbst dann für längere Zeit vor allem im Ausland (insbesondere durch Bertrand Russell und Philip Jourdain). Die Rezeption seiner Ideen hat sicher dadurch erheblich gelitten, daß sich Frege schon früh in eine sehr vehemente Polemik mit verschiedenen mathematischen Größen seiner Zeit verstrickte. Und 1902, als er endlich erste Anerkennung fand, wurde durch die Entdeckung der Antinomien, mit der die mathematische und logische Grundlagenkrise im ersten Drittel unseres Jahrhunderts ausgelöst wurde, sein Lebenswerk infrage gestellt. Frege selbst sah dadurch einen großen Teil seiner Arbeit als gescheitert an und hat sich von diesem Schlag nicht mehr erholt. Sein Leben hat also durchaus tragische Züge.

Frege wurde am 8. November 1848 in Wismar (Mecklenburg) geboren. Sein Vater, Alexander Frege, war dort Direktor einer höheren Töchterschule. Frege besuchte das Gymnasium in Wismar und legte 1869 seine Reifeprüfung ab. Danach studierte er 2 Jahre in Jena, dann 5 Semester in Göttingen Mathematik, Physik (bei Snell) und Philosophie (bei H. Lotze)[1]. Er promovierte in Göttingen mit der Arbeit „Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene" (1873). Danach ging er nach Jena zurück, wo er sich mit der Arbeit „Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffes gründen" (1874) für das Fach Mathematik habilitierte. In Jena blieb er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1918. 1879 wurde er hier zum a. o. Professor ernannt, 1896 zum ordentlichen Honorarprofessor.

Frege hat nach seiner Habilitation nur mehr einige kleine Arbeiten rein mathematischen Inhalts veröffentlicht und wandte sich schon bald den Grundlagen der Arithmetik zu, der Frage: Was sind Zahlen? Lassen sich Zahlen definieren und lassen sich die Grundgesetze der Arithmetik aus diesen Definitionen mit rein logischen Mitteln beweisen? Gelten also die Aussagen der Arithmetik analytisch oder sind es, wie Kant angenommen hatte, synthetische Aussagen? Damit griff Frege das zentrale Thema seines gesamten Werkes auf. Später schreibt er rückblickend: „Von der Mathematik ging ich aus. In dieser Wissenschaft schien mir die dringlichste Aufgabe in einer besseren Grundlegung zu bestehen. Bald erkannte ich, daß die Zahl nicht ein Haufen, eine Reihe von Dingen ist, auch nicht eine Eigenschaft eines Haufens, sondern daß die Zahlangabe, die auf Grund einer Zählung gemacht wird, eine Aussage von einem Begriffe enthält. Bei solchen Untersuchungen war die logische Unvollkommenheit der Sprache hinderlich. Ich suchte Abhilfe in meiner Begriffsschrift. So kam ich von der Mathematik zur Logik"[2].

Frege ging von dem Gedanken aus, die Arithmetik müsse sich *logisch* begründen lassen. Diese Ansicht war nicht neu. Neu war auch nicht, daß Frege die Logik seiner Zeit als ungenügend zu diesem Unternehmen erkannte – das hatte vor ihm schon Boole gesehen.

[1] Zu den philosophischen Anregungen, die Frege von Lotze und anderen erhalten hat, vgl. Sluga (1980).

[2] N, S. 273 (die Notiz stammt vom 26. 7. 1919); vgl. dazu auch BW, S. 27.

Neu war vielmehr die Logik, die er nun schuf, und die gegenüber ihrem Vorgänger, der Booleschen Logik, wesentlich präziser und leistungsfähiger war. Während, kurz gesagt, Boole nur eine Klassenalgebra formuliert hatte, die der monadischen Prädikatenlogik 1. Stufe entspricht, gab Frege nun ein vollständiges System der Aussagen- und der Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität an und bezog zudem auch die Prädikatenlogik 2. Stufe in seine Betrachtungen ein. Das Ergebnis seiner Bemühung um eine leistungsfähige Logik ist die „Begriffsschrift – eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens" (1879 – im folgenden BS). Dieses erste Hauptwerk Freges genügt bereits, um ihm einen Platz unter den großen Gestalten der modernen Logik zu sichern, denn es enthält ein umfassendes Logiksystem, dargestellt in vorbildlicher Präzision. Das Buch wurde jedoch kaum beachtet. Als einziger Fachmann rezensierte es Ernst Schröder 1881 – er hatte 1877 eine kleine Schrift „Der Operationskreis des Logikkalküls" im Geiste Booles veröffentlicht –, kam aber zu einer recht negativen Bewertung. Insbesondere warf er Frege vor, die vorhandene Literatur (Boole und insbesondere Schröder) nicht berücksichtigt zu haben. Sachlich völlig unzutreffend sind seine Bemerkungen, der Boolesche Kalkül sei stärker. Schon hier findet sich auch eine Ablehnung der Fregeschen Symbolik, die Frege später noch viel zu schaffen machte und die einer weiteren Rezeption seiner Schriften zweifellos hinderlich war. Immerhin war es aber wohl mehr die Fülle der neuen Ideen als die Symbolik, die einem besseren Verständnis seiner Schriften im Wege stand.

Frege sah sich auf diese Besprechung hin veranlaßt, die Grundideen seiner BS und insbesondere auch ihr Verhältnis zur Logik Booles in einigen Aufsätzen näher zu beleuchten. Hierher gehören die im Anhang der Ausgabe der BS von 1964 veröffentlichten Aufsätze, sowie die im Nachlaß (N) veröffentlichten Manuskripte „Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift" und „Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift". Es wirft ein bezeichnendes Licht auf die Schwierigkeiten Freges in diesen Jahren, daß das erstere Manuskript von 4 Zeitschriften abgelehnt wurde, vor allem wohl wegen seiner Länge, seiner vielen Formeln und wegen der ungewohnten Themenstellung. Es lehnten ab (um 1881) F. Klein für die *Mathematischen Annalen,* O. Schlömilch für die *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* R. Avenarius für die *Vierteljahresschrift für* *wissenschaftliche Philosophie* und U. Ulrici für die *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik.*

Schon im Anhang zur BS hatte Frege mit einem Kapitel zur Reihenlehre den Grund gelegt für seine logische Definition der Zahlen. Die logische Begründung der Arithmetik war Freges Hauptziel gewesen. Als Vorbereitung dazu hatte er die BS entwickelt und er ging nun in seinem zweiten Hauptwerk, den „Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl" (1884 – im folgenden GLA), an die Verwirklichung dieses Ziels. Der umfangreichere 1. Teil befaßt sich mit einer Kritik der damals vorliegenden Theorien zur Begründung der Arithmetik. Dabei kritisiert Frege u. a. auch seine Zeitgenossen E. Schröder, H. Hankel, G. Cantor, J. Thomae, R. Lipschitz, O. Schloemilch in teilweise etwas scharfer Form, was ihm sicher nicht viele Freunde gemacht hat. Im 2. Teil skizziert Frege dann seine eigene Definition der natürlichen Zahlen. Das Vorgehen ist dabei unformal; der Beweis einiger Grundgesetze der Arithmetik wird nur angedeutet. Die genaue Ausführung des Programms hat Frege erst im 1. Bd. der „Grundgesetze der Arithmetik" gegeben. In diese Zeit fällt auch eine Arbeit „Über formale Theorien der Arithmetik" (1885, FTA), in der er ebenfalls die Schwierigkeiten einiger arithmetischer Begründungsversuche aufweist.

Es ist interessant zu sehen, daß Freges Versuch einer logischen Begründung der Arithmetik in diesen Jahren nicht vereinzelt dasteht. G. Cantor, der Schöpfer der Mengenlehre, hat von etwa 1874 an, also schon vor Frege, eine rein logische Definition der Kardinalzahlen gegeben. Der Begriff der Anzahl (Mächtigkeit) einer Menge ist bei Cantor der gleiche wie bei Frege. Während Cantor aber keine Theorie der Zahlen begründet hat, in der die Grundgesetze der Arithmetik beweisbar wären, hat 1888 R. Dedekind in „Was sind und was sollen die Zahlen?" (also nach den GLA) die Arithmetik logisch entwickelt. Sein Vorgehen ist dem Freges sehr ähnlich, obwohl er von Freges Arbeiten offenbar keine Kenntnis hatte. Dedekind gab die Beweise für eine ganze Reihe von arithmetischen Theoremen an und ging dabei viel weiter als Frege in seinen GLA. Aber weder Cantor noch Dedekind bauten ihre Theorien im Rahmen eines präzisen Logiksystems auf. Der Mengenbegriff ist bei beiden nicht scharf gefaßt. Wenn man aber von der Logik Freges ausgeht, so macht eine präzise Rekonstruktion dieser Theorien keine Schwierigkeiten.

Frege kannte bei Abfassung seiner GLA die Arbeiten Cantors (er zitiert Cantors „Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre" (1883) auf S. 97ff.) und hebt die Übereinstimmung hervor. Um so bedauerlicher ist es, daß Cantor, der Freges GLA 1885 besprochen hat, dessen Grundgedanken offenbar mißverstand und Freges Leistung nicht gerecht wurde[3].

Man kann also sagen: Cantor hat als erster den Begriff der Anzahl eingeführt. Frege hat zuerst die natürlichen Zahlen im Rahmen eines präzisen Logiksystems definiert, und Dedekind hat zuerst eine detailliertere Entwicklung der Arithmetik angegeben.

Frege wandte sich nun der Ausführung seines Programms zur Begründung der Arithmetik zu, das er in den GLA skizziert hatte. Wie er in der Einleitung zum 1. Bd. der „Grundgesetze der Arithmetik" (1893, GGA) schreibt, waren zwei Gründe ausschlaggebend für die Verzögerung des Vorhabens:

1. „Die Mutlosigkeit, die mich zeitweilig überkam angesichts der kühlen Aufnahme, oder besser gesagt, des Mangels an Aufnahme meiner oben genannten Schriften [BS, GLA] bei den Mathematikern und der Ungunst der wissenschaftlichen Strömungen, gegen die mein Buch zu kämpfen haben wird. Schon der erste Eindruck muß abschrecken: unbekannte Zeichen, seitenlang nur fremdartige Formeln. So habe ich mich denn zu Zeiten andern Gegenständen zugewendet. Aber auf die Dauer konnte ich doch die Ergebnisse meines Denkens, die mir wertvoll schienen, nicht in meinem Pulte verschließen ..." (S. XI. Frege bezieht sich dabei vielleicht auf seine Arbeit zum Trägheitsgesetz (in KS), die zwar kein logisches Thema behandelt, in der er aber doch sehr bald von dem Problem einer adäquaten Formulierung des Trägheitsgesetzes übergeht zu rein logischen Bemerkungen über Begriffe und Definitionen.)
2. „Der Grund, warum die Ausführung so spät nach der Ankündigung erscheint, liegt zum Teil in inneren Umwandlungen der Begriffsschrift, die mich zur Verwerfung einer handschriftlich fast schon vollendeten Arbeit genötigt haben". (S. IX.)

Frege spricht auch von einer „eingreifenden Entwicklung meiner logischen Ansichten" (S. X). Es handelt sich dabei um die Einführung der Wertverläufe und um die Unterscheidung von Sinn und Bedeu-

[3] Vgl. dazu auch Freges Erwiderung von 1885 in KS, S. 112.

tung. Diese neuen Einsichten Freges haben sich in den drei wichtigen Aufsätzen „Funktion und Begriff" (1891, FB), „Über Sinn und Bedeutung" (1892, SB) und „Über Begriff und Gegenstand" (1892, BG) niedergeschlagen.

In gedrängter Form formuliert Frege sein Logiksystem noch einmal im 1. Bd. der GGA. Dies Werk kann man als *das* Hauptwerk Freges ansprechen. Es enthält neben der Logik die Entwicklung der elementaren Arithmetik. Obwohl Frege Dedekinds oben erwähnte Schrift kennt (er zitiert sie in der Einleitung, S. VII f.), geht er doch auf sie nicht weiter ein. Das ist bedauerlich, weil eine Rekonstruktion der Dedekindschen Definitionen in Freges Begriffsschrift ihm einen interessanten Vergleich ermöglicht hätte und der Aufnahme seiner eigenen Ideen sicherlich förderlich gewesen wäre.

Mit dem 1. Bd. der GGA hat Frege den Höhepunkt seines Schaffens erreicht. In den folgenden Jahren bis 1902 arbeitete er seine Arithmetik noch weiter aus – das hat sich im ersten Teil des 2. Bandes der GGA niedergeschlagen – und wandte sich der Grundlegung der Analysis zu. Der erste Teil dieser Grundlegung ist, wie schon in den GLA, destruktiv: er setzt sich mit den damals vorliegenden Theorien der reellen Zahlen auseinander, u. a. auch mit so bedeutenden Leistungen wie Dedekinds Theorie in „Stetigkeit und Irrationale Zahlen" (1872), Cantors „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten" (1879–84) und den Ideen von Karl Weierstrass, die er ab 1872 in Vorlesungen vortrug – leider in einer sehr scharfen Form, die diesen Leistungen keineswegs immer Gerechtigkeit widerfahren läßt. Der zweite, konstruktive Teil, den Frege zu Begründung der reellen Zahlen in GGA II veröffentlicht hat, enthält eine Größenlehre, auf die Frege seine Theorie der Irrationalzahlen aufbauen wollte. Seine Theorie der Irrationalzahlen hat Frege nicht mehr veröffentlicht (es gibt dazu nur ein (auch in N) unveröffentlichtes Manuskript, das lediglich Formeln enthält). Den Grund dafür werden wir unten angeben.

Im übrigen hat sich Frege in diesen Jahren mit Giuseppe Peano auseinandergesetzt, dessen „Notations de logique mathématique" 1894 erschienen waren[4]. Sie enthielten eine Symbolik, die in mancher

[4] Vgl. a. G. Peano: Formulaire de mathématiques, Turin 1895–1908.

Hinsicht der Fregeschen ähnlich ist, über Boole hinausgeht, aber kein geschlossenes Logiksystem, wie Frege es angegeben hatte. Frege ist mit Peano auch in brieflichen Verkehr getreten, der aber wohl keine Verständigung brachte. Weiter setzte er sich auseinander mit E. Schröder, dessen „Vorlesungen über die Algebra der Logik" 1890–1905 veröffentlicht wurden. Sie enthielten ein an Boole und Peirce orientiertes System der Logik, das dem Fregeschen unterlegen, aber doch von größerem unmittelbaren Einfluß war. Endlich publizierte Frege 1899 eine Schrift „Über die Zahlen des Herrn Schubert", in der er in äußerst scharfer und witziger Form einen Enzyklopädie-Artikel von H. Schubert über die Grundlagen der Arithmetik kritisierte. Zur Reihe dieser Polemiken, die Frege sehr geschadet haben, gehört auch die Auseinandersetzung mit J. Thomae 1906–08, die allerdings von Thomae begonnen wurde. Inhaltlich ergiebiger war die Diskussion über D. Hilberts „Grundlagen der Geometrie" (1899) in den Jahren 1899–1906. In Form eines Briefwechsels mit Hilbert begonnen, den dieser freilich schon bald abbrach, setzte sie sich in mehreren Artikeln Freges und einem Vermittlungsversuch von A. Korselt fort. Es ging dabei vor allem um die Analyse impliziter Definitionen. Frege ist dabei zwar der Leistung Hilberts nicht gerecht geworden, hat aber andererseits doch erreicht, daß die Problematik impliziter Definitionen klarer gesehen wurde.

Das Jahr 1902 brachte für Frege die erste folgenreiche Anerkennung. Er trat mit B. Russell und Ph. Jourdain in einen Briefwechsel[5]. Erst jetzt wurde seinen Ideen die rechte Aufnahme, wenn auch noch kein umfassendes Verständnis zuteil. Russell veröffentlichte in seinen „Principles of Mathematics" (1903) einen Anhang über Freges wissenschaftliche Leistungen. Jourdain ging im Rahmen einer Serie von Artikeln über die Entwicklung der mathematischen Logik auch auf Frege ein (vgl. Jourdain (1912)).

1902 wies Russell Frege aber auch auf einen Widerspruch im System der GGA hin. Durch seine außerordentlich gründlichen und scharfsinnigen Untersuchungen schien dieses System so gut gesichert,

[5] Philip E. B. Jourdain (1879–1919) entwickelte eine umfangreiche Publikationstätigkeit auf mathematischem und wissenschaftsgeschichtlichen Gebiet. Er gab das *International Journal of Ethics* und, seit 1912, den *Monist* heraus.

daß es als nur zu berechtigt erscheinen konnte, wenn Frege in seiner Einleitung zum 1. Band dieses Werkes sagte:

„Es ist von vornherein unwahrscheinlich, daß ein solcher Bau sich auf einem unsicheren, fehlerhaften Grund aufführen lassen sollte ... Und nur das würde ich als Widerlegung anerkennen können, wenn jemand durch die Tat zeigte, daß auf anderen Grundüberzeugungen ein besseres, haltbareres Gebäude errichtet werden könnte, oder wenn mir jemand nachwiese, daß meine Grundsätze zu offenbar falschen Folgesätzen führten. Aber das wird keinem gelingen". (S. XXVI.)

Und doch lesen wir schon im Anhang zum 2. Band des gleichen Werkes die Sätze:

„Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als daß ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird. – In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte". (S. 253.)

Dieser Brief Russells an Frege – datiert vom 16. 6. 1902 – enthält die Konstruktion der Antinomie, die als „Russellsche Antinomie" in die Literatur eingegangen ist. Während noch Cantor in Ermangelung eines wirklich exakten und voll formalisierten Systems der Mengenlehre die von ihm schon früher (1895 und 1899) entdeckten Widersprüche als interessante, aber nicht wirklich ernst zu nehmende Erscheinungen ansehen konnte, mußte die Konstruktion einer Antinomie, also eines zugleich beweisbaren und widerlegbaren Satzes, im strengen System Freges unweigerlich die Aufgabe dieses Systems selbst erzwingen. Erst für ihn, der die strengen Anforderungen an formalisierte Systeme selbst entwickelt hatte, bewirkte sie jene tiefe Bestürzung, von der er im Antwortbrief an Russell schreibt.

Nach Bekanntwerden dieser ersten Antinomie wurden dann in rascher Folge eine ganze Reihe weiterer Antinomien konstruiert. Sie machten deutlich, daß die zu den Antinomien führenden Fehler in den Grundvoraussetzungen der Systeme der klassischen Mengenlehre liegen müssen, und bewirkten, daß die Kritik an ihr auf breiter Front einsetzte. Diese Antinomien trafen also nicht Freges System allein, sondern die klassische Mengenlehre insgesamt. Auf sie hatten auch Cantor und Dedekind, ja die gesamte klassische Mathematik ihre Theorien gestellt, und so bewirkten die Antinomien eine tiefgehende Krise der Mathematik. Diese Krise ist insofern bis heute aktuell geblieben, als es mehrere konkurrierende Ansätze zur Vermeidung der Widersprüche gibt.

Der Druck des 2. Bandes der GGA stand vor dem Abschluß. So konnte Frege nur mehr einen Anhang hinzufügen, in dem er auf die Antinomie hinwies und einen Vorschlag zu ihrer Vermeidung vortrug. Dieser Vorschlag ist später von St. Lesniewski (1938) und W. V. Quine (1955) als untauglich erwiesen worden. Aber er war von vornherein nur eine Notlösung unter Zeitdruck, die weder Frege selbst noch seine Zeitgenossen wirklich ernst nahmen. Frege sah sein Lebenswerk in Frage gestellt. Denn wenn die Antinomien auch jene Logik nicht berührte, die er in der BS entwickelt hatte, so blieb doch die Frage, wie man ohne Klassen bzw. Wertverläufe die Arithmetik begründen könne. Die Gedanken der Typentheorie, wie sie zuerst Russell entwickelte, oder einer konstruktiven Theorie der Mengen lagen Freges ganzem Denken fern. So endet Frege sein unveröffentlichtes Manuskript „Über meine wissenschaftlichen Ansichten" (26. 7. 1919) mit den Worten:

„Wie kann man auf einem einwandfreien Wege von jenen [Anzahl-] Begriffen zu den Zahlen der Arithmetik gelangen? Oder gibt es gar keine Zahlen der Arithmetik? Sind die Zahlzeichen etwa unselbständige Teile von Zeichen von jenen Begriffen zweiter Stufe?" (N, S. 277.)[6]

Russell hat verschiedene Wege zur Vermeidung der Antinomien vorgeschlagen, die aber alle Freges Beifall nicht finden konnten, denn es fehlt ihnen die intuitive Plausibilität, die Freges logische Grundanschauungen auszeichnete; von ihnen wollte er nicht abgehen. In den „Principia Mathematica" von A. N. Whitehead und B. Russell (1910–13, PM) wurde eine Begründung der Mathematik auf der Basis der Russellschen Typentheorie vorgelegt – ein großartiges Buch, das zum Standardwerk der nun stürmisch einsetzenden Entwicklung auf dem Gebiet der modernen Logik wurde. Frege hat an dieser Entwicklung nicht mehr teilgenommen. Da das Präzisionsniveau der PM an das seiner GGA nicht heranreichte, hat er sich an vielen kleineren Ungenauigkeiten gestoßen und bekannte in einem Brief an Jourdain vom 28. 1. 1914:

[6] Der Begriff ‚Anzahl einer Menge', bzw. ‚Anzahl eines Begriffs' ist bei Frege ein Begriff 2. Stufe. Vgl. dazu den Abschnitt 4.3.

„Es wird mir sehr schwer, Russells Principia zu lesen; ich stolpere fast über jeden Satz". (BW, S. 129.)

Und nachdem er eine Reihe verwirrender Ungenauigkeiten aufgezeigt hat, resümiert er:

„Mir scheint, daß sich die Schwierigkeiten beim weiteren Eindringen in das Russellsche Werk immer mehr häufen. Ich will daher von der weiteren Beschäftigung mit ihm einstweilen ablassen, bis mir diese Zweifel gelöst sind". (S. 133.)

Frege war nun als Pionier der modernen Logik anerkannt, aber er war auch für jene, die ihn schätzten, schon zu einer historischen Figur geworden, die an den laufenden Diskussionen keinen Anteil mehr hatte. So ist z. B. unbekannt, ob er von E. Zermelos Entwurf einer axiomatischen Mengelehre (1908) überhaupt Notiz nahm – er hätte vermutlich die Beschränkungen des Komprehensionsprinzips als ad-hoc-Lösung abgelehnt. Man las sein Werk nur mehr durch die Brille der PM und sah zunächst nicht, in welchen Punkten er schon weiter gekommen war.

Frege selbst wandte sich in diesen letzten Jahren noch einmal den elementaren Grundlagen seiner Logik zu, wohl um dabei einen Gesichtspunkt für die Beurteilung der Antinomien zu finden – „Wenn ich nur erst den richtigen Gesichtspunkt dafür hätte!" schrieb er an Russell am 22. 6. 1902. So entstehen in dieser Zeit seine letzten Arbeiten, die „Logischen Untersuchungen" (1918 bis 1925, LU), die er nicht mehr vollenden konnte. Nur einmal erwähnt er in einem Brief an Jourdain (vor dem 29. 3. 1913), daß er wieder an der Theorie der reellen Zahlen arbeite, in der er durch Russells Entdeckung unterbrochen worden war. Es gibt dazu aber nur das oben erwähnte unveröffentlichte Fragment. Jourdain und Wittgenstein zeigen sich „bestürzt": Die Theorie der reellen Zahlen sei doch durch die PM bereits erledigt und er hätte für sein System noch immer keine Handhabe gegen die Antinomien (vgl. BW, S. 124 f.).

So bleibt Frege in seinen letzten Jahren mit seinem Problem allein. 1917 läßt er sich beurlauben und geht in seine Heimat zurück. 1918 wird er emeritiert. Er ist am 26. 7. 1925 in Bad Kleinen (südlich von Wismar) gestorben und liegt auf dem alten Friedhof in Wismar begraben.

Erst nach seinem Tode hat man den eigentlichen Frege entdeckt – nicht nur den Frege, wie Russell ihn sah. Man wurde auch auf seine semantischen Untersuchungen aufmerksam – ein Verdienst vor allem von R. Carnaps Buch „Meaning and Necessity“ (1947), der noch selbst bei Frege hörte – sowie auf seine Grundgedanken zur Philosophie von Logik und Mathematik. Ein erhebliches Verdienst daran gebührt H. Scholz, der in Münster den Frege-Nachlaß sammelte.

2 Der Stand der Logik vor 1879

Wir wollen zunächst einige kurze Hinweise auf die Voraussetzungen geben, auf denen Frege mit seiner BS aufbauen konnte. Diese Voraussetzungen sind:

1) Die aristotelische Syllogistik
2) Die Ideen von Leibniz
3) Die Ideen von Bolzano
4) Die Boolesche Klassenalgebra
5) Die Anfänge der Relationenlogik bei de Morgan und Schröder.

1) Syllogistik

Auf die Syllogistik kann hier nicht näher eingegangen werden. Vgl. dazu z. B. die gründliche Darstellung der aristotelischen Theorie in G. Patzig (1959) und die Skizze in Kutschera (1967), 6.1. Es handelt sich dabei, kurz gesagt, um Schlüsse mit zwei Prämissen, in denen nur Aussagen der Form SaP (Alle S sind P), SeP (Kein S ist ein P), SiP (Einige S sind P) und SoP (Einige S sind keine P) vorkommen. Ihre Gültigkeit wird semantisch untersucht und es wird für sie eine axiomatische Theorie angegeben. Da die stoische Aussagenlogik wie die mittelalterlichen logischen Untersuchungen weithin vergessen waren, und das Werk von Leibniz nicht bekannt wurde, blieb diese Logik bis 1847 – bis zum Erscheinen von Booles Werk – *die* formale Logik schlechthin. Noch Kant konnte sagen, daß die Logik „seit dem Aristoteles keinen Schritt rückwärts hat tun dürfen, wenn man ihr nicht etwa die Wegschaffung einiger entbehrlicher Subtilitäten, oder deutlichere Bestimmung des Vorgetragenen als Verbesserungen anrechnen will, welches aber mehr zur Eleganz, als zur Sicherheit der Wissenschaft gehört. Merkwürdig ist noch an ihr, daß sie auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts hat tun können, und also allem Ansehen nach geschlossen und vollendet zu sein scheint". (Vorrede zur „Kritik der reinen Vernunft", B VIII.)

2) Leibniz

Leibniz (1646–1716) gilt als Vorläufer der modernen Logik aufgrund seiner Ideen zur Entwicklung einer Kunstsprache, einer *characteristica (universalis)* und eines strengen Kalküls für logisches Schließen, eines *calculus ratiocinator,* sowie seiner Entwürfe für eine Begriffs- bzw. Klassenalgebra. Seine Gedanken zur Logik stehen im Rahmen seines Programms einer *mathesis universalis,* einer Universalwissenschaft (vgl. dazu den Aufsatz „Leibniz" in Scholz (1961)). Diese sollte erstens aus einer *characteristica universalis* bestehen, einer Kunstsprache, in der sich alle wissenschaftlichen Aussagen formulieren lassen. Sie sollte für alle einfachen Objekte und Begriffe Bezeichnungen enthalten, mit denen man dann alle übrigen Ausdrücke definieren könnte. Der für die moderne Logik wegweisende Gedanke war dabei nicht jener einer universalen Sprache, sondern der, daß die syntaktische Struktur der Sätze die logische der ausgedrückten Gedanken eindeutig widerspiegeln sollte. Leibniz sagt:

> „Ars characteristica est ars ita formandi atque ordinandi characteres, ut referant cogitationes, seu ut eam inter se habeant relationem, quam cogitationes inter se habent".

Der Vorteil einer solchen Kunstsprache bestünde erstens in ihrer Präzision, denn jeder Ausdruck soll genau eine wohlbestimmte Bedeutung haben, und zweitens in der Entlastung des Denkens durch die Möglichkeit eines schematischen Operierens mit Ausdrücken, dessen inhaltliche Adäquatheit durch die Entsprechung von Satzbau und Gedankenstruktur garantiert ist. Da Frege in der BS diese Vorteile ausführlich herausgestellt hat, gehen wir darauf in 3.1 näher ein. Die *Mathesis universalis* sollte zweitens einen *calculus ratiocinator* enthalten, d. h. einen Kalkül, in dem aus Axiomen, welche die Grundbegriffe miteinander verknüpfen, alle wahren Aussagen abgeleitet werden können. Entscheidend ist dabei, daß dieses Beweisverfahren als rein syntaktisches Verfahren verstanden wird. Wie arithmetische Rechenregeln Umformungsregeln für Ausdrücke, z. B. Gleichungen sind, so sollen Schlußregeln syntaktische Umformungsregeln für Sätze sein, bei deren Anwendung man nicht auf den Sinn dieser Sätze reflektieren muß. Das ist natürlich nur auf der Grundlage einer *characteristica* möglich. Leibniz sagt: Ein Beweis

„ne se fait que sur le papier, et par conséquent sur les caractères qui représentent la chose, et non pas sur la chose même. Cette considération est fondamentale en cette matière ...“ (Couturat (1903), S. 155.)

Diese syntaktische Formulierung des Beweisbegriffs hat wiederum den Vorteil der Entlastung des Denkens von inhaltlichen Vollzügen wie jenen einer besseren Kontrollierbarkeit von Beweisen. Der Gedanke eines *calculus ratiocinator* ist bei Leibniz freilich verknüpft mit der Idee eines Entscheidungsverfahrens für alle Sätze, das es für reichere logische Theorien nicht gibt.

Leibniz hat endlich in mehreren Entwürfen auch Logiksysteme entwickelt, die erheblich über die Syllogistik hinausgehen. Lenzen zeigt in (1989), daß diese Logik ebenso stark ist wie die Boolesche Logik, also die monadische Prädikatenlogik. Auf die Entwicklung der Logik haben die Arbeiten von Leibniz aber keinen Einfluß gehabt, da sie zumeist erst später veröffentlicht worden sind.

3) Bolzano

Bernard Bolzano (1781 – 1848) zählt zwar nicht zu den Vorläufern der modernen Logik, bei ihm finden sich aber doch einige Gedanken, die in ihr eine wichtige Rolle spielen. In seiner „Wissenschaftslehre“ (1837) hat Bolzano insbesondere Grundvorstellungen eines logischen Platonismus explizit formuliert, die auch Freges Logik zugrunde liegen (vgl. 10.2). Er hat zudem einige wichtige semantische Begriffe entwickelt, insbesondere den der Folgebeziehung, und damit die der Verträglichkeit und Unverträglichkeit von Sätzen, sowie den Begriff der Allgemeingültigkeit und der Erfüllbarkeit von Begriffen. Auch hat er zum erstenmal explizit die Rolle der Variablen („veränderliche Vorstellungen“) in der Logik genauer charakterisiert. Ideen zur Formalisierung und ein Logiksystem finden sich bei ihm jedoch nicht. Frege scheint seine Arbeiten bei Abfassung der BS nicht gekannt zu haben. Erst F. Brentano und E. Husserl haben die Leistungen Bolzanos gewürdigt. Für die Logik hat man ihn erst in unserem Jahrhundert wiederentdeckt. (Vgl. dazu Bolzano (1963).)

4) Boole

George Boole (1815 – 1864) gilt mit seinem Werk „The Mathematical Analysis of Logic“ (1847) vielfach als der Begründer der modernen Logik; mit ihm beginnt jedenfalls deren Entwicklung.

Boole hat zunächst gefordert, daß logische Theorien nach dem Vorbild der abstrakten Algebra in einer Symbolsprache formuliert werden müßten, die sich – je nach den Anwendungen – als Sprache über verschiedene Gegenstandsbereiche interpretieren läßt:

„They who are acquainted with the present state of the theory of Symbolical Algebra, are aware, that the validity of the processes of analysis does not depend upon the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of their combination. Every system of interpretation which does not affect the truth of the relations supposed, is equally admissible, and it is thus that the same process may, under one scheme of interpretation, represent the solution of a question on the properties of numbers, under another, that of a geometrical problem, and under a third, that of a problem of dynamics or optics. This principle is indeed of fundamental importance ... We might justly assign it as the definitive character of a true Calculus, that it is a method resting upon the employment of Symbols, whose laws of combination are known and general, and whose results admit of a consistent interpretation". (S. 3 f.)

Wie Leibniz fordert Boole eine Logiksprache, bei der, wie bei einer *characteristica,* die Symbolverbindungen gedanklichen Verbindungen entsprechen. Er sieht darin einen entscheidenden Schritt zum Aufbau einer philosophischen Sprache:

„The theory of Logic is thus intimately connected with that of Language. A successful attempt to express logical propositions by symbols, the laws of those combinations should be founded upon the laws of the mental processes which they represent, would, so far, be a step toward a philosophical language". (S. 5.)

Und in einem Aufsatz von 1848 schreibt Boole:

„The view which these enquiries present of the nature of language is a very interesting one. They exhibit it not as a mere collection of signs, but as a system of expressions, the elements of which are subject to the laws of the thought which they represent. That these laws are as rigorously mathematical as the laws which govern the purely quantitative conceptions of space and time, of number and magnitude, is a conclusion which I do not hesitate to submit to the exactest scrutiny".

Boole hat sich ferner für die Lösung der Logik von der Philosophie – er meinte im Effekt vor allem die Metaphysik als „Wissenschaft des wirklich Existierenden" und der letzten „Gründe dessen, was ist", von der er nicht viel hielt – und für ihre Verbindung mit der Mathematik ausgesprochen:

„I am then compelled to assert, that according to this view of the nature of Philosophy, Logic forms no part of it. On the principle of a true classification, we ought no longer to associate Logic and Metaphysics, but Logic and Mathematics". (S. 13.)

Tatsächlich ist die Logik seit Boole vorwiegend zu einer Domäne der Mathematiker geworden.

Boole hat auch gesehen, daß die Syllogistik zur Formalisierung mathematischen Schließens nicht ausreicht. Es war sein Ziel, eine stärkere Logik anzugeben, und seine Hauptleistung besteht darin, daß er in Form seiner Klassenalgebra eine solche stärkere Logik entwickelt hat. Dieser Kalkül läßt sich, kurz gesagt, etwa so rekonstruieren – für eine ausführlichere Darstellung vgl. z. B. Kutschera (1967), 6.2. Die eigentliche Klassenalgebra ist das heute unter dem Namen „Boolesche Algebra" (oder: komplementärer, distributiver Verband) bekannte System: Auf einer Menge M von Klassen sind die beiden zweistelligen Operationen $\cup$ (Vereinigung) und $\cap$ (Durchschnitt) definiert, in M gibt es ein Nullelement Λ (die leere Klasse, mit $x \cup \Lambda = x$ für alle Elemente x von M), ein Einselement V (die Klasse, die alle Elemente von Elementen von M enthält, und für die gilt $x \cap V = x$ für alle x) und zu jedem Element x von M gibt es ein Komplement, d. h. eine Klasse y aus M mit $x \cap y = \Lambda$ und $x \cup y = V$. (Da man zeigen kann, daß es höchstens ein Komplement von x gibt, kann man es als $\bar{x}$ bezeichnen.) Die Eigenschaften der Operationen $\cup$ und $\cap$ werden durch Gesetze (der Kommutativität, Assoziation, Absorption und Distribution) festgelegt. Die Aussagen dieser Algebra sind Identitätsaussagen.

Diesen Kalkül kann man nun auch als Aussagenlogik interpretieren: Man kann jede Gleichung $r = s$ in der Form $r' = V$ schreiben, wobei die Terme V und Λ nicht im Term r' vorkommen (man kann ja V durch $t \cup \bar{t}$, Λ durch $t \cap \bar{t}$ ersetzen und es gilt $r = s$ gdw. $(r \cup \bar{s}) \cap (\bar{r} \cup s) = V$). Ist A_r der Ausdruck, der aus dem Klassenterm r dadurch entsteht, daß man $\cup$ durch $\vee$ (Adjunktion), $\cap$ durch $\wedge$ (Konjunktion) und $^{-}$ durch $\neg$ (Negation) ersetzt und die Klassenkonstanten als Satzkonstanten deutet, so gilt: A_r ist genau dann aussagenlogisch wahr, wenn $r = V$ in der Klassenalgebra beweisbar ist. Es läßt sich also zeigen, daß man auf diese Weise alle Theoreme der Aussagenlogik aus den Grundgesetzen der Klassenalgebra gewinnen kann, und daß auch das Umgekehrte gilt, wenn man noch die Identitätsgesetze hinzunimmt.

Die spezielle Leistung Booles ergibt sich nun aus einer Verbindung von Klassenalgebra und Aussagenlogik: Die elementaren Aussagen dieses Kalküls haben die Gestalt – $r = V$ – wir schreiben dafür kurz $[r]$ –, wo r ein Term der Klassenalgebra ist. Diese Aussagen werden dann mithilfe der aussagenlogischen Operatoren verbunden. Es sei nun $A_r^*[x]$ die Aussageform, die man aus dem Klassenterm r erhält, indem man alle Klassenkonstanten a durch Prädikate a(x) ersetzt, wobei a eine einstellige Prädikatkonstante ist, und statt $\cup, \cap, \bar{}$ wieder schreibt $\vee, \wedge$ und $\neg$. Die Aussage $[r]$ entspricht dann dem Satz $\bigwedge x A_r^*[x]$. Man erhält so einen Ausdruck der Prädikatenlogik mit nur einstelligen Prädikatkonstanten: *der monadischen Prädikatenlogik*. Es läßt sich dann wieder zeigen, daß sich auf diese Weise aus der Klassenalgebra alle Theoreme dieser Prädikatenlogik gewinnen lassen, und daß man aus ihnen umgekehrt auch wieder alle Gesetze der Klassenalgebra erhält. Die Leistung Booles besteht also darin, daß er – zunächst allerdings in einer komplizierten und oft wenig präzisen Form – ein vollständiges System der monadischen Prädikatenlogik formuliert hat.

Die Nachfolger Booles haben später den Booleschen Kalkül von seinen offensichtlichen Mängeln befreit: Stanley Jevons (1835–1882) wandte sich zuerst gegen die zu starke Angleichung der Logik an die Mathematik bei Boole und trat für eine rein logische Definition der mengentheoretischen Operationen und eine rein logische Begründung der mengentheoretischen Axiome ein (vgl. Jevons (1864)). Er ersetzte auch Booles ausschließendes durch das nichtausschließende „Oder". Damit ließen sich die Gesetze von De Morgan in den Kalkül aufnehmen. (Vgl. dazu auch Peirce (1867).) Hugh McColl (1837–1909) hat die reine Aussagenlogik entwickelt (vgl. (1878), sowie (1906)). C. S. Peirce (1839–1914) hat um 1880 alle aussagenlogischen Operatoren durch das „weder-noch" definiert (das Resultat wurde erst 1913 von Sheffer veröffentlicht). Er hat auch 1885 das heute übliche Entscheidungsverfahren für die Aussagenlogik (die Wahrheitswertentwicklung) explizit formuliert und eine allgemeine Definition aussagenlogisch wahrer Sätze angegeben.

5) De Morgan und Schröder

Augustus De Morgan (1806–1878) hat zuerst das Problem der Relationen, d. h. der mehrstelligen Begriffe aufgegriffen. Sein bekanntestes Buch ist „Formal Logic“ (1847). Seine Ideen zur Relationenlogik sind in dem 4. seiner Aufsätze in den *Cambridge Philosophical Transactions* enthalten, die 1846–62 erschienen. Dort studiert er konverse Relationen, Relationsprodukte und verschiedene Beziehungen zwischen ihnen, und diskutiert auch Quantifikationen über Relationen, allerdings unsystematisch und ohne so etwas wie ein Logiksystem anzugeben.

Ernst Schröder (1841–1902) ist mit seinem Buch „Der Operationskreis des Logikkalküls“ (1877) der unmittelbare Vorgänger der BS. Im wesentlichen besteht seine Leistung darin, die von Boole und früheren Nachfolgern hinterlassenen Unklarheiten zu beseitigen, und einige kleine Neuerungen einzuführen. Eigenständig hat er Normalformen entwickelt, die Unabhängigkeit von Axiomen studiert und er hat auch als erster so etwas wie ein typentheoretisches Prinzip formuliert:

„... damit auch in der ursprünglichen Mannigfaltigkeit [dem *universe of discourse*] die Subsumption aufrecht erhalten werden kann, ist von vornherein erforderlich (und hinreichend), daß unter ihren als Individuen gegebenen Elementen sich keine *Klassen* befinden, welche ihrerseits Elemente derselben Mannigfaltigkeit als Individuen unter sich begreifen“. (Schröder (1890–1905), Bd. I, S. 247 f.)

Subsumption und Klassenbegriff werden bei Schröder aber nicht präzise charakterisiert. Das Problem, das seine typenlogische Unterscheidung lösen soll, ergibt sich nur aus einer Verwechslung von ε und $\subset$. Darauf hat Frege in seiner „Kritischen Beleuchtung einer Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik“ (1895) hingewiesen; er hat den typentheoretischen Gedanken weder hier noch später akzeptiert. Schröder versuchte auch, die Boolesche Algebra durch Einbeziehung von Relationen zu erweitern, gab das aber bald auf, denn der Boolesche Rahmen ist dazu nicht geeignet: Die volle Prädikatenlogik ist wesentlich stärker als die monadische.

Was es also vor der BS an Logik gab war kurz zusammengefaßt: die Boolesche Klassenalgebra und erste Ansätze zu einer Relationenlogik.

3 Die Begriffsschrift

3.1 Zielsetzung der BS

Im Vorwort zur BS nennt Frege zunächst sein zentrales Ziel: eine logische Begründung der Arithmetik. Er unterscheidet analytische und empirische Sätze:

„Wir teilen danach alle Wahrheiten, die einer Begründung bedürfen, in zwei Arten, indem der Beweis bei den einen rein logisch vorgehen kann, bei den andern sich auf Erfahrungstatsachen stützen muß" (BS, S. IX.)[1]

und sagt dann:

„Indem ich mir nun die Frage vorlegte, zu welcher dieser beiden Arten die arithmetischen Urteile gehörten, mußte ich zunächst versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind. Der Gang war hierbei dieser, daß ich zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die logische Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten. Damit sich hierbei nicht unbemerkt etwas Anschauliches eindrängen könnte, mußte Alles auf die Lückenlosigkeit der Schlußkette ankommen. Indem ich diese Forderung auf das strengste zu erfüllen trachtete, fand ich ein Hindernis in der Unzulänglichkeit der Sprache, die bei aller entstehenden Schwerfälligkeit des Ausdruckes doch, je verwikkelter die Beziehungen wurden, desto weniger die Genauigkeit erreichen ließ, welche mein Zweck verlangte. Aus diesem Bedürfnisse ging der Gedanke der vorliegenden Begriffsschrift hervor. Sie soll also zunächst dazu dienen, die Bündigkeit einer Schlußkette auf die sicherste Weise zu prüfen und jede Voraussetzung, die sich unbemerkt einschleichen will, anzuzeigen, damit letztere auf ihren Ursprung untersucht werden könne". (BS, S. X.)

[1] Frege scheint hier synthetische Aussagen apriori nicht in Betracht zu ziehen. Seine Unterscheidung in GLA, S. 3f. (vgl. dazu unten 4.1) sind systematisch klarer.

In BSP sagt er dazu:

„Das Bedürfnis nach einer Begriffsschrift machte sich bei mir fühlbar, als ich nach den unbeweisbaren Grundsätzen oder Axiomen fragte, auf denen die ganze Mathematik beruht. Erst nach Beantwortung dieser Frage kann man mit Erfolg den Erkenntnisquellen nachzuspüren hoffen, aus denen diese Wissenschaft schöpft. Wenn diese letzte Frage nun auch mehr der Philosophie angehört, so muß man jene doch als mathematische anerkennen. Die Frage ist schon alt; denn schon Euklid scheint sie sich gestellt zu haben. Wenn sie trotzdem noch nicht genügend beantwortet ist, so ist der Grund in der logischen Unvollkommenheit unserer Sprachen zu sehen. Will man erproben, ob ein Verzeichnis von Axiomen vollständig sei, so muß man versuchen, aus ihnen alle Beweise des Zweiges der Wissenschaft zu führen, um den es sich handelt. Und hierbei muß man genau darauf achten, die Schlüsse nur nach rein logischen Gesetzen zu ziehen; denn sonst würde sich unmerklich etwas einmischen, was als Axiom hätte aufgestellt werden müssen. Der Grund, weshalb die Wortsprachen zu diesem Zwecke wenig geeignet sind, liegt nicht nur in der vorkommenden Vieldeutigkeit der Ausdrücke, sondern vor allem in dem Mangel fester Formen für das Schließen. Wörter wie ‚also', ‚folglich', ‚weil' deuten zwar darauf hin, daß geschlossen wird, sagen aber nichts über das Gesetz, nach dem geschlossen wird, und können ohne Sprachfehler auch gebraucht werden, wo gar kein logisch gerechtfertigter Schluß vorliegt. Bei einer Untersuchung, welche ich hier im Auge habe, kommt es aber nicht nur darauf an, daß man sich von der Wahrheit des Schlußsatzes überzeuge, womit man sich sonst in der Mathematik meistens begnügt; sondern man muß sich auch zum Bewußtsein bringen, wodurch diese Überzeugung gerechtfertigt ist, auf welchen Urgesetzen sie beruht. Dazu sind feste Geleise erforderlich, in denen sich das Schließen bewegen muß, und solche sind in den Wortsprachen nicht ausgebildet". (KS, S. 221.)[2]

Die Begriffsschrift soll also eine logische Kunstsprache sein, in der eine exakte Darstellung logischer Schlüsse möglich ist, und dazu ist eine eindeutige Formulierung der logischen Struktur der Sätze erforderlich. Zu ihrem Verhältnis zur natürlichen Sprache sagt Frege:

„Das Verhältnis meiner Begriffsschrift zu der Sprache des Lebens glaube ich am deutlichsten machen zu können, wenn ich es mit dem des Mikroskops zum Auge vergleiche. Das Letztere hat durch den Umfang seiner Anwendbarkeit, durch die Beweglichkeit, mit der es sich den verschiedensten Umständen anzuschmiegen weiß, eine große Überlegenheit vor dem Mikroskop. Als optischer Apparat betrachtet, zeigt es freilich viele Unvollkommenheiten,

[2] Vgl. dazu auch BBS (in BS, S. 108f.) und GGAI, S. VIff. und S. 1.

die nur in Folge seiner innigen Verbindung mit dem geistigen Leben gewöhnlich unbeachtet bleiben. Sobald aber wissenschaftliche Zwecke große Anforderungen an die Schärfe der Unterscheidung stellen, zeigt sich das Auge als ungenügend. Das Mikroskop hingegen ist gerade solchen Zwecken auf das vollkommenste angepaßt, aber eben dadurch für alle andern unbrauchbar". (BS, S. XI.)[3]

Auf die Leistung der Sprache und der sprachlichen Zeichen im allgemeinen kommt Frege in BBS zu sprechen. Er betont dort, daß wir uns genauere Vorstellungen über die Welt erst mit der Sprache bilden können; Vorstellungen allein sind zu schwankend und von Erinnerung und Wahrnehmung abhängig:

„Wenn wir aber das Zeichen einer Vorstellung hervorbringen, an die wir durch eine Wahrnehmung erinnert werden, so schaffen wir damit einen neuen festen Mittelpunkt, um den sich Vorstellungen sammeln. Von diesen wählen wir wiederum eine aus, um ihr Zeichen hervorzubringen. So dringen wir Schritt für Schritt in die innere Welt unserer Vorstellungen ein und bewegen uns darin nach Belieben, indem wir das Sinnliche selbst benutzen, um uns von seinem Zwange zu befreien. Die Zeichen sind für das Denken von derselben Bedeutung wie für die Schiffahrt die Erfindung, den Wind zu gebrauchen, um gegen den Wind zu segeln. Deshalb verachte niemand die Zeichen! Von ihrer zweckmäßigen Wahl hängt nicht wenig ab. Ihr Wert wird auch dadurch nicht vermindert, daß wir nach langer Übung nicht mehr nötig haben, das Zeichen wirklich hervorzubringen, daß wir nicht mehr laut zu sprechen brauchen, um zu denken; denn in Worten denken wir trotzdem und, wenn nicht in Worten, doch in mathematischen oder andern Zeichen. Wir würden uns ohne Zeichen auch schwerlich zum begrifflichen Denken erheben. Indem wir nämlich verschiedenen aber ähnlichen Dingen dasselbe Zeichen geben, bezeichnen wir eigentlich nicht mehr das einzelne Ding, sondern das ihnen Gemeinsame, den Begriff. Und diesen gewinnen wir erst dadurch, daß wir ihn bezeichnen; denn da er an sich unanschaulich ist, bedarf er eines anschaulichen Vertreters, um uns erscheinen zu können. So erschließt uns das Sinnliche die Welt des Unsinnlichen. Hiermit sind die Verdienste der Zeichen nicht erschöpft. Es mag indessen genügen, ihre Unentbehrlichkeit darzutun. Die Sprache aber erweist sich als mangelhaft, wenn es sich darum handelt, das Denken vor Fehlern zu bewahren. Sie

[3] In BBS vergleicht Frege die natürliche Sprache mit der Hand, die zu den verschiedensten Aufgaben geeignet ist, die Begriffsschrift mit einem Werkzeug, das auf spezielle Zwecke zugeschnitten ist. Vgl. BS, S. 110.

genügt schon der ersten Anforderung nicht, die man in dieser Hinsicht an sie stellen muß, der, eindeutig zu sein". (BS, S. 107 f.)

Frege hat auch auf den Wert der Begriffsschrift als *characteristica,* in der die logischen Strukturen der Sätze eindeutig dargestellt werden, für die *Philosophie* hingewiesen. Er schreibt:

„Wenn es eine Aufgabe der Philosophie ist, die Herrschaft des Wortes über den menschlichen Geist zu brechen, indem sie die Täuschungen aufdeckt, die durch den Sprachgebrauch über die Beziehungen der Begriffe oft fast unvermeidlich entstehen, indem sie den Gedanken von demjenigen befreit, womit ihn allein die Beschaffenheit des sprachlichen Ausdrucksmittels behaftet, so wird meine Begriffsschrift, für diese Zwecke weiter ausgebildet, den Philosophen ein brauchbares Werkzeug werden können". (BS, S. XII f; vgl. a. KS, 370.)

Auch das ist ein klassischer Text. In der analytischen Philosophie wird dann aus Freges „Wenn-so"-Satz ein „Weil"-Satz: Die Herrschaft der Sprache über den Geist zu brechen wird nun zum Hauptanliegen der Philosophie. Dabei sieht man die logische Symbolsprache vielfach als Idealsprache an; Analysen von Sätzen der normalen Sprache sind dann in Form von Übersetzungen in diese Idealsprache anzugeben.

In ZBS weist Frege auf den Unterschied seiner Zielsetzung in der BS gegenüber jener von Boole hin:

„Ich wollte nicht eine abstrakte Logik in Formeln darstellen, sondern einen Inhalt durch geschriebene Zeichen in genauerer und übersichtlicherer Weise zum Ausdruck bringen, als es durch Worte möglich ist. Ich wollte in der Tat nicht einen bloßen *calculus ratiocinator,* sondern eine *lingua characterica* im leibnizischen Sinne schaffen, wobei ich jene schlußfolgernde Rechnung immerhin als einen notwendigen Bestandteil einer Begriffsschrift anerkenne". (BS, S. 97 f.)[4]

Frege unterscheidet also zwei Aufgaben: die Entwicklung einer logischen *characteristica,* einer Begriffsschrift, und die Angabe eines logischen *Kalküls*[5]. Beide hängen so zusammen, daß die *characteristica* eine notwendige Voraussetzung für eine exakte Formulierung

[4] Zu Leibniz vgl. a. BS, S. XI f. und N, S. 9 f.

[5] Die BS soll nach Frege „beides mit gleichem Nachdruck sein", vgl. KS, S. 227.

des Kalküls ist. Dieser Kalkül ist keine Begriffsschrift, aber in der BS enthalten. Zweck der Begriffsschrift war von vornherein die Entwicklung eines logischen Kalküls, und auf ihn hin ist sie angelegt.

Frege wollte in der logischen Sprache mit möglichst wenigen Grundausdrücken auskommen:

„Ich befolgte den Grundsatz, möglichst weniges als ursprünglich einzuführen, nicht aus Scheu vor neuen Zeichen ... sondern weil die Übersicht über den wissenschaftlichen Besitzstand erschwert wird, wenn dasselbe in verschiedenen Verkleidungen auftritt, und das scheint mir der einzig zu billigende Grund zu sein, aus dem man neuen Bezeichnungen widerstreben darf. Dies hindert nicht, daß man für eine oft vorkommende, sehr zusammengesetzte Zeichenverbindung nachträglich eine einfachere einführt. Die von diesen geltenden Sätze stelle man dann aber nicht als ursprünglich hin, sondern leite sie aus der Bedeutung ab. Je mehr Urzeichen eingeführt werden, desto mehr Urgesetze werden auch gefordert. Es ist aber ein allgemeiner Grundsatz der Wissenschaft, deren Zahl möglichst zu verringern. Das Wesen der Erklärung besteht ja gerade darin, daß sie eine große, vielleicht unübersehbare Mannigfaltigkeit durch einen oder wenige Sätze beherrscht". (N, S. 40.)

Frege wollte auch mit möglichst wenigen logischen Grundgesetzen und Schlußregeln auskommen. Zur Axiomatik sagt er:

„Es liegt nahe, die zusammengesetzteren dieser Urteile aus einfacheren abzuleiten, nicht um sie gewisser zu machen, was meistens unnötig wäre, sondern um die Beziehungen der Urteile zu einander hervortreten zu lassen. Es ist offenbar nicht dasselbe, ob man bloß die Gesetze kennt, oder ob man auch weiß, wie die einen durch die andern schon mitgegeben sind. Auf diese Weise gelangt man zu einer kleinen Anzahl von Gesetzen, in welchen, wenn man die in den Regeln enthaltenen hinzunimmt, der Inhalt aller, obschon unentwickelt, eingeschlossen ist. Und auch dies ist ein Nutzen der ableitenden Darstellungsweise, daß sie jenen Kern kennen lehrt. Da man bei der unübersehbaren Menge der aufstellbaren Gesetze nicht alle aufzählen kann, so ist Vollständigkeit nicht anders als durch Aufsuchung derer zu erreichen, die der Kraft nach alle in sich schließen". (BS, S. 25.)

Freges Ziel in der BS ist es also, eine logische Begründung der Arithmetik anzugeben. Dazu benötigt er ein hinreichend leistungsfähiges axiomatisches System der Logik, in dem sich die Begründung vollzieht, und zwar in einer so expliziten und stringenten Weise, daß klar ist, daß nur die angegebenen logischen Axiome und Schlußprinzipien verwendet werden. Dazu wiederum benötigt er eine logische Symbolsprache im Sinn einer *characteristica,* in der sich ein solches Axiomensystem formulieren läßt.

3.2 Die Aussagenlogik

Frege hat in der BS einen Kalkül angegeben, der Aussagenlogik, Prädikatenlogik 1. Stufe mit Identität und Prädikatenlogik 2. Stufe umfaßt. Der Übersichtlichkeit wegen formulieren wir hier diese Systeme getrennt, beginnen also mit der Aussagenlogik (kurz A. L.).

Ein Logiksystem wird heute in drei Schritten aufgebaut: Zunächst wird die Syntax der Sprache angegeben, dann ihre Semantik und endlich das Axiomensystem. Frege hat die *Syntax* seiner BS nicht so exakt aufgebaut, wie das heute üblich ist. Präziser ist ihre Bestimmung im System der GGA, davon wird aber erst später die Rede sein. Es fällt jedoch nicht schwer, präzise syntaktische Regeln für die Logik der BS anzugeben. Da wir Freges Schreibweise im folgenden in die heute übliche übersetzen, ist die Syntax der Rekonstruktionssprache die normale. Frege gibt keine objektsprachlichen Konstanten an, sondern arbeitet mit metasprachlichen Mitteilungszeichen für objektsprachliche Sätze. Er gibt entsprechend auch keine Axiome an, sondern Axiomenschemata und erspart sich so eine Einsetzungsregel[6].

Frege verwendet einen Operator, der in der modernen Logik nicht vorkommt, und in ihr entbehrlich ist. Seine Einführung ergibt sich daraus, daß Frege nur eine syntaktische Kategorie für Namen und Sätze kennt – und analog für Funktionsausdrücke und Prädikate. Später wird das dadurch motiviert, daß Frege Sätze als Namen von Wahrheitswerten auffaßt und die beiden Wahrheitswerte – „das Wahre" und „das Falsche" – als Gegenstände. Da nun die a. l. Operatoren nur für Sätze definiert sind, braucht Frege eine Funktion, die Gegenstände auf Wahrheitswerte abbildet, und er verwendet jene Funktion, die das Wahre auf sich selbst und alle anderen Gegenstände auf das Falsche abbildet. Diese Funktion wird durch den *Inhaltsstrich* oder „den Waagerechten" – ausgedrückt. In der BS fungiert der Operator aber lediglich so, daß hinter ihm nur Sätze stehen dürfen, ein Ausdruck, der einen „beurteilbaren Inhalt" hat,

[6] Zu diesen Begriffen vgl. z. B. Kutschera und Breitkopf (1975), § 5 und 6. Da in der BS eine Einsetzungsregel fehlt, muß man die lateinischen Buchstaben als Mitteilungszeichen, nicht als freie Variable verstehen. Vgl. dazu BS, S. 21.

wie Frege sagt (BS, S. 2)[7]. Es wäre also eine entsprechende syntaktische Regel anzugeben. Der Inhaltsstrich tritt auch in der BS immer in Verbindung mit einem Operator auf (und wird mit ihm verschmolzen), so daß man in der Rekonstruktion (bei einer syntaktischen Unterscheidung von Sätzen und Termen) ganz auf ihn verzichten kann.

Der *Urteilsstrich* | kommt nur in Verbindung mit dem Inhaltsstrich vor, d. h. in der Form ⊢ A. Der Ausdruck besagt, daß der Satz A behauptet wird. Das Zeichen ⊢ steht also in der BS vor Theoremen, und wird in diesem Sinn heute für Beweisbarkeit verwendet. (Für Festsetzungen verwendet Frege das Zeichen ⊩ (BS, S. 56); er würde

[7] Wenn Frege dort auch sagt, der Ausdruck —A (wo A ein Satz ist), bedeute soviel wie „der Umstand, daß A", so wäre das so zu verstehen, daß der Inhaltsstrich ein Operator ist, der aus Sätzen Bezeichnungen für ihren Sinn macht, aber das paßt nicht zu Freges sonstigen Darlegungen – Negationen und Implikationen sind z. B. nicht für Umstände definiert – und da Frege später diese Deutung auch aufgegeben hat, können wir sie hier ignorieren. – P. Aczel macht in (1980), S. 41 den Inhaltsstrich für die Inkonsistenz des Systems der GGA verantwortlich, da damit eine interne (objektsprachliche) Definition von Wahrheit möglich sei, womit sich nach A. Tarski (1933) die semantische Antinomie des Lügners rekonstruieren läßt. Dazu ist zu sagen: Erstens ist der Inhaltsstrich kein Wahrheitsprädikat; angewandt auf Namen für das Wahre ergibt er nicht einen Namen für das Wahre, sondern für das Falsche. (Das hat Aczel vielleicht deswegen übersehen, weil er nur die Ontologie des Systems betrachtet, nicht aber die Objektsprache und ihre Interpretation). Zweitens ergibt sich Aczels Lokalisierung des „Fehlers" bei Frege daraus, daß er andere Voraussetzungen für die Konstruktion der logischen Antinomien, insbesondere die eineindeutige Zuordnung von Objekten (Wertverläufen) zu einstelligen Funktionen 1. Stufe, als „intuitiv korrekt und daher konsistent" ansieht (S. 39). Wenn die Antinomien aber irgendetwas deutlich gemacht haben, dann die Tatsache, daß bloße Intuition im Bereich der Mengenlehre unzuverlässig ist. Es gibt grundsätzlich mehrere mögliche Ansätze zur Vermeidung der Antinomien: die Abschwächung der klassischen Logik, der Existenzprinzipien für Mengen, die Aufgabe der Typenfreiheit der Mengenlehre uws. C. Thiel hat in (1983) im Anschluß an Aczel versucht, die Antinomie des Lügners zu rekonstruieren. Dabei wird aber auf S. 296 ohne Begründung angenommen, die Klasse K, die mithilfe des Begriffes ‚falsch' erklärt ist, lasse sich im System der GGA durch einen Wertverlaufsterm darstellen.

also z. B. statt $A \wedge B := \neg(A \supset \neg B)$ schreiben $\Vdash A \wedge B \equiv \neg(A \supset \neg B)$.) Es ist wie der Urteilsstrich ein *metasprachliches* Zeichen. Frege unterscheidet aber in der BS noch nicht zwischen Objekt- und Metasprache und behandelt beide daher wie objektsprachliche Zeichen[8].
Als a. l. Grundoperatoren verwendet Frege die Zeichen

$\top A$	für $\neg A$,	d. h. für *Negation*, und
$\begin{array}{l} \top B \\ \llcorner A \end{array}$	für $A \supset B$,	d. h. für *Implikation.*[9]

Die Symbolik Freges ist also *zweidimensional.* Das unterscheidet sie von allen sonst üblichen symbolischen Schreibweisen und war sicher ein Grund dafür, daß sie sich nicht durchgesetzt hat. Üblicherweise verwendet man zweidimensionale Darstellungen nur für Beweise und Ableitungen. Freges Schreibweise macht nun zwar die Implikationsstruktur von Sätzen übersichtlicher als die lineare Schreibweise, aber Beweise werden damit als Folgen zweidimensionaler Gebilde unübersichtlicher. Frege hat seine Symbolik so verteidigt:

„Durch die zweifache Ausdehnung der Schreibfläche wird eine Mannigfaltigkeit von Stellungen der Schriftzeichen zueinander möglich, und das kann für die Zwecke des Gedankenausdrucks benutzt werden. Bei einem gewöhnlichen geschriebenen oder gedruckten Texte ist es freilich ganz zufällig, welche Schriftzeichen untereinander zu stehen kommen; dagegen benutzt man bei tabellarischen Zusammenstellungen die zweifache Ausdehnung, um Übersichtlichkeit zu erzielen. In ähnlicher Weise suche ich das in meiner Begriffsschrift zu tun. Indem ich die einzelnen Teilsätze – z. B. Folgesatz und Bedingungssätze – untereinander schreibe und links davon durch eine Verbindung von Strichen die logischen Beziehungen bezeichne, durch die das Ganze zusammengehalten wird, erreiche ich eine durchsichtige Gliederung des Satzes. Ich erwähne dies, weil jetzt Bestrebungen hervortreten, jede Formel in eine Zeile zu pressen. In der Peanoschen Begriffsschrift wird die Einzeiligkeit der Formeln, wie es scheint, grundsätzlich durchgeführt, was

[8] In N, 280 (dem Fragment zum 4. Teil der LU über Allgemeinheit) unterscheidet Frege Darlegungs- (= Meta-) und Hilfs- (= Objekt-) Sprache. Die Unterscheidung von Objekt- und Metasprache wurde erst ab ca. 1930 von A. Tarski systematisch entwickelt.

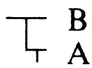
[9] Sie sind so zu lesen, daß die waagerechten Striche zugleich als Inhaltsstriche fungieren, so daß als Argumente nur Sätze infrage kommen.

mir wie ein mutwilliger Verzicht auf einen Hauptvorzug des Geschriebenen vor dem Gesprochenen vorkommt. Die Bequemlichkeit des Setzers ist denn doch der Güter höchstes nicht. Aus physiologischen Gründen ist eine lange Zeile schwerer zu übersehen und ihre Gliederung schwerer aufzufassen als kürzere untereinander stehende Zeilen, die aus der Brechung jener enstanden sind, falls diese Teilung der Gliederung des Sinnes entspricht". (KS, S. 222 (= BSP).)[10]

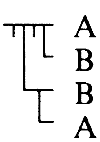
Das System der Operatoren $\{\neg, \supset\}$ ist *vollständig* in dem Sinn, daß sich alle a. l. Operatoren damit definieren lassen[11]. Dieser Gedanke der Vollständigkeit findet sich in der BS noch nicht, sondern erst in den LU (vgl. dazu unten). Einen Beweis der Vollständigkeit seines Operatorensystems hat Frege aber nicht angegeben. Auch der Begriff der Wahrheitswertfunktion und damit die Abgrenzung a. l. Operatoren wird erst später formuliert[12].

Frege definiert andere a. l. Operatoren wie üblich – er führt dafür allerdings keine eigenen Abkürzungen ein:

Konjunktion:  $A \wedge B := \neg(A \supset \neg B)$ (BS, S. 12)

Adjunktion:  $A \vee B := \neg A \supset B$ (BS, S. 10f.)

Die *Äquivalenz* läßt sich erklären durch

 $A \equiv B := (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Frege verwendet das Zeichen $\equiv$ in der BS sowohl für Identität wie für Äquivalenz. Das hängt wieder damit zusammen, daß er mit einer einzigen syntaktischen Kategorie für Sätze und Terme arbeitet. In der A. L. ist das Zeichen $\equiv$ als Grundzeichen entbehrlich. Daher diskutieren wir es und die Axiome, die Frege dafür angibt, erst unten im Zusammenhang mit seiner Logik der Identität.

Die *Semantik* der a. l. Operatoren legt Frege so fest, wie das heute üblich ist: Er betrachtet im Falle der Implikation $A \supset B$ die vier

[10] Vgl. dazu auch BS, S. 103f. (= ZBS) und 111 (= BBS).
[11] Vgl. dazu z. B. Kutschera und Breitkopf (1975), 3.4.
[12] Vgl. dazu KS, S. 136f. und 394.

Fälle, daß A und B beide wahr sind, daß A wahr und B falsch ist, daß A falsch und B wahr ist, und daß A und B beide falsch sind, und sagt, die Implikation $A \supset B$ solle im 2. Fall falsch, in den anderen Fällen hingegen wahr sein (BS, S. 5; vgl. a. BW, S. 104). Das Prinzip der Wahrheitsdefinitheit, nach dem jeder Aussagesatz entweder wahr oder falsch ist, wird dabei vorausgesetzt (vgl. KS, S. 344). Zur Negation sagt Frege hingegen nur, $\neg A$ bedeute, daß A nicht stattfinde (BS, S. 10). Es ist jedoch klar, daß sich daraus die Festlegung ergibt, daß $\neg A$ genau dann wahr ist, wenn A falsch ist. Es fehlt aber der für die Semantik zentrale Begriff der Bewertung oder Interpretation sowie jener des a. l. wahren Satzes und des a. l. gültigen Schlusses. Frege rechtfertigt jedoch z. B. den Schluß von A und $A \supset B$ auf B so, daß er sagt: Sind beide Prämissen wahr, so muß nach der Deutung von $A \supset B$ mit A auch B wahr sein, setzt also den Begriff des gültigen Schlusses voraus (BS, S. 7 f.). Ebenso rechtfertigt er die a. l. Wahrheit seiner Axiome so wie wir das heute tun, d. h. so, daß sie für beliebige Verteilungen von Wahrheitswerten auf die einfachen Sätze wahr werden (vgl. z. B. BS, S. 26).

Freges *Kalkül* der A. L. sieht so aus

Axiome:

A1) $A \supset (B \supset A)$ (BS, S. 26)

A2) $(C \supset (B \supset A)) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset A))$ (BS, S. 26)

A3) $(D \supset (B \supset A)) \supset (B \supset (D \supset A))$ (BS, S. 35)

A4) $(B \supset A) \supset (\neg A \supset \neg B)$ (BS, S. 43)

A5) $\neg\neg A \supset A$ (BS, S. 44)

A6) $A \supset \neg\neg A$ (BS, S. 47)[13]

Ableitungsregel

R1: $A \supset B, A \vdash B$ (BS, S. 8)

Frege beweist die *Widerspruchsfreiheit* seines Kalküls – d. h. den Satz, daß im Kalkül nur (a. l.) wahre Sätze beweisbar sind – so, daß er die (a. l.) Wahrheit der Axiome aufgrund der semantischen Festlegungen nachweist und zeigt, daß R1 aus wahren Sätzen nur

[13] In der Einleitung zur BS weist Frege darauf hin, daß sich A5, A6 in das Axiom $A \equiv \neg\neg A$ zusammenfassen lassen (BS, S. XIV).

wahre Sätze erzeugt (also auch: aus a. l. wahren Sätzen nur a. l. wahre Sätze).

Die *Vollständigkeit* seines Kalküls – d. h. den Satz, daß im Kalkül alle (a. l.) wahren Sätze beweisbar sind – hat Frege nicht bewiesen; das hat zuerst Post 1921 getan. Dazu fehlte Frege auch der Begriff der a. l. Wahrheit. Er sagt, er habe mit seiner BS den Nachweis führen wollen,

> „daß ich mit meinen Urgesetzen überall auskomme. Hier konnte freilich nur eine Wahrscheinlichkeit dadurch erreicht werden, daß ich in vielen Fällen damit auskam. Es war aber nicht gleichgültig, an welchem Beispiele ich das zeigte. Um nicht vielleicht grade die für den wissenschaftlichen Gebrauch wertvollen Umformungen zu übersehen, wählte ich die zusammenhängende Ableitung eines Satzes, der mir für die Arithmetik unentbehrlich zu sein scheint, obwohl er als selbstverständlich wenig beachtet wird". (N, S. 42.)

Frege macht also nur plausibel, daß man in der Arithmetik tatsächlich mit den angegebenen Gesetzen auskommt. Die Methoden für Vollständigkeitsbeweise sind auch erst viel später eingeführt worden, von Post für die A. L. in (1921), von Gödel für die elementare Prädikatenlogik in (1930).

Freges A. L. ist aber vollständig. Das ergibt sich daraus, daß im System Freges das Axiom

A3*: $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$

ableitbar ist. Die Axiome A1, A2, A3* ergeben aber zusammen mit R1 ein vollständiges System der A. L. Dieses System wurde 1921 von Lukasiewicz als Vereinfachungen des Fregeschen angegeben[14].

Beweis:

$(\neg A \supset \neg B) \supset (\neg\neg B \supset \neg\neg A)$	A4
$B \supset \neg\neg B$	A6
$(B \supset \neg\neg B) \supset ((\neg\neg B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset \neg\neg A))$	mit dem Theorem 9 (BS, S. 35), d. h. mit $((C \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (C \supset A))$
$(\neg\neg B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset \neg\neg A)$	R1

[14] Vgl. dazu auch Lukasciewicz und Tarski (1930).

$((\neg A \supset \neg B) \supset (\neg\neg B \supset \neg\neg A)) \supset (((\neg\neg B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset \neg\neg A)) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg\neg A))$	Theorem 9
$(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg\neg A)$	R1 (2 mal)
$\neg\neg A \supset A$	A5
$(\neg\neg A \supset A) \supset ((B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset A))$	mit Theorem 5 (BS, S. 32), d. h. mit $(B \supset A) \supset ((C \supset B) \supset (C \supset A))$
$(B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset A)$	R1
$(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset \neg\neg A)) \supset (((B \supset \neg\neg A) \supset (B \supset A)) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)))$	Theorem 9
$(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$	R1 (2 mal).

Die Axiome des Fregeschen Systems sind nicht *unabhängig* voneinander, denn A3 folgt aus A1 und A2[15]. Die Methoden zum Beweis der Unabhängigkeit von Axiomen wurden zuerst von P. Bernays und J. Lukasiewicz entwickelt[16].

Zur Existenz eines *Entscheidungsverfahrens* für die A. L. hat Frege nichts gesagt. Er weist auch nicht auf Entsprechungen zur Booleschen A. L. hin.

3.3 Die elementare Prädikatenlogik

Frege führt zum Aufbau der Prädikatenlogik (kurz P. L.) zunächst einen allgemeinen Funktionsbegriff ein. Diesen Begriff hat er in späteren Arbeiten wie FB, BG und WF ausführlicher und präziser erläutert als in der BS (vgl. dazu 6.1). Hier unterscheidet er z. B. noch nicht zwischen Funktion und Funktionsausdruck. Sehen wir davon ab, so können wir die Ausführungen in BS, S. 15f so verstehen: Frege geht aus von zusammengesetzten Namen oder Sätzen Φ,

[15] Vgl. dazu auch Lucasciewicz (1936), S. 127.

[16] Vgl. dazu Bernays (1926) und die Bemerkung in Tarski (1956), S. 43. E. V. Huntington hat 1935 darauf hingewiesen, daß diese Methode (einer Interpretation in einer mehrwertigen Logik) sich auch zum Beweis der Unabhängigkeit von Deduktionsregeln anwenden läßt.

die an einer oder mehreren Stellen einen bedeutungsvollen Ausdruck Ψ enthalten. Diese Struktur von Φ werde durch die Schreibweise $\Phi[\Psi]$ angedeutet. Ersetzt man den Ausdruck Ψ an jenen Stellen, auf die sich die eckigen Klammern beziehen, durch eine passende Variable ξ für Ausdrücke derselben syntaktischen Kategorie wie Ψ, so entsteht ein Ausdruck $\Phi[\xi]$ für eine einstellige Funktion. Insbesondere ergibt sich also z. B. aus einem Satz durch Ersetzung eines Eigennamens durch eine Gegenstandsvariable ein Prädikat.

„Wenn in einem Ausdrucke, dessen Inhalt nicht beurteilbar zu sein braucht, ein einfaches oder zusammengesetztes Zeichen an einer oder an mehreren Stellen vorkommt, und wir denken es an allen oder einigen dieser Stellen durch anderes, überall aber durch dasselbe ersetzbar, so nennen wir den hierbei unveränderlich erscheinenden Teil des Ausdruckes Funktion, den ersetzbaren ihr Argument“. (BS, S. 16.)

Entsprechend werden mehrstellige Funktionsausdrücke gebildet:

„Wenn man in einer Funktion ein bis dahin als unersetzbar angesehenes Zeichen an einigen oder allen Stellen, wo es vorkommt, ersetzbar denkt, so erhält man durch diese Auffassungsweise eine Funktion, die außer den bisherigen noch ein Argument hat. Auf diese Weise entstehen Funktionen von zwei und mehr Argumenten“. (BS, S. 17f.)

Als Mitteilungszeichen für Funktionsausdrücke verwendet Frege große griechische Buchstaben und übernimmt die mathematische Funktionsschreibweise, also $\Phi(A)$, $\Psi(A, B)$ etc.[17]. Man kann also aus $\Phi(A, B)$ die Funktionsausdrücke $\Phi(\xi, B)$, $\Phi(A, \xi)$, $\Phi(\xi, \zeta)$, $\xi(A, B)$, etc. erzeugen. Wir beschränken uns zunächst auf die Ersetzung von Gegenstandsnamen in Sätzen, betrachten also nur jene Funktionsausdrücke, die Prädikate 1. Stufe sind[18]. Dann läßt sich die im System der BS enthaltene elementare P. L. so darstellen:

[17] Die Ausdrücke $\Phi(A)$ sind also als Quasianführungen zu lesen, d. h. als Bezeichnungen von objektsprachlichen Ausdrücken, die aus Φ, gefolgt von einem linken Klammerzeichen, gefolgt vom Ausdruck A, gefolgt von einem rechten Klammerzeichen gebildet werden.

[18] Frege will in $\Phi(a)$ den Namen nicht als Subjekt, $\Phi(\xi)$ als Prädikat im üblichen Sinn verstehen. Er meint, diese Begriffe hätten in der Logik keinen Platz, weil sie der Unterscheidung von Thema und Rhema entsprechen. Vgl. dazu BS, S. 3. Seine Äußerung in N, S. 273 ist auch in diesem Sinn zu verstehen: „Das Eigenartige meiner Auffassung der Logik

Bei Frege hat der *Alloperator* die Gestalt

$\overset{\mathfrak{a}}{\neg\!\smile\!-}\ \Phi(\mathfrak{a})$ für $\bigwedge \mathfrak{a}\, \Phi(\mathfrak{a})$ bzw. $\bigwedge x\, A[x]$.

Frege benützt also kleine deutsche Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... als gebundene Gegenstandsvariablen. Wir verwenden in der Transskription die Buchstaben x, y, z. Er legt fest, daß $\bigwedge x A[x]$ nur dann ein Satz ist, wenn x in A[ ] nicht vorkommt (BS, S. 20 f.). Mit einer entsprechenden Bedingung wird auch heute der Bezug der Variablen in den Quantoren eindeutig festgelegt, d. h. es wird z. B. ausgeschlossen, daß ein Ausdruck vorkommt wie $\bigwedge x(Fx \wedge \bigwedge x(Gx \wedge Hx))$. Den Bereich eines Quantors bezeichnet Frege als „Gebiet" (BS, S. 20). Kleine lateinische Buchstaben a, b, c, ... verwendet er als freie Gegenstandsvariablen. Sie dienen zum Ausdruck der Allgemeinheit in Satzschemata. So besagt $\vdash A[a]$ dasselbe wie $\vdash \bigwedge x A[x]$ (BS, S. 21). Da jedoch, wie bereits erwähnt, eine Einsetzungsregel für diese Variablen fehlt, deuten wir sie als Mitteilungszeichen für Gegenstandsnamen. Der *Existenzquantor* wird bei Frege wie üblich durch

$\overset{\mathfrak{a}}{\top\!\smile\!\top}\ \Phi(\mathfrak{a})$, d. h. $\neg \bigwedge x \neg A[x]$ (BS, S. 23)

wiedergegeben. Eine Abkürzung führt er auch dafür nicht ein.

Semantisch wird der Alloperator so erklärt: $\bigwedge x A[x]$ bedeutet das Urteil, daß die Funktion A[x] eine Tatsache ergibt, was immer man als ihr Argument ansehen möge (BS, S. 19). Da Frege nicht zwischen Funktion und Funktionsausdruck, sowie zwischen Argument als nichtsprachlichem Objekt und als Name für dieses Objekt unterscheidet, kann man das sowohl so verstehen, daß $\bigwedge x A[x]$ wahr ist genau dann, wenn die durch A[x] ausgedrückte Funktion für jedes Objekt als Argument den Wahrheitswert „wahr" ergibt, als auch so, daß der Ausdruck A[x] für jede Einsetzung eines Namens für x das

wird zunächst dadurch kenntlich, daß ich den Inhalt des Wortes „wahr" an die Spitze stelle, und dann dadurch, daß ich den Gedanken sogleich folgen lasse als dasjenige, bei dem Wahrsein überhaupt in Frage kommen kann. Ich gehe also nicht von den Begriffen aus und setze aus ihnen den Gedanken oder das Urteil zusammen, sondern ich gewinne die Gedankenteile durch Zerfällung des Gedankens. Hierdurch unterscheidet sich meine Begriffsschrift von ähnlichen Schöpfungen Leibnizens und seiner Nachfolger trotz des von mir vielleicht nicht glücklich gewählten Namens. Die Wahrheit ist nicht Teil des Gedankens".

Wahre bezeichnet. Diese beiden Deutungen liefern verschiedene Resultate, wenn nicht jedes Objekt (des *universe of discourse*) einen Namen in der Objektsprache hat. Sie ergeben allerdings denselben Begriff p. l. Wahrheit[19]. Wir wollen Freges Bestimmung im folgenden im ersteren Sinn verstehen, d. h. Allsätze in der üblichen Weise deuten. Das entspricht auch eher der Festlegung in GGAI, S. 12. Man muß allerdings sagen, daß Frege der Unterschied beider Deutungen nicht klar war. Das zeigt sich auch in GGAI darin, daß dort im Beweis der semantischen Definitheit wieder die zweite Deutung zugrundegelegt wird. Ein Grund für diese Unklarheit ist wohl auch, daß Frege nicht mit einem festen Vorrat objektsprachlicher Namen rechnet, sondern die Menge dieser Namen offen läßt, im Effekt also sagt: Der Satz $\bigwedge xA[x]$ ist wahr, wenn $A[a]$ wahr ist für alle *möglichen* Namen für Objekte des Grundbereichs. Das entspricht dann der heutigen Deutung im ersteren Sinn: Der Satz $\bigwedge xA[x]$ ist wahr in der Interpretation V, wenn $A[a]$ wahr ist in allen Interpretationen V′, die sich von V höchstens dadurch unterscheiden, daß sie a ein anderes Objekt des Grundbereichs zuordnen.

Zur Interpretation des Alloperators gehört eine Festlegung des *universe of discourse* als Definitionsbereich der Variablen. Frege nimmt dafür immer die Menge *aller* Objekte an. Das ergibt sich für ihn aus der Idee, jedes logische Theorem solle eine vollkommen allgemeine Aussage sein, in der keine deskriptiven Konstanten vorkommen – solche Aussagen gibt es freilich nicht in der elementaren P. L., sondern erst in der höheren P. L. und in Systemen der Klassenlogik. Auch hier folgt aber nicht die Geltung in allen Gegenstandsbereichen aus jener im allumfassenden *universe of discourse,* denn dieser ist sicher unendlich, d. h. es gilt in ihm z. B. das Theorem $\bigvee f(\bigwedge x \neg f(x,x) \wedge \bigwedge x \bigvee y f(x,y) \wedge \bigwedge xyz(f(x,y) \wedge f(y,z) \supset f(x,z)))$, das aber in endlichen Bereichen nicht gilt[20].

Im *Kalkül* Freges kommt zu den a. l. Axiomen folgendes p. l. Axiom hinzu:

A7: $\bigwedge xA[x] \supset A[a]$ (BS, S. 51).

Als zusätzliche Deduktionsregel, die Frege allerdings nicht explizit als solche kennzeichnet, benötigt man seine Regel:

[19] Vgl. dazu z. B. Kutschera (1967), 2.2.2.

[20] Vgl. zu dieser Konzeption Freges seine „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen ...“ (1895).

R2: $A \supset B[a] \vdash A \supset \bigwedge x B[x]$, falls a nicht in der Konklusion vorkommt (BS, S. 21).

Dieser Kalkül der elementaren P. L. ist vollständig und widerspruchsfrei. Die semantische Widerspruchsfreiheit hat Frege bewiesen (BS, S. 51, 21 f.). Ein p. l. Vollständigkeitsbeweis ist zuerst 1930 von K. Gödel angegeben worden. Da Frege keinen Interpretationsbegriff kennt, fehlt bei ihm eine entscheidende Voraussetzung für einen solchen Beweis.

Da Frege nicht syntaktisch zwischen Namen und Sätzen unterscheidet, könnte er im System der BS auch über Wahrheitswerte quantifizieren, also z. B. die Allgemeingültigkeit des *tertium non datur* durch $\bigwedge x(-x \vee \neg x)$ ausdrücken. Von dieser Möglichkeit macht er aber keinen Gebrauch.

3.4 Identität

Die Identität wird in der BS durch „$a \equiv b$" bezeichnet, später durch „$a = b$". Die Erklärung der Identität in der BS ist unbefriedigend und Frege hat sie in SB revidiert. In der BS sagt er:

„Während sonst die Zeichen lediglich Vertreter ihres Inhaltes sind, so daß jede Verbindung, in welche sie treten, nur eine Beziehung ihrer Inhalte zum Ausdrucke bringt, kehren sie plötzlich ihr eigenes Selbst hervor, sobald sie durch das Zeichen der Inhaltsgleichheit verbunden werden; denn es wird dadurch der Umstand bezeichnet, daß zwei Namen denselben Inhalt haben". (BS, S. 13 f.)

Danach soll „$a \equiv b$" soviel besagen wie „‚a' ist synonym mit ‚b'", oder schwächer – Frege unterscheidet erst in SB zwischen Sinn und Bezug von Namen – soviel wie „‚a' bezeichnet dasselbe wie ‚b'". Frege sagt:

„Die Notwendigkeit eines Zeichens der Inhaltsgleichheit beruht also auf folgendem: derselbe Inhalt kann auf verschiedene Weisen völlig bestimmt werden; daß aber in einem besonderen Falle durch zwei Bestimmungsweisen wirklich Dasselbe gegeben werde, ist der Inhalt eines Urteils. Bevor dies erfolgt ist, müssen den beiden Bestimmungsweisen entsprechend zwei verschiedene Namen dem dadurch Bestimmten verliehen werden. Das Urteil aber bedarf zu seinem Ausdrucke eines Zeichens der Inhaltsgleichheit, welches jene beiden Namen verbindet. Hieraus geht hervor, daß die verschiedenen Namen für denselben Inhalt nicht immer bloß eine gleichgültige Formsache sind, sondern daß sie das Wesen der Sache selbst betreffen, wenn sie mit verschiedenen Bestimmungsweisen zusammenhängen. In diesem Falle ist das Urteil, welches die Inhaltsgleichheit zum Gegenstande hat, im kantischen Sinne ein synthetisches". (BS, S. 14f.)

Und er definiert die „Inhaltsgleichheit" so:

„Es bedeute nun $\vdash (A \equiv B)$: das Zeichen A und das Zeichen B haben denselben begrifflichen Inhalt, so daß man überall an die Stelle von A B setzen kann und umgekehrt". (BS, S. 15.)

Da eine Behauptung der Sinn- oder Bezugsgleichheit zweier objektsprachlicher Namen nach heutiger Auffassung ein metasprachliches Urteil ist, sehen wir von dieser Deutung hier ab und lesen „$a=b$" wie üblich als „Das Objekt a ist mit dem Objekt b identisch". Dann ergeben die beiden Axiome, die Frege für die Identität angibt:

A8) $a=a$ (BS, S. 50)

A9) $a=b \supset (A[a] \equiv A[b])$ (BS, S. 50)

in Verbindung mit dem p. l. Kalkül einen vollständigen Kalkül der elementaren P. L. mit Identität. Auch in diesem Fall hat Frege nur etwas zur semantischen Widerspruchsfreiheit, nicht aber zur Vollständigkeit gesagt. Kennzeichnungsterme führt Frege erst in den GGA im Rahmen der klassenlogischen Sprache ein.

3.5 Die höhere Prädikatenlogik

Das System der BS enthält auch eine höhere P. L. Da Frege Ausdrücke und Variablen verschiedener syntaktischer Kategorien nicht explizit unterscheidet, verwendet er das Axiom A7 und die Regel R2 auch für Quantifikationen über Begriffe 1. Stufe, d. h. über Begriffe, die für Objekte erklärt sind. Die Typenunterscheidung wird erst im System der GGA klar durchgeführt.

Die *Unvollständigkeit* der P. L. höherer Stufe ist 1931 von K. Gödel bewiesen worden. A7 und R2 genügen aber für die schwache Vollständigkeit im Sinne von L. Henkin[21].

[21] Vgl. dazu z. B. Kutschera (1967), 4.2 und 4.3.

Die P. L. 2. Stufe dient Frege in der BS dazu, Begriffe einzuführen, die er für die logische Begründung der Arithmetik benötigt. Er definiert insbesondere folgende Begriffe[22]

$E(G,F) := \bigwedge x(Gx \supset \bigwedge y(F(x,y) \supset G(y)))$
 – *die Eigenschaft G vererbt sich in der F-Reihe* (BS, S. 59).

$F^{>0}(x,y) := \bigwedge g(E(g,F) \wedge \bigwedge z(F(x,z) \supset gz) \supset gy)$
 – *y folgt in der F-Reihe auf x,* – Relationskette 2. Art (BS, S. 60). Man macht sich leicht klar, daß $F^{>0}(x,y)$ genau dann gilt, wenn es eine Zahl $n \geq 1$ gibt und Objekte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $x_0 = x$, $x_n = y$ und $F(x_0, x_1) \wedge F(x_1, x_2) \wedge \ldots \wedge F(x_{n-1}, x_n)$. Mit Hilfe der Relation F ‚y ist unmittelbarer Nachfolger von x', die Frege in den GLA erklärt, kann man also den Begriff ‚y ist eine natürliche Zahl' durch $F^{\geq 0}(0,y)$ definieren, wenn man setzt:

$F^{\geq 0}(x,y) := F^{>0}(x,y) \vee x = y$
 – *y gehört der mit x anfangenden F-Reihe an* – Relationskette 1. Art (BS, S. 71).

Frege verwendet dabei in der BS folgende Symbolik:

$$\begin{array}{ll} \delta\, G(\alpha) & \\ |\,(& \text{für } E(G,F) \\ \alpha\, F(\delta,\alpha) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma & \\ \sim F(x_\gamma, y_\beta) & \text{für } F^{>0}(x,y) \\ \beta & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma & \\ \approx F(x_\gamma, y_\beta) & \text{für } F^{\geq 0}(x,y). \\ \beta & \end{array}$$

Er beweist dann einige Sätze über diese Relationen wie z. B.

$E(G,F) \wedge F^{>0}(x,y) \wedge \bigwedge z(F(x,z) \supset Gz) \supset Gy$	(BS, S. 63)
$F(x,y) \supset F^{>0}(x,y)$	(BS, S. 69)
$F^{>0}(x,y) \wedge F^{>0}(y,z) \supset F^{>0}(x,z)$	(BS, S. 71)
$E(\alpha y F^{>0}(x,y), F)$	(BS, S. 71)
$F^{\geq 0}(x,y) \wedge F(y,z) \supset F^{>0}(x,z)$	(BS, S. 72)
$E(\alpha y F^{\geq 0}(x,y), F)$	(BS, S. 74).

[22] Vgl. dazu Kutschera (1967), S. 292 ff.

Dabei sei $\alpha xyF(x, y)$ die Funktion F – α steht also für Funktionalabstraktion – und $\alpha yF(x, y)$ ist entsprechend für jeden Wert von x die Funktion F(x, y). Die 4. Formel ist also zu lesen im Sinn von $\bigwedge xE(\alpha yF^{>0}(x, y), F)$ – für jedes x vererbt sich die Eigenschaft, in der F-Reihe auf x zu folgen, in der F-Reihe.

Frege definiert ferner die Nacheindeutigkeit der Relation F durch
$NE(F) := \bigwedge xy(F(y, x) \supset \bigwedge z(F(y, z) \supset x = z))$
– F ist *nacheindeutig* (BS, S. 77)

Er schreibt $\underset{\varepsilon}{\overset{\delta}{\mathrm{I}}}\ F(\delta, \varepsilon)$ für NE(F) (verwendet also kleine griechische Buchstaben als gebundene Variable – wir würden $NE_{xy}(F(x, y))$ oder $NE(\alpha xyF(x, y))$ schreiben) und beweist z. B. die Sätze
$NE(F) \wedge (F^{\geq 0}(z, y) \vee F^{>0}(y, x)) \wedge F(y, x) \supset F^{\geq 0}(z, x) \vee F^{>0}(x, z)$ (BS, S. 83)
$NE(F) \supset \bigwedge xE(\alpha y(F^{\geq 0}(x, y) \vee F^{>0}(y, x)), F)$ (BS, S. 85)
(Ist F nacheindeutig, so vererbt sich die Eigenschaft, auf ein Objekt x in der F-Reihe zu folgen, mit ihm identisch zu sein oder ihm vorauszugehen, für alle x in der F-Reihe.)
$NE(F) \wedge F^{>0}(x, y) \wedge F^{>0}(x, z) \supset F^{\geq 0}(z, y) \vee F^{>0}(y, z)$ (BS, S. 86).

Diese Begriffsbildungen und Sätze stellen wie gesagt die Vorbereitung für die Grundlegung der Arithmetik dar und belegen, daß Frege zur Zeit der Abfassung der BS die Definitionen der Anzahlbegriffe der GLA schon klar vor Augen gehabt hat.

3.6 Das Gesamtsystem der BS

Das Gesamtsystem der BS ist außerordentlich stark, denn neben den erwähnten Teilsystemen enthält es z. B. auch eine quantifizierte A. L. Wir können es in Form einer Satzlogik so rekonstruieren[23]:

1. Syntax der Sprache $\mathfrak{B}$
a) *Kategorien:* 0 und 1 sind Kategorien und sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Kategorien, so ist auch $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ eine Kategorie.

[23] Auf die Möglichkeit einer Rekonstruktion als Termlogik gehen wir im Zusammenhang mit den GGA ein.

0 ist die Kategorie von Eigennamen, 1 die von Sätzen, $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ die eines n-stelligen Funktors, der aus Ausdrücken der Kategorien $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Ausdrücke der Kategorie 1 erzeugt.

b) Das *Alphabet* von $\mathfrak{B}$ besteht aus unendlich vielen Konstanten und Variablen jeder Kategorie, aus den logischen Symbolen $\neg$, $\supset$, Λ, $\equiv$, α und den Klammerzeichen und dem Komma als Hilfszeichen.

c) *Terme*

(1) Konstanten der Kategorie τ sind Terme der Kategorie τ.
(2) Ist F ein Term der Kategorie $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ und sind $a_1, \ldots, a_n$ Terme der Kategorien $\tau_1, \ldots, \tau_n$, so ist $F(a_1, \ldots, a_n)$ ein Term der Kategorie 1.
(3) Ist A ein Term der Kategorie 1, so auch $\neg A$.
(4) Sind A, B Terme der Kategorie 1, so auch $(A \supset B)$.
(5) Sind a, b Terme derselben Kategorie 0 oder 1, so ist $(a \equiv b)$ ein Term der Kategorie 1.
(6) Ist $A[a]$ ein Term der Kategorie 1, a eine Konstante der Kategorie τ und x eine Variable derselben Kategorie, die in $A[a]$ nicht vorkommt, so ist $\Lambda x A[x]$ ein Term der Kategorie 1.
(7) Ist $A[a_1, \ldots, a_n]$ ein Term der Kategorie 1, sind $a_1, \ldots, a_n$ Konstanten der Kategorien $\tau_1, \ldots, \tau_n$ und $x_1, \ldots, x_n$ Variable derselben Kategorien, die in $A[a_1, \ldots, a_n]$ nicht vorkommen, so ist $\alpha x_1, \ldots, x_n A(x_1, \ldots, x_n)$ ein Term der Kategorie $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Sätze sind Terme der Kategorie 1. *Rein generelle* Sätze sind solche, die keine Konstanten enthalten. Es sollen die üblichen Klammerregeln gelten. Nach Tarski (vgl. (1923)) kann man auch auf die Operatoren $\neg$ und $\supset$ verzichten, denn man kann definieren:

$\neg A := A \equiv \Lambda x^1 (x^1)$

$A \wedge B := \Lambda x^{(1)} (B \equiv (x^{(1)} (A) \equiv x^{(1)} (B))$

$A \supset B := \neg(A \wedge \neg B)$[24].

Die Adäquatheit der zweiten Definition ergibt sich daraus, daß es 4 einstellige Satzoperatoren gibt: $O_1A{:=}A$, $O_2A{:=}\neg A$, $O_3A{:=}T$ und $O_4A{:=}\neg T$, wo T eine Tautologie ist. Gilt also das Definiens, so gilt

[24] Würde man die Relation $\equiv$ für beliebige Terme erklären – was nach Freges Ausführungen möglich wäre –, so könnte man nach R. Montague (1970) auch auf Λ verzichten und definieren:
$\Lambda x^\tau A[x^\tau] := \alpha x^\tau A[x^\tau] \equiv \alpha x^\tau (x^\tau \equiv x^\tau)$.

auch $B \equiv (O_3A \equiv O_3B)$, also B, und $B \equiv (A \equiv B)$, also $B \supset A \wedge B$, mit B also $A \wedge B$. Gilt umgekehrt $A \wedge B$, so gilt B, also $B \equiv (O_3A \equiv O_3B)$ und $B \equiv (O_4A \equiv O_4B)$; ferner $B \equiv (O_1A \equiv O_1B)$ und $B \equiv (O_2A \equiv O_2B)$.

2. Semantik der Sprache $\mathfrak{B}$

Es sei U eine nichtleere Menge von Objekten[25]. Dann bestimmen wir die Mengen $E_{\tau,U}$ möglicher Extensionen der Kategorie τ über U wie folgt:

$E_{0,U} = U$

$E_{1,U} = \{w, f\}$

$E_{(\tau_1, \dots, \tau_n),U} = E_{1,U}{}^{E_{\tau_1,U} \times \dots \times E_{\tau_n,U}}$.

Dabei sei A^B die Menge aller Funktionen, die die Klasse B in die Klasse A abbilden, und $A_1 x \dots x A_n$ das Cartesische Produkt der Mengen $A_1, \dots, A_n$, d. h. die Menge aller n-gliedrigen Folgen $(x_1, \dots, x_n)$, so daß x_i $(1 \leq i \leq n)$ Element von A_i ist.

Eine *Interpretation* von $\mathfrak{B}$ über U ist eine Funktion V, für die gilt

a) $V(a^\tau) \varepsilon E_{\tau,U}$ für alle Konstanten a^τ der Kategorie τ.

b) $V(F(a_1, \dots, a_n)) = V(F)(V(a_1), \dots, V(a_n))$

c) $V(\neg A) = w$ gdw. $V(A) = f$

d) $V(A \supset B) = w$ gdw. $V(A) = f$ oder $V(B) = w$

e) $V(a \equiv b) = w$ gdw. $V(a) = V(b)$

f) $V(\bigwedge x^\tau A[x^\tau]) = w$ gdw. $\bigwedge V'(V' \underset{a}{=} V \supset V'(A[a^\tau]) = w)$, wo die Konstante a^τ nicht in $\bigwedge x^\tau A[x^\tau]$ vorkomme.

g) $V(\alpha x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n} A[x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n}])$ sei jene Funktion $f \varepsilon E_{(\tau_1, \dots, \tau_n),U}$ für die gilt: $\bigwedge V'(V' \underset{a_1, \dots, a_n}{=\!=\!=\!=\!=} V \supset f(V'(a_1^{\tau_1}), \dots, V'(a_n^{\tau_n})) = V'(A[a_1^{\tau_1}, \dots, a_n^{\tau_n}]))$, wo die Konstanten $a_1^{\tau_1}, \dots, a_n^{\tau_n}$ nicht in $\alpha x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n} A[x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n}]$ vorkommen.

Dabei besage $V \underset{a_1, \dots, a_n}{=\!=\!=\!=\!=} V'$, daß die Interpretation V mit V' übereinstimmt bis auf höchstens die Werte für $a_1, \dots, a_n$. Von den angegebenen Bedingungen kommen in der BS nur (c) bis (f) vor.

Ein Satz A von $\mathfrak{B}$ ist logisch wahr genau dann, wenn A bei allen Interpretationen wahr ist. Wir haben schon gesehen, daß diese Bedingung nicht, wie Frege annimmt, mit der Wahrheit der Allgeneralisierung bei einer Interpretation von $\mathfrak{B}$ über dem Bereich aller Gegenstände zusammenfällt.

[25] Dabei könnte man w, f einschließen; wir tun das aber hier nicht.

3. Das Axiomensystem
Es besteht aus A1 bis A9, bzw. A1, A2, A3*, A7, A8, A9 und den Regeln R1, R2.

3.7 Die Leistung der BS

In der BS hat Frege das erste Logiksystem entwickelt, das modernen Anforderungen nahekommt. Er hat damit sowohl sein Ziel einer ausdrucksstarken logischen Sprache erreicht als auch das eines leistungsfähigen Logikkalküls.

Im letzteren Punkt liegt das Hauptverdienst der BS, das freilich ohne einen präzisen Aufbau der Sprache nicht möglich gewesen wäre. Die Logik der BS geht über die Boolesche Logik weit hinaus. Diese ist, wie wir gesehen haben, eine monadische P. L. Freges System enthält hingegen nicht nur die volle P. L. 1. Stufe mit Identität – also auch die gesamte Relationenlogik, für die bei De Morgan und Schröder nur rudimentäre Ansätze vorlagen –, sondern darüber hinaus auch eine P. L. höherer Stufe, wobei sich Frege allerdings im Effekt auf die P. L. 2. Stufe beschränkt. Das besondere Verdienst Freges besteht in der Einführung der Quantoren; sie bildet die Voraussetzung für eine generelle Formulierung der P. L.[26].

Schon Boole hatte gesehen, daß die Syllogistik nicht zur Formulierung der in der Mathematik nötigen Schlüsse ausreicht. Aber auch Booles Logik ist dafür zu schwach. So läßt sich z. B. der Satz: „Es gibt unendlich viele Primzahlen", d. h. „Zu jeder Primzahl gibt es eine größere" bei Boole nicht darstellen. Dieser Satz hat die Form $\bigwedge x(Px \supset \bigvee y(Py \wedge x<y))$. Er enthält erstens einen Relationsausdruck $x<y$ und zweitens gibt es bei Boole keine verschachtelten Quantoren. Verschachtelte Quantoren lassen sich in der monadischen P. L. zwar eliminieren, aber nicht beim Vorkommen von Relationsausdrücken. So hat auch Frege in ZBS auf die höhere Leistungsfähigkeit seiner Sprache wie seines Kalküls gegenüber Boole und Schröder hingewiesen[27]. Schröder hatte in seiner Rezension der BS (1881) hingegen behauptet, die BS sei schwächer als der Boolesche Kalkül.

[26] Vgl. dazu Freges Aussagen in ZBS (BS, S. 105).
[27] Vgl. dazu auch N, S. 9ff., 16, 30, 51f.

Zusammenfassend kann man sagen, daß Frege mit der BS einen ähnlich bedeutenden Beitrag zur Entwicklung der Logik erbracht hat wie Aristoteles mit der Formulierung der Syllogistik.

3.8 Ergänzungen aus den „Logischen Untersuchungen“

Im Anschluß an die Erörterung der BS soll noch auf einige Ausführungen Freges zu den logischen Operatoren in den LU hingewiesen werden, mit denen er jene aus der BS ergänzt und vertieft hat.

Der Hauptteil von LUI („Der Gedanke“) ist erkenntnistheoretischer Natur und wird im 10. Kapitel dargestellt. Bei der Erörterung der *Verneinung* in LUII setzt sich Frege zunächst mit anderen Ansichten auseinander, ohne allerdings die Autoren zu nennen, auf die er sich bezieht. Er geht davon aus, daß es nicht nur wahre, sondern auch falsche Gedanken gibt – als „Gedanke“ bezeichnet Frege seit SB den Sinn eines (Aussage-)Satzes, also eine Proposition (vgl. 5.2). Die Verneinung kann daher nicht darin bestehen, einen Gedanken als nicht existierend zu erklären. Er diskutiert dann die These, die Verneinung sei ein „Auflösen des Gedankens in seine Bestandteile“ (KS, S. 367). Falsche Gedanken sind keine Gedankentrümmer, und das Beurteilen eines Gedankens ändert an diesem nichts. Eine Auflösung des Gedankens durch einfache Negation würde auch eine doppelte Negation unmöglich machen:

„Kein Ungedanke wird durch Verneinen zum Gedanken, wie kein Gedanke durch Verneinen zum Ungedanken wird“. (Ks, S. 368.)

Zur Unterscheidung bejahender und verneinender Urteile in der traditionellen Logik sagt Frege:

„Dazu kommt, daß es gar nicht leicht ist, anzugeben, was ein verneinendes Urteil (ein verneinender Gedanke) sei. Man betrachte die Sätze „Christus ist unsterblich“, „Christus lebt ewig“, „Christus ist nicht unsterblich“, „Christus ist sterblich“, „Christus lebt nicht ewig“. Wo haben wir nun hier einen bejahenden, wo einen verneinenden Gedanken? Wir sind gewohnt anzunehmen, das Verneinen erstrecke sich auf den ganzen Gedanken, wenn sich das „nicht“ mit dem Verbum des Prädikats verbindet. Aber das Verneinungswort bildet grammatisch auch zuweilen einen Teil des Subjekts, wie in dem Satze „kein Mensch wird über hundert Jahre alt“. Eine Verneinung kann irgendwo in einem Satze stecken, ohne daß der Gedanke dadurch unzweifelhaft ein verneinender würde. Man sieht, zu welchen kniffligen Fragen der Ausdruck „verneinendes Urteil" (verneinender Gedanke) führen kann. Endlose, mit größtem Scharfsinn geführte und doch im wesentlichen unfruchtbare Streite können die Folge sein. Deshalb stimme ich dafür, daß man die Unterscheidung von verneinenden und bejahenden Urteilen oder Gedanken so lange ruhen lasse, bis man ein Kennzeichen habe, von dem man in jedem Falle ein verneinendes Urteil von einem bejahenden mit Sicherheit unterscheiden könne. Wenn man ein solches Merkmal hat, wird man auch erkennen, welcher Nutzen etwa von jener Unterscheidung zu erhoffen sei. Ich bezweifle zunächst noch, daß dies gelingen werde. Der Sprache wird man dieses Merkmal nicht entnehmen können; denn die Sprachen sind in logischen Fragen unzuverlässig. Ist es doch nicht eine der geringsten Aufgaben des Logikers, auf die Fallstricke hinzuweisen, die von der Sprache dem Denkenden gelegt werden". (KS, S. 369 f.)

Gedanken lassen sich also nicht eindeutig in verneinende und bejahende einteilen. Frege diskutiert dann die Möglichkeit, zwei Urteilsformen anzunehmen: Bejahen und Verneinen. Die Negation würde dann nicht zum Gedanken gehören, sondern zum Urteil; anstelle einer Urteilsform hätten wir deren zwei: Behaupten und Verneinen. (In diesem Sinn unterscheidet z. B. Aristoteles *Kataphasis* und *Apophasis.*)

„Gibt es zwei verschiedene Weisen des Urteilens, von denen jene bei der bejahenden, diese bei der verneinenden Antwort auf eine Frage gebraucht wird? Oder ist das Urteilen in beiden Fällen dasselbe? Gehört das Verneinen zum Urteilen? Oder ist die Verneinung Teil des Gedankens, der dem Urteilen unterliegt?" (KS, S. 372.)

Frege zeigt nun, daß man ohne Negation als Gedankenbestandteil nicht auskommt, denn mit dem Urteil $\vdash \neg A \supset B$ z. B. verneine ich nichts. Wenn man aber eine objektsprachliche Negation hat, ist eine zweite Form der Behauptung überflüssig, denn die Verneinung von A kann man durch $\vdash \neg A$ ausdrücken.

„So ist denn die Annahme von zwei verschiedenen Weisen des Urteilens zu verwerfen. Aber was hängt denn von dieser Entscheidung ab? Vielleicht könnte man sie für wertlos halten, wenn dadurch nicht eine Ersparung an logischen Urbestandteilen und an dem, was ihnen sprachlich entspricht, bewirkt würde. Bei der Annahme von zwei verschiedenen Weisen des Urteilens haben wir nötig: 1. die behauptende Kraft im Falle des Bejahens, 2. die behauptende Kraft im Falle des Verneinens, etwa in unlöslicher Verbindung mit dem Worte „falsch“, 3. ein Verneinungswort wie „nicht“ in Sätzen, die ohne behauptende Kraft ausgesprochen werden. Nehmen wir dagegen nur eine einzige Weise des Urteilens an, haben wir dafür nur nötig 1. die behauptende Kraft, 2. ein Verneinungswort. Eine solche Ersparung zeigt immer eine weitergetriebene Zerlegung an, und diese bewirkt eine klarere Einsicht. Damit hängt eine Ersparung eines Schlußgesetzes zusammen. Wo wir bei unserer Entscheidung mit einem solchen auskommen, brauchten wir sonst zwei. Wenn wir mit einer Art des Urteilens auskommen können, dann müssen wir es auch“. (KS, S. 374.)

Frege legt dann dar, daß die Verneinung sich immer auf ganze Sätze bezieht, nicht nur auf das Prädikat (KS, S. 374 f.). Die Verneinung ist eine Funktion, die auf Gedanken anwendbar ist (KS, S. 375 f.).

Bei der Erörterung von *Gedankengefügen* in LUIII betont Frege zunächst die Leistung der Sprache, mit endlich vielen Ausdrücken unendlich viele Gedanken formulieren zu können.

„Erstaunlich ist es, was die Sprache leistet, indem sie mit wenigen Silben unübersehbar viele Gedanken ausdrückt, daß sie sogar für einen Gedanken, den nun zum ersten Male ein Erdenbürger gefaßt hat, eine Einkleidung findet, in der ihn ein anderer erkennen kann, dem er ganz neu ist. Dies wäre nicht möglich, wenn wir in dem Gedanken nicht Teile unterscheiden könnten, denen Satzteile entsprächen, so daß der Aufbau des Satzes als Bild gelten könnte des Aufbaues des Gedankens“. (KS, S. 378.)

Frege betrachtet dann Funktionen, mit denen sich aus vollständigen Gedanken neue vollständige Gedanken bilden lassen. Diese komplexen Gedanken bezeichnet er in Analogie zum Wort „Satzgefüge“ als *Gedankengefüge* (KS, S. 379).

„Nicht jeder Satz, der sprachlich aus Sätzen zusammengesetzt ist, kann uns ein brauchbares Beispiel liefern; denn die Grammatik kennt Sätze, die von der Logik nicht als eigentliche Sätze anerkannt werden können, weil sie keine Gedanken ausdrücken. Das zeigen uns die Relativsätze; denn in einem von seinem Hauptsatze getrennten Relativsatze können wir nicht erkennen, was mit dem Relativpronomen bezeichnet werden soll. Wir haben in einem solchen Satze keinen Sinn, nach dessen Wahrheit wir fragen könnten, mit anderen Worten: wir haben als Sinn eines abgetrennten Relativsatzes keinen Gedanken. Wir dürfen also nicht erwarten, daß einem Satzgefüge, bestehend aus einem Hauptsatze und einem Relativsatze, als Sinn ein Gedankengefüge entspreche“. (KS, S. 379.)

In LUIII betrachtet Frege zunächst die Konjunktion, die er als „Gedankengefüge 1. Art“ bezeichnet, und jene aus zwei Gedanken gebildeten komplexen Gedanken, die sich mit Negation und Konjunktion darstellen lassen. Die Adjunktion $A \vee B$ ergibt sich dabei als $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, die Implikation $A \supset B$ als $\neg(A \wedge \neg B)$. Zur logischen Deutung des Wortes „oder" sagt er:

„Vielleicht findet man, daß der hier angegebene Sinn des Wortes „oder" mit dem Sprachgebrauch nicht immer übereinstimmt. Hiergegen sei zunächst bemerkt, daß es bei der Festsetzung des Sinnes wissenschaftlicher Ausdrücke nicht die Aufgabe sein kann, den Sprachgebrauch des Lebens genau zu treffen; dieser ist ja meist für wissenschaftliche Zwecke ungeeignet, wo das Bedürfnis genauerer Prägung gefühlt wird. Es muß dem Naturforscher erlaubt sein, im Gebrauche des Wortes „Ohr" von dem sonst Üblichen abzuweichen. Auf dem Gebiete der Logik können mitanklingende Nebengedanken stören. Nach dem, was über den Gebrauch von „oder" gesagt worden ist, kann wahrheitsgemäß behauptet werden: „Friedrich der Große siegte bei Roßbach, oder zwei ist größer als drei". Da meint jemand: „Sonderbar! was hat der Sieg bei Roßbach mit dem Unsinn zu tun, daß zwei größer als drei sei?" ... Man ist gewohnt, bei Sätzen, die mit „oder" verbunden sind, anzunehmen, daß der Sinn des einen mit dem des andern etwas zu tun habe, daß zwischen ihnen irgendeine Verwandtschaft bestehe; und in einem gegebenen Falle wird man eine solche vielleicht auch angeben können; aber in einem andern Falle wird man eine andere haben, so daß es unmöglich sein wird, eine Sinnverwandtschaft anzugeben, die immer mit dem „oder" verknüpft wäre und zu dem Sinne dieses Wortes gerechnet werden könnte. Aber warum fügt der Redner den zweiten Satz überhaupt an? Wenn er behaupten will, daß Friedrich der Große bei Roßbach siegte, genügte ja dazu der erste Satz; daß der Redner nicht sagen will, zwei sei größer als drei, ist doch anzunehmen. Wenn der Redner sich mit dem ersten Satze begnügt hätte, hätte er mit weniger Worten mehr gesagt. Wozu also dieser Aufwand von Worten? Auch diese Fragen führen nur auf Nebengedanken. Welche Absichten und Beweggründe der Redner habe, gerade dies zu sagen und jenes nicht, geht uns hier gar nichts an, sondern nur das, was er sagt". (KS, S. 384 f.)

Zur logischen Deutung von „wenn-dann" im Sinne der materialen Implikation sagt Frege:

„Man wird vielleicht finden, daß der Sprachgebrauch hierdurch nicht getroffen sei. Demgegenüber muß immer wieder betont werden, daß es der Wissenschaft erlaubt sein muß, ihren eigenen Sprachgebrauch zu haben, daß sie sich der Sprache des Lebens nicht immer unterwerfen kann. Eben darin sehe ich die größte Schwierigkeit der Philosophie, daß sie für ihre Arbeiten ein wenig geeignetes Werkzeug vorfindet, nämlich die Sprache des Lebens, für deren Ausbildung ganz andere Bedürfnisse mitbestimmend gewesen sind, als die der Philosophie. So ist auch die Logik genötigt, aus dem, was sie vorfindet, sich erst ein brauchbares Werkzeug zurechtzufeilen ... Freilich wird diese Auffassung eines hypothetischen Satzgefüges zunächst befremden. Es kommt bei meiner Erklärung nicht darauf an, den Sprachgebrauch des Lebens zu treffen, der für die Zwecke der Logik meist zu verschwommen und schwankend ist. Da drängt sich allerlei heran, z. B. das Verhältnis von Ursache und Wirkung, die Absicht, mit der ein Redender einen Satz von der Form „Wenn B, so A“ ausspricht, der Grund, aus dem er seinen Inhalt für wahr hält. Der Redende gibt vielleicht Winke hinsichtlich solcher beim Hörenden etwa auftauchenden Fragen. Solche Winke gehören zum Beiwerke, das in der Sprache des Lebens den Gedanken oft umrankt. Meine Aufgabe ist es hier, durch Abscheidung des Beiwerks als logischen Kern ein Gefüge von zwei Gedanken herauszuschälen, ein Gefüge, welches ich hypothetisches Gedankengefüge genannt habe“. (KS, S. 387 f.)

Frege betont, daß Tautologien und Kontradiktionen nicht unsinnig sind. Zu Satz $A \supset A$ sagt er:

„In einem solchen Falle liegen die Fragen nahe: „Drückt dieser Satz einen Gedanken aus? Ist er nicht inhaltsleer? Was erfährt man denn Neues, wenn man ihn hört? Nun, vielleicht hat man, bevor man ihn hört, diese Wahrheit überhaupt nicht gekannt und also auch nicht anerkannt. Insofern kann man doch unter Umständen etwas dadurch erfahren, was einem neu ist. Es ist doch die Wahrheit nicht zu leugnen, daß die Schneekoppe höher als der Brocken ist, wenn die Schneekoppe höher als der Brocken ist. Da nur Gedanken wahr sein können, muß dieses Satzgefüge einen Gedanken ausdrücken und dann ist auch die Verneinung dieses Gedankens ein Gedanke trotz ihrer scheinbaren Unsinnigkeit“. (KS, S. 393.)

Frege grenzt auch a. l. Satzverbindungen, bzw. in seiner Terminologie: *mathematische Gedankengefüge* von anderen ab, wobei er nun auch Gefüge von mehr als zwei Gedanken betrachtet (KS, S. 393):

„Zur Bildung aller dieser Gefüge reichen Gedankengefüge erster Art [Konjunktionen] und die Verneinung hin, wobei statt der ersten Art auch irgendeine andere unserer sechs Arten gewählt werden kann [das sind die Formen $A \wedge B$, $\neg A \wedge \neg B$, $\neg A \wedge B$ und ihre Negationen]. Nun drängt sich die Frage auf, ob jedes Gedankengefüge eine solche Bildung hat. Was die Mathematik anbetrifft, bin ich überzeugt, daß in ihr Gedankengefüge anderer Bildung nicht vorkommen. Auch in der Physik, Chemie und Astronomie wird es schwerlich anders sein; aber die Finalsätze mahnen zur Vorsicht und scheinen eine genauere Untersuchung zu fordern. Diese Frage will ich hier unentschieden lassen. Immerhin scheinen Gedankengefüge, die so aus Gefügen erster Art mittels der Verneinung gebildet sind, einer besonderen Benennung wert. Sie mögen *mathematische Gedankengefüge* heißen. Damit soll nicht gesagt sein, daß es andere Gedankengefüge gebe. Doch in anderer Hinsicht erscheinen die mathematischen Gedankengefüge als zusammengehörig. Ersetzt man nämlich in einem solchen einen wahren Gedanken durch einen wahren Gedanken, so ist das so gebildete Gedankengefüge wahr oder falsch, je nachdem das ursprüngliche Gefüge wahr oder falsch ist. Dasselbe gilt, wenn man in einem mathematischen Gedankengefüge einen falschen Gedanken durch einen falschen ersetzt". (KS, S. 394.)

Hier behauptet Frege also im Effekt die *Vollständigkeit des Operatorensystems* $\{\neg, \wedge\}$ und bestimmt extensionale Satzstrukturen als solche, in denen die Substitution äquivalenter Sätze *salva veritate* möglich ist. A. l. Operatoren sind solche, die extensionale Strukturen ergeben; sie drücken also Wahrheitswertfunktionen aus (vgl. KS, S. 375, 377, 379).

Die Arbeit „Logische Allgemeinheit" (N, S. 278 ff.), die als Fortsetzung der LU gedacht war, ist Fragment geblieben – es ist ca. 1923 entstanden. Darin geht Frege zunächst von Allsätzen der Form „Alle S sind P" aus, analysiert sie als Sätze der Gestalt: „Für jedes Objekt x gilt: Wenn x ein S ist, dann ist x ein P". Danach bricht jedoch das Fragment ab, bevor Frege zu einer genaueren Erörterung von Allsätzen der einfachen Form $\bigwedge x A[x]$ kommt.

In den LU finden sich also Erörterungen zu den logischen Operatoren, die beim Aufbau logischer Symbolsprachen meist fehlen, zu einer umsichtigen Rechtfertigung des gewohnten Vorgehens aber doch erforderlich sind.

4 Grundlagen der Arithmetik

4.1 Zielsetzung

Mit den GLA beginnt Frege die Durchführung seines Programms einer logischen Begründung der Arithmetik, deren Vorbereitung die BS war. In der Einleitung sagt er, die Mathematiker vermöchten schon auf die einfache Frage, was die Zahl Eins sei, keine befriedigende Antwort zu geben:

„Auf solche Fragen werden wohl auch die meisten Mathematiker keine genügende Antwort bereit haben. Ist es nun nicht für die Wissenschaft beschämend, so im Unklaren über ihren nächstliegenden und scheinbar so einfachen Gegenstand zu sein? Um so weniger wird man sagen können, was Zahl sei. Wenn ein Begriff, der einer großen Wissenschaft zu Grunde liegt, Schwierigkeiten darbietet, so ist es doch wohl eine unabweisbare Aufgabe, ihn genauer zu untersuchen und diese Schwierigkeiten zu überwinden, besonders da es schwer gelingen möchte, über die negativen, gebrochenen, komplexen Zahlen zu voller Klarheit zu kommen, solange noch die Einsicht in die Grundlage des ganzen Baues der Arithmetik mangelhaft ist“. (GLA, S. XIV.)

Frege will die natürlichen Zahlen wie den Zahlbegriff mit logischen Mitteln definieren und mithilfe dieser Definitionen die Grundgesetze der Arithmetik auf rein logischem Wege beweisen. Zunächst will er aber zeigen, daß all das, was bisher über die Grundlagen der Arithmetik gesagt wurde, unbefriedigend ist:

„Um nun jenen Wahn zu widerlegen, daß in Bezug auf die positiven ganzen Zahlen eigentlich gar keine Schwierigkeiten obwalten, sondern allgemeine Übereinstimmung herrsche, schien es mir gut, einige Meinungen von Philosophen und Mathematikern über die hier in Betracht kommenden Fragen zu besprechen. Man wird sehen, wie wenig von Einklang zu finden ist, so daß geradezu entgegengesetzte Ansprüche vorkommen ... Hierdurch suche ich das Bedürfnis nach einer genaueren Untersuchung zu wecken. Zugleich will ich durch die vorausgeschickte Beleuchtung der von andern ausgesprochenen Ansichten meiner eigenen Auffassung den Boden ebnen, damit man sich vorweg überzeuge, daß jene andern Wege nicht zum Ziele führen, und daß meine Meinung nicht eine von vielen gleichberechtigten ist; und so hoffe ich die Frage wenigstens in der Hauptsache endgültig zu entscheiden". (GLA, S. XVI f.)

Frege bezieht sich auf die zeitgenössischen Bestrebungen zu einer exakten Begründung der Analysis und meint, dieses Streben nach exakten Definitionen und Beweisen müsse auch auf die Arithmetik als Grundlage des gesamten Baus ausgedehnt werden (GLA, S. 1 f.). Er betont aber, daß auch philosophische Gründe für seine Untersuchung der Arithmetik ausschlaggebend waren:

„Mich haben auch philosophische Beweggründe zu solchen Untersuchungen bestimmt. Die Fragen nach der apriorischen oder aposteriorischen, der synthetischen oder analytischen Natur der arithmetischen Wahrheiten harren hier ihrer Beantwortung. Denn, wenn auch diese Begriffe selbst der Philosophie angehören, so glaube ich doch, daß die Entscheidung nicht ohne Beihilfe der Mathematik erfolgen kann". (GLA, S. 3.)

Diese Begriffe erläutert Frege so:

„Jene Unterscheidungen von apriori und aposteriori, synthetisch und analytisch betreffen nun nach meiner Auffassung nicht den Inhalt des Urteils, sondern die Berechtigung zur Urteilsfällung". (GLA, S. 3.)

Unter welche dieser Begriffe ein Urteil fällt, ergibt sich bei dem Versuch, einen

„Beweis zu finden und ihn bis auf die Urwahrheiten zurückzuverfolgen. Stößt man auf diesem Wege nur auf die allgemeinen logischen Gesetze und auf Definitionen so hat man eine analytische Wahrheit, wobei vorausgesetzt wird, daß auch die Sätze mit in Betracht gezogen werden, auf denen etwa die Zulässigkeit einer Definition beruht. Wenn es aber nicht möglich ist, den Beweis zu führen, ohne Wahrheiten zu benutzen, welche nicht allgemein logischer Natur sind, sondern sich auf ein besonderes Wissensgebiet beziehen, so ist der Satz ein synthetischer. Damit eine Wahrheit aposteriori sei, wird verlangt, daß ihr Beweis nicht ohne Berufung auf Tatsachen auskomme; d. h. auf unbeweisbare Wahrheiten ohne Allgemeinheit, die Aussagen von bestimmten Gegenständen enthalten. Ist es dagegen möglich, den Beweis ganz aus allgemeinen Gesetzen zu führen, die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind, so ist die Wahrheit apriori. Von diesen philosophischen Fragen ausgehend kommen wir zu derselben Forderung, welche unabhängig davon auf dem Gebiete der Mathematik selbst erwachsen ist:

die Grundsätze der Arithmetik, wenn irgend möglich, mit größter Strenge zu beweisen; denn nur wenn aufs sorgfältigste jede Lücke in der Schlußkette vermieden wird, kann man mit Sicherheit sagen, auf welche Urwahrheiten sich der Beweis stützt; und nur wenn man diese kennt, wird man jene Fragen beantworten können". (GLA, S. 4.)

Für Frege fällt also analytische Wahrheit mit logischer Wahrheit zusammen. Wir würden sie heute weiter fassen, nämlich so, daß ein Satz analytisch wahr ist, wenn sich seine Wahrheit aus den semantischen Regeln der Sprache ergibt. Für Frege gilt ferner ein Satz apriorisch, wenn er entweder ein allgemeiner evidenter Satz ist – allgemeine Sätze sind nicht aufgrund von Erfahrungen evident, so daß die Evidenz sich jedenfalls nicht allein auf Erfahrungen beziehen kann –, oder allein aus solchen Sätzen folgt. Frege behauptet hier nicht, daß es synthetisch-apriorische Sätze gibt.

Nach Frege gehören Mathematik und Logik (als Theorie der Begriffe (Definitionen) und Beweise) aufs engste zusammen:

„So sehr sich nun die Mathematik jede Beihilfe vonseiten der Psychologie verbitten muß, so wenig kann sie ihren engen Zusammenhang mit der Logik verleugnen. Ja, ich stimme der Ansicht derjenigen bei, die eine scharfe Trennung für untunlich halten. Soviel wird man zugeben, daß jede Untersuchung über die Bündigkeit einer Beweisführung oder die Berechtigung einer Definition logisch sein muß. Solche Fragen sind aber gar nicht von der Mathematik abzuweisen, da nur durch ihre Beantwortung die nötige Sicherheit erreichbar ist". (GLA, S. XXI.)

Die Zusammengehörigkeit von Arithmetik und Logik ist dabei enger als die von Geometrie und Logik, denn die euklidischen Axiome sind zwar durch die Anschauung ausgezeichnet, es sind aber räumliche Strukturen denkbar, die diese Axiome nicht erfüllen.

„Diese Möglichkeit zeigt, daß die geometrischen Axiome von einander und von den logischen Urgesetzen unabhängig, also synthetisch sind. Kann man dasselbe von den Grundsätzen der Zahlenwissenschaft sagen? Stürzt nicht alles in Verwirrung, wenn man einen von diesen leugnen wollte? Wäre dann noch Denken möglich? Liegt nicht der Grund der Arithmetik tiefer als der alles Erfahrungswissens, tiefer selbst als der der Geometrie? Die arithmetischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des Zählbaren. Dies ist das umfassendste; denn nicht nur das Wirkliche, nicht nur das Anschauliche gehört ihm an, sondern alles Denkbare. Sollten also nicht die Gesetze der Zahlen mit denen des Denkens in der innigsten Verbindung stehen?" (GLA, S. 21.)

In FTA sagt Frege, seine Auffassung sei,

„daß alle arithmetischen Sätze allein aus Definitionen rein logisch abgeleitet werden können und demzufolge auch abgeleitet werden müssen. Hierdurch wird die Arithmetik in einen Gegensatz zur Geometrie gebracht, welche, wie wohl kein Mathematiker bezweifelt, gewisser, ihr eigentümlicher Axiome bedarf, deren Gegenteil – rein logisch betrachtet – ebenso möglich, d. h. ohne Widerspruch wäre. Von allen den Gründen, welche für diese Ansicht sprechen, will ich nur einen hier anführen, der auf der umfassenden Anwendbarkeit der arithmetischen Lehren beruht. In der Tat kann man so ziemlich alles zählen, was Gegenstand des Denkens werden kann: Ideales so gut wie Reales, Begriffe wie Dinge, Zeitliches so gut wie Räumliches, Ereignisse wie Körper, Methoden so gut wie Lehrsätze; auch die Zahlen selbst kann man wieder zählen. Es wird eigentlich nichts verlangt als eine gewisse Schärfe der Abgrenzung, eine gewisse logische Vollkommenheit. Daraus ist doch wohl so viel zu entnehmen, daß die Grundsätze, auf denen sich die Arithmetik aufbaut, sich nicht auf ein engeres Gebiet beziehen dürfen, dessen Eigentümlichkeit sie so zum Ausdruck bringen wie die Axiome der Geometrie die des Räumlichen; sondern jene Grundsätze müssen sich auf alles Denkbare erstrecken; und einen solchen allgemeinsten Satz zählt man doch wohl mit Recht der Logik zu. Ich ziehe nun aus dieser logischen oder formalen Natur der Arithmetik einige Folgerungen. Erstens: es ist keine scharfe Grenze zwischen Logik und Arithmetik zu ziehen; vom wissenschaftlichen Gesichtspunkte aus betrachtet sind beide eine einheitliche Wissenschaft. Wenn man der Logik die allgemeinsten Grundsätze und vielleicht die allernächsten Folgerungen zuweist, der Arithmetik hingegen die weitere Ausbildung, so ist das so, als ob man von der Geometrie eine eigene Wissenschaft der Axiome abtrennen wollte. Nun wird ja die Verteilung des gesamten Wissensgebietes an die Wissenschaften nicht allein von theoretischen, sondern auch von praktischen Gesichtspunkten bestimmt, und ich will hiermit nichts gegen eine gewisse praktische Trennung sagen; nur darf sie nicht zu einer Kluft werden, wie es jetzt zu beiderseitigem Schaden der Fall ist ... Meine zweite Folgerung ist, daß es keine eigentümlich arithmetischen Schlußweisen gibt, welche sich nicht auf die allgemeinen der Logik zurückführen lassen. Wenn eine solche Zurückführung bei einer Schlußweise nicht möglich wäre, so entstände die Frage nach dem Erkenntnisgrunde für ihre Richtigkeit. Die räumliche Anschauung kann es in der Arithmetik nicht sein; denn dadurch würde diese Wissenschaft auf das Geometrische, wenigstens in bezug auf einen Teil ihrer Sätze eingeschränkt werden; physikalische Beobachtung ebensowenig, weil sie damit ihre allgemeine, über das Physikalische weit hinausreichende Anwendbarkeit gleichfalls einbüßen würde. Es bleibt also nur übrig, die rein logische Natur der arithmetischen Schlußweisen anzuerkennen. Damit entsteht zugleich die Aufgabe, diese Natur da ans Licht zu setzen, wo sie unmittelbar nicht erkannt werden kann, was in den Schriften der Mathematiker sehr oft der Fall ist ... Meine dritte Folgerung bezieht sich auf die Definitionen wie die zweite auf die Schlußweisen. Bei jeder Definition muß man etwas als bekannt voraussetzen, mittels dessen man erklärt, was man unter einem Namen oder Zeichen verstehen will. Man wird einen Winkel nicht wohl definieren können, ohne die Kenntnis der geraden Linie vorauszusetzen. Nun mag das, worauf man sich bei der Definition stützt, selbst früher definiert sein; immer aber wird man beim weiteren Rückgange zuletzt etwas antreffen, was undefinierbar ist, als Einfaches, nicht weiter Auflösbares anerkannt werden muß. Und die Eigenschaften, welche diesen Urbausteinen der Wissenschaft zukommen, enthalten wie im Keime deren ganzen Inhalt. In der Geometrie spricht man diese Eigenschaften in den Axiomen aus, soweit sie voneinander unabhängig sind. Nun ist es klar, daß die Grenzen einer Wissenschaft durch die Natur ihrer Urbausteine bestimmt sind. Haben wir es ursprünglich wie in der Geometrie mit räumlichen Gebilden zu tun, so wird auch die Wissenschaft auf das Räumliche eingeschränkt sein. Wenn also die Arithmetik von allen besonderen Eigenschaften der Dinge unabhängig sein soll, so muß dasselbe von ihren Urbausteinen gelten: sie müssen rein logischer Natur sein. Daraus ergibt sich die Forderung, alles Arithmetische durch Definitionen auf das Logische zurückzuführen". (KS, S. 103 f.)

Frege vertritt also einen *Logizismus* bzgl. der Arithmetik, d. h. die These von ihrer rein logischen Begründbarkeit. In GLA weist er kurz auf ähnliche Ideen bei Leibniz und W. St. Jevons hin (GLA, S. 21 f.).

4.2 Destruktiver Teil

Frege kritisiert zunächst einige Ansichten über die Natur arithmetischer Sätze. Er unterscheidet dabei singuläre *Zahlformeln* wie $3+4=7$ von generellen *Zahlgesetzen* wie dem Assoziationsgesetz der Addition $x+(y+z) = (x+y)+z$. Gegen Kants These von der synthetischen Natur von Zahlformeln wendet er ein, daß Aussagen wie $135664 + 37863 = 173527$ nicht anschaulich evident genannt werden können (GLA, S. 6):

„Kant hat offenbar nur kleine Zahlen im Sinne gehabt. Dann würden die Formeln für große Zahlen beweisbar sein, die für kleine durch die Anschauung unmittelbar einleuchten. Aber es ist mißlich, einen grundsätzlichen

Unterschied zwischen kleinen und großen Zahlen zu machen, besonders da eine scharfe Grenze nicht zu ziehen sein möchte". (GLA, S. 6.)

Frege weist auch darauf hin, daß Kants Definition der analytischen Sätze (in KrV, B10) ganz ungenügend ist, da sie sich nur auf Sätze der Form „Alle S sind P" bezieht. Daher hat auch Kants These, arithmetische Sätze seien nicht analytisch, für den Logizismus wenig Gewicht:

„Kant hat den Wert der analytischen Urteile offenbar – wohl in Folge einer zu engen Begriffsbestimmung – unterschätzt, obgleich ihm der hier benutzte weitere Begriff vorgeschwebt zu haben scheint. Wenn man seine Definition zu Grunde legt, ist die Einteilung in analytische und synthetische Urteile nicht erschöpfend. Er denkt an den Fall des allgemein bejahenden Urteils. Dann kann man von einem Subjektsbegriffe reden und fragen, ob der Prädikatsbegriff in ihm – zufolge der Definition – enthalten sei. Wie aber, wenn das Subjekt ein einzelner Gegenstand ist? wie, wenn es sich um ein Existentialurteil handelt? Dann kann in diesem Sinne gar nicht von einem Subjektsbegriffe die Rede sein. Kant scheint den Begriff durch beigeordnete Merkmale bestimmt zu denken; das ist aber eine der am wenigsten fruchtbaren Begriffsbildungen. Wenn man die oben gegebenen Definitionen überblickt [die Definitionen Freges in den GLA], so wird man kaum eine von der Art finden. Dasselbe gilt auch von den wirklich fruchtbaren Definitionen in der Mathematik z. B. der Stetigkeit einer Funktion". (GLA, S. 99 f.)

Gegen J. St. Mills These in (1843) von der empirischen Natur von Zahlformeln wendet Frege ein, daß Zahlnamen weder Namen für Aggregate sind, noch Zahlformeln empirische Tatsachen über die Zusammensetzung von Aggregaten wiedergeben (GLA, S. 9 ff.). Zahlgesetze sind keine aus einzelnen Beobachtungen auf induktivem Wege gewonnenen Wahrheiten. Denn erstens macht ein induktiver Schluß die Konklusion nur wahrscheinlich, und zweitens setzt die Begründung induktiver Schlüsse als wahrscheinlichkeitstheoretischer Argumente selbst schon die Arithmetik voraus, kann sie also nicht begründen (GLA, S. 16).

Gegen die Begründung von Zahlformeln, die Leibniz in den „Nouveaux Essais" (IV, 7, § 10) angibt, wendet Frege ein, daß die Zahlformeln nicht allein aus den Definitionen $2 := 1+1$, $3 := 2+1$, $n' := n+1$ folgen, sondern daß dazu arithmetische Gesetze erforderlich sind. Nach Leibniz soll der Beweis für $2+2=4$ z. B. so lauten: $2+2=2+(1+1)$, also $2+2=(2+1)+1$, also $2+2=3+1=4$. (Die

Klammern fehlen bei Leibniz.) Hier wird jedoch das assoziative Gesetz $a+(b+c) = (a+b)+c$ angewendet. Über die Begründung solcher allgemeinen Zahlgesetze sagt Leibniz aber nichts. Um Aussagen über alle natürlichen Zahlen zu beweisen, benötigt man auch den Begriff ‚Natürliche Zahl', den man nicht wie einzelne natürliche Zahlen definieren kann.

Frege wendet sich dann diesem Zahlbegriff und den vorgeschlagenen Analysen von Anzahlaussagen zu, wie „Fritz hat einen Bruder", „Der Planet Venus hat 0 Monde", „Der Baum hat 1000 Blätter". Er diskutiert insbesondere die Idee von I. Newton, Zahlen als Größenverhältnisse zu definieren, weist aber darauf hin, daß das wohl für rationale und reelle Zahlen angemessen ist, aber nicht für natürliche, weil die Bestimmung von Größenverhältnissen bereits natürliche Zahlen voraussetzt[1].

Ist nun die Anzahl eine Eigenschaft der gezählten Dinge? Ist „ein Bruder" zu verstehen wie „guter Bruder", ist „ein" ein Attribut? Offenbar nicht, denn jeder Gegenstand ist einer, also hätte dieses Attribut keinen Inhalt. Und wenn man sagt „Der Baum hat 1000 Blätter", so legt man die Zahl 1000 nicht den einzelnen Blättern als Attribut zu, sondern der Gesamtheit der Blätter. Ist die Anzahl also ein Attribut eines Aggregats, d. h. eines Haufens von Dingen? Offenbar auch nicht, denn die äußere Zusammenfassung konkreter Dinge zu einem Haufen ist nicht Voraussetzung ihrer Zählbarkeit, und wie sollte man abstrakte Entitäten zu einem Haufen zusammenfassen, also zählen können? Ferner wäre die Anzahl 0 so nicht verständlich: Es gibt keinen Haufen, der aus 0 Dingen besteht: Wenn ich die Holzstücke eines Haufens verbrenne, verschwindet auch der Haufen. Und ein Haufen, der nur aus einem Dinge besteht, ist mit diesem Ding identisch, so daß dann also „eins" wieder ein Attribut für konkrete Dinge wäre. Endlich ist die Teileigenschaft transitiv: Teile von Teilen eines Ganzen sind selbst Teile dieses Ganzen. Aggregate lassen sich also nicht eindeutig Zahlen zuordnen: Lege ich ein Buch auf den Tisch und frage „wieviel?", so kann der andere antworten „220", wenn er Seiten meint, „11000" (wenn er Zeilen meint) usw. Entsprechende Schwierigkeiten ergeben sich bei dem

[1] Vgl. GLA, S. 25f. sowie die Darstellung von Freges Einführung der reellen Zahlen in 7.2.

Versuch, Anzahlen als Vielheiten von Dingen zu definieren. Denn dann wären 5 Tomaten und 5 Fixsterne verschiedene Anzahlen, und es gäbe keine Zahl 0 (GLA, S. 38 f.).

In GLA, S. 105 ff., FTA, GGA II, S. 96–128 und dem Aufsatz „Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen" (1908) hat sich Frege auch mit der von ihm sog. „formalen Arithmetik" auseinandergesetzt, die von H. Hankel, H. E. Heine und J. Thomae vertreten wurde. Thomae schreibt:

„Die formale Auffassung der Zahlen zieht sich bescheidenere Grenzen als die logische. Sie fragt nicht, was sind und was wollen die Zahlen, sondern sie fragt, was braucht man von den Zahlen in der Arithmetik. Die Arithmetik ist nun für die formale Auffassung ein Spiel mit Zeichen, die man wohl leere nennt, womit man sagen will, daß ihnen (im Rechenspiel) kein anderer Inhalt zukommt als der, der ihnen in Bezug auf ihr Verhalten gegenüber gewissen Verknüpfungsregeln (Spielregeln) beigelegt wird. Ähnlich bedient sich der Schachspieler seiner Figuren, er legt ihnen gewisse Eigenschaften bei, die ihr Verhalten im Spiel bedingen, und die Figuren sind nur das äußere Zeichen für dies Verhalten. Zwischen dem Schachspiel und der Arithmetik findet freilich ein bedeutsamer Unterschied statt. Die Schachspielregeln sind willkürliche, das System der Regeln der Arithmetik ist ein solches, daß die Zahlen mittels einfacher Axiome auf anschauliche Mannigfaltigkeiten bezogen werden können und uns in Folge dessen wesentliche Dienste in der Erkenntnis der Natur leisten". (Zitiert in GGA II, S. 97 f.)

Das klingt zunächst so, als würde die formale Arithmetik die Grundgesetze der Arithmetik, also die Peanoaxiome, als implizite Definitionen der darin vorkommenden Grundterme (0, x′ (Nachfolger von x) und N (Menge der natürlichen Zahlen)) auffassen. Dieses Axiomensystem hat nun verschiedene Modelle. So wären z. B. die Strichfolgen /, //, ///, ... ein Modell, bei dem / die 0 darstellt, X/ den Nachfolger der Strichfolge X, und die Menge aller Strichfolgen beliebiger Längen die Menge N. Es wäre nicht Ziel der formalen Arithmetik, eines dieser Modelle auszuzeichnen. Dieser Ansatz wird jedoch bei Hankel, Heine und Thomae nicht konsequent durchgeführt. Zahlterme werden einmal als Namen für Zahlen, das anderemal selbst als Zahlen angesehen und die Ausführungen setzen die gewöhnliche inhaltliche Arithmetik voraus, so daß Frege leichtes Spiel hat, sie vernichtend zu kritisieren. Seine Argumente sind daher auch nur mehr zum Teil von Interesse. Ihm ging es um eine Begründung der Arithmetik, nicht um die Definition einer algebraischen Struktur, auch nicht nur um die Angabe eines logischen Modells der Peanoaxiome, sondern um eine Definition der Zahlen als Anzahlen. Eine solche Definition mußte für ihn von vornherein so angesetzt werden, daß man z. B. von der Aussage: „In diesem Zimmer befinden sich Fritz und Hans und sonst niemand", ohne weiteres zu der Aussage übergehen kann: „Die Anzahl der in diesem Zimmer befindlichen Personen ist 2". Man kann zwar auch für anders definierte Zahlen festlegen: Die Menge M enthält genau n Elemente, wenn sie sich eindeutig auf die Menge $\{0, \ldots, n\text{-}1\}$ abbilden läßt. Frege wollte jedoch eine Antwort auf die Frage geben, was *die* Zahlen sind, und da Kardinalzahlen zum Zählen verwendet werden, muß diese ihre Funktion schon in den Begriff der Anzahl eingehen. So sagt er zur formalen Arithmetik:

„Das Wertvolle an ihr ist nur dies. Man beweist, daß wenn Operationen gewisse Eigenschaften wie die Assoziativität und die Kommutativität haben, gewisse Sätze von ihnen gelten. Man zeigt nun, daß die Addition und Multiplikation, welche man schon kennt, diese Eigenschaften haben, und kann nun sofort jene Sätze von ihnen aussprechen, ohne den Beweis in jedem einzelnen Falle weitläufig zu wiederholen. Erst durch diese Anwendung auf anderweitig gegebene Operationen, gelangt man zu den bekannten Sätzen der Arithmetik. Keineswegs darf man aber glauben die Addition und die Multiplikation auf diesem Wege einführen zu können. Man gibt nur eine Anleitung für die Definitionen, nicht diese selbst. Man sagt: der Name „Addition" soll nur einer thetischen, vollkommen eindeutigen, assoziativen Operation gegeben werden, womit diejenige, welche nun so heißen soll, noch gar nicht angegeben ist". (GLA, 109 f.)

4.3 Anzahlbegriffe

Im zweiten, konstruktiven Teil der GLA skizziert nun Frege seinen eigenen Ansatz zur Begründung der Arithmetik. Die Exposition ist unformal, d. h. begriffsschriftliche Formeln kommen nicht vor. Frege entwickelt nur sein Programm, die Ausführung bleibt den GGA vorbehalten. Er sagt daher zum Abschluß auch nur:

„Ich hoffe in dieser Schrift wahrscheinlich gemacht zu haben, daß die arithmetischen Gesetze analytische Urteile und folglich a priori sind. Demnach würde die Arithmetik nur eine weiter ausgebildete Logik, jeder arithmetische Satz ein logisches Gesetz, jedoch ein abgeleitetes sein". (GLA, S. 99.)

Nachdem Frege schon gezeigt hat, daß der Anwendungsbereich von Anzahlbegriffen weder die gezählten Dinge, noch Aggregate dieser Dinge sind, legt er nun dar, daß einstellige *Begriffe* die gesuchten Argumente sind. Bei dieser Deutung verschwinden die früher aufgewiesenen Probleme:

1) Begriffe können im Gegensatz zu Dingen und Aggregaten auch leer sein; daher ist auch die 0 als Anzahl eines leeren Begriffs definiert.

2) Da der Begriff, unter den nur ein einziger Gegenstand fällt, von diesem verschieden ist, erscheint auch die Anzahl 1 als Attribut eines Begriffs, nicht eines Dings. Die Aussage „Die Anzahl der Erdmonde ist 1" sagt also nichts über den Mond aus, legt ihm keine Eigenschaft bei, sondern ist eine Aussage über den Begriff ‚Erdmond'.

3) Zu jedem Begriff gehört eine wohlbestimmte Menge von Gegenständen, auf die er zutrifft (sein Umfang). Die Elementschaftsrelation ist im Gegensatz zur Teil-Ganzes-Relation nicht transitiv, so daß die Anzahl eines Begriffs (einer Klasse) eindeutig festliegt.

4) Nun wird auch die vorher problematisch gebliebene Rolle der Abstraktion beim Zählen deutlich: Man bringt die zu zählenden Dinge zunächst unter einen Begriff, der genau auf sie zutrifft, und bestimmt dann die Anzahl dieses Begriffs.

Frege findet einen ähnlichen Gedanken schon bei Spinoza und auch bei Schröder, sieht ihn aber bei beiden nicht klar genug formuliert (GLA, S. 62f.). Er verweist auch darauf, daß wir in der normalen Sprache Zahlangaben immer auf Begriffe beziehen und z. B. von „Vier Faß Wein" oder „12 Mann" sprechen.

Man kann nun die endlichen Anzahlbegriffe so definieren – $A_n(f)$ bedeute, daß dem Begriff f die Anzahl n zukommt:

$A_0(f) := \neg \bigvee x fx$

$A_1(f) := \bigvee x \bigwedge y (fy \equiv x=y)$

$A_{n+1}(f) := \bigvee x (fx \wedge A_n(\alpha y(fy \wedge y \neq x)))$ (GLA, S. 67.)

(Dabei sei α wieder das Zeichen für Begriffsabstraktion, d. h. $\alpha x Fx$ ist der Begriff F.)

Damit ist eine Folge $A_0, A_1, A_2, \ldots$ von Begriffen definiert, aber noch nicht die Zahlen als Objekte. Man kann statt $A_n(f)$ nicht schreiben $A(f)=n$, da die Zahlen n noch nicht erklärt sind (GLA, S. 7f.).

4.4 Kardinalzahlen

Anzahlen sind Objekte, nicht Begriffe, und Frege will sie als solche definieren. Die Einführung der Anzahlbegriffe $A_n(f)$ dient zunächst nur dazu, Anzahlaussagen als Aussagen von Begriffen zu charakterisieren. Um nun Zahlen als Gegenstände zu definieren schlägt Frege den Weg einer *Definition durch Abstraktion* ein, den er zunächst am Beispiel des Begriffs ‚Richtung einer Geraden' illustriert (GLA, S. 74 f.). Allgemein läßt sich diese Definitionsart so beschreiben: Es sei eine Äquivalenzrelation $R(x, y)$ auf einer Menge M definiert, d. h. eine reflexive, symmetrische und transitive Relation. Ist dann $[x]$ die Äquivalenzklasse von x bzgl. der Relation R, d. h. $[x] = \{y: R(x, y)\}$, so gilt $R(x, y) \equiv [x] = [y]$ (*). $[x]$ stellt also eine Funktion auf M dar, die jedem $x \varepsilon M$ einen Gegenstand $[x]$ zuordnet, so daß (*) gilt.

Frege wählt nun für die Einführung der Zahlen die Äquivalenzrelation der *Gleichzahligkeit* von Begriffen[2].

D1: $EE(r) := \bigwedge xyz(r(x, y) \wedge r(x, z) \supset y = z) \wedge \bigwedge xyz(r(x, y) \wedge r(z, y) \supset x = z)$ — r ist eine *eineindeutige* Relation (GLA, S. 81 f.)

D2: $f \sim g := \bigvee r(EE(r) \wedge \bigwedge x(fx \supset \bigvee y(gy \wedge r(x, y))) \wedge \bigwedge y(gy \supset \bigvee x(fx \wedge r(x, y))))$ — Die Umfänge von f und g sind *gleichzahlig,* d. h. es gibt eine eineindeutige Relation, in der ihre Elemente zueinander stehen (GLA, S. 83).

D3: $A(f) := \{g: f \sim g\}$ — die *Anzahl des Begriffes f,* d. h. der Umfang des Begriffes ‚gleichzahlig mit f' (GLA, S. 79 f., 85).

D4: $AZ(x) := \bigvee f(A(f) = x)$ — x ist eine *Anzahl* (Kardinalzahl) (GLA, S. 85).

D5: $0 := A(\alpha x(x \neq x))$

D6: $Nf(x, y) := \bigvee fz(fz \wedge A(f) = y \wedge A(\alpha u(fu \wedge u \neq z)) = x)$ (GLA, S. 89)
— y *folgt* in der Reihe der natürlichen Zahlen *unmittelbar* auf x

[2] Er bezieht sich dabei u. a. auf Hume, Schröder und Cantor, vgl. GLA, S. 73 f.

D7: $N(x) \quad := \quad Nf^{\geq 0}(0, x)$ — x ist eine natürliche Zahl (GLA, S. 96)[3].

Frege weist auch auf *transfinite Kardinalzahlen* hin. Er schreibt ∞_1 statt $\aleph_0$, setzt $\infty_1 := A(\alpha x N(x))$ und beweist $Nf(\infty_1, \infty_1)$. Mit $N(x) \supset \neg Nf(x, x)$ ergibt sich daraus $\neg N(\infty_1)$. Er beruft sich dabei auf Cantor (GLA, 97 ff.), bemerkt aber, daß dessen Definition des Folgens in einer Reihe nicht korrekt sei.

Frege schiebt vor den Schritt zu D3 noch folgende Überlegung ein, die im Blick auf das Vorgehen in den GGA von Interesse ist: Er definiert zunächst nicht die Funktion A(f), sondern nur Gleichungen zwischen Anzahlen durch

1) $A(f) = A(g) := f \sim g$ (GLA, S. 73 ff.).

Er wendet dagegen aber ein, daß damit Anzahlen nicht zureichend bestimmt werden[4]. So ist z. B. nach (1) nicht klar, ob Julius Caesar eine Anzahl ist. Allgemein werden durch (1) Sätze der Form $a = A(f)$, in denen der Term a nicht die Gestalt A(g) hat, nicht erklärt (GLA, 77 f.). Das ist der Anlaß dafür, daß Frege zu D3 übergeht. Dabei setzt er nun Begriffsumfänge, d. h. Klassen voraus – offenbar nicht ganz ohne Bedenken, denn er merkt an (GLA, S. 80), er glaube, daß man für „Umfang des Begriffs" einfach „Begriff" sagen könne. Aber das ist nach den späteren Aussagen Freges (vgl. dazu die Abschnitte 5.3 und 6.2) nicht möglich, da Begriffe für Frege keine Objekte sind. Zum

[3] Frege sagt statt „natürliche Zahl" „endliche Anzahl".

[4] Es handelt sich auch um eine Kontextdefinition (vgl. dazu 9.1), die erst zu rechtfertigen wäre. Darauf weist Frege selbst hin (GLA, S. 76). Dabei wäre erstens zu zeigen: Es gibt eine Funktion A′(f), für die gilt: $A'(f) = A'(g) \equiv f \sim g$. Das kann man aber nicht beweisen, ohne Anzahlen vorauszusetzen. Zweitens wäre zu zeigen, daß die Funktion A′(f) eindeutig bestimmt ist. Das ist aber nicht der Fall, denn ist A(f) die Anzahl der Instanzen von f, so erfüllt auch $A'(f) = A(f) + m$ die Gleichung (1). – Frege kritisiert mit dem Versuch A(f) durch (1) festzulegen ein Prinzip, das er noch in der Habilitationsschrift anerkannt hatte. Dort schreibt er: Wenn wir „angeben, unter welchen Bedingungen Größengleichheit stattfindet, so bestimmen wir dadurch den Größenbegriff" (KS, S. 51). Das ist natürlich unhaltbar: Ist auf einer Menge U von Objekten die Relation = definiert, so folgt daraus noch nichts über die Eigenschaften und Beziehungen der Objekte aus U. Von einer (vollständigen) „Bestimmung" der Elemente von U kann man erst sprechen, wenn alle Eigenschaften aller Elemente von U angegeben werden.

Abschluß der GGA (S. 117) sagt Frege sogar, er lege auf die Benützung von Begriffsumfängen „kein entscheidendes Gewicht", verkennt also hier noch, daß er damit in seine Logik ein völlig neues Element einführt, das für die Definitionen der Anzahlen unverzichtbar ist, daß er mit der Verwendung von Klassen wesentlich über den Rahmen der Logik der BS hinausgeht. In den GGA will Frege dagegen Klassen bzw. Wertverläufe selbst mit einer Definition wie (1) erklären.

Verwendet man nun Klassen, so kann man auch den Anzahlbegriff in Anwendung auf Klassen erklären – Frege tut das in GLA nicht, er wäre wohl der Meinung gewesen, daß man ihn dann für alle Objekte definieren müßte – und kann so setzen:

D2′: $a \sim b \quad := \quad \bigvee r(EE(r) \wedge \bigwedge x(x\varepsilon a \supset \bigvee y(y\varepsilon b \wedge r(x, y))) \wedge \bigwedge y(y\varepsilon b \supset \bigvee x(x\varepsilon a \wedge r(x, y))))$

D3′: $A(a) \quad := \quad \{x\colon x \sim a\}$

D5′: $0 \quad := \quad A(\Lambda)$, wo Λ die leere Menge ist ($\Lambda := \{x\colon x \neq x\}$).

D6′: $Nf(x, y) := \bigvee zu(z\varepsilon u \wedge A(u) = y \wedge A(u - \{z\}) = x)$.

Das entspricht modernen Darstellungen. Es gilt dann

$0 = A(\Lambda) = \{\Lambda\}$ ($\{a_1, \ldots, a_n\}$ ist die Menge, die genau die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ enthält.)

$1 = A(\{0\})$

$2 = A(\{0, 1\})$

$\vdots$

$n = A(\{0, 1, \ldots, n\text{-}1\})$.

J. von Neumann setzt statt dessen $0 = \Lambda$, $1 = \{0\}$, …, $n' = n \cup \{n\} = \{0, \ldots, n\}$. Das ist einerseits einfacher, andererseits aber keine Definition der Zahlen im Sinn Freges, da die Funktion $A(a)$ und damit die Aussage $A(a) = n$ nicht erklärt ist, sondern zusätzlich durch $a \sim n$ erklärt werden muß.

4.5 Beweis der Peanoaxiome

Frege hat in GLA nur einige arithmetische Theoreme bewiesen. Den Beweis der zentralen Gesetze hat er erst in den GGAI geliefert. Wir wollen jedoch schon hier zeigen, daß seine Definitionen die Peanoaxiome erfüllen. Diese Axiome lauten:[5]

[5] Zur intuitiven Begründung der Peanoaxiome und ihrer Entstehung aus denen von Dedekind (1888) vgl. z. B. Kutschera (1967), S. 266 ff. – Das

P1: $N(0)$
P2: $\bigwedge x(N(x) \supset N(x'))$
P3: $\bigwedge xy(x'=y' \supset x=y)$
P4: $\bigwedge x(x' \neq 0)$
P5: $\bigwedge f(f(0) \wedge \bigwedge x(N(x) \wedge f(x) \supset f(x')) \supset \bigwedge x(N(x) \supset f(x))$.
Dabei ist x' der Nachfolger von x. Wenn man statt dieser Nachfolgerfunktion eine Relation des unmittelbaren Nachfolgens $Nf(x, y)$ verwendet, wie Frege das tut, so lauten P2 bis P5 so:
P2*: $\bigwedge xy(N(x) \wedge Nf(x, y) \supset N(y))$
P3*: $\bigwedge xyz(Nf(x, z) \wedge Nf(y, z) \supset x=y)$
P4*: $\bigwedge x \neg Nf(x, 0)$
P5*: $\bigwedge f(f(0) \wedge \bigwedge xy(N(x) \wedge f(x) \wedge Nf(x, y) \supset f(y)) \supset \bigwedge x(N(x) \supset f(x)))$
und es kommen zwei weitere Axiome hinzu:
P6*: $\bigwedge xyz(Nf(x, y) \wedge Nf(x, z) \supset y=z)$
P7*: $\bigwedge x(N(x) \supset \bigvee y Nf(x, y))$.

Beweis (Wir verwenden im folgenden als Argumente Klassen statt Begriffe):
P1: Aus $0=0$ folgt $Nf^{\geq 0}(0, 0)$ (vgl. BS, S. 71), also nach D7 $N(0)$.
P2*: Es gilt allgemein $F^{\geq 0}(x, y) \wedge F(y, z) \supset F^{\geq 0}(x, z)$ (vgl. BS, 74), also gilt $Nf^{\geq 0}(0, x) \wedge Nf(x, y) \supset Nf^{\geq 0}(0, y)$. Daraus folgt die Behauptung mit D7.
P6*: Gilt $Nf(x, y)$ und $Nf(x, z)$, so gibt es nach D6′ Klassen u, u', v, v', so daß gilt
$A(u)=y \wedge v \varepsilon u \wedge A(u-\{v\})=x$ und
$A(u')=z \wedge v' \varepsilon u' \wedge A(u'-\{v'\})=x$, also
$u-\{v\} \sim u'-\{v'\}$, also $u \sim u'$, also $A(u)=A(u')$ also $y=z$.
(Vgl. GLA, S. 85).
P3*: Gilt $Nf(x, z)$ und $Nf(y, z)$, so gibt es nach D6′ Klassen u, u', v, v', so daß
$A(u)=z \wedge v \varepsilon u \wedge A(u-\{v\})=x$ und
$A(u')=z \wedge v' \varepsilon u' \wedge A(u'-\{v'\})=y$, also
$u' \sim u$, also $u-\{v\} \sim u'-\{v'\}$, also $A(u-\{v\})=A(u'-\{v'\})$, also $x=y$. (Vgl. GLA, S. 91 und GGAI, Satz 89.)

Prinzip der vollständigen Induktion wurde schon von Pascal verwendet, wird aber meist Jakob Bernoulli (1654–1705) zugeschrieben. So spricht auch Frege von „bernoullischer Induktion“.

P4*: Ist $A(u)=0$, so nach D5 $u=\Lambda$, also $\neg\bigvee v(v\varepsilon u)$, also $\neg\bigvee uv(A(u)=0 \wedge v\varepsilon u \wedge A(u-\{v\})=x)$, also $\neg Nf(x, 0)$. (Vgl. GGAI, Satz 108.)

P5*: Wir beweisen zunächst das *schwache* Induktionsprinzip:

HS1: $\bigwedge f(f(0) \wedge \bigwedge yz(f(y) \wedge Nf(y, z) \supset f(z)) \supset \bigwedge z(N(z) \supset f(z))$.

Es gilt nun $\bigwedge yz(f(y) \wedge Nf(y, z) \supset f(z)) \equiv E(f, Nf)$ (vgl. 3.5). Gilt also $N(z)$, d. h. nach D7 $Nf^{\geq 0}(0, z)$, so $z=0$ oder $Nf^{>0}(0, z)$, d. h. $\bigwedge f(E(f, Nf) \wedge \bigwedge u(Nf(0, u) \supset f(u)) \supset f(z))$. Da nach Voraussetzung $E(f, Nf)$ und $f(0)$ gelten, gilt auch $\bigwedge u(Nf(0, u) \supset f(u))$, also $f(z)$.

Setzt man nun $f^*(x) := f(x) \wedge N(x)$, so erhält man aus HS1 $\bigwedge f(f(0) \wedge N(0) \wedge \bigwedge yz(f(y) \wedge N(y) \wedge Nf(y, z) \supset f(z) \wedge N(z)) \supset \bigwedge z(N(z) \supset N(z) \wedge f(z)))$, mit P1 und P2* also P5* (vgl. GGAI, Satz 144).

P7*: Wir setzen $F(x) := Nf(x, A(\{y{:}Nf^{\geq 0}(y, x)\}))$ – x geht der Anzahl von $\{y{:}y \leq x\}$ unmittelbar voraus – und beweisen:

HS2: $\bigwedge xy(Nf(x, y) \wedge F(x) \supset F(y))$, also $E(F, Nf)$:

Es gelte $Nf(x, y)$ und $F(x)$. Nach P6* gilt dann $y = A(\{u{:}Nf^{\geq 0}(u, x)\})$. Es ist zu zeigen $F(y)$, d. h. $Nf(y, A(\{u{:}Nf^{\geq 0}(u, y)\}))$, d. h. $\bigvee vw(A(v) = A(\{u{:}Nf^{\geq 0}(u, y)\}) \wedge w\varepsilon v \wedge A(v-\{w\})=y)$. Es sei $v=\{u{:}Nf^{\geq 0}(u, y)\}$ und $w=y$. Dann gilt $w\varepsilon v$ wegen $Nf^{\geq 0}(y, y)$, so daß zu zeigen bleibt $A(\{u{:}\ Nf^{\geq 0}(u, y)\}-\{y\})=y = A(\{u{:}\ Nf^{\geq 0}(u, x)\})$, d. h. $\{u{:}\ Nf^{\geq 0}(u, y) \wedge y \neq u\} \sim \{u{:}\ Nf^{\geq 0}(u, x)\}$. Es gilt aber $Nf^{>0}(u, y) \equiv Nf^{\geq 0}(u, x)$, d. h. die Identität der Klassen: Es gilt $Nf^{>0}(u, x) \wedge Nf(x, y) \supset Nf^{>0}(u, y)$ und $Nf^{>0}(u, y) \wedge Nf(x, y) \supset Nf^{\geq 0}(u, x)$. Es gilt ja allgemein: $r^{>0}(u, y) \supset \bigvee z(r^{\geq 0}(u, z) \wedge r(z, y))$. z' sei ein solches z für $Nf^{>0}(u, y)$, es gelte also $Nf^{\geq 0}(u, z') \wedge Nf(z', y)$. Dann gilt wegen P3* und $Nf(x, y)$ $x=z'$, also $Nf^{\geq 0}(u, x)$. Ferner gilt:

HS3: $F(0)$, d. h. $Nf(0, A(\{u{:}\ Nf^{\geq 0}(u, 0)\}))$.

Wegen $Nf^{\geq 0}(u, 0) \equiv u=0 \vee Nf^{>0}(u, 0)$ und P4*, also $\neg Nf^{>0}(u, 0)$, gilt $A(\{u{:}\ Nf^{\geq 0}(u, 0)\}) = A(\{0\})$. Nun gilt $A(\{0\}) = A(\{0\}) \wedge 0 \varepsilon \{0\} \wedge A(\{0\} - \{0\}) = 0$, also $Nf(0, A(\{u{:}\ Nf^{\geq 0}(u, 0)\}))$ nach D6′.

Mit HS1 erhalten wir aus HS2 und HS3 $\bigwedge z(N(z) \supset F(z))$ (vgl. GGAI, Satz 155), also $\bigwedge z(Nz \supset \bigvee yNf(z, y))$, d. h. P7*. (Vgl. GGAI, Satz 157.)

Frege schließt die GLA mit der Bemerkung:

„Ich erhebe nicht den Anspruch, die analytische Natur der arithmetischen Sätze mehr als wahrscheinlich gemacht zu haben, weil man immer noch zweifeln kann, ob ihr Beweis ganz aus rein logischen Gesetzen geführt werden könne, ob sich nicht irgendwo ein Beweisgrund anderer Art unvermerkt einmische. Dies Bedenken wird auch durch die Andeutungen nicht vollständig entkräftet, die ich für den Beweis einiger Sätze gegeben habe; es kann nur durch eine lückenlose Schlußkette gehoben werden, so daß kein Schritt geschieht, der nicht einer von wenigen als rein logisch anerkannten Schlußweisen gemäß ist". (GLA, S. 102.)

Die damit geforderte begriffsschriftliche Ableitung der Grundgesetze der Arithmetik hat Frege auf die GGA verschoben. Wir haben uns aber schon davon überzeugt, daß diese Ableitung möglich ist. Sie vollzieht sich freilich im Rahmen der klassischen Mengenlehre. Da diese nicht widerspruchsfrei ist, ist auch Freges Beweis der logischen Begründbarkeit der Arithmetik infrage gestellt. Im System der axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel benötigt man zur Begründung der Arithmetik das Unendlichkeitsaxiom, das besagt, daß es eine Menge gibt, die die Nullmenge – im v. Neumannschen Modell also die Zahl 0 – enthält, und zu jedem Element x die Menge $x \cup \{x\}$ – nach v. Neumann also den Nachfolger von x. Von einer Begründung der Arithmetik kann angesichts dieses Axioms dann nicht mehr die Rede sein: Man postuliert im Effekt die Menge der natürlichen Zahlen.

5 Sinn und Bedeutung

5.1 Namen

In der BS hatte Frege nur eine semantische Funktion von Namen, Prädikaten (bzw. allgemeiner: von Funktionsausdrücken) und Sätzen angenommen: sie bedeuten etwas oder haben einen „Inhalt", wie er dort sagt. Namen bedeuten Gegenstände. Wenn nun die Namen a und b dasselbe Objekt bedeuten, so besagt $a=b$ dasselbe wie $a=a$, da sich der Inhalt eines Satzes nicht ändert, wenn man in ihm einen Ausdruck durch einen bedeutungsgleichen anderen ersetzt. Da jedoch Aussagen der Form $a=b$ einen Informationsgehalt haben können, den jene der Gestalt $a=a$ nicht haben, hatte sich Frege in BS (S. 13 ff.) dafür entschieden, Identitätsaussagen als Aussagen über die Bedeutungsgleichheit der beiden Namen zu interpretieren (vgl. 3.4). Diese Deutung revidiert er nun in SB. Er schreibt:

„Die Gleichheit fordert das Nachdenken heraus durch Fragen, die sich daran knüpfen und nicht ganz leicht zu beantworten sind. Ist sie eine Beziehung? eine Beziehung zwischen Gegenständen? oder zwischen Namen oder Zeichen für Gegenstände? Das letzte hatte ich in meiner *Begriffsschrift* angenommen. Die Gründe, die dafür zu sprechen scheinen, sind folgende: $a=a$ und $a=b$ sind offenbar Sätze von verschiedenem Erkenntniswert: $a=a$ gilt a priori und ist nach Kant analytisch zu nennen, während Sätze von der Form $a=b$ oft sehr wertvolle Erweiterungen unserer Erkenntnis enthalten und a priori nicht immer zu begründen sind ... Wenn wir nun in der Gleichheit eine Beziehung zwischen dem sehen wollten, was die Namen „a" und „b" bedeuten, so schiene $a=b$ von $a=a$ nicht verschieden sein zu können, falls nämlich $a=b$ wahr ist. Es wäre hiermit eine Beziehung eines Dinges zu sich selbst ausgedrückt, und zwar eine solche, in der jedes Ding mit sich selbst, aber kein Ding mit einem anderen steht.

Was man mit $a=b$ sagen will, scheint zu sein, daß die Zeichen oder Namen „a" und „b" dasselbe bedeuten, und dann wäre eben von jenen Zeichen die Rede; es würde eine Beziehung zwischen ihnen behauptet. Aber diese Beziehung bestände zwischen den Namen oder Zeichen nur, insofern sie etwas benennen oder bezeichnen. Sie wäre eine vermittelte durch die Verknüpfung jedes der beiden Zeichen mit demselben Bezeichneten. Diese aber ist willkürlich. Man kann keinem verbieten, irgendeinen willkürlich hervorzubringenden Vorgang oder Gegenstand zum Zeichen für irgend etwas anzunehmen. Damit würde dann ein Satz a = b nicht mehr die Sache selbst, sondern nur noch unsere Bezeichnungsweise betreffen; wir würden keine eigentliche Erkenntnis darin ausdrücken. Das wollen wir aber doch gerade in vielen Fällen. Wenn sich das Zeichen „a" von dem Zeichen „b" nur als Gegenstand (hier durch die Gestalt) unterscheidet, nicht als Zeichen; das soll heißen: nicht in der Weise, wie es etwas bezeichnet: so würde der Erkenntniswert von a = a wesentlich gleich dem von a = b sein, falls a = b wahr ist. Eine Verschiedenheit kann nur dadurch zustande kommen, daß der Unterschied des Zeichens einem Unterschiede in der Art des Gegebenseins des Bezeichneten entspricht". (KS, S. 143 f.)

Es liegt daher nahe,

„mit einem Zeichen (Namen, Wortverbindung, Schriftzeichen) außer dem Bezeichneten, was die *Bedeutung* des Zeichens heißen möge, noch das verbunden zu denken, was ich den *Sinn* des Zeichens nennen möchte, worin die Art des Gegebenseins enthalten ist". (KS, S. 144.)
„Ein Eigenname (Wort, Zeichen, Zeichenverbindung, Ausdruck) *drückt aus* seinen Sinn, *bedeutet* oder *bezeichnet* seine Bedeutung. Wir drücken mit einem Zeichen dessen Sinn aus und bezeichnen mit ihm dessen Bedeutung". (KS, S. 147.)

Frege nimmt also – zunächst für Namen – zwei semantische Funktionen an: Sie drücken einen Sinn aus und bezeichnen eine Bedeutung. Diese Terminologie macht uns heute Schwierigkeiten: Wir nennen den Sinn eines Ausdrucks auch dessen „Bedeutung" und das, was Frege „Bedeutung" nennt, seinen „Bezug", seine „Extension" oder „Denotation". Um Mißverständnisse zu vermeiden, versehen wir das Wort „Bedeutung" im folgenden mit dem Index F, wo es im Sinne Freges (also als Bezug) zu verstehen ist.

Es gibt Namen, wie „Odysseus" oder „Die kleinste reelle Zahl, die größer ist als 1", die keinen (realen) Gegenstand bezeichnen, also nichts bedeuten$_F$, jedoch einen Sinn haben. Der Sinn eines Namens bestimmt – in Verbindung mit den Tatsachen –, ob er eine Bedeutung$_F$ hat und welche Bedeutung$_F$ er ggf. hat.

„Die regelmäßige Verknüpfung zwischen dem Zeichen, dessen Sinn und dessen Bedeutung ist derart, daß dem Zeichen ein bestimmter Sinn und diesem wieder eine bestimmte Bedeutung entspricht, während zu einer Bedeutung (einem Gegenstande) nicht nur ein Zeichen zugehört. Derselbe Sinn hat in verschiedenen Sprachen, ja auch in derselben verschiedene Ausdrücke. Freilich kommen Ausnahmen von diesem regelmäßigen Verhalten vor. Gewiß sollte in einem vollkommenen Ganzen von Zeichen jedem Ausdrucke ein bestimmter Sinn entsprechen; aber die Volkssprachen erfüllen diese Forderung vielfach nicht, und man muß zufrieden sein, wenn nur in demselben Zusammenhange dasselbe Wort immer denselben Sinn hat". (KS, S. 144 f.)

Verschiedene Namen können also denselben Sinn haben, und sinnverschiedene Namen können dieselbe Bedeutung$_F$ haben.

„Vielleicht kann man zugeben, daß ein grammatisch richtig gebildeter Ausdruck, der für einen Eigennamen steht, immer einen Sinn habe. Aber ob dem Sinne nun auch eine Bedeutung entspreche, ist damit nicht gesagt. Die Worte ‚der von der Erde am weitesten entfernte Himmelskörper' haben einen Sinn; ob sie aber auch eine Bedeutung haben, ist sehr zweifelhaft. Der Ausdruck ‚die am wenigsten konvergente Reihe' hat einen Sinn; aber man beweist, daß er keine Bedeutung hat, da man zu jeder konvergenten Reihe eine weniger konvergente, aber immer noch konvergente finden kann. Dadurch also, daß man einen Sinn auffaßt, hat man noch nicht mit Sicherheit eine Bedeutung". (KS, S. 145.)

Die Rede vom Bezug eines Namens bereitet nun keine Verständnisschwierigkeiten: er ist jeweils ein Gegenstand, ein Objekt, sei es ein konkretes Ding, ein geometrischer Punkt, eine Zahl oder eine Klasse. Was ist hingegen unter dem Sinn eines Namens zu verstehen? Für Frege ist es die Art, wie der bezeichnete Gegenstand durch den Namen gegeben ist. Er erläutert das am Beispiel der Namen „Schnittpunkte der Seitenhalbierenden von a und b in einem Dreieck" und „Schnittpunkt der Seitenhalbierenden von b und c": Beide Namen bezeichnen denselben Punkt, beschreiben ihn aber in verschiedener Weise, eben einmal als jenen Punkt, in dem sich die Seitenhalbierenden von a und b schneiden, und zum anderen als jenen Punkt, in dem sich die Seitenhalbierenden von b und c schneiden. Bei solchen Kennzeichnungsausdrücken könnte man nun sagen, daß der Sinn der kennzeichnenden Prädikate den Sinn der Kennzeichnungsterme bestimmt. Damit wird jedoch erstens der Sinn solcher Namen auf jenen von Prädikaten zurückgeführt, der erst noch zu erklären ist, und zweitens bleibt damit die Frage nach dem Sinn von Namen offen, die keine Kennzeichnungsterme sind. Was ist z. B. der Sinn des Eigennamens „Aristoteles"? Wie wird die Person des Aristoteles durch diesen Namen „gegeben"? Diese Frage bleibt bei Frege offen.

Man kann – im Blick auf das folgende – nur sagen, daß er den Begriff des Sinns – von Namen wie von Sätzen und Prädikaten – so eng faßt, daß zwei Ausdrücke genau dann denselben Sinn haben, wenn sie synonym sind, d. h. in allen Kontexten *salva veritate* durcheinander ersetzt werden können.

5.2 Sätze

Die Unterscheidung von Sinn und Bedeutung bei Namen führt Frege nun dazu, eine entsprechende Unterscheidung auch bei Sätzen vorzunehmen. Er geht davon aus, daß die Bedeutung$_F$ eines Satzes eine Funktion der Bedeutungen$_F$ der in ihm vorkommenden Namen ist (KS, S. 148). Sie ist also invariant bzgl. der Ersetzung bedeutungsgleicher$_F$ Namen. Nun ändert sich jedoch die Proposition, oder wie Frege sagt, der *Gedanke,* den ein Satz ausdrückt, bei einer solchen Ersetzung. Ersetzt man z. B. in dem Satz „Der Morgenstern ist identisch mit dem Morgenstern" das zweite Vorkommnis des Namens „Morgenstern" durch den bedeutungsgleichen$_F$ Namen „Abendstern", so ändert sich der Gedanke – der Satz ist nun keine Tautologie mehr, sondern hat einen Erkenntniswert. Daher kann der Gedanke nicht die Bedeutung$_F$ eines Satzes sein. Was bei der Ersetzung invariant bleibt, ist der Wahrheitswert des Satzes. Ihn sieht Frege daher als Satzbedeutung$_F$ an. Er sagt: Hätten Sätze nur einen Sinn, aber keine Bedeutung$_F$, so käme es auch auf die Bedeutung$_F$ der Namen im Satze nicht an. Deren Bedeutung$_F$ wird aber genau dann relevant, wenn es auf den Wahrheitswert des Satzes ankommt. Verstehen wir den Satz „Odysseus war Herrscher von Ithaka" als Aussage der Dichtung, so kommt es nicht darauf an, ob der Name „Odysseus" eine historische Person bezeichnet und ebensowenig auf die Wahrheit des Satzes. Sehen wir diesen aber als historische Aussage an, so müssen die Namen in ihm eine Bedeutung$_F$ haben.

„Das Streben nach Wahrheit also ist es, was uns überall vom Sinn zur Bedeutung vorzudringen treibt. Wir haben gesehen, daß zu einem Satze immer dann eine Bedeutung zu suchen ist, wenn es auf die Bedeutung der Bestandteile ankommt; und das ist immer dann und nur dann der Fall, wenn wir nach dem Wahrheitswerte fragen. So werden wir dahin gedrängt, den Wahrheitswert eines Satzes als seine Bedeutung anzuerkennen. Ich verstehe unter dem Wahrheitswert eines Satzes den Umstand, daß er wahr oder daß er falsch ist. Weitere Wahrheitswerte gibt es nicht. Ich nenne der Kürze halber den einen *das Wahre*, den anderen *das Falsche*. Jeder Behauptungssatz, in dem es auf die Bedeutung der Wörter ankommt, ist also als Eigenname aufzufassen, und zwar ist seine Bedeutung, falls sie vorhanden ist, entweder das Wahre oder das Falsche". (KS, S. 149.)

Ein Satz bezeichnet also nach Frege einen Wahrheitswert und drückt einen Gedanken aus. Wie der Bezug des Satzes eine Funktion der Bezüge der in ihm vorkommenden Namen ist, so ist auch sein Sinn eine Funktion der Sinne dieser Namen. Diese beiden Prinzipien wollen wir als *funktionale Prinzipien* bezeichnen. Aus ihnen ergeben sich die beiden *Substitutionsprinzipien,* deren erstes schon genannt wurde:

Der Bezug eines Satzes ist invariant gegenüber der Substitution bezugsgleicher Namen – allgemein: bezugsgleicher Ausdrücke.

Das zweite Prinzip lautet allgemein:

Der Sinn eines Satzes ist invariant gegenüber der Substitution sinngleicher Ausdrücke.

Umgekehrt folgen die beiden funktionalen Prinzipien aus den Substitutionsprinzipien. (Vgl. dazu KS, S. 148, 150 f.) Frege verwendet hier ein Modell der Sprache, nach dem sich Sinn und Bedeutung$_F$ eines Satzes aus dem Sinn bzw. der Bedeutung$_F$ seiner Teile ergeben. Das steht im Widerspruch zu dem *Kontextprinzip,* das er in GLA formuliert:

„Nach der Bedeutung der Wörter muß im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden" (S. XXII).
„Nur im Zusammenhang eines Satzes bedeuten die Wörter etwas" (S. 73).
„Es genügt, wenn der Satz als Ganzes einen Sinn hat; dadurch erhalten auch seine Teile ihren Inhalt" (S. 71).

Da Frege in GLA noch nicht zwischen Sinn und Bedeutung unterscheidet, gebraucht er die Wörter „Bedeutung", „Sinn" und „Inhalt" synonym. Hier sieht es also so aus, als werde der Sinn des Satzes nicht durch den der Teile festgelegt, sondern bestimme diesen. Nun ist eine Sprache ein System, in dem es endlich viele Regeln für die Bildung unendlich vieler Sätze aus einem endlichen Vokabular gibt. Grundsätzlich wird daher der Sinn komplexer Ausdrücke aus dem ihrer Teile bestimmt. In den normalen Sprachen gibt es daneben freilich auch eine Bestimmung des genaueren Sinns der Teile durch das Satzganze. So kann im Kontext von „Er öffnete das Schloß" mit „Schloß" nur ein Verschluß, nicht ein Gebäude gemeint sein, und in „This shop sells alligator shoes" können mit „alligator shoes" nur Schuhe aus Krokodilleder gemeint sein, während in „This shop sells horse shoes" mit „horse shoes" nicht Schuhe aus Pferdeleder gemeint sind, sondern „Schuhe" für Pferde (Hufeisen). In Logiksprachen, wie Frege sie aufbaute, gibt es hingegen keine kontextuellen Selektionsregeln für die Bedeutung der Teile, sondern hier herrscht allein der funktionale Aufbau. Frege ist auch auf das Kontextprinzip nach den GLA nicht mehr zurückgekommen (verwandte Gedanken kommen nur im Beweis der extensionalen Definitheit der Sprache der GGAI vor, vgl. dazu unten 7.3). In den GLA geht es Frege nur darum, daß die Bedeutung von Termen, die für Abstraktes (anschaulich nicht Vorstellbares) stehen, durch Sätze festgelegt werden kann, in denen sie vorkommen, daß also bedeutungsvolle Terme nicht immer durch solche mit einer anschaulichen Bedeutung erklärt werden müssen. Wie wir in 4.4 sahen, diskutiert er dort die Einführung des Anzahlbegriffs A(f) durch die Angabe von Wahrheitsbedingungen für Gleichungen der Form A(f) = A(g). Frege wendet dort aber selbst ein, daß durch solche Gleichungen der Sinn von A(f) nicht hinreichend festgelegt wird, und geht deshalb zu einer expliziten Definition von A(f) über. Das Kontextprinzip spielt also bei Frege keine systematisch wichtige Rolle[1].

[1] Zum Kontextprinzip vgl. Dummett (1973), S. 192ff., 496 und (1981), Kap. 19. Dummetts Deutung des Kontextprinzips als Rechtfertigung für Kontextdefinitionen ist aber nicht überzeugend: Es kann offenbar nicht alle Kontextdefinitionen rechtfertigen, denn nicht alle sind korrekt (vgl. 9.1). Der Sinn des Kontextprinzips ist, wie Frege zum Abschluß der GLA (S. 116) noch einmal betont vielmehr der, den Gebrauch von Namen zu rechtfertigen, die nicht für mentale oder physikalische Objekte stehen, wie es Zahlnamen sind. Im Sinne der Ausführungen Freges in GGAI, S. 46 (vgl. 7.3) wird man es eher so verstehen, daß ein Name Bedeutung$_F$ hat, wenn seine Einsetzung in die Argumentstelle jedes Prädikats 1. Stufe einen bedeutungsvollen$_F$ Satz ergibt. Entsprechendes gilt für Ausdrücke anderer Kategorien. Dieses Prinzip ist aber nicht haltbar: Eine Verteilung von Wahrheitswerten auf die Sätze z. B. einer prädikatenlogischen Sprache im Einklang mit der Deutung der logischen Operatoren legt (nach dem Satz von Löwenheim-Skolem) nicht den Grundbereich einer Interpretation und die Bezüge der Terme fest. Zudem ist, wenn alle Sätze der

Mit der Unterscheidung von Sinn und Bedeutung löst sich nun auch das Problem der unterschiedlichen Erkenntniswerte von Sätzen der Form a = a und solchen der Gestalt a = b:

„Wenn wir den Erkenntniswert von „a = a" und „a = b" im allgemeinen verschieden fanden, so erklärt sich das dadurch, daß für den Erkenntniswert der Sinn des Satzes, nämlich der in ihm ausgedrückte Gedanke, nicht minder in Betracht kommt als seine Bedeutung, das ist sein Wahrheitswert. Wenn nun a = b ist, so ist zwar die Bedeutung von „b" dieselbe wie die von „a" und also auch der Wahrheitswert von „a = b" derselbe wie von „a = a". Trotzdem kann der Sinn von „b" von dem Sinn von „a" verschieden sein, und mithin auch der in „a = b" ausgedrückte Gedanke verschieden von dem „a = a" ausgedrückten sein; dann haben beide Sätze auch nicht denselben Erkenntniswert. Wenn wir wie oben unter „Urteil" verstehen den Fortschritt vom Gedanken zu dessen Wahrheitswerte, so werden wir auch sagen, daß die Urteile verschieden sind". (KS, S. 162. Vgl. dazu auch BW, S. 128 und N, S. 242 f.)

Es ist nun zwar nach dem normalen Sprachgebrauch ungewöhnlich, den Wahrheitswert eines Satzes als dessen Bezug anzusehen, aber dieser Ansatz erlaubt doch über die funktionalen Prinzipien eine geschlossene Theorie der semantischen Funktionen von Ausdrücken. Bei Frege kommt hinzu, daß er, wie das vorletzte Zitat zeigt, die Wahrheitswerte als Gegenstände ansieht, also bedeutungsvolle$_F$ Sätze als Namen von Wahrheitswerten. Diese Auffassung ergibt sich daraus, daß Frege nur zwei ontologische Grundkategorien annimmt: Gegenstände und Funktionen (wobei diese je nach Stellenzahl und Typen der Argumente in verschiedene Typen zerfallen); wir gehen

Form Fa, Ga, etc. einen Wahrheitswert haben, nicht gesagt, daß a in all diesen Kontexten dasselbe Objekt bezeichnet. Damit ist aber – anders als Dummett meint – auch der Sinn von a nicht festgelegt, denn der Sinn bestimmt nach Frege eindeutig den Bezug. Daher fordert Frege z. B. auch im Brief an Peano vom 29. 9. 1896 (BW, S. 183), daß ein Ausdruck in allen (extensionalen) Kontexten dieselbe Bedeutung$_F$ haben müsse. Dummett weist darauf hin, daß das Kontextprinzip mit seiner Auszeichnung der Sätze unverträglich ist mit Freges späterer konsequenter Auffassung von Sätzen als speziellen Namen. Man muß aber auch sehen, daß schon in der BS die deutliche Tendenz dazu vorhanden ist, und daß sich das Kontextprinzip im Sinne der Ausführungen in GGAI verallgemeinern läßt.

darauf in Kap. 6 ein. Nun läßt sich das Wort „wahr" nach Frege aber nicht als Prädikat auffassen, da die Aussage „Der Satz A ist wahr" nicht mehr besagt als der Satz A selbst. Daher muß „wahr" einen Gegenstand bezeichnen, so daß die Kopula „ist" in „Der Satz A ist wahr" im Sinn von „bezeichnet" zu lesen ist. Für Frege sind freilich primär nicht Sätze wahr, sondern Gedanken. Er formuliert das Argument daher so:

„Man könnte versucht sein, das Verhältnis des Gedankens zum Wahren nicht als das des Sinnes zur Bedeutung, sondern als das des Subjekts zum Prädikate anzusehen. Man kann ja geradezu sagen: ‚Der Gedanke, daß 5 eine Primzahl ist, ist wahr'. Wenn man aber genauer zusieht, so bemerkt man, daß damit eigentlich nicht mehr gesagt ist als in dem einfachen Satz ‚5 ist eine Primzahl'. Die Behauptung der Wahrheit liegt in beiden Fällen in der Form des Behauptungssatzes". (KS, S. 150, vgl. a. KS, S. 343, 347.)

Sagt man, Frege verstehe unter „Gedanken" Propositionen, so bleibt damit noch offen, wie diese genauer zu bestimmen sind. Insbesondere stellt sich die Frage, wann zwei Sätze denselben Gedanken ausdrükken. In SB sagt Frege dazu nichts, er äußert sich darüber aber in einem Brief an E. Husserl vom 9. 12. 1906:

„Es scheint mir ein objektives Kriterium notwendig zu sein, um einen Gedanken als denselben wiederzuerkennen, weil ohne ein solches eine logische Analyse nicht möglich ist. Um nun zu entscheiden, ob der Satz A denselben Gedanken ausdrücke wie der Satz B, scheint mir folgendes Mittel allein möglich zu sein, wobei ich annehme, daß keiner der beiden Sätze einen logisch evidenten Sinnbestandteil enthalte. Wenn nämlich sowohl die Annahme, daß der Inhalt von A falsch und der von B wahr sei, als auch die Annahme, daß der Inhalt von A wahr und der von B falsch sei, auf einen logischen Widerspruch führt, ohne daß man zu dessen Feststellung zu wissen braucht, ob der Inhalt von A oder von B wahr oder falsch sei, und ohne daß man dazu anderer als rein logischer Gesetze bedarf, so kann zum Inhalte von A, soweit er fähig ist, als wahr oder falsch beurteilt zu werden, nichts gehören, was nicht auch zum Inhalte von B gehörte; denn für einen solchen Überschuß fehlte es an jeder Begründung im Inhalte von B, und der Voraussetzung nach wäre ein solcher Überschuß auch nicht logisch evident. Ebenso kann bei unserer Annahme zum Inhalte von B, soweit er fähig ist, als wahr oder falsch beurteilt zu werden, nichts gehören, was nicht auch zum Inhalte von A gehörte. Was also an den Inhalten von A oder B als wahr oder falsch beurteilbar ist, stimmt überein, und dies kommt für die Logik allein in Betracht, und das nenne ich den von A ebenso wie von B ausgedrückten Gedanken. Zum Inhalt von A kann man freilich mancherlei rechnen, z. B. eine Stimmung, Gefühle, Vorstellungen; aber alles dies wird nicht als wahr oder falsch beurteilt; es geht die Logik im Grunde nichts an, ebensowenig wie das die Ethik angeht, was nicht fähig ist, als sittlich gut oder schlecht beurteilt zu werden. Gibt es ein anderes Mittel, um zu beurteilen, was an dem Inhalte eines Satzes der Logik unterworfen ist, wann zwei Sätze denselben Gedanken ausdrücken? Ich glaube nicht. Wenn man ein solches Mittel nicht hat, kann man ins Unendliche über logische Fragen streiten ohne Ergebnis". (BW, 105 f.)

Hier wird also gesagt, daß zwei Sätze, die keine analytischen Teilsätze enthalten, genau dann denselben Sinn haben, wenn sie analytisch äquivalent sind. Ohne diese Einschränkung würde der Sinn eines Satzes mit seiner Intension zusammenfallen[2]. Trotz der Beschränkung ist diese Bestimmung der Sinngleichheit von Sätzen aber zu weit im Blick auf Freges Grundgedanken, daß sinngleiche Sätze sich in allen Kontexten *salva veritate* durch einander ersetzen lassen. Denn die beiden Sätze „Die Länge dieses Stabes ist 2 m" und „Die Länge dieses Stabes in Metern ist die kleinste Primzahl" sind analytisch äquivalent und enthalten keine analytischen Bestandteile. Es kann aber gelten „Hans glaubt, daß die Länge dieses Stabes 2 m ist", während der Satz „Hans glaubt, daß die Länge dieses Stabes in Metern die kleinste Primzahl ist" falsch ist, etwa weil Hans glaubt, 1 sei die kleinste Primzahl. In den GGA (Bd. I, S. 50) sagt Frege auch, der Gedanke eines Satzes – er bezieht sich dabei freilich auf Sätze seiner Symbolsprache – sei durch die Angabe seiner Wahrheitsbedingungen festgelegt: Sein Sinn sei, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Danach würde wiederum der Sinn eines Satzes mit seiner Intension zusammenfallen. Man kann also nicht sagen, daß Frege brauchbare Kriterien für die Sinngleichheit von Sätzen angegeben hat.

In SB erläutert Frege den Begriff des Gedankens, indem er allgemein Sinn und Vorstellung unterscheidet:

„Von der Bedeutung und dem Sinne eines Zeichens ist die mit ihm verknüpfte Vorstellung zu unterscheiden. Wenn die Bedeutung eines Zeichens ein sinnlich wahrnehmbarer Gegenstand ist, so ist meine Vorstellung davon ein aus Erinnerungen von Sinneseindrücken, die ich gehabt habe, und von Tätig-

[2] Vgl. zu diesem von R. Carnap in (1956) eingeführten Begriff z. B. Kutschera (1976), 2.3 und den Abschnitt 5.5 unten.

keiten, inneren sowohl wie äußeren, die ich ausgeübt habe, entstandenes inneres Bild. Dieses ist oft mit Gefühlen getränkt; die Deutlichkeit seiner einzelnen Teile ist verschieden und schwankend. Nicht immer ist, auch bei demselben Menschen, dieselbe Vorstellung mit demselben Sinne verbunden. Die Vorstellung ist subjektiv: die Vorstellung des einen ist nicht die des anderen. Damit sind von selbst mannigfache Unterschiede der mit demselben Sinne verknüpften Vorstellungen gegeben. Ein Maler, ein Reiter, ein Zoologe werden wahrscheinlich sehr verschiedene Vorstellungen mit dem Namen „Bucephalus" verbinden. Die Vorstellung unterscheidet sich dadurch wesentlich von dem Sinne eines Zeichens, welcher gemeinsames Eigentum von vielen sein kann und also nicht Teil oder Modus der Einzelseele ist; denn man wird wohl nicht leugnen können, daß die Menschheit einen gemeinsamen Schatz von Gedanken hat, den sie von einem Geschlechte auf das andere überträgt ... Die Bedeutung eines Eigennamens ist der Gegenstand selbst, den wir damit bezeichnen; die Vorstellung, welche wir dabei haben, ist ganz subjektiv; dazwischen liegt der Sinn, der zwar nicht mehr subjektiv wie die Vorstellung, aber doch auch nicht der Gegenstand selbst ist". (KS, S. 145 f.)

„Wir können nun drei Stufen der Verschiedenheit von Wörtern, Ausdrücken und ganzen Sätzen erkennen. Entweder betrifft der Unterschied höchstens die Vorstellungen, oder den Sinn aber nicht die Bedeutung, oder endlich auch die Bedeutung. In bezug auf die erste Stufe ist zu bemerken, daß, wegen der unsicheren Verbindung der Vorstellungen mit den Worten, für den einen eine Verschiedenheit bestehen kann, die der andere nicht findet. Der Unterschied der Übersetzung von der Urschrift soll eigentlich die erste Stufe nicht überschreiten. Zu den hier noch möglichen Unterschieden gehören die Färbungen und Beleuchtungen, welche Dichtkunst und Beredsamkeit dem Sinne zu geben suchen. Diese Färbungen und Beleuchtungen sind nicht objektiv, sondern jeder Hörer und Leser muß sie sich selbst nach den Winken des Dichters oder Redners hinzuschaffen. Ohne eine Verwandtschaft des menschlichen Vorstellens wäre freilich die Kunst nicht möglich; wieweit aber den Absichten des Dichters entsprochen wird, kann nie genau ermittelt werden". (KS, S. 147.)

Sinn ist hier also etwas Objektives, das mit der Sprache gegeben ist, Vorstellung etwas Subjektives, von Sprecher zu Sprecher Verschiedenes.

Auch in LUI hält Frege zwar an der These fest, der Sinn eines Ausdrucks sei etwas Objektives, aber er sagt dort auch – wie in einer Anmerkung zu SB (KS, S. 144) – ein Eigenname könne von verschiedenen Personen verschieden verstanden werden, z. B. als synonym mit unterschiedlichen Kennzeichnungen (KS, S. 349 f.)[3]. So verstehe z. B. einer den Namen „Dr. Gustav Lauben" im Sinne von „Der Arzt, der in einer bestimmten Wohnung wohnt", während ihn ein anderer im Sinne von „Die Person, die am 13. 9. 1875 in N. N. geboren wurde". Beide verbänden also mit dem Namen einen verschiedenen Sinn, und daher drücke auch ein Satz wie „Dr. Gustav Lauben ist verwundet worden" für beide verschiedene Gedanken aus. Diese Unbestimmtheit des Sinns sieht Frege aber als Phänomen der normalen Sprache an; von einer Präzisionssprache sei dagegen zu fordern, daß jeder Ausdruck einen wohlbestimmten, intersubjektiven Sinn habe. Korrekter wäre es, hier nicht von verschiedenen Sinnen oder Gedanken zu reden, sondern von verschiedenen Vorstellungen. Der Sinn eines Satzes oder Namens kann unbestimmt sein, aber nicht subjektabhängig.

In LUI hat Frege den Begriff des Gedankens noch eingehender erläutert als in SB. Er sagt dort:

„Ohne damit eine Definition geben zu wollen, nenne ich Gedanken etwas, bei dem überhaupt Wahrheit in Frage kommen kann. Was falsch ist, rechne ich also ebenso zu den Gedanken, wie das, was wahr ist. Demnach kann ich sagen: der Gedanke ist der Sinn eines Satzes, ohne damit behaupten zu wollen, daß der Sinn jedes Satzes ein Gedanke sei. Der an sich unsinnliche Gedanke kleidet sich in das sinnliche Gewand des Satzes und wird uns damit faßbarer. Wir sagen, der Satz drücke einen Gedanken aus ... Um das, was ich Gedanken nennen will, schärfer herauszuarbeiten, unterscheide ich Arten von Sätzen. Einem Befehlssatze wird man einen Sinn nicht absprechen wollen; aber dieser Sinn ist nicht derart, daß Wahrheit bei ihm in Frage kommen könnte. Darum werde ich den Sinn eines Befehlssatzes nicht Gedanken nennen. Ebenso sind Wunsch- und Bittsätze auszuschließen. In Betracht kommen können Sätze, in denen wir etwas mitteilen oder behaupten. Aber Ausrufe, in denen man seinen Gefühlen Luft macht, Stöhnen, Seufzen, Lachen rechne ich nicht dazu, es sei denn, daß sie durch besondere Verabredung dazu bestimmt sind, etwas mitzuteilen. Wie ist es aber bei den Fragesätzen? In einer Wortfrage sprechen wir einen unvollständigen Satz aus, der erst durch die Ergänzung, zu der wir auffordern, einen wahren Sinn erhalten soll. Die Wortfragen bleiben hier demnach außer Betracht. Anders

[3] Frege nennt Namen meist „Eigennamen" und bezeichnet das, was wir „Eigennamen" nennen, d. h. Namen, die nicht die Form von Kennzeichnungen oder Funktionsausdrücken haben, als „eigentliche Eigennamen".

ist es bei den Satzfragen. Wir erwarten „ja" zu hören, oder „nein". Die Antwort „ja" besagt dasselbe wie ein Behauptungssatz; denn durch sie wird der Gedanke als wahr hingestellt, der im Fragesatz schon vollständig enthalten ist. So kann man zu jedem Behauptungssatz eine Satzfrage bilden. Ein Ausruf ist deshalb nicht als Mitteilung anzusehen, weil keine entsprechende Satzfrage gebildet werden kann. Fragesatz und Behauptungssatz enthalten denselben Gedanken; aber der Behauptungssatz enthält noch etwas mehr, nämlich eben die Behauptung. Auch der Fragesatz enthält etwas mehr, nämlich eine Aufforderung. In einem Behauptungssatz ist also zweierlei zu unterscheiden: der Inhalt, den er mit der entsprechenden Satzfrage gemein hat und die Behauptung. Jener ist der Gedanke oder enthält wenigstens den Gedanken. Es ist also möglich, einen Gedanken auszudrücken, ohne ihn als wahr hinzustellen. In einem Behauptungssatze ist beides so verbunden, daß man die Zerlegbarkeit leicht übersieht. Wir unterscheiden demnach 1. das Fassen des Gedankens – das Denken, 2. die Anerkennung der Wahrheit eines Gedankens – das Urteilen, 3. die Kundgebung dieses Urteils – das Behaupten". (KS, S. 344ff.)

Dieses Zitat zeigt, daß bei Frege die Unterscheidung von deskriptivem Sinn eines Satzes und seinem illokutionären Modus bereits vorgebildet ist, die dann J. L. Austin und J. R. Searle in ihren Sprechakttheorien ausgebaut haben.

Für Frege ist das Fassen und Beurteilen eines Gedankens kein Schaffen des Gedankens:

„Damit verbindet sich ein anderer Fehler, nämlich die Meinung, der Urteilende stifte durch sein Urteilen den Zusammenhang, die Ordnung der Teile und bringe dadurch das Urteil zustande. Dabei ist das Fassen eines Gedankens und die Anerkennung seiner Wahrheit nicht auseinandergehalten. In vielen Fällen freilich folgen diese Taten so unmittelbar aufeinander, daß sie in eine Tat zusammenzuschmelzen scheinen, aber nicht in allen. Jahre mühevoller Untersuchungen können zwischen dem Fassen des Gedankens und der Anerkennung seiner Wahrheit liegen. Daß durch dieses Urteilen der Gedanke, der Zusammenhang seiner Teile nicht gestiftet werde, ist offenbar; denn er bestand schon vorher. Aber auch das Fassen eines Gedankens ist nicht ein Schaffen des Gedankens, ist nicht ein Stiften der Ordnung seiner Teile; denn der Gedanke war schon vorher wahr, bestand also schon in der Ordnung seiner Teile, bevor er gefaßt wurde. Ebensowenig wie ein Wanderer, der ein Gebirge überschreitet, dadurch dieses Gebirge schafft, schafft der Urteilende dadurch einen Gedanken, daß er ihn als wahr anerkennt. Täte er es, so könnte nicht derselbe Gedanke gestern von jenem und heute von diesem als wahr anerkannt werden; ja nicht einmal von demselben könnte derselbe Gedanke zu verschiedenen Zeiten als wahr anerkannt werden, man müßte denn annehmen, das Sein dieses Gedankens wäre ein unterbrochenes". (KS, S. 371.)[4]

Frege unterscheidet den Gedanken, den ein Satz ausdrückt, von den Konnotationen, der „Färbung des Gedankens", und von der Kundgabe und dem Appell, die sich damit verbinden, um die Terminologie K. Bühlers zu verwenden:

„Ein Behauptungssatz enthält außer einem Gedanken und der Behauptung oft noch ein Drittes, auf das sich die Behauptung nicht erstreckt. Das soll nicht selten auf das Gefühl, die Stimmung des Hörers wirken oder seine Einbildungskraft anregen. Wörter wie „leider", „gottlob" gehören hierher. Solche Bestandteile des Satzes treten in der Dichtung stärker hervor, fehlen aber auch in der Prosa selten ganz. In mathematischen, physikalischen, chemischen Darstellungen werden sie seltener sein, als in geschichtlichen. Was man Geisteswissenschaft nennt, steht der Dichtung näher, ist darum aber auch weniger wissenschaftlich, als die strengen Wissenschaften, die um so trockner sind, je strenger sie sind; denn die strenge Wissenschaft ist auf die Wahrheit gerichtet und nur auf die Wahrheit. Alle Bestandteile des Satzes also, auf die sich die behauptende Kraft nicht erstreckt, gehören nicht zur wissenschaftlichen Darstellung, sind aber manchmal auch für den schwer zu vermeiden, der die damit verbundene Gefahr sieht. Wo es darauf ankommt, sich dem gedanklich Unfaßbaren auf dem Wege der Ahnung zu nähern, haben diese Bestandteile ihre volle Berechtigung. Je strenger wissenschaftlich eine Darstellung ist, desto weniger wird sich das Volkstum ihres Urhebers bemerkbar machen, desto leichter wird sie sich übersetzen lassen. Dagegen erschweren die Bestandteile der Sprache, auf die ich hier aufmerksam machen möchte, die Übersetzung von Dichtungen sehr, ja machen eine vollkommene Übersetzung fast immer unmöglich; denn gerade in ihnen, auf denen der dichterische Wert zu einem großen Teil beruht, unterscheiden sich die Sprachen am meisten. Ob ich das Wort „Pferd" oder „Roß" oder „Gaul" oder „Mähre" gebrauche, macht keinen Unterschied im Gedanken. Die behauptende Kraft erstreckt sich nicht auf das, wodurch sich diese Wörter unterscheiden. Was man Stimmung, Duft, Beleuchtung in einer Dichtung nennen kann, was durch Tonfall und Rhythmus gemalt wird, gehört nicht zum Gedanken. Manches in der Sprache dient dazu, dem Hörer die Auffassung zu erleichtern, z. B. die Hervorhebung eines Satzgliedes durch Betonung oder Wortstellung. Man denke auch an Wörter, wie „noch" und „schon". Mit dem Satze „Alfred ist noch nicht gekommen" sagt man eigentlich „Alfred

[4] Zum Realismus Freges bzgl. abstrakter Entitäten, der in diesem Text anklingt, vgl. 10.2.

ist nicht gekommen" und deutet dabei an, daß man sein Kommen erwartet; aber man deutet es eben nur an. Man kann nicht sagen, daß der Sinn des Satzes darum falsch sei, weil Alfreds Kommen nicht erwartet werde. Das Wort „aber" unterscheidet sich von „und" dadurch, daß man mit ihm andeutet, das Folgende stehe zu dem, was nach dem Vorhergehenden zu erwarten war, in einem Gegensatze. Solche Winke in der Rede machen keinen Unterschied im Gedanken. Man kann einen Satz umformen, indem man das Verb aus dem Aktiv ins Passiv umsetzt und zugleich das Akkusativ-Objekt zum Subjekte macht. Ebenso kann man den Dativ in den Nominativ umwandeln und zugleich „geben" durch „empfangen" ersetzen. Gewiß sind solche Umformungen nicht in jeder Hinsicht gleichgültig; aber sie berühren den Gedanken nicht, sie berühren das nicht, was wahr oder falsch ist. Wenn allgemein die Unzulässigkeit solcher Umformungen anerkannt würde, so wäre damit jede tiefere logische Untersuchung verhindert. Es ist ebenso wichtig Unterscheidungen zu unterlassen, welche den Kern der Sache nicht berühren, wie Unterscheidungen zu machen, welche das Wesentliche betreffen. Was aber wesentlich ist, hängt von dem Zwecke ab. Dem auf das Schöne in der Sprache gerichteten Sinne kann gerade das wichtig erscheinen, was dem Logiker gleichgültig ist. So überragt der Inhalt eines Satzes nicht selten den in ihm ausgedrückten Gedanken". (KS, S. 347 f.)

Frege unterscheidet aber nicht klar zwischen den Bedeutungskomponenten, die mit der sprachlichen Formulierung eines Satzes gegeben, also ebenso objektiv sind wie der Sinn, und den verschiedenen Vorstellungen, die der einzelne Sprecher oder Hörer damit verbindet. Die Grenze zwischen dem Sinn und den anderen objektiven Bedeutungskomponenten sieht er so, daß zum Sinn eines Satzes genau das gehört, was (zusammen mit den Tatsachen) seinen Wahrheitswert festlegt. Da andererseits jedoch der Sinn eine Funktion der Sinne der im Satz vorkommenden Wörter sein soll und diese genügen müssen, den Sinn aller Sätze zu determinieren, in denen sie vorkommen, müssen sie umfassend bestimmt sein. In einem obliquen Kontext kann ja z. B. die Ersetzung eines „aber" durch ein „und", die in einem direkten Kontext keinen Unterschied des Wahrheitswerts ergibt, einen solchen Unterschied bewirken. Damit wird Freges Abgrenzung von Sinn und Färbung (oder Konnotationen) eines Satzes fragwürdig. Appell und Kundgabe wären ferner von Sinn und Färbung genauer zu unterscheiden. Frege weist so auf interessante Bedeutungskomponenten hin, bemüht sich aber nicht, sie genauer zu differenzieren, da er letztlich nur betonen will, daß sie in der Sprache der Logik keine Rolle spielen.

Frege weist auch auf *Indexausdrücke* hin wie „heute", „hier" und „da" (KS, S. 348 f., vgl. a. GGAI, XVI f.), durch die der Gedanke den ein Satz ausdrückt, von den Umständen seiner Äußerung abhängt, insbesondere von dem Sprecher und dem Zeitpunkt der Äußerung. Nur ein Satz ohne Indexausdrücke drückt einen bestimmten Gedanken aus (KS, S. 361). Auch diese wichtige Unterscheidung von Satz und Äußerung ist in der modernen Sprachtheorie wieder aufgenommen worden, insbesondere von Y. Bar-Hillel.

Frege grenzt in LUI dann wiederum Gedanken von *Vorstellungen* ab (KS, S. 351 f.): Vorstellungen werden nicht wahrgenommen, sondern werden gehabt, sie gehören zum Bewußtseinsinhalt und haben einen Träger; keine zwei Menschen können dieselbe Vorstellung haben, Vorstellungen (Empfindungen, Sinneseindrücke) sind unvergleichbar. Frege sagt dann:

„Wenn der Gedanke, den ich im pythagoreischen Lehrsatz ausspreche, ebenso von andern wie von mir als wahr anerkannt werden kann, dann gehört er nicht zum Inhalte meines Bewußtseins, dann bin ich nicht sein Träger und kann ihn trotzdem als wahr anerkennen. Wenn es aber gar nicht derselbe Gedanke ist, der von mir und der von jenem als Inhalt des pythagoreischen Lehrsatzes angesehen wird, dann dürfte man eigentlich nicht sagen „der pythagoreische Lehrsatz", sondern „mein pythagoreischer Lehrsatz", „sein pythagoreischer Lehrsatz", und diese wären verschieden; denn der Sinn gehört notwendig zum Satze". (KS, S. 353.)

Gedanken haben hingegen keine Träger, sie sind nichts Subjektives:

„Wenn jeder Gedanke eines Trägers bedarf, zu dessen Bewußtseinsinhalte er gehört, so ist er Gedanke nur dieses Trägers, und es gibt keine Wissenschaft, welche vielen gemeinsam wäre, an welcher viele arbeiten könnten; sondern ich habe vielleicht meine Wissenschaft, nämlich ein Ganzes von Gedanken, deren Träger ich bin, ein anderer hat seine Wissenschaft. Jeder von uns beschäftigt sich mit Inhalten seines Bewußtseins. Ein Widerspruch zwischen beiden Wissenschaften ist dann nicht möglich; und es ist eigentlich müßig, sich um die Wahrheit zu streiten, ebenso müßig, ja beinahe lächerlich, wie es wäre, wenn zwei Leute sich stritten, ob ein Hundertmarkschein echt wäre, wobei jeder von beiden denjenigen meinte, den er selber in seiner Tasche hätte, und das Wort „echt" in seinem besonderen Sinne verstände". (KS, S. 353.)

Daraus folgert Frege, daß Gedanken weder der Außenwelt, noch der Welt der Vorstellungen angehören, sondern einem dritten Reich idealer, zeitloser Entitäten. Auf diese Konzeption Freges gehen wir in 10.2 näher ein.

Die Realität der Gedanken besteht nicht in ihrem Wahrsein (KS, S. 364); auch falsche Sätze drücken reale Gedanken aus.

„Demnach ist ein falscher Gedanke nicht ein nicht seiender Gedanke, auch dann nicht, wenn man unter dem Sein versteht das Nichtbedürfen eines Trägers. Ein falscher Gedanke muß, wenn auch nicht als wahr, so doch zuweilen als unentbehrlich anerkannt werden: erstens als Sinn eines Fragesatzes, zweitens als Bestandteil einer hypothetischen Gedankenverbindung und drittens in der Verneinung. Es muß möglich sein, einen falschen Gedanken zu verneinen, und um das zu können, bedarf ich seiner. Was nicht ist, kann ich nicht verneinen. Und was meiner als seines Trägers bedarf, kann ich nicht durch Verneinen in etwas verwandeln, dessen Träger ich nicht bin und was von mehreren als dasselbe gefaßt werden kann". (KS, S. 366.)

Zur Frage der Sinngleichheit von Sätzen unterscheidet Frege in LUI (KS, S. 348) den Gedanken vom Inhalt eines Satzes, wobei dieser oft durch die Konnotationen mehr enthält als jener. Für den Gedanken kommt es nur auf das an, was für die Wahrheit des Satzes erheblich ist. Daher sagt Frege, aktive und passive Versionen eines Satzes hätten denselben Sinn, ebenso Sätze, die durch Ersetzung von „geben" mit Dativ durch „empfangen von" mit Nominativ auseinander entstehen (KS, S. 348). In LUIII sagt Frege z. B., $A \wedge A$ habe denselben Sinn wie A und $\neg\neg A$ denselben Sinn wie A. Daraus ergibt sich dann, daß auch $A \vee A$ (d. h. $\neg(\neg A \wedge \neg A)$) denselben Sinn wie A hat (vgl. KS, S. 386, 392). Generelle Kriterien für Sinngleichheit fehlen aber hier.

5.3 Prädikate

Über Sinn und Bedeutung von Prädikaten hat sich Frege in SB nicht geäußert. Aussagen dazu finden sich in dem Fragment „Ausführungen über Sinn und Bedeutung" (zwischen 1892 und 1895, in N, S. 128–36) und dem Brief an Husserl vom 24. 5. 1891 (BW, S. 96). Dort bestimmt Frege die Bedeutung$_F$ eines Prädikats als den Begriff, den es ausdrückt, in extensionaler Charakterisierung – wir wollen auch von *extensionalen Begriffen* reden. Zwei Prädikate drücken dabei denselben extensionalen Begriff aus, wenn sie denselben Umfang haben. Der Umfang eines Prädikats ist als Gegenstand für Frege aber nicht Bedeutung$_F$ des Prädikats. Da Prädikate keine Namen sind, können sie auch keinen Gegenstand bezeichnen.

„Ein Begriffswort bedeutet einen Begriff, wenn das Wort so gebraucht wird, wie es in der Logik zweckmäßig ist. Um dies zu erklären, erinnere ich an einen Umstand, der sehr zugunsten der Logiker des Umfangs gegen die des Inhalts zu sprechen scheint, daß nämlich, unbeschadet der Wahrheit, in jedem Satze Begriffswörter einander vertreten können, wenn ihnen derselbe Begriffsumfang entspricht, daß also auch in Beziehung auf das Schließen und für die logischen Gesetze Begriffe nur insofern sich verschieden verhalten, als ihre Umfänge verschieden sind. Die logische Grundbeziehung ist die des Fallens eines Gegenstandes unter einen Begriff: auf sie lassen sich alle Beziehungen zwischen Begriffen zurückführen. Indem ein Gegenstand unter einen Begriff fällt, fällt er unter alle Begriffe desselben Umfangs, woraus das Gesagte folgt. Wie also Eigennamen desselben Gegenstandes unbeschadet der Wahrheit einander vertreten können, so gilt dasselbe auch von Begriffswörtern, wenn der Begriffsumfang derselbe ist ... Man könnte so leicht dahin kommen, den Begriffsumfang für die Bedeutung des Begriffswortes auszugeben; aber hierbei würde man übersehen, daß Begriffsumfänge Gegenstände und nicht Begriffe sind". (N, S. 128 f.)

Und nachdem Frege dargelegt hat, daß die Identität zweier einstelliger Begriffe F und G im Sinne von $\wedge x (Fx \equiv Gx)$ zu verstehen ist, sagt er:

„Wenn wir nun dies alles im Auge behalten, sind wir wohl imstande zu behaupten „Was zwei Begriffswörter bedeuten, ist dann und nur dann dasselbe, wenn die zugehörigen Begriffsumfänge zusammenfallen", ohne durch den uneigentlichen Gebrauch des Wortes „dasselbe" zu Fehlern verleitet zu werden. Und damit ist den Umfangslogikern, wie ich glaube, ein bedeutendes Zugeständnis gemacht. Sie haben recht, wenn sie durch ihre Vorliebe für den Begriffsumfang gegenüber dem Begriffsinhalt zu erkennen geben, daß sie die Bedeutung der Worte als das Wesentliche für die Logik ansehen, nicht den Sinn. Die Inhaltslogiker bleiben nur zu gerne beim Sinn stehen; denn, was sie Inhalt nennen, ist, wenn nicht gar Vorstellung, so doch Sinn. Sie bedenken nicht, daß es in der Logik nicht darauf ankommt, wie Gedanken aus Gedanken hervorgehen ohne Rücksicht auf den Wahrheitswert, daß der Schritt vom Gedanken zum Wahrheitswert, daß, allgemeiner, der Schritt vom Sinne zur Bedeutung getan werden muß; daß die logischen Gesetze zunächst Gesetze im Reich der Bedeutungen sind und sich erst mittelbar auf den Sinn beziehen. Wenn es einem auf die Wahrheit ankommt – und auf die Wahrheit zielt die Logik hin – muß man auch nach den Bedeutungen fragen, muß man Eigennamen verwerfen, welche keinen Gegenstand bezeichnen oder benennen, wiewohl sie einen Sinn haben mögen; muß man Begriffswörter verwerfen, die keine Bedeutung haben. Das sind nicht etwa solche, die Widersprechendes vereinigen – denn ein Begriff kann recht wohl leer sein – sondern solche, bei denen die Umgrenzung verschwommen ist. Es muß von jedem Gegenstand bestimmt sein, ob er unter den Begriff falle oder nicht; ein Begriffswort, welches dieser Anforderung an seine Bedeutung nicht genügt, ist bedeutungslos". (N, S. 133.)

In dem Fragment „Über Sinn und Bedeutung" wird aber nicht erläutert, was unter dem Sinn eines Prädikats zu verstehen ist. Daß Frege auch einen Sinn von Prädikaten annahm, ergibt sich aus seinen Ausführungen in LUIII (vgl. a. N, S. 210). Man wird nicht fehlgehen, wenn man diesen Sinn als jenen Begriff im normalen (inhaltslogischen) Sinn des Wortes auffaßt, den das Prädikat ausdrückt. Nehmen wir einmal an, daß genau die Lebewesen, die ein Herz haben, auch eine Niere haben, so haben die Prädikate „Lebewesen mit Herz" und „Lebewesen mit Niere" dieselbe Bedeutung$_F$, aber verschiedenen Sinn.

5.4 Indirekte Kontexte

Frege kann nun sein Substitutionsprinzip, nach dem bedeutungsgleiche$_F$ Ausdrücke sich in allen Kontexten durcheinander *salva veritate* ersetzen lassen, nur dann aufrecht erhalten, wenn er annimmt, daß die Bedeutung$_F$ eines Ausdrucks nicht in allen Kontexten dieselbe ist. Er weist z. B. darauf hin (KS, S. 151), daß eine Ersetzung des falschen Teilsatzes „A hat den B gesehen" in „A log, daß er den B gesehen habe" durch den gleichfalls falschen Satz „A hat den C gesehen", den Wahrheitswert des Satzes verändern kann. Ein analoges Beispiel von B. Russell ist der Satz „George IV wollte wissen, ob Walter Scott der Autor von *Waverley* sei", der wahr sein möge. Der Satz, der durch die Ersetzung von „der Autor von *Waverley*" durch den bedeutungsgleichen Namen „Walter Scott" entsteht, also „George IV wollte wissen, ob Walter Scott Walter Scott sei", ist hingegen falsch. Von W. V. Quine stammt das Beispiel: „Es ist eine mathematische Wahrheit, daß 9 = 9 ist"; ersetzt man hier den Namen „9" durch den bedeutungsgleichen$_F$ Namen „die Anzahl der Planeten", so entsteht ein falscher Satz. Frege nimmt nun an, daß in allen Kontexten, in denen eine solche Ersetzung bedeutungsgleicher$_F$ Ausdrücke *salva veritate* nicht möglich ist – er nennt sie *indirekte* oder *oblique* Kontexte –, die Bedeutung$_F$ eines Ausdrucks sein Sinn ist. Diese Annahme ist recht natürlich, da wir z. B. in der indirekten Rede „Fritz sagte, daß er das Buch gelesen habe" nur über den Inhalt oder Sinn einer Behauptung von Fritz sprechen, ohne zu deren Wahrheit Stellung zu nehmen. Wir reden also nicht, wie in dem Satz „Fritz hat das Buch gelesen", über das Buch und seine Lektüre durch Fritz, sondern über den Sinn einer Aussage, die nur als direkte Behauptung eine Aussage über das Buch ist. Frege sagt:

„Wenn man in der gewöhnlichen Weise Worte gebraucht, so ist das, wovon man sprechen will, deren Bedeutung. Es kann aber auch vorkommen, daß man von den Worten selbst oder von ihrem Sinne reden will. Jenes geschieht z. B., wenn man die Worte eines anderen in gerader Rede anführt. Die eigenen Worte bedeuten dann zunächst die Worte des anderen, und erst diese haben die gewöhnliche Bedeutung. Wir haben dann Zeichen von Zeichen. In der Schrift schließt man in diesem Falle die Wortbilder in Anführungszeichen ein. Es darf also ein in Anführungszeichen stehendes Wortbild nicht in der gewöhnlichen Bedeutung genommen werden. Wenn man von dem Sinne eines Ausdrucks ‚A' reden will, so kann man dies einfach durch die Wendung „der Sinn des Ausdrucks ‚A' ". In der ungeraden Rede spricht man von dem Sinne z. B. der Rede eines anderen. Es ist daraus klar, daß auch in dieser Redeweise die Worte nicht ihre gewöhnliche Bedeutung haben, sondern das bedeuten, was gewöhnlich ihr Sinn ist. Um einen kurzen Ausdruck zu haben, wollen wir sagen: die Wörter werden in der ungeraden Rede ungerade gebraucht, oder haben ihre ungerade Bedeutung. Wir unterscheiden demnach die gewöhnliche Bedeutung eines Wortes von seiner ungeraden und seinen gewöhnlichen Sinn von seinem ungeraden Sinne. Die ungerade Bedeutung eines Wortes ist also sein gewöhnlicher Sinn. Solche Ausnahmen muß man immer im Auge behalten, wenn man die Verknüpfungsweise von Zeichen, Sinn und Bedeutung im einzelnen Falle richtig auffassen will". (KS, S. 145.)

Frege zeigt in einer detaillierten Analyse der verschiedenen Typen von Nebensätzen – indirekte Kontexte sind immer Nebensätze –, daß sich dieser Ansatz durchführen läßt, daß man also das funktionale Prinzip für Bedeutungen$_F$ aufrechterhalten kann, wenn man annimmt, daß Ausdrücke in indirekten Kontexten ihren normalen Sinn bedeuten$_F$ (vgl. KS, S. 151–162). Die Bedeutung$_F$ eines Ausdrucks ist also nach Frege kontextabhängig. Für den Sinn gilt das nicht. Obwohl Frege nichts über den Sinn von Ausdrücken in indirekten Kontexten sagt, liegt es doch nahe anzunehmen, daß es der normale ist. Dann legt der Sinn eines Ausdrucks freilich dessen Bezug nicht eindeutig fest – der hängt ja vom Kontext ab, nicht aber der Sinn. Die These, der Sinn bestimme (mit den Tatsachen) den Bezug, stellt Frege aber in SB an einer Stelle auf, wo von indirekten Kontexten noch nicht die Rede ist. Einen speziellen ungeraden Sinn anzunehmen ist solange verfehlt, als man ihn inhaltlich nicht genauer charakterisieren kann.

5.5 Kritik

An Freges Unterscheidung von Sinn und Bedeutung$_F$ ist von verschiedenen Seiten Kritik geübt worden. Die wichtigsten Einwände betreffen folgende Punkte:

1) Frege gibt keine brauchbaren Kriterien dafür an, wann verschiedene Ausdrücke der gleichen Kategorie (Namen, Sätze, Prädikate) denselben Sinn haben.

Einerseits ist der Sinn eines Ausdrucks so eng zu fassen, daß eine Substitution sinngleicher Ausdrücke in allen Kontexten *salva veritate* möglich ist. Sinngleichheit entspricht damit der Synonymität. Frege schränkt das nur durch den Hinweis ein, daß es bei den für die Substitution betrachteten Kontexten nur auf den deskriptiven Sinn ankommen darf, auf das, was für Wahrheit relevant ist. Nun ist es zwar möglich, den Satz „Alfred ist noch nicht gekommen" als deskriptiv äquivalent mit dem Satz „Alfred ist nicht gekommen" anzusehen und das „noch" als Ausdruck einer Erwartung des Sprechers zu deuten, der zur Kundgabe zu rechnen ist (vgl. KS, S. 348). Problematischer ist das aber, wenn der Satz in einem indirekten Kontext steht wie z. B. in der Aussage: „Hans hofft, daß Alfred noch nicht gekommen ist". Hier würde die Streichung von „noch" den Inhalt des Satzes ändern. Andererseits gibt Frege sehr weite Kriterien für Sinngleichheit an, die den Sinn in die Nähe dessen rücken, was man seit Carnap (1956) als *Intension* bezeichnet: Man betrachtet mögliche Welten (als umfassend spezifizierte mögliche Situationen) und sieht zwei Ausdrücke als intensionsgleich an, wenn sie in allen möglichen Welten dieselbe *Extension* (denselben Bezug) haben, wobei die Extensionen so bestimmt werden wie bei Frege die Bedeutungen$_F$ – gelegentlich sieht man als Extension eines Prädikats auch dessen Umfang an. Die Intension eines Ausdrucks A kann man dann als jene Funktion bestimmen, die jeder möglichen Welt w die Extension von A in w zuordnet. Diese Bestimmung ergibt – wo die Menge W möglicher Welten festliegt – exakte Kriterien für Intensionsgleichheit. Die Intension eines Ausdrucks läßt sich aber nicht mit dessen Bedeutung identifizieren, weil die Ersetzung intensionsgleicher Ausdrücke z. B. in Glaubenssätzen deren Wahrheitswert verändern kann. Darauf haben wir schon oben hingewiesen. Wir haben auch gesehen, daß Frege für Ausdrücke, die keine analytischen Bestandteile enthalten, Sinngleichheit annimmt, wo nach Carnaps Intensionsgleichheit vorliegt, d. h. analytische Äquivalenz bei Sätzen, analytische Identität bei Namen oder analytische Geltung der Umfangsgleichheit bei Prädikaten.

2) Was unter dem Sinn von Eigennamen zu verstehen ist, bleibt bei Frege offen.

Seine Annahme, der Sinn solcher Namen sei nur in der normalen Sprache nicht eindeutig bestimmt, ist wenig überzeugend. Auch der Eigenname „Nullklasse" kann durch verschiedene Kennzeichnungen erklärt werden, so ist z. B. die Nullklasse jene Klasse, die keine Elemente enthält, oder jene Klasse, deren Vereinigung mit einer beliebigen Klasse wieder diese Klasse ergibt. Da sich dasselbe Objekt a ferner durch verschiedene Kennzeichnungen beschreiben läßt, bei empirischen Objekten aber keine der Aussagen „a ist jenes Objekt, das die Eigenschaft F hat" (symbolisch $a = \iota x F(x)$) analytisch gilt, ist die Kennzeichnungstheorie der Eigennamen grundsätzlich nicht haltbar[5]. Daher hat man oft behauptet, solche Eigennamen hätten keinen Sinn, ihre semantische Funktion bestünde allein darin, daß sie auf bestimmte Objekte referieren, also in ihrem Bezug. Es wäre jedoch ungünstig, manchen Namen einen Sinn zuzuschreiben, anderen hingegen nicht. In der intensionalen Logik besteht kein Problem: Die Intension eines Namens a ist jene Funktion f(w), die jeder möglichen Welt w jenes Objekt zuordnet, das a in w bezeichnet. Von Eigennamen wird man nun annehmen, daß sie in allen Welten dasselbe Objekt bezeichnen, also sog. *Standardnamen* sind. Bezeichnet

[5] Vgl. dazu z. B. Kripke (1972).

also a in unserer Welt das Objekt α, so gilt für alle Welten w $f(w)=\alpha$. Damit legt der Bezug von a in unserer Welt die Intension von a fest. Auf diesem Wege kann man der Intuition gerecht werden, daß Eigennamen semantisch durch ihren Bezug bestimmt sind. Für ihren Sinn kann man das aber nicht behaupten. Wie Quine betont hat, kann z. B. aus dem wahren Satz „Fritz glaubt, daß Cicero der Autor von *De officibus* ist" durch Ersetzung von „Cicero" durch „Tullius" trotz der Intensionsgleichheit beider Namen ein falscher Satz entstehen, wenn Fritz nicht weiß, daß „Tullius" dieselbe Person bezeichnet wie „Cicero". Es ist allerdings zu betonen, daß es bis heute keinen Ansatz zur Bestimmung von Bedeutungen gibt, der sich an Exaktheit mit der Theorie der Intensionen messen könnte.

3) Bei Aussagen über die Identität von Begriffen ergibt sich ein ähnliches Problem wie bei jenen über die Identität von Objekten, das aber mit Freges Unterscheidung von Sinn und Bedeutung nicht lösbar ist.

Man bezieht sich bei diesem Einwand auf die *Paradoxie der Analyse* von G. E. Moore[6]. Der Satz (a) „Der Begriff ‚Bruder' ist identisch mit dem Begriff ‚männliches Geschwister'" hat danach einen anderen, weil nicht trivialen und im Zusammenhang mit Begriffsanalysen relevanten, Sinn als der Satz (b) „Der Begriff ‚Bruder' ist mit dem Begriff ‚Bruder' identisch". Sind aber diese Sätze sinnverschieden, so müssen auch die Ausdrücke „der Begriff ‚Bruder'" und „der Begriff ‚männliches Geschwister'" sinnverschieden und daher die beiden Begriffe verschieden sein. Begriffsanalysen, so scheint es demnach, sind immer trivial wie (b), wenn der analysierte mit dem analysierenden Begriff identisch ist, oder falsch, wie (a) es ist, wenn diese Begriffe verschieden sind.

A. Church hat in (1946) vorgeschlagen, diese Paradoxie in Analogie zu der Fregeschen Paradoxie der Identität von Gegenständen aufzulösen, indem man die Ausdrücke „der Begriff ‚Bruder'" und „der Begriff ‚männliches Geschwister'" als bedeutungsgleich$_F$, aber sinnverschieden auffaßt. Aber was soll hier der Sinn von Begriffsnamen im Gegensatz zu ihrer Bedeutung$_F$ sein? Freges Unterscheidung zwischen Sinn und Bezug von Prädikaten ist hier jedenfalls

[6] Vgl. dazu Schilpp (1942), S. 660–67, sowie Carnap (1956), S. 63 und Langford (1942).

nicht brauchbar, da in (a) und (b) als Begriffsanalysen nicht von Begriffsumfängen (oder extensionalen Begriffen) die Rede ist, sondern von inhaltlich bestimmten Begriffen. Sonst läge ja keine Begriffsanalyse, sondern eine empirische Behauptung vor.

Korrekterweise wird man die Behauptung (a) denn auch so formulieren: (c) „Das Prädikat „Bruder" ist sinngleich (synonym) mit dem Prädikat „männliches Geschwister" ". Dann tritt die Paradoxie nicht auf, weil die Terme „ „Bruder" " und „ „männliches Geschwister" ", wie sie in (c) vorkommen, nicht nur sinn-, sondern auch bedeutungsverschieden$_F$ sind – sie bezeichnen ja verschiedene Ausdrücke – und so für eine Substitution von Identischem von vornherein nicht in Frage kommen. Die Formulierung (c) ist auch deshalb adäquater als (a), weil es in den sogenannten Begriffsanalysen nicht um die Feststellung einer Identität von Begriffen geht, sondern um Aussagen über die Bedeutungen von Prädikaten.

Auf ein ähnliches Problem hat W. V. Quine in (1964 a) hingewiesen. Nach ihm ist Freges Annahme, daß Ausdrücke in indirekten Kontexten ihren üblichen Sinn bedeuten$_F$ nicht ausreichend. Ist z. B. A ein kontingenterweise wahrer Satz, so ist F derjenige Begriff g, für den gilt: A und g ist mit F identisch – symbolisch: $F = \iota g(A \wedge g = F)$. Die Prädikate „$F(x)$" und „$\iota g(A \wedge g = F)(x)$" sind also sinngleich, trotzdem gilt aber nicht, daß mit „$N(F(a))$" („$F(a)$ ist logisch notwendig") auch „$N(\iota g(A \wedge g = F)(a))$" wahr ist, denn aus dem letzteren Satz folgt die falsche Behauptung „$N(A)$". Hier liegt also ein Fall vor, in dem die Ersetzung sinngleicher Ausdrücke sogar die Bedeutung$_F$ des Kontextes verändern kann. Der Ausweg, daß die Ausdrücke „F" und „$\iota g(A \wedge g = F)$" zwar bedeutungsgleich$_F$, aber sinnverschieden seien, ist hier nicht gangbar, denn nicht diese Ausdrücke (als Eigennamen für Begriffe) werden in den fraglichen Kontexten ersetzt, sondern die Prädikate „$F(x)$" und „$\iota g(A \wedge g = F)(x)$", die gleiche Begriffe ausdrücken, also sinngleich sind. Eine eventuelle Sinnverschiedenheit der Begriffsnamen ist also für das Problem unerheblich. – Es besteht nun aber kein Grund, die Annahme aufzugeben, daß zwei Prädikate, die denselben Begriff ausdrücken, auch immer bedeutungsgleich sind. Denn es ist zwischen Namen für Begriffe und Prädikaten zu unterscheiden: Der Ausdruck „$\iota g(A \wedge g = F)(x)$" ist in dieser Form nicht sinnvoll, da hier ein Eigenname („$\iota g(A \wedge g = F)$") an die Stelle eines Prädikatenzeichens vor das Argument gesetzt wird. Korrekt müßte die Schreibweise lauten: „$x\varepsilon\iota g(A \wedge g = F)$“ („der Gegenstand x fällt unter den Begriff $\iota g(A \wedge g = F)$“) – dann kommt aber in „$N(a\varepsilon\iota g(A \wedge g = F))$“ der Name „$\iota g(A \wedge g = F)$“ vor, von dem man annehmen kann, er sei von „F“ sinnverschieden, so daß eine Schwierigkeit nun für die Fregesche Semantik nicht mehr auftritt – oder man muß den Eigennamen „$\iota g(A \wedge g = F)$“ durch ein Prädikat ersetzen, nämlich durch den Ausdruck $A \wedge F(x)$ – dann liegt es aber auf der Hand, daß die Begriffe $F(x)$ und $A \wedge F(x)$ nicht identisch und also die Prädikate „$F(x)$“ und „$A \wedge F(x)$“ nicht sinngleich sind, so daß die Schwierigkeit wiederum beseitigt ist. Zudem kann man, falls A kontingenterweise wahr ist, nicht sagen, es sei $F = \iota g(A \wedge g = F)$ – denn es gilt nicht analytisch, daß F leer ist, falls A falsch ist, wohl aber, daß $\iota g(A \wedge g = F)$ leer ist, falls A falsch ist. Die korrekte Identität lautet: F ist jener Begriff g, für den gilt, daß A *tatsächlich* gilt, und $g = F$ ist, symbolisch $\iota g(TA \wedge g = F)$. Dann gilt aber auch $N(Fa) \equiv N(a\varepsilon\iota g(TA \wedge g = F))$, denn es gilt $TA \supset NTA$.

4) Die Annahme einer Kontextabhängigkeit des Bezuges von Ausdrücken führt dazu, daß ein und dasselbe Vorkommnis eines Ausdrucks zwei verschiedene Bezüge haben kann.

Darauf hat Carnap in (1956) hingewiesen. Er bezieht sich dabei auf ein Beispiel, das Frege in SB diskutiert: „Bebel wähnt, daß ...“: Hier steht „wähnt, daß ...“ für „glaubt, daß ..., und nicht ...“. In diesem Ausdruck steht aber „...“ einmal im indirekten, einmal im direkten Kontext, also muß in der abkürzenden Form „wähnt, daß ...“ der Ausdruck „...“ zugleich seine übliche Bedeutung_F wie seinen üblichen Sinn bedeuten_F. – Es genügt aber für die korrekte Beantwortung aller Substitutions- und Synonymitätsfragen zu diesem Satz, daß „...“ hier im indirekten Kontext steht und seinen üblichen Sinn bedeutet_F.

5) Freges Unterscheidung von Sinn und Bedeutung_F hat eine unendliche Hierarchie von Sinnen zur Folge, die unbestimmt bleiben. Für jede Entität kann man Namen einführen, auch für Sinninhalte. Was ist aber der Sinn solcher Sinnamen, der Sinn von Namen für diese Sinninhalte usf.? Man müßte so eine unendliche Hierarchie von Sinnentitäten annehmen. – A. Church hat denn auch versucht, eine solche Hierarchie von Sinninhalten anzugeben und so die Ontologie

der Fregeschen Semantik zu präzisieren[7]. Aber dieses System ist nur formal interessant, nicht hingegen semantisch, denn in ihm werden die Sinninhalte höherer Stufen inhaltlich nicht näher charakterisiert. Andererseits ist es aber auch gar nicht nötig, eigene Namen für Sinninhalte einzuführen und ihnen wieder einen Sinn zuzuschreiben. Namen für Sinninhalte werden bei Frege nicht benötigt: Um über Sinninhalte zu sprechen werden nicht neue Namen verwendet, sondern indirekte Kontexte. Namen für Sinninhalte würde man wohl auch als Standardnamen ansehen müssen.

Carnap meint allerdings, die Sinninhalte höherer Stufen würden tatsächlich gebraucht in mehrfach obliquen Kontexten, wie z. B. „Es ist nicht notwendig, daß Hans glaubt, daß es möglich ist, daß p". Aber auch hier genügt es für alle einschlägigen semantischen Betrachtungen anzunehmen, daß „p" im indirekten Kontext steht und seinen üblichen Sinn bedeutet$_F$.

Die stichhaltigen Einwände (1) und (2) gegen Freges Semantik lassen seine Theorie nicht als unbrauchbar erscheinen, sondern weisen nur auf offene Probleme hin, die aber bis heute auch von anderer Seite nicht gelöst worden sind. Insgesamt ist es ein wichtiges Verdienst Freges, daß er die alte Unterscheidung zwischen Konnotation (Bedeutung) und Denotation (Bezug), die in der neuzeitlichen Philosophie weithin vergessen war – eine der wenigen Ausnahmen bildet John Stuart Mill – wieder in die moderne Diskussion eingeführt und einen Ansatz zu ihrer Präzisierung gemacht hat, auf dem dann Carnap mit seiner Theorie der Intensionen aufgebaut hat. Die intensionale Logik bedeutet einen wesentlichen Schritt über die extensionale Logik hinaus, einen entscheidenden Schritt insbesondere auf dem Wege zur logischen Analyse der natürlichen Sprachen, die außerordentlich reich an indirekten Kontexten sind. Dazu sei noch einmal auf die bahnbrechenden Arbeiten von R. Montague verwiesen. Frege selbst, dem es um die logische Analyse der Grundlagen der Mathematik ging, die sich in einer extensionalen Sprache, d. h. ohne indirekte Kontexte, formulieren läßt, wollte keine nichtextensionale Sprache und Logik aufbauen, sondern nur einige Probleme klären – wie etwa das eines adäquaten Verständnisses von Identi-

[7] Vgl. Church (1943) und (1951).

tätsaussagen –, die sich beim Aufbau einer extensionalen Logik stellen. Das ist bei der Bewertung seiner im Vergleich mit modernen Theorien eher sparsamen Ausführungen zu Sinn und Bedeutung$_F$ zu beachten. Frege wollte in SB auch keine umfassende sprachphilosophische Bedeutungstheorie liefern, so daß es sich erübrigt, in einer Besprechung dieses Aufsatzes auf die Problematik der realistischen Semantik einzugehen.

6 Funktion, Begriff, Wertverlauf, Klasse

6.1 Funktionen und Begriffe

Den Funktionsbegriff hat Frege schon in BS, § 9 diskutiert. Seine Ausführungen leiden dort allerdings unter der mangelnden Unterscheidung zwischen Bezeichnung und Bezeichnetem. In den hier zu erörternden Arbeiten FB, BG, WF erläutert er diesen Begriff nun genauer – um eine Definition kann es sich bei diesem Grundbegriff nicht handeln.

Frege geht von einstelligen arithmetischen Funktionen aus, und lehnt zunächst zwei Erklärungsversuche ab:

1) Man sagt oft, Funktionen seien *Ausdrücke,* die freie Variable enthalten, wie z. B. „x^2+3x“. Aber wie soll ein Ausdruck Werte für verschiedene Argumente annehmen können? Außerdem wären dann „x^2+3x“ und „y^2+3y“ verschiedene Funktionen.

2) Funktionen sind auch keine „Veränderlichen“. Denn etwas verändert sich bzgl. eines anderen, und wo das nicht spezifiziert wird, ist eine Veränderung in der Zeit gemeint. Eine zeitliche Veränderung spielt aber in der Mathematik keine Rolle. Was verändert sich? Eine Größe, eine Zahl? Neben den bestimmten Zahlen wie 1, 17 oder π gibt es keine veränderlichen oder unbestimmten Zahlen. Die freien Variablen in einem Funktionsausdruck bezeichnen keine unbestimmten Zahlen; sie haben keine selbständige Bedeutung, sondern dienen im Kontext einer Aussage zum Ausdruck der Allgemeinheit, wie z. B. in „$x(x-4)=x^2-4x$“. Die Ausdrücke „x“ und „$x(x-4)$“ sind hingegen bedeutungslos.

Bei seiner Analyse geht Frege wie in SB von Funktionsausdrücken aus. Die Ausdrücke „$2 \cdot 1^3+1$“, „$2 \cdot 2^3+2$“, „$2 \cdot 4^3+4$“ usf. enthalten einen gemeinsamen Bestandteil, den man so schreiben kann „$2 \cdot (\quad)^3+(\quad)$“. Dieser Ausdruck enthält Leerstellen – sie werden durch ( ) angedeutet –, in die man Zahlnamen einsetzen kann. Dadurch entsteht dann wieder ein Zahlname, wie „$2 \cdot (17)^3+(17)$“.

Der Ausdruck „$2 \cdot (\quad)^3 + (\quad)$" ist *unvollständig*, ergänzungsbedürftig: Erst durch Einsetzung erhält man einen bedeutungsvollen Namen. „$2 \cdot (\quad)^3 + (\quad)$" deutet eine Funktion an. Wie den Ausdruck einer Funktion nennt Frege auch diese selbst „ergänzungsbedürftig": Im Gegensatz zu einem Objekt (Gegenstand) ist eine Funktion etwas Unvollständiges, Ungesättigtes, Ergänzungsbedürftiges; sie ergibt erst bei Anwendung auf einen Gegenstand etwas Selbständiges: den Funktionswert, der wieder ein Gegenstand ist. (Frege betrachtet keine Funktionen, deren Werte Funktionen sind.)

Statt „$2 \cdot (\quad)^3 + (\quad)$" schreibt Frege auch „$2 \cdot \xi^3 + \xi$". Er verwendet also Buchstaben (ξ, ζ, ...), um Leerstellen anzudeuten und sie zu unterscheiden – die Schreibweise „$2 \cdot (\quad)^3 + (\quad)$" besagt ja im Gegensatz zu „$2 \cdot \xi^3 + \xi$" bzw. „$2 \cdot \xi^3 + \eta$" nicht, ob für die beiden Leerstellen immer derselbe Name einzusetzen ist oder nicht. Diese Buchstaben sind nun keine freien Variablen; sie dienen nicht zum Ausdruck der Allgemeinheit, sondern zur Markierung der Leerstellen, der Funktionsstruktur. Daher unterscheidet Frege sie auch syntaktisch. Wir wollen sie hier als *Markierungsvariablen* bezeichnen.

Für Frege ist die Unterscheidung Funktion – Gegenstand die ontologische Grundunterscheidung: Begriffe sieht er, wie gleich erläutert wird, als spezielle Funktionen an, Propositionen (Gedanken) sind für ihn Gegenstände[1]. Die Rede von der Ungesättigtheit und Ergänzungsbedürftigkeit von Funktionen besagt daher nur, daß

[1] Die Auffassung von Propositionen – wie auch des Sinnes von Namen – als Objekte ist einer der fragwürdigsten Punkte von Freges Ontologie, daneben auch seine Auffassung der Wahrheitswerte als Gegenstände. Da er z. B. sagt, Gedanken seien das, was wahr oder falsch sein könne (KS, S. 344), würde das bei einer Deutung von „wahr" und „falsch" als Namen prima facie implizieren, daß Gedanken mit Wahrheitswerten identisch sind. Das ist sicher nicht Freges Meinung. Das Wort „ist" wird, wie Frege selbst betont, auch dort, wo es eine Relation zwischen Objekten ausdrückt, oft nicht im Sinn der Identität verwendet. So kann ich auf eine Fotografie deuten und sagen „Das ist Fritz" und damit ausdrücken, daß sie Fritz darstellt. Die Beziehung zwischen einem Gedanken und dem zugehörigen Wahrheitswert ist die zwischen dem Sinn und dem Bezug eines Satzes. Formal ist Freges Ansatz – jedenfalls im Rahmen der extensionalen Logik – durchaus praktikabel, inhaltlich ist er hingegen nicht adäquat.

Funktionen keine Gegenstände sind. Sie lassen sich aber auf Gegenstände anwenden und ergeben dabei wieder Gegenstände.

Frege erweitert dann den Funktionsbegriff, indem er erstens neben Zahlen auch andere Argumente und Werte zuläßt und zweitens auch mehrstellige Funktionen betrachtet. Zum ersten Punkt ist insbesondere auf die Erklärung von Begriffen hinzuweisen: Für Frege sind Wahrheitswerte Gegenstände, wie wir in 5.2 gesehen haben. Wir bezeichnen diese Objekte wieder durch „w" (für das Wahre) und „f" (für das Falsche). Auch Wahrheitswerte können also Argumente und Werte von Funktionen sein. *Begriffe* sind nun alle Funktionen, die nur die Werte w und f annehmen. Anstatt von „Ergänzungsbedürftigkeit" spricht Frege bei Begriffen auch von ihrer *Prädikativität* (vgl. z. B. N, S. 129). Begriffe 1. Stufe bilden also Gegenstände auf Wahrheitswerte ab. Ein (einstelliger) Begriff ist z. B. $\xi^2 = 1$. Auch Wahrheitswertfunktionen als Funktionen, die die Menge $\{w, f\}$ oder eine n-fache Cartesische Potenz dieser Menge (die Menge aller n-tupel von Wahrheitswerten) in $\{w, f\}$ abbilden, sind Begriffe.

Heute geht man oft den umgekehrten Weg und erklärt Funktionen durch Begriffe: Ist $F(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ ein $(n+1)$-stelliger Begriff, für den gilt: $\Lambda x_1 \ldots x_n V!yF(x_1, \ldots, x_n, y)$, so ist $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) := \iota yF(\xi_1, \ldots, \xi_n, y)$ eine n-stellige Funktion. (ι ist wieder der Kennzeichnungsoperator.)

6.2 Die Hierarchie der Funktionen

Wir wenden Funktionen nicht nur auf Objekte an, sondern machen auch Aussagen über sie und sagen z. B., ein zweistelliger Begriff sei transitiv. Obwohl sie dann als Argumente anderer Funktionen erscheinen und im Kontext keiner Ergänzung bedürfen, werden sie damit nicht zu Objekten, sondern behalten ihren Charakter als Funktionen. In der normalen Sprache wird die Kategorie des Subjekts, des „Satzgegenstandes" nicht immer deutlich gemacht; man redet über Funktionen wie über Objekte. Satzgegenstände sind aber nicht immer Gegenstände im Sinn Freges, d. h. Objekte. Sagt man z. B. „Der Begriff ‚Pferd' ist prädikativ", so redet man über einen Begriff, faßt ihn aber nicht als Objekt auf, denn Objekte sind nicht prädikativ. In der Sprache der Logik, insbesondere auch in jener der

BS, bleibt der Unterschied zwischen Objekten und Funktionen als Argumenten von anderen Funktionen immer syntaktisch deutlich: Die Funktionsausdrücke führen als Argumente anderer Funktionsausdrücke ihre Variablen (meist) mit sich, wobei diese als gebundene Variable erscheinen: Der Satz „VxF (x)" ist eine Aussage über den Begriff F (ξ), der besagt, daß dieser Begriff erfüllbar ist. Das könnte man auch in der Form V (αxFx) schreiben. Frege bringt die gebundenen Variablen hingegen immer am Funktionszeichen 2. Stufe an, schreibt also nicht V (αxFx), sondern VxF (x), und nicht G (αxFx), sondern G_x (F (x)). Für ihn ist die Abstraktion (die Neutralisierung der Ergänzungsbedürftigkeit des Arguments) ein Bestandteil der Funktion 2. Stufe (vgl. N, S. 128 ff.). Die Verwendung einer gebundenen Variablen in G_x (F (x)) ist nötig, um diesen Satz von einem Funktionsausdruck der Gestalt G (F (ξ)) syntaktisch zu unterscheiden, in dem die Funktion 1. Stufe G (ξ) auf die Werte der Funktion F (ξ) anzuwenden ist. Die Ungesättigtheit der Funktion F (ξ) wird also im Kontext VxF (x) nicht aufgehoben, sondern durch eine gebundene Variable deutlich gemacht. Sie bewirkt aber keine Ergänzungsbedürftigkeit des Gesamtausdrucks, sondern wird durch den Kontext neutralisiert. In diesem Sinn sagt Frege:

„Der Begriff verhält sich wesentlich prädikativ auch da, wo etwas von ihm ausgesagt wird; folglich kann er dort nur wieder durch einen Begriff, niemals durch einen Gegenstand ersetzt werden". (BG, in KS, S. 174.)

Dieser Einsicht ist Frege jedoch nicht immer treu geblieben. So sagt er in BG, in dem Satz (*): „Der Begriff *Pferd* ist ein leicht gewinnbarer Begriff" bezeichne der Ausdruck „Der Begriff *Pferd*" einen Gegenstand:

„Die drei Worte „der Begriff *Pferd*" bezeichnen einen Gegenstand, aber eben darum keinen Begriff, wie ich das Wort gebrauche". (KS, S. 169; vgl. dazu auch N, S. 129 f.)

Frege meint, hier läge nur eine sprachliche Härte vor:

„Es kann ja nicht verkannt werden, daß hier eine freilich unvermeidbare sprachliche Härte vorliegt, wenn wir behaupten: der Begriff ‚Pferd' ist kein Begriff". (KS, S. 170, vgl. a. S. 177.)

Die Schwierigkeiten, die Frege der Sprache anlastet, liegen aber in seiner eigenen Konzeption. Eine Funktion wird nicht dadurch zu einem Objekt, daß sie Argument einer anderen Funktion ist. Die gegenteilige Behauptung paßt auch nicht zu den sonstigen Aussagen Freges: Da er von einer Hierarchie der Funktionen spricht und sie kategorial nach Stellenzahl und Art der Argumente unterscheidet, für die sie definiert sind, müßte er sonst auch eine Hierarchie im Bereich der Objekte annehmen, was er immer entschieden abgelehnt hat. Und da der Ausdruck „Der Begriff *Pferd*" den Begriff *Pferd* bezeichnet, ebenso wie das Prädikat „Pferd", und dieses nach Frege kein Objekt, sondern einen (extensionalen) Begriff bezeichnet, kann auch „Der Begriff *Pferd*" kein Name für ein Objekt sein. „‚*Pferd*'" oder „Der Begriff *Pferd*" ist ein Ausdruck, der wie jener der Funktionalabstraktion verwendet wird. Im Gegensatz zu „{x:Fx}" (oder „ωxFx" – „Der Wertverlauf der Funktion F(ξ)") bezeichnet aber „αxFx" kein Objekt, sondern eine Funktion. Frege hat deutlich darauf hingewiesen, daß Begriffe von ihren Umfängen kategorial verschieden sind (vgl. z. B. KS, S. 172). Was für ein Objekt aber der Ausdruck „Der Begriff *Pferd*" bezeichnen sollte, wenn nicht den Begriffsumfang, ist völlig offen.

Frege entwickelt nun im Bereich der Funktionen eine Typenhierarchie: Sie unterscheiden sich nach Stellenzahl und Stufe. Er hat aber diese Hierarchie nicht allgemein entwickelt, sondern nur bis zu den Funktionen 2. Stufe,

> „weil man statt der Funktion 2. Stufe im weiteren Fortgang Funktionen 1. Stufe betrachten kann, wie an einem anderen Ort gezeigt werden soll". (FB, vgl. KS, S. 142.)

Frege bezieht sich damit auf die Übersetzbarkeit (extensionaler) Aussagen über Funktionen in solche über ihre Wertverläufe mithilfe einer Funktion, die ein Objekt und den Wertverlauf einer Funktion auf den Wert dieser Funktion für dieses Objekt abbildet, also der Elementschaftsrelation entspricht, und in GGAI eingeführt wird.

Frege betrachtet nur Funktionen, deren Wertebereich aus Objekten besteht. Das bedeutet jedoch keine Beschränkung der Allgemeinheit seines Funktionsbegriffs, denn ist z. B. F(f) eine einstellige Funktion 2. Stufe, die einstelligen Funktionen f einstellige Funktionen zuordnet, so kann man statt F eine zweistellige Funktion G(f, x) betrachten, die der Funktion und dem Objekt x den Wert von F(f) für x zuordnet. Es sei z. B. F(f) die Funktion $\frac{df(x)}{dx}$. Dann ist der

Wert von F für das Argument x^2 die Funktion 2x. Der Satz (*) $\frac{dx^2}{dx} = 2x$ besagt, daß die beiden Funktionen identisch sind. Hier ist x links wie rechts eine Markierungsvariable, für die man keine Objektnamen einsetzen kann – die Ausdrücke $\frac{d2^2}{d2} = 2 \cdot 2$ und $\frac{dx^2}{dx} = 2 \cdot 2$ wären sinnlos. Bei Frege kann ein Gleichheitszeichen ferner nur zwischen Objektnamen stehen, d. h. für ihn ist auch der Ausdruck (*) sinnlos. Die Identität von Funktionen ist vielmehr in der Form $\bigwedge x (fx = gx)$ auszudrücken, (*) also im Beispiel durch $\bigwedge y (\left(\frac{dx^2}{dx}\right)_{x=y} = 2y)$. $\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=y}$ – oder in der syntaktischen Normalform solcher Terme: $D_x(f(x), y)$ – bezeichnet aber eine zweistellige Funktion, in der x als gebundene Variable fungiert. (Vgl. dazu KS, S. 279.)

Bei dieser Beschränkung auf Funktionen, die ihren Argumenten Objekte zuordnen, könnte man die Typen oder Kategorien allgemein so definieren:

1) 0 ist ein Typ der Stufe 0 (der Typ von Gegenständen)

2) Sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Typen und ist n die maximale Stufe dieser Typen, so ist auch $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ein Typ und seine Stufe ist $n+1$ (der Typ von n-stelligen Funktionen, die Argumente der Typen $\tau_1, \ldots, \tau_n$ auf Gegenstände abbilden).

Frege sah den Unterschied zwischen Funktionen verschiedenen Typs als „in der Natur der Sache tief begründet“ an (KS, S. 142). Er sagt:

„Wie nun Funktionen von Gegenständen grundverschieden sind, so sind auch Funktionen, deren Argumente Funktionen sind und sein müssen, grundverschieden von Funktionen, deren Argumente Gegenstände sind und nichts anderes sein können. Diese nenne ich Funktionen erster, jene Funktionen zweiter Stufe. Ebenso unterscheide ich Begriffe erster und zweiter Stufe“. (KS, S. 140 (= FB).)

Und zu mehrstelligen Funktionen höherer Stufe:

„Wir unterscheiden unter den Funktionen mit einem Argumente solche erster und zweiter Stufe. Hier ist eine größere Mannigfaltigkeit möglich. Eine Funktion mit zwei Argumenten kann in Beziehung auf diese von derselben oder von verschiedenen Stufen sein: gleichstufige, ungleichstufige Funktionen. Die bisher betrachteten waren gleichstufige. Eine ungleichstufige Funktion ist z. B. der Differentialquotient, wenn als Argumente genommen werden die zu differenzierende Funktion und das Argument, für welches differenziert wird, oder das bestimmte Integral, sofern als Argumente die zu integrierende Funktion und die obere Grenze genommen werden. Die gleichstufigen Funktionen können wieder in solche erster und zweiter Stufe eingeteilt werden. Eine solche zweiter Stufe ist z. B. F(f(1)), wo „F" und „f" die Argumente andeuten. Man muß bei den Funktionen zweiter Stufe mit einem Argumente unterscheiden, je nachdem als dies Argument eine Funktion mit einem oder eine solche mit zwei Argumenten erscheinen kann; denn eine Funktion mit einem Argumente ist so wesentlich verschieden von einer solchen mit zwei Argumenten, daß die eine nicht an eben der Stelle als Argument auftreten kann, wo die andere es kann. Einige Funktionen zweiter Stufe mit einem Argumente verlangen eine Funktion mit zwei Argumenten, und diese beiden Klassen sind scharf geschieden". (KS, S. 141.)

Diese Position vertritt Frege auch in den GGA, wenn er z. B. sagt:

„Funktionen mit zwei Argumenten sind von Funktionen mit einem Argumente ebenso grundverschieden wie diese von den Gegenständen. Denn während diese ganz gesättigt sind, sind die Funktionen mit zwei Argumenten weniger gesättigt, als die mit einem Argumente, die auch schon ungesättigt sind". (GGAI, S. 37.)

Man kann eben Begriffe 2. Stufe wie „Erfüllbar" nicht auf Dinge, z. B. Menschen anwenden, und Begriffe 1. Stufe wie ‚Mensch' nicht auf Begriffe 1. Stufe.

6.3 Wertverläufe

In FB führt Frege nun auch Wertverläufe von Funktionen ein und vollzieht damit den ersten Schritt des Übergangs von der Begriffs- bzw. Funktionslogik der BS zur Wertverlaufslogik der GGA. ‚Wertverlauf' ist für Frege ein Grundbegriff, der sich nicht definieren, sondern nur erläutern läßt. Er erläutert ihn anhand der graphischen Zuordnung von Argumenten und Werten einer (einstelligen) Funktion durch eine Kurve in einem Koordinatensystem. Wertverläufe sind für Frege *Gegenstände.* Die Wertverläufe zweier Funktionen sollen genau dann identisch sein, wenn diese für gleiche Argumente immer gleiche Werte annehmen. Frege schreibt $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ für den Wert-

verlauf der Funktion $\Phi(\xi)$; wir wollen dafür $\omega x F(x)$ schreiben[2]. Es gilt also:
$\omega x F(x) = \omega x G(x) \equiv \wedge x(F(x) = G(x))$.
Man könnte nun den Wertverlauf $\omega x F x$ der Funktion F definieren als $\{\langle x, y\rangle : f(x) = y\}$, d. h. als Klasse der Paare $\langle x, y\rangle$, für die $f(x) = y$ gilt. Dabei würde man aber Klassen voraussetzen. Für Frege sind hingegen, weil er nicht von Begriffen, sondern allgemeiner von Funktionen ausgeht, Wertverläufe grundlegender als Klassen, und er verwendet statt Klassen die ihnen eineindeutig entsprechenden Wertverläufe einstelliger Begriffe[3].

Wertverläufe mehrstelliger Funktionen führt Frege nicht als eigenständige Objekte ein, sondern er verwendet im Fall zweistelliger Funktionen statt dessen „Doppelwertverläufe", die er durch $\omega xy F(x, y) := \omega x(\omega y F(x, y))$ definiert (GGAI, S. 55).

Dabei ist $\omega y F(\xi, y)$ eine Funktion, die Gegenstände auf Wertverläufe abbildet, und $\omega x(\omega y F(x, y))$ ist der Wertverlauf dieser Funktion. Es gilt also nicht allgemein $\omega xy F(x, y) = \omega yx F(x, y)$. Ist $F(x, y)$ z. B. die Funktion x^y, so ist $\omega x F(x, y)$ eine Funktion, die jedem y den Wertverlauf von x^y zuordnet – das sei $F'(y)$ –, $\omega y F(x, y)$ ist hingegen eine Funktion, die jedem x den Wertverlauf von x^y zuordnet – das sei $F''(x)$. Die Funktionen $F'(y)$ und $F''(x)$ sind verschieden, da z. B. $F'(1)$ eine Gerade mit der Gleichung $x = y$ ist, $F''(1)$ hingegen eine Gerade mit der Gleichung $y = 1$. $\omega y \omega x F(x, y)$ ist aber der Wertverlauf von $F'(y)$, $\omega x \omega y F(x, y)$ hingegen jener von $F''(x)$. Hier zeigt sich ein Vorteil der Funktionenlogik vor der Begriffslogik, denn für Klassen ist ein entsprechendes Vorgehen nicht möglich. In GGAI führt Frege auch eine zweistellige Funktion ein, die wir durch η symbolisieren und für die gilt $a \eta \omega x F x = Fa$. Es ist

[2] Ein Ausdruck der Gestalt $\omega x F x$ bezeichnet also ein Objekt, den Wertverlauf von F, mit $\alpha x F x$ haben wir hingegen die Funktion F bezeichnet. Man könnte den Operator ω auch in der Form $\omega(\alpha x F x)$ verwenden. Er stellt also eine Funktion dar, die einstellige Funktionen auf ihre Wertverläufe abbildet.

[3] Daß man mit Klassen tatsächlich auskommt und daneben nicht noch Relationen benötigt, haben auch erst N. Wiener (1914) und K. Kuratowski (1921) bewiesen, indem sie zeigten, daß sich geordnete Paare und allgemein n-gliedrige Folgen als Klassen definieren lassen. Vgl. dazu z. B. Kutschera (1967), S. 315 f. und unten den Abschnitt 7.1.

also $b\eta(a\eta\omega xyF(x, y)) = F(a, b)$. Den Wertverlauf eines zweistelligen Begriffes bezeichnet Frege auch als „Umfang des Begriffes“, wie er den Wertverlauf eines einstelligen Begriffes dessen Umfang nennt.

Der Wertverlauf $\omega xF(x)$ der Funktion $F(\xi)$ ist ein Gegenstand, der zwar der Funktion eineindeutig zugeordnet ist, aber selbst keine Funktion ist. Er ist also auch von $\alpha xF(x)$ verschieden. Der Unterschied zwischen Sinn und Bedeutung fällt für Funktionsausdrücke nicht mit dem Unterschied zwischen Funktion und Wertverlauf zusammen. Vielmehr ist die Bedeutung$_F$ eines Funktionsausdrucks die extensionale Funktion. Daher bedeuten Funktionsausdrücke nie dasselbe wie Wertverlaufsnamen.

Während Frege im Bereich der Funktionen eine Typenhierarchie annimmt, tut er das im Bereich der Gegenstände, speziell der Wertverläufe nicht. Sonst hätte man hier eine Typenhierarchie der Wertverläufe, bzw. Klassen, die direkt zur Typentheorie führen würde, in der die Antinomien nicht auftreten. Das würde aber nicht nur seine Begründung der Arithmetik unmöglich machen, sondern Frege hat sich aus intuitiven Gründen auch immer gegen eine Typenunterscheidung für Objekte gewehrt. Für ihn gibt es nur *eine* Art von Gegenständen, die alle „gesättigt“ sind, aber verschiedene Arten von Funktionen, die in verschiedener Weise ungesättigt sind.

6.4 Klassen

Frege führt im System der GGA keine Klassen ein, sondern verwendet nur Wertverläufe. Wertverläufe von Begriffen und Klassen sind einander aber eineindeutig zugeordnet, denn es gilt für alle Begriffe F und G:

$\{x{:}Fx\} = \{x{:}Gx\} \equiv \omega xF(x) = \omega xF(x) \equiv \bigwedge x(F(x) \equiv G(x))$.

Einem Begriff $F(x)$ entspricht also eineindeutig eine Klasse wie ein Wertverlauf, also entsprechen sich auch diese beiden eineindeutig.

Wir haben oben gesagt, man könne den Wertverlauf ωxFx definieren als Klasse $\{\langle x, y\rangle{:}\ Fx = y\}$. Das ist aber nur eine *Rekonstruktion* des intuitiven Begriffes des Wertverlaufs in der Sprache der Klassenlogik, der Ausdruck „ωxFx“ ist nicht einfach synonym mit dem Term „$\{\langle x, y\rangle{:}\ Fx = y\}$“. Ebenso kann man Klassen im üblichen

Sinn in der Sprache der Wertverläufe nicht definieren, sondern man kann die Klasse {x: Fx} nur durch den Wertverlauf ωxFx repräsentieren.

Frege hat sich auch ausführlich mit dem Klassenbegriff beschäftigt und ihn, in Auseinandersetzung mit der zeitgenössischen Literatur, insbesondere von dem Begriff eines Aggregats (eines Haufens, einer Vielheit) abgegrenzt. Er bestimmt Klassen als Umfänge von Begriffen. Danach gibt es die leere Klasse, die Einermenge {a} ist von ihrem einzigen Element a verschieden und die Elemente einer Klasse sind nach dem Abstraktionsprinzip $x\varepsilon\{y{:}Fy\} \equiv F(x)$ immer eindeutig bestimmt. All das gilt für Aggregate nicht: Es gibt kein leeres Aggregat (keine Vielheit, die aus null Dingen besteht). Ein Aggregat, das nur aus einem Ding besteht, ist mit diesem identisch. Und wegen der Transitivität der Teileigenschaft, stellt eine Division dasselbe Aggregat dar wie das Aggregat ihrer Regimenter, Kompanien, Soldaten oder der Moleküle, aus denen diese bestehen.

Auf diese Punkte hat Frege insbesondere im Brief an Russell vom 28. 7. 1902 hingewiesen, sowie in GGA II, S. 150. Im Brief unterscheidet er folgende Fälle:

„1. ‚Sokrates und Platon sind Philosophen'. Hier haben wir zwei Gedanken: *Sokrates ist ein Philosoph* und *Platon ist ein Philosoph,* die nur sprachlich aus Bequemlichkeit in einen Satz zusammengezogen sind. Logisch ist *Sokrates und Platon* nicht als Subjekt aufzufassen, von dem Philosophen zu sein ausgesagt wird.
2. ‚Bunsen und Kirchhoff haben die Spektralanalyse begründet'. Hier müssen wir *Bunsen und Kirchhoff* als ein Ganzes betrachten. Ebenso ist aufzufassen ‚die Römer eroberten Gallien'. Die Römer sind hier das Römische Volk, zusammengehalten durch Sitten, Einrichtungen und Gesetze. Ein Heer ist in diesem Sinne ein Ganzes, ein System. Jeden physischen Körper betrachten wir als Ganzes, als System, bestehend aus Teilen.
3. ‚Die Klasse der Primzahlen umfaßt unendlich viele Gegenstände'. Hier ist die Klasse der Primzahlen ein Gegenstand; aber nicht ein Ganzes, dessen Teile Primzahlen wären. Ich möchte nicht sagen, daß diese Klasse aus Primzahlen *bestehe.* Dieser Fall unterscheidet sich von dem vorhergehenden so. Erstens: ein Ganzes, ein System wird immer durch Beziehungen zusammengehalten und diese sind wesentlich. Ein Heer wird zerstört, wenn sein Zusammenhalt aufgelöst wird, wenn auch die einzelnen Krieger am Leben bleiben. Dagegen sind für die Klasse die Beziehungen gleichgültig, in denen die ihr angehörenden Gegenstände zu einander stehen. Zweitens: dadurch daß ein Ganzes gegeben ist, ist noch nicht bestimmt, welche seiner Teile ins

Auge zu fassen sind. Als Teile eines Regiments kann ich ansehen die Bataillone, die Kompanien, oder die einzelnen Soldaten, als Teile eines Sandhaufens die Sandkörner oder die Silicium- und Sauerstoffatome. Wenn dagegen eine Klasse gegeben ist, so ist bestimmt, welche Gegenstände ihr angehören. Der Klasse der Primzahlen gehören nur Primzahlen an, nicht aber die Klasse der Primzahlen von der Form $4n+1$; denn diese Klasse ist keine Primzahl. Der Klasse der Kompanien eines gegebenen Regiments gehören nur Kompanien an, aber nicht einzelne Soldaten. Für die Ganzen oder Systeme haben wir den Satz, daß ein Teil des Teiles Teil des Ganzen ist. Dieser Satz gilt nicht von den Klassen hinsichtlich der ihnen angehörenden Gegenstände. Die Beziehung einer Kompanie zu einer Klasse von Kompanien ist ganz verschieden von der Beziehung dieser Kompanie zum Regimente, dessen Teil sie ist. Die Gegenstände, die einer Klasse angehören, können zugleich ein System bilden. Doch ist dabei immer noch System und Klasse zu unterscheiden. Die Klasse der Atome, die den Stuhl bilden, auf dem ich sitze, ist nicht der Stuhl selbst. Ein Ganzes, dessen Teile materiell sind, ist selbst materiell; eine Klasse dagegen möchte ich nicht als physischen, sondern als logischen Gegenstand bezeichnen". (BW, S. 222 f.)

6.5 Freges Forderungen an Begriffe

Frege fordert generell, daß jede Funktion und jeder Begriff für alle Argumente der passenden Kategorie erklärt werden muß (Vollständigkeit) und jedem Argument genau einen Gegenstand zuordnen muß (Widerspruchsfreiheit). Er sagt in FB:

„Vorkehrungen zu treffen, daß nie ein Ausdruck bedeutungslos werden könne, daß man nie, ohne es zu merken, mit leeren Zeichen rechne in der Meinung, mit Gegenständen zu tun zu haben, erscheint als Gebot der wissenschaftlichen Strenge". (KS, S. 135.)

Betrachten wir der Einfachheit halber einstellige Funktionen $F(\xi)$, so sind sie gewöhnlich nur für Argumente aus einem beschränkten Definitionsbereich A erklärt. Frege meint, daß man den Definitionsbereich auf den gesamten *universe of discourse* ausdehnen kann, indem man z. B. für alle Objekte a, die nicht zu A gehören, $F(a)=b$ setzt, wo b ein beliebiges, aber konstantes Objekt ist.

In GGA sagt Frege:

„Man kann dies bildlich so ausdrücken: der Begriff muß scharf begrenzt sein. Wenn man sich Begriffe ihrem Umfange nach durch Bezirke in der

Ebene versinnlicht, so ist das freilich ein Gleichnis, das nur mit Vorsicht gebraucht werden darf, hier aber gute Dienste leisten kann. Einem unscharf begrenzten Begriffe würde ein Bezirk entsprechen, der nicht überall eine scharfe Grenzlinie hätte, sondern stellenweise ganz verschwimmend in die Umgebung überginge. Das wäre eigentlich gar kein Bezirk; und so wird ein unscharf definierter Begriff mit Unrecht Begriff genannt. Solche begriffsartige Bildungen kann die Logik nicht als Begriffe anerkennen; es ist unmöglich, von ihnen genaue Gesetze aufzustellen. Das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten ist ja eigentlich nur in anderer Form die Forderung, daß der Begriff scharf begrenzt sei". (GGA II, S. 69; vgl. dazu auch das Zitat aus N, S. 133 in 5.3.)

In GLA, § 53 und in BG macht Frege auch die wichtige Unterscheidung zwischen Eigenschaften und Merkmalen eines Begriffs. Für einen einstelligen Begriff 1. Stufe F ist eine *Eigenschaft* von F ein einstelliger Begriff G 2. Stufe, der auf F zutrifft. Ein *Merkmal* von F ist dagegen ein (einstelliger) Begriff G 1. Stufe, für den der Satz $\wedge x(Fx \supset Gx)$ analytisch gilt:

„Unter Eigenschaften, die von einem Begriffe ausgesagt werden, verstehe ich natürlich nicht die Merkmale, die den Begriff zusammensetzen. Diese sind Eigenschaften der Dinge, die unter den Begriff fallen, nicht des Begriffes. So ist „rechtwinklig" nicht eine Eigenschaft des Begriffes „rechtwinkliges Dreieck"; aber der Satz, daß es kein rechtwinkliges, geradliniges, gleichseitiges Dreieck gebe, spricht eine Eigenschaft des Begriffes „rechtwinkliges, geradliniges, gleichseitiges Dreieck" aus; diesem wird die Nullzahl beigelegt ... Es wäre auch falsch zu leugnen, daß Existenz und Einzigkeit jemals Merkmale von Begriffen sein könnten. Sie sind nur nicht Merkmale der Begriffe, denen man sie der Sprache folgend zuschreiben möchte. Wenn man z. B. alle Begriffe, unter welche nur Ein Gegenstand fällt, unter einen Begriff sammelt, so ist die Einzigkeit Merkmal dieses Begriffes". (GLA, S. 64f.)

In diesem Zusammenhang kritisiert Frege auch den ontologischen Gottesbeweis, in dem er die Existenz, die in manchen Versionen als definitorisches Merkmal des Gottesbegriffes angenommen wird, als Erfüllbarkeit deutet und dann zu Recht sagt, daß man eine solche Eigenschaft des Begriffes nicht in seiner Definition verwenden kann (vgl. GLA, S. 65 und KS, S. 269). Frege übersieht dabei, daß in den fraglichen Versionen Existenz nicht im Sinne der Erfüllbarkeit, also als Begriff 2. Stufe verwendet wird, sondern als Begriff 1. Stufe, mit dem man im Bereich möglicher Objekte zwischen existierenden und nichtexistierenden unterscheidet.

7 Grundgesetze der Arithmetik

7.1 Das Logiksystem der GGA

Die „Grundgesetze der Arithmetik“ sind das Hauptwerk Freges. In ihm vollendet er die logische Begründung der Arithmetik, die er mit der BS begonnen hatte und wendet sich dann im 2. Band den Grundlagen der Analysis zu. Die Logik, die er im 1. Band (§§ 1–48) aufbaut, unterscheidet sich von jener der BS vor allem in folgenden Punkten:

1) Frege führt Wertverläufe ein.

2) Er faßt Sätze konsequent als Namen von Wahrheitswerten auf und entwickelt so eine reine Termlogik, die sich von der üblichen Satzlogik unterscheidet.

3) Syntax und Semantik werden erheblich präziser definiert als in der BS.

Bei der Darstellung des Systems der GGA wollen wir es nicht in die übliche Form einer Klassen- und Satzlogik übersetzen, denn dann ergäbe sich – abgesehen von kleineren Modifikationen – nur das bekannte System der klassischen oder naiven Mengenlehre und das Spezifische des Fregeschen Systems würde nicht deutlich. Wir werden uns also eng an Freges Vorgehen halten.

7.1.1 Syntax

Bei Frege sieht die Sprache der GGA so aus: Er verwendet die logischen Symbole

=	für Identität
—	für die Inhaltsfunktion
┬	für die Negation
┬┗	für die Implikation

$\smile$ für den Alloperator
’ für die Wertverlaufsabstraktion
\ für die Kennzeichnung

Er verwendet ferner kleine lateinische Buchstaben als freie Variablen, und zwar a, b, ... als freie Gegenstandsvariablen (FGV), f, g als freie Variablen für 1- oder 2stellige Funktionen 1. Stufe (FFV), M, N als freie Variablen für 1stellige Funktionen 2. Stufe, die für 1- oder 2stellige Funktionen 1. Stufe definiert sind (FFFV), gebundene Variablen, und zwar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... und α, β, ... als gebundene Gegenstandsvariablen (GGV), $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, ... als gebundene Variablen für 1- oder 2stellige Funktionen 1. Stufe (GFV). Daneben gibt es noch Markierungsvariablen (MV) x, y für die Argumentstellen von Funktionsausdrücken 1. Stufe, die wie spezielle GGV fungieren. Freie Variablen dienen bei Frege zum Ausdruck der Allgemeinheit, so daß man sie – wie wir das unten tun – auch durch Mitteilungszeichen für Namen bzw. Funktionsausdrücke ersetzen kann; die objektsprachlichen Terme gehen dann in Termschemata über.

Daneben gebraucht Frege den (metasprachlichen) Urteilsstrich (bzw. $\vdash$) zum Ausdruck der Behauptung, und den Doppelstrich (bzw. $\Vdash$) zum Ausdruck einer definitorischen Festsetzung.

Terme lassen sich im Einklang mit Freges Festsetzung induktiv so definieren:

1) FGV sind Terme.
2) Sind s, t Terme, so auch $-s$, $s = t$, $\top s$, $\sqsubset^{t}_{s}$, $\backslash s$ und, wo f eine 1- bzw. 2stellige FFV ist, auch f(s) bzw. f(s, t).
3) Ist s[a] ein Term, a eine FGV, $\mathfrak{a}$ bzw. α eine GGV, die in s[a] nicht vorkommt, so sind auch $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-$ s[$\mathfrak{a}$] und $\grave{\alpha}$s[α] Terme.
4) Ist s[f] ein Term, f eine FFV, $\mathfrak{f}$ eine (gleichstellige) GFV, die in s[f] nicht vorkommt, so ist auch $-\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-$ s[$\mathfrak{f}$] ein Term.
5) Ist s[a] bzw. s[a, b] ein Term, sind a, b FGV, x, y MV, die in s[a] bzw. s[a, b] nicht vorkommen, und ist M eine FFFV mit einer Argumentstelle für 1- bzw. 2stellige Funktionen 1. Stufe, so ist M_x(s[x]) bzw. M_{xy}(s[x, y]) ein Term.

Frege verwendet folgende *Klammerregeln* (vgl. GGAI, S. 64):

1) Der Bereich des Inhaltsstriches ist der ganze Ausdruck, der auf ihn folgt.
2) Der linke Bereich von = ist der ganze Ausdruck bis zum nächsten Inhaltsstrich. Der rechte Bereich von = ist der Ausdruck bis zum nächsten Gleichheitszeichen. ($a = b = c = d$ ist also im Sinn von $((a = b) = c) = d$ zu lesen).

3) Bei anderen „zweiseitigen" Funktionszeichen, die zwischen ihren beiden Argumenten stehen wie η, reicht der linke Bereich bis zum nächsten Inhaltsstrich oder Identitätszeichen, der rechte reicht bis zum nächsten zweiseitigen Funktionszeichen.
4) Bei „einseitigen" Funktionszeichen, die links von ihrem Argument stehen, mit Ausnahme des Inhaltsstriches, erstreckt sich der Bereich bis zum nächsten zweiseitigen Funktionszeichen.

Abweichungen sind durch Klammern anzugeben.

Bei unserer Transkription verwenden wir wie schon früher andere logische Symbole und bezeichnen freie Variablen als Konstanten, so daß alle Variablen gebundene Variablen sind. Wir schreiben insbesondere $\omega x A[x]$ für $\grave{\alpha}A[\alpha]$ und $\varkappa s$ für $\backslash s$.

Kategorien

Frege verwendet folgende Kategorien (vgl. GGAI, S. 40f.):

0	–	die Kategorie von Namen
(0)	–	die Kategorie von 1stelligen Funktionsausdrücken (1. Stufe), die aus Namen Namen erzeugen.
(0, 0)	–	die Kategorie von 2stelligen Funktionsausdrücken (1. Stufe), die aus zwei Namen einen Namen erzeugen.
((0))	–	die Kategorie von 1stelligen Funktionsausdrücken 2. Stufe, die aus 1stelligen Funktionsausdrücken 1. Stufe einen Namen erzeugen.
((0, 0))	–	die Kategorie von 1stelligen Funktionsausdrücken (2. Stufe), die aus 2stelligen Funktionsausdrücken 1. Stufe einen Namen erzeugen[1].

Das *Alphabet* der Sprache der GGA – wir nennen sie $\mathfrak{G}$ – enthält in unserer Transkription die logischen Zeichen $-$, $=$, $\neg$, $\supset$, Λ, ω, $\varkappa$, als Hilfszeichen Klammern und das Komma, sowie unendlich viele Konstanten aller Kategorien und Variablen der Kategorien 0, (0), (0, 0).

[1] Allgemein, d. h. beim Aufbau einer vollen höheren Funktionslogik wären Kategorien so zu bestimmen: 0 ist eine Kategorie, und sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Kategorien, so auch $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. 0 ist wieder die Kategorie von Eigennamen, $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ die von Funktoren, die aus Ausdrücken der Kategorien $\tau_1, \ldots, \tau_n$ solche der Kategorie 0 erzeugen.

Terme

1. Konstanten der Kategorie 0 sind Terme.
2. Ist F eine Konstante der Kategorie (0) bzw. (0, 0) und sind s und t Terme, so ist auch F(s) bzw. F(s, t) ein Term.
3. Sind s, t Terme, so auch $(s=t)$, $\neg s$, $(s \supset t)$, $\varkappa s$.
4. Ist s[a] ein Term, a eine Konstante und x eine Variable derselben Kategorie 0, (0) oder (0, 0), die in s[a] nicht vorkommt, so ist $\wedge x s[x]$ ein Term.
5. Ist s[a] ein Term, a eine Konstante der Kategorie 0 und x eine Variable derselben Kategorie, die in s[a] nicht vorkommt, so ist $\omega x s[x]$ ein Term.
6. Ist M eine Konstante der Kategorie ((0)) bzw. ((0, 0)), A[a] bzw. A[a, b] ein Term, a bzw. a, b Konstanten der Kategorie 0 und x bzw. x, y Variablen derselben Kategorie, die in A[a] bzw. A[a, b] nicht vorkommen, so ist $M_x(A[x])$ bzw. $M_{xy}(A[x, y])$ ein Term.

Die Rudimente einer höheren Funktionenlogik, insbesondere die Quantifikation über Funktionen 1. Stufe, benötigt Frege nur deshalb, weil er seine Entsprechung zur Elementschaftsrelation nicht als Grundsymbol einführt, sondern durch eine Definition, in der er über einstellige Funktionen quantifiziert.

Definitionen:

D1: $-s := s=(s=s)$ (GGAI, S. 16f.)

D2: $s \vee t := \neg s \supset t$

D3: $s \wedge t := \neg(s \supset \neg t)$

D4: $s \equiv t := (s \supset t) \wedge (t \supset s)$

D5: $\mathrm{V}xA[x] := \neg \wedge x \neg A[x]$.

Frege führt auch in den GGA für $\wedge$, $\vee$, $\equiv$, V keine eigenen Symbole ein. Er will die Implikationsstruktur der Terme erhalten.

$\varkappa s$ wird so erklärt, daß der Ausdruck das Objekt a bezeichnet, falls $s = \omega x(x=a)$ gilt; andernfalls bezeichnet er dasselbe wie s. Damit definiert Frege

D6: $s \eta t := \varkappa \omega x \mathrm{V} g(t = \omega y g(y) \wedge g(s)=x)$ (GGA I, S. 53)

$s\eta t$ ist also der *Wert der Funktion* g für das Argument s, falls t der Wertverlauf von g ist; ist t kein Wertverlauf, so ist $s\eta t$ der Wertverlauf jener Funktion, die jedem Argument das Falsche zuordnet, also $\omega x(x \neq x) - s \neq t$ stehe wie üblich für $\neg(s=t)$. Frege schreibt $s \frown t$ statt $s\eta t$.

7.1.2 Semantik

Frege gibt auch in den GGA keinen Interpretationsbegriff an, sondern nur semantische Festlegungen für die logischen Operatoren. Für Freges Logik läßt sich auch ebensowenig ein Interpretationsbegriff definieren, dessen Bestimmungen den Termen induktiv Extensionen zuordnen, wie das für die Klassenlogik möglich ist. Denn der Grundbereich muß einerseits alle Wertverläufe umfassen, für die sich in $\mathfrak{G}$ Namen bilden lassen, andererseits hängt aber die Extension eines Wertverlaufsterms vom Grundbereich ab. In der klassischen Mengenlehre setzt man voraus, daß die Menge aller Klassen (über einer Menge von Individuen) gegeben ist. Diese bildet dann (vereinigt mit der Menge der Individuen) den Grundbereich der Interpretation. Entsprechend wäre bei Frege die Menge aller Wertverläufe vorauszusetzen (über einer Menge von Individuen), wobei auch die Wahrheitswerte zum Grundbereich gehören müssen.

A) Interpretationen

Die Mengen möglicher Extensionen der Kategorien τ über einem passenden Grundbereich U mit $w, f \varepsilon U$ seien wieder so bestimmt:

$E_{0,U} = U$, $E_{(\tau_1, \ldots, \tau_n), U} = E_{0,U}{}^{E_{\tau_1,U} \times \ldots \times E_{\tau_n,U}}$.

Eine *Interpretation* von $\mathfrak{G}$ über U ist dann eine Funktion V, für die gilt:

1) $V(a^\tau) \varepsilon E_{\tau,U}$ für alle Konstanten a^τ der Kategorie τ.

2) $V(F(s_1, \ldots, s_n)) = V(F)(V(s_1), \ldots, V(s_n))$.

3) $V(s=t) = \begin{cases} w \text{ für } V(s)=V(t), \\ f \text{ sonst} \end{cases}$ (GGAI, S. 11)

4) $V(\neg s) = \begin{cases} f \text{ für } V(s)=w, \\ w \text{ sonst} \end{cases}$ (GGAI, S. 10)

5) $V(s \supset t) = \begin{cases} f \text{ für } V(s)=w \text{ und } V(t) \neq w \\ w \text{ sonst} \end{cases}$ (GGAI, S. 20)

6) $V(\varkappa s) = \begin{cases} \alpha, \text{ falls } V(s) \text{ der Wertverlauf der} \\ \text{Funktion } \xi = \alpha \text{ ist,} \\ V(s) \text{ sonst} \end{cases}$ (GGAI, S. 19)

7) $V(\wedge x A[x]) = \begin{cases} w \text{ falls für alle } V' \text{ mit } V' \underset{a}{=} V \text{ gilt} \\ V'(A[a]) = w \text{ (a komme in } \wedge x A[x] \text{ nicht vor)} \\ f \text{ sonst} \end{cases}$ (GGAI, S. 12)

8) $V(\omega x A[x])$ ist der Wertverlauf jener Funktion (GGAI, S. 15) $f \varepsilon E_{(0)}$, so daß für alle V' mit $V' \underset{a}{=} V$ gilt $f(V'(a)) = V'(A[a])$ (a komme in $\omega x A[x]$ nicht vor).

Nach den obigen Bemerkungen ist zunächst unklar, ob es eine solche Interpretation von $\mathfrak{G}$ gibt, die allen Termen eindeutig eine Extension zuordnet. Aus der Inkonsistenz des Systems (vgl. 8.1) ergibt sich dann, daß das nicht der Fall ist.

„$\varkappa a$" ist also ein Kennzeichnungsterm, der im Fall, daß a der Wertverlauf einer Funktion ist, die nur für ein Objekt das Wahre als Wert annimmt und sonst immer das Falsche, dieses Objekt bezeichnet, sonst das Objekt a selbst. (In einer Klassenlogik würde also $\varkappa a$ das einzige Element von a bezeichnen, falls a eine Einermenge ist, sonst a selbst.)[2]

Aus D1 ergibt sich damit:

$$V(-s) = \begin{cases} w \text{ für } V(s) = w \\ f \text{ sonst.} \end{cases}$$

Es gilt also auch

$$V(\neg s) = V(\neg(-s)) = V(-(\neg s)) = V(-(\neg(-s))),$$
$$V(s \supset t) = V((-s) \supset (-t)) = V(-(s \supset t)) = V(-((-s) \supset (-t))),$$
$$V(\wedge x A[x]) = V(\wedge x - A[x]) = V(- \wedge x A[x]) = V(- \wedge x - A[x]).$$

Damit ist die Fregesche Symbolik gerechtfertigt, die nicht zwischen $\neg A$, $\neg(-A)$, $-(\neg A)$ und $-(\neg(-A))$ unterscheidet und entsprechend bei Implikation und Alloperator, und in der auch $\vdash A$ mit $\vdash (-A)$ zusammenfällt. Terme als Namen sind keine Aussagen, lassen sich also auch nicht behaupten. Behauptungen der Gestalt $\vdash t$ sind im Sinn eines Urteils zu verstehen, daß t ein Name für das Wahre ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $-t$ ein Name für das Wahre ist. Das Urteil $\vdash t$ stimmt daher mit $\vdash (-t)$ überein.

B) Wahrheitswerte als Wertverläufe

Frege nimmt zwar nicht an, daß alle Objekte des Grundbereichs Wertverläufe sind, aber die einzigen logischen Objekte sind für ihn Wertverläufe und Wahrheitswerte. Für sie sollte daher auch die

[2] Zur Kennzeichnung im üblichen Sinn äußert sich Frege in SB, vgl. KS, S. 153 f. – Man könnte $\varkappa$ auch durch die Kontextdefinition $A[\varkappa s] := \vee x(s = \omega y(y = x) \wedge A[x]) \vee \neg \vee x(s = \omega y(y = x)) \wedge A[s]$ einführen, aber Frege lehnt Kontextdefinitionen grundsätzlich ab. Vgl. dazu 9.1.

Identität durch logische Gesetze definiert sein. Nun hat aber Frege nur ein Wahrheitskriterium für Sätze $a=b$, in denen a und b Wertverlaufsnamen sind: das Gesetz
$(\omega x A[x] = \omega x B[x]) = \wedge x (A[x] = B[x])$.
Daher identifiziert er die Wahrheitswerte mit Wertverläufen und definiert (GGAI, S. 17f.):
D7: $\mathit{w} := \omega x(-x)$
D8: $\mathit{f} := \omega x(x = \neg \wedge y(y=y))$.
Die kursiv gedruckten Wahrheitswertnamen sind also, im Gegensatz zu den nichtkursiven, objektsprachliche Wahrheitswertnamen.

Frege argumentiert so: Wertverläufe sind nur durch die beiden Prinzipien festgelegt
a) Zu jeder Funktion F gibt es einen Wertverlauf $\omega x F x$,
b) $\omega x F x = \omega y G y \equiv \wedge z(Fz = Gz)$.
Es ist daher möglich festzusetzen, daß $\mu x F x = \mu x G x$ ebenfalls genau dann gelten soll, wenn $\wedge x(Fx = Gx)$ gilt, ohne daß daraus folgen würde $\mu x F x = \omega x F x$. Es seien nun Hx, Kx zwei Funktionen, für die gilt $\neg \wedge x(Hx = Kx)$. Dann kann man eine Funktion R definieren durch

$$R(x) = \begin{cases} w \text{ für } x = \mu x H x \\ f \text{ für } x = \mu x K x \\ \mu x H x \text{ für } x = w \\ \mu x K x \text{ für } x = f \\ x \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $R(x) \neq R(y)$ für $x \neq y$ und $R(\mu x F x) = R(\mu x G x) \equiv \wedge z(Fz = Gz)$, so daß auch $R(\mu x F x)$ die Bedingungen (a), (b) erfüllt. Wir können also auch $R(\mu x F x)$ als Wertverlauf von F ansehen, ohne in Widerspruch mit (a), (b) zu geraten, und können so $w = R(\mu x H x)$ und $f = R(\mu x K x)$ als Wertverläufe von H und K auffassen. Es ist also ohne Konflikt mit (a), (b) möglich, irgend zwei verschiedene Wertverläufe als das Wahre und das Falsche anzusehen.

Dieses Argument ist jedoch nicht überzeugend. Denn erstens gibt es in $\mathfrak{G}$ schon Namen für w und f, z. B. die Ausdrücke $\wedge x(x=x)$ und $\neg \wedge x(x=x)$. Man müßte also die objektsprachlichen Namen *w* und *f* so definieren, daß $\mathit{w} = \wedge x(x=x)$ und $\mathit{f} = \neg \wedge x(x=x)$ beweisbar ist. Unter dem Gesichtspunkt der Vollständigkeit müßte ja im Kalkül $\vdash t = \mathit{w}$ aus $\vdash t$ ableitbar sein. Andererseits würde dann die Definition von *w* und *f* dem Prinzip der Nichtkreativität von Definitionen widersprechen, das Frege selbst nachdrücklich vertreten hat (vgl. dazu 9.1): Es wäre ja mit einer Definition $w := \omega x A[x]$ z. B. $\omega x A[x] = \bigwedge x(x = x)$ beweisbar, ohne diese Definition jedoch nicht. Im Kalkül der GGA ist auf dem Weg über die Antinomien zwar alles beweisbar, aber es ist nicht ersichtlich, wie man auf andere Weise $\omega x(-x) = \bigwedge x(x = x)$ beweisen sollte, da Identitätsaussagen der Form $\omega x A[x] = s$ nur für Wertverlaufsnamen s ableitbar sind. Da $\varkappa\omega x(-x)$ das Wahre ist, gilt ferner $w = \varkappa w$, und auch das ist nicht beweisbar[3]. Tatsächlich wird die Nichtkreativität der Definitionen D7, D8 nur wegen der Unvollständigkeit des Kalküls vermieden. Zweitens erfordert die allgemeine Anwendbarkeit der Logik, die Frege immer betont – vgl. dazu z. B. die Zitate aus GLA, S. 21 und KS, S. 103f. in 4.1 –, daß er nicht nur eine Logik der Wertverläufe aufbaut, sondern Individuen im Grundbereich zuläßt. Tatsächlich nimmt ja auch Frege nicht an, daß alle Objekte Wertverläufe sind. Dann verliert aber das Motiv Freges für die Bestimmung der Wahrheitswerte als Wertverläufe seine Überzeugungskraft: die Identitäten zwischen Wertverläufen und Wahrheitswerten durch das Extensionalitätsprinzip $(\omega x A[x] = \omega x B[x]) = \bigwedge x(A[x] = B[x])$ zu bestimmen. Zudem kann ja Frege mit $Vg(a = \omega x g x)$ ausdrücken, daß a ein Wertverlauf ist. Er könnte also fordern $Vg(a = \omega x g x) \wedge \neg Vg(b = \omega x g x) \supset a \neq b$, und hätte damit auch ein Kriterium für die Identität von Wertverläufen mit als Individuen verstandenen Wahrheitswerten.

Wir sehen daher im folgenden von D7 und D8 ab, die auch bei Frege nur an einer Stelle (vgl. 7.3) eine Rolle spielen, und fassen die Wahrheitswerte als Individuen auf.

C) Eine alternative Semantik

Nach der in (A) angegebenen Semantik gilt das Prinzip (*): $s \wedge t \supset s = t$. Im Kalkül der GGA läßt es sich jedoch nicht beweisen, bzw. nur in dem trivialen Sinn, daß man dabei die Widersprüchlichkeit

[3] Nach D7 und D8 ist das Wahre identisch mit dem Wertverlauf jener Funktion, die nur dem Wahren das Wahre zuordnet, allen anderen Argumenten das Falsche. Und das Falsche ist identisch mit dem Wertverlauf jener Funktion, die nur dem Falschen das Wahre zuordnet, allen anderen Argumenten das Falsche. Die klassenlogische Entsprechung wäre $w = \{w\}$ und $f = \{f\}$. Damit werden nichtfundierte Klassen eingeführt (vgl. GGAI, S. 18).

des Systems benützt. (Frege beweist nur ein Theorem, aus dem $s \wedge t \supset (-s) = (-t)$ folgt (GGAI, S. 68).) Daher ist auch folgender Interpretationsbegriff eine mögliche Rekonstruktion der Ideen Freges, bei dem mehrere Objekte das Wahre und das Falsche repräsentieren können und in dem daher (*) nicht gilt:[4]

Eine *Interpretation* von $\mathfrak{G}$ ist ein Tripel $\mathfrak{M} = \langle U, W, V \rangle$, für das gilt:

1) U ist eine nichtleere Menge von Objekten. Ist $\alpha^{(0)} \varepsilon E_{(0), U}$, so ist auch der Wertverlauf von $\alpha^{(0)}$ in U[5].
2) W ist eine echte, nichtleere Teilmenge von U.
3) V ist eine Funktion, für die gilt:
   a) $V(a^\tau) \varepsilon E_{\tau, U}$ für alle Konstanten a^τ der Kategorie τ.
   b) $V(F(s_1, \ldots, s_n)) = V(F)\,(V(s_1), \ldots, V(s_n))$.
   c) $V(s = t) \varepsilon W$ gdw. $V(s) = V(t)$; gilt $V(s) = V(s')$ und $V(t) = V(t')$, so auch $V(s' = t') = V(s = t)$.
   d) $V(\neg s) \varepsilon W$ gdw. $V(s) \notin W$; gilt $V(s) = V(s')$, so auch $V(\neg s) = V(\neg s')$.
   e) $V(s \supset t) \varepsilon W$ gdw. $V(s) \notin W$ oder $V(t) \varepsilon W$; gilt $V(s) = V(s')$ und $V(t) = V(t')$, so auch $V(s \supset t) = V(s' \supset t')$.
   f) $$V(\varkappa s) = \begin{cases} \alpha, \text{ falls } V(s) \text{ der Wertverlauf der Funktion } \alpha = \xi \\ \text{ist } (\alpha \varepsilon U). \\ V(s) \text{ sonst.} \end{cases}$$
   g) $V(\bigwedge x^\tau A[x^\tau]) \varepsilon W$ gdw. für alle V' mit $V' \underset{a}{=} V$ gilt $V'(A[a^\tau]) \varepsilon W$ (a^τ komme in $\bigwedge x^\tau A[x^\tau]$ nicht vor); gilt für alle V' mit $V' \underset{a}{=} V$: $V'(A[a^\tau]) = V'(A'[a^\tau])$, so gilt $V(\bigwedge x^\tau A[x^\tau]) = V(\bigwedge x^\tau A'[x^\tau])$.
   h) $V(\omega x A[x])$ ist der Wertverlauf jener Funktion $\alpha \varepsilon E_{(0), U}$, so daß für alle V' mit $V' \underset{a}{=} V$ gilt $\alpha(V'(a)) = V'(A[a])$ (a komme in $\omega x A[x]$ nicht vor).

Die Zusatzbedingungen in (c)–(e), (g) sind notwendig, um die Substituierbarkeit des Identischen sicherzustellen, d. h. zu garantieren, daß $=$, $\neg$, $\supset$ und $\bigwedge$ für Funktionen stehen.

Nach diesen Festlegungen gilt aufgrund von D1 nicht (**) $V(-s) \varepsilon W$ gdw. $V(s) \varepsilon W$, denn es gilt zwar $V(s = s) \varepsilon W$, ist aber $V(s)$

[4] Auf die „Unvollständigkeit" des Systems der GGA hat zuerst C. Thiel in (1978) hingewiesen. Vgl. zum folgenden H. Hermes (1965), S. 8 f.

[5] Auf die Problematik dieser Geschlossenheitsforderung für U wurde schon hingewiesen.

ein anderes Element aus W, so gilt nicht $V(s=(s=s))\varepsilon W$. Eine Funktion, die (**) erfüllt, wäre jedoch die identische Funktion; für $V(-s)=V(s)$ ist aber der Inhaltsstrich entbehrlich.

7.1.3 Das Axiomensystem

In den GGA setzt sich Frege bei der Formulierung seines Axiomensystems nicht das Ziel, mit möglichst wenigen Axiomen und Regeln auszukommen. Er will nicht das Axiomensystem selbst einfach gestalten, sondern das Beweisen im System und gibt dazu viele Regeln an (vgl. GGAI, S. 26). Sein Kalkül – wir nennen ihn der Einfachheit halber wieder $\mathfrak{G}$ – sieht so aus:

Axiome (GGAI, S. 61)

AIa: $a \supset a$

AIb: $a \supset (b \supset a)$

AIIa: $\wedge x Fx \supset Fa$

AIIb: $\wedge f M_x(f(x)) \supset M_x(F(x))$

AIII: $F(a=b) \supset F(\wedge f(f(a) \supset f(b)))$

AIV: $\neg(-a=\neg b) \supset (-a=-b)$

AV: $(\omega x F(x) = \omega y G(y)) = \wedge z(F(z)=G(z))$

AVI: $a=\varkappa\omega x(a=x)$.

(Frege bemerkt selbst, daß AIa aus AIb mit R2 und R4 folgt (GGAI, S. 34).)

Regeln (GGAI, 61–64)

R1 *(Verschmelzungsregeln)*:

$--s \vdash -s$

$\neg -s \vdash \neg s$

$-\neg s \vdash \neg s$

$-s \supset t \vdash s \supset t$

$s \supset -t \vdash s \supset t$

$-(s \supset t) \vdash s \supset t$

$\wedge x - s[x] \vdash \wedge x s[x]$

$- \wedge x s[x] \vdash \wedge x s[x]$

Die Theoreme haben meist die Form $s_1 \supset (s_2 \supset \ldots \supset (s_n \supset t) \ldots)$. Dabei heißen $s_1, \ldots, s_n$ *Unterglieder,* t ist das *Oberglied.* Wir schreiben dafür auch $I(s_1, \ldots, s_n, t)$. Man kann aber auch $s_i \supset (s_{i+1} \supset (\ldots (s_n \supset t) \ldots))$ als Oberglied zu $s_1, \ldots, s_{i-1}$ ansehen.

R2: *Unterglieder dürfen beliebig permutiert werden.*
Speziell gilt: $s \supset (t \supset u) \vdash t \supset (s \supset u)$, allgemein:
$I(s_1, \dots, s_n, t) \vdash I(s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(n)}, t)$, wo π eine Permutation der Indices $1, \dots, n$ ist.

R3: *Kontraposition mit beliebigen Untergliedern.*
Speziell gilt: $s \supset t \vdash \neg t \supset \neg s$ und $\neg t \supset \neg s \vdash s \supset t$, allgemein gilt:
$I(s_1, \dots, s_n, t) \vdash I(s_1, \dots, s_{i-1}, nt, s_{i+1}, \dots, s_n, ns_i)$.
Dabei sei $ns = \neg s$, wo s nicht die Gestalt $\neg u$ hat, andernfalls sei $ns = u$.

R4: *Gleiche Unterglieder können kontrahiert werden.*
Speziell: $s \supset (s \supset t) \vdash s \supset t$, allgemein: $I(\dots, s, \dots, s, \dots, t) \vdash I(\dots, s, \dots, t)$.

R5: *Generalisierung.*
Speziell: $s[a] \vdash \wedge x s[x]$ und $t \supset s[a] \vdash t \supset \wedge x s[x]$
$s[F] \vdash \wedge f s[f]$ und $t \supset s[F] \vdash t \supset \wedge f s[f]$
wo a, bzw. F nicht in der Konklusion vorkommt.
Allgemein: $I(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i[a], s_{i+1}[a], \dots, t[a]) \vdash I(s_1, \dots, s_{i-1}, \wedge x I(s_i[x], \dots, t[x]))$ und analog für F und $\wedge f$.

R6: *Verallgemeinerter Modus ponens.*
Speziell: $s, s \supset t \vdash t$, allgemein: $s_i, I(s_1, \dots, s_n, t) \vdash I(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, t)$.

R7: *Transitivität der Implikation.*
Speziell: $s \supset t, t \supset u \vdash s \supset u$,
allgemein: $I(s_1, \dots, s_n, t), I(u_1, \dots, u_i, t, u_{i+1}, \dots, u_m, v) \vdash I(s_1, \dots, s_n, u_1, \dots, u_m, v)$.

R8: *Tertium non datur.*
Speziell: $s \supset t, \neg s \supset t \vdash t$,
allgemein: $I(\dots, s, \dots, t), I(\dots, \neg s, \dots, t) \vdash I(\dots, t)$.

R9: *Einsetzungsregeln*:
$t[a] \vdash t[s]$, wo s ein Term ist
$t[F] \vdash t[u]$, wo u ein Funktionsausdruck derselben Kategorie wie F ist.
$t[M] \vdash t[B]$, wo B ein Funktionsausdruck derselben Kategorie wie M ist.

Dabei sind alle Vorkommnisse von a bzw. F in der Prämisse durch solche von s bzw. B zu ersetzen und gebundene Variable sind ggf. nach R10 umzubenennen. (Die Einsetzungen von Funktionsausdrücken für Funktionsvariable ist wie üblich erklärt.)

R10 und R11: *Regeln über die Umbenennung gebundener Variabler.*

R12: *Umwandlung einer Definition*: Ist festgesetzt $s := t$, so gilt $s = t$.

𝔊 enthält das System 𝔅 der BS – in der Beschränkung auf die hier verwendeten Funktionen 2. Stufe der Kategorien ((0)) und ((0, 0)): A1 ist AIb; A2 erhält man aus R2 und R6; A3* aus R3; A7 aus AII und R9; A8: Aus AIII erhält man mit R9 $\neg(a=a) \supset \neg \wedge f(fa \supset -fa)$, mit R3 also $\wedge f(fa \supset fa) \supset a=a$; aus AIa folgt mit R9 $Fa \supset Fa$, mit R5 also $\wedge f(fa \supset fa)$, mit R6 also $a=a$; A9: Aus AIII erhält man $a=b \supset \wedge f(fa \supset fb)$, also mit A8, AIIa, R9, R7: $a=b \supset ((Fa \supset Fa) \supset (Fa = Fb))$, mit AIa, R2, R6 also $a= b \supset (Fa = Fb)$, also mit R9 $a=b \supset (A[a] = A[b])$. R1 folgt aus R6, R2 aus R5.

In 𝔊 gilt ferner $a\eta\omega x A[x] = A[a]$ (nach D6) und $\wedge x(x\eta\omega x A[x] = x\eta\omega x B[x]) = (\omega x A[x] = \omega x B[x])$ (nach D6, AV).

Man kann den Kalkül 𝔊 vereinfachen, indem man Satzschemata verwendet und auf die Einsetzungsregeln verzichtet. Man kann 𝔊 ferner als Sequenzenkalkül formulieren: Schreiben wir $s_1, \ldots, s_n \rightarrow t$ für $\vdash I(s_1, \ldots, s_n, t)$, $\rightarrow t$ für $\vdash t$ und $\Delta \rightarrow$ (Δ sei eine evtl. leere Termreihe) für $\Delta \rightarrow \neg(s \supset s)$, so erhält man ($\Omega$ ist eine Termreihe, die höchstens ein Glied enthält);
die Vertauschungsregel VT: $\Delta, s, s', \Delta' \rightarrow \Omega \vdash \Delta, s', s, \Delta' \rightarrow \Omega$ aus R2,
die Kontraktionsregel VK: $\Delta, s, s \rightarrow \Omega \vdash \Delta, s \rightarrow \Omega$ aus R4,
die Schnittregel TR: $\Delta \rightarrow s; \Delta', s \rightarrow \Omega \vdash \Delta, \Delta' \rightarrow \Omega$ aus R7,
die vordere Verdünnungsregel VV: $\Delta \rightarrow \Omega \vdash \Delta, s \rightarrow \Omega$ aus AIb und der Schnittregel
die hintere Verdünnungsregel HV: $\Delta \rightarrow \ \vdash \Delta \rightarrow s$ aus VV, AIa, R3, TR
das Axiom RF: $s \rightarrow s$ aus AIa,
das Axiom I1: $\rightarrow s=s$ aus dem Theorem $s=s$ (s. oben) und
das Axiom I2: $s=t, u[s] \rightarrow u[t]$ aus AIII, AIIa.

Die logischen Regeln ergeben sich so:
VN: $\Delta \rightarrow s \vdash \Delta, \neg s \rightarrow$ mit R8, TR

HN: $\Delta, s \rightarrow \vdash \Delta \rightarrow \neg s$ mit R3
VC: $\Delta \rightarrow s; \Delta, t \rightarrow \Omega \vdash \Delta, s \supset t \rightarrow \Omega$ mit R6, TR.
HC: $\Delta, s \rightarrow t \vdash \Delta \rightarrow s \supset t$ mit AIb, TR, R4.
VA: $\Delta, s[a] \rightarrow \Omega \vdash \Delta, \wedge xs[x] \rightarrow \Omega$ mit AIIa, TR.
HA: $\Delta \rightarrow s[a] \vdash \Delta \rightarrow \wedge xs[x]$, wo a nicht in der Konklusion vorkommt, mit R5, TR.
(Analog für Generalisierung über Funktionen.)
VW: $\Delta, A[s] \rightarrow \Omega \vdash \Delta, s\eta\omega xA[x] \rightarrow \Omega$ nach dem Theorem $s\eta\omega xA[x] = A[s]$ (s. oben) und I2.
HW: $\Delta \rightarrow A[s] \vdash \Delta \rightarrow s\eta\omega xA[x]$ ebenso.
TND: $\Delta, A \rightarrow \Omega; \Delta, \neg A \rightarrow \Omega \vdash \Delta \rightarrow \Omega$ nach R8.

7.1.4 Entsprechungen zur Klassenlogik

Wir wollen im folgenden auf einige Entsprechungen der Termlogik $\mathfrak{G}$ zur Klassenlogik $\mathfrak{K}$ hinweisen, in die wir hier zum besseren Vergleich dieselben Rudimente der höheren Prädikatenlogik aufnehmen, die $\mathfrak{G}$ enthält. $\mathfrak{K}$ ist eine Satzlogik, in der Sprache von $\mathfrak{K}$ – wir nennen sie der Einfachheit halber ebenfalls $\mathfrak{K}$ – sind daher Sätze und Terme zu unterscheiden. Ihr Alphabet unterscheidet sich von dem von $\mathfrak{G}$ nur dadurch, daß anstelle von ω nun λ tritt – wir wollen im folgenden Klassenterme anstatt in der heute üblichen Form $\{x:A[x]\}$ in der zu $\omega xA[x]$ analogen Gestalt $\lambda xA[x]$ schreiben – und alle Funktionskonstanten und -variablen als Prädikatkonstanten und -variablen anzusehen sind. Vom Operator $\varkappa$ wollen wir hier absehen, da er sich durch eine Kontextdefinition einführen läßt. Die von 0 verschiedenen Kategorien sind in $\mathfrak{K}$ wie in 3.6 nun als Kategorien von Prädikaten zu verstehen. Die Terme und Sätze von $\mathfrak{K}$ sind dann, wie üblich, so zu bestimmen:

1) Gegenstandskonstanten sind Terme.
2) Ist F eine n-stellige Prädikatkonstante 1. Stufe, und sind $s_1, \ldots, s_n$ Terme, so ist $F(s_1, \ldots, s_n)$ ein Satz.
3) Ist M eine (einstellige) Prädikatkonstante 2. Stufe vom Typ ((0)) bzw. ((0), (0)), und ist A[a] bzw. A[a, b] ein Satz, in dem die Gegenstandsvariablen x, y nicht vorkommen, so ist $M_x(A[x])$ bzw. $M_{xy}(A[x, y])$ ein Satz.
4) Sind s, t Terme, so ist $s = t$ ein Satz.
5) Sind A, B Sätze, so auch $\neg A$ und $(A \supset B)$.

6) Ist $A[a]$ ein Satz, a eine Gegenstandskonstante, x eine Gegenstandsvariable, die in $A[a]$ nicht vorkommt, so ist $\wedge x A[x]$ ein Satz, $\lambda x A[x]$ ein Term.
7) Ist $A[F]$ ein Satz, F eine Prädikatkonstante 1. Stufe und f eine Prädikatvariable der gleichen Kategorie, die in $A[F]$ nicht vorkommt, so ist $\wedge f A[f]$ ein Satz.

Danach sind alle Sätze und Terme von $\mathfrak{K}$ bei Ersetzung von λ durch ω auch Terme von $\mathfrak{G}$. A' sei der Term, der aus dem Term oder Satz A von $\mathfrak{K}$ durch Ersetzung von λ durch ω entsteht.

Wir definieren nun in $\mathfrak{K}$:

D_K1: $s \varepsilon t := \vee f(t = \lambda x f x \wedge f(s))$.

Danach gilt: Ist t eine Klasse, so gilt $s \varepsilon t$ gdw. s Element von t ist; andernfalls ist $s \varepsilon t$ falsch.

Wir können auch setzen:

D_K2: $K(s) := \vee f(s = \lambda x f x)$ — s ist eine *Klasse.*

Nach D_K1 gilt das *Abstraktionsprinzip*:

A_{K1}: $s \varepsilon \lambda x A[x] \equiv A[s]$.

Das zweite grundlegende klassentheoretische Prinzip, das *Extensionalitätsprinzip* lautet

E_{K1}: $\wedge x(x \varepsilon \lambda y A[y] \equiv x \varepsilon \lambda y B[y]) \supset \lambda y A[y] = \lambda y B[y]$.

Daraus folgt:

E'_{K1}: $Ka \wedge Kb \wedge \wedge x(x \varepsilon a \equiv x \varepsilon b) \supset a = b$.

Übertragen in $\mathfrak{G}$ besagt $K(s)$, daß s der Wertverlauf eines einstelligen Begriffes ist. Der Klasse $\lambda x F x$ entspricht also in $\mathfrak{G}$ der Wertverlauf des Begriffs F, d. h. der Wertverlauf jener Funktion, die genau für die Elemente von $\lambda x F x$ als Argumente das Wahre als Wert annimmt und für alle anderen Argumente das Falsche. Man kann in $\mathfrak{G}$ auch definieren:

D9: $K'(s) := \omega x(-x \eta s) = s$ — s ist eine Klasse.

Denn ist $s = \omega x F x$ und F ein Begriff, so ist $x \eta s = F(x)$ und $-Fx = Fx$. Gilt umgekehrt $\omega x(-x \eta s) = s$, so auch $\wedge y(y \eta \omega x(-x \eta s) = y \eta s)$, also $\wedge y(-y \eta s = y \eta s)$ (*), also wo $s = \omega x F x$ ist, $\wedge y(-F(y) = F(y))$, d. h. der Wertebereich von F ist $\{w, f\}$. Wäre s kein Wertverlauf, so wäre $y \eta s = \omega x(x \neq x) \neq -\omega x(x \neq x) = -y \eta s$, im Widerspruch zu (*).

Übertragen in $\mathfrak{G}$ besagt $s \varepsilon t$, daß t' Wertverlauf eines einstelligen Begriffes ist, der auf s' zutrifft. In $\mathfrak{G}$ gilt nun:

$s' \varepsilon t' \equiv s' \eta t'$.

Denn es gilt $s'\varepsilon t' \equiv Vf(\wedge x(fx = -fx) \wedge t' = \omega xfx \wedge fs')$ (*). Ist also $s'\varepsilon t'$, so auch $s'\eta t'$. Ist umgekehrt $s'\eta t'$ das Wahre, so ist t' ein Wertverlauf, der Term t' bezeichnet also als Übersetzung eines Klassenterms von $\mathfrak{K}$ den Wertverlauf eines Begriffs, d. h. es gilt $Vf(\wedge x(fx = -fx) \wedge t' = \omega xfx \wedge fs')$, also nach (*) $s'\varepsilon t'$.

Man kann also bei der Übersetzung von Sätzen von $\mathfrak{K}$ in Terme von $\mathfrak{G}$ $s'\varepsilon t'$ generell durch $s'\eta t'$ ersetzen. Es gelten dann die Übersetzungen von A_{K1} und E_{K1} in $\mathfrak{G}$. Da die a. l. und p. l. Axiome wie jene der Identität für $\mathfrak{K}$ Theoreme von $\mathfrak{G}$ sind und die a. l. und p. l. Deduktionsregeln von $\mathfrak{K}$ (modus ponens und Allgeneralisierung) Regeln von $\mathfrak{G}$, sind damit alle Theoreme von $\mathfrak{K}$ in unserer Übersetzung auch solche von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ enthält in diesem Sinn $\mathfrak{K}$ als Teilsystem.

Führt man Kennzeichnungsterme $\iota xA[x]$, etwas abweichend von der üblichen Festsetzung, in $\mathfrak{K}$ durch die Kontextdefinition

D_K3: $B[\iota xA[x]] := V!xA[x] \wedge Vx(A[x] \wedge B[x]) \vee \neg V!xA[x] \wedge B[\lambda xA[x]]$

ein, so gilt $B[\iota xA[x]] \equiv B[\varkappa\lambda xA[x]]$, falls man in $\mathfrak{K}$ setzt $\varkappa a = b$, falls $a = \{b\}$ ist, und $\varkappa a = a$ sonst.

Die wichtigsten Grunddefinitionen in der Klassenlogik sind folgende:

D_K4: $\Lambda := \lambda x(x \neq x)$ – *Nullklasse*

D_K5: $V := \lambda x(x = x)$ – *Allklasse*

D_K6: $\{s_1, \ldots, s_n\} := \lambda x(x = s_1 \vee \ldots \vee x = s_n)$ – *Klasse der Objekte* $s_1, \ldots, s_n$

D_K7: $s \subset t := \wedge x(x\varepsilon s \supset x\varepsilon t)$ – *Teilklasse*

D_K8: $s \cup t := \lambda x(x\varepsilon s \vee x\varepsilon t)$ – *Vereinigung*

D_K9: $s \cap t := \lambda x(x\varepsilon s \wedge x\varepsilon t)$ – *Durchschnitt*

D_K10: $\bar{s} := \lambda x(\neg x\varepsilon s)$ – *Komplement*

D_K11: $s - t := s \cap \bar{t}$ – *Differenz*

D_K12: $\bigcup s := \lambda x Vy(y\varepsilon s \wedge x\varepsilon y)$ – *Große Vereinigung*

D_K13: $\bigcap s := \lambda x \wedge y(y\varepsilon s \supset x\varepsilon y)$ – *Großer Durchschnitt*

D_K14: $P(s) := \lambda x(x \subset s)$ – *Potenzmenge*

D_K15: $\langle s_1, s_2\rangle := \{\{s_1\}, \{s_1, s_2\}\}$ – *Geordnetes Paar* der Objekte s_1, s_2.

D_K16: $\langle s_1, \ldots, s_{n+1}\rangle := \langle\langle s_1, \ldots, s_n\rangle, s_{n+1}\rangle$ – *(n+1)-tupel* (für $n > 2$).

D_K17: $s\mathrm{x}t := \lambda z Vxy(x\varepsilon s \wedge y\varepsilon t \wedge z = \langle x, y\rangle)$ – *Cartesisches Produkt* von s und t

D_K18: $R(r) := r \subset V\mathrm{x}V$ – r ist eine 2stellige *Relation*

D_K19: $E(r) := \bigwedge xyz(\langle x, y\rangle \varepsilon r \wedge \langle x, z\rangle \varepsilon r \supset y=z)$ – r ist *nacheindeutig*

D_K20: $Fkt(r) := R(r) \wedge E(r)$ – r ist eine 1stellige *Funktion*

D_K21: $D(r) := \lambda x \bigvee y(\langle x, y\rangle \varepsilon r)$ – *Definitionsbereich* von r

D_K22: $r's := \iota x(Fkt(r) \wedge s\varepsilon D(r) \wedge \langle s, x\rangle \varepsilon r)$ – *Wert der Funktion* r für das Argument s.

(Danach gilt $\neg Fkt(r) \vee \neg s\varepsilon D(r) \supset r's = \Lambda$.)

D_K23: $\lambda xyA[x, y] := \lambda z \bigvee xy(A[x, y] \wedge \langle x, y\rangle = z)$

Aus D_K23 folgen das Abstraktionsprinzip und das Extensionalitätsprinzip für 2stellige Relationen:

A_{K2}: $\langle s, t\rangle \varepsilon \lambda xyA[x, y] \equiv A[s, t]$

E_{K2}: $\bigwedge xy(\langle x, y\rangle \varepsilon \lambda uvA[u, v] \equiv \langle x, y\rangle \varepsilon \lambda uvB[u, v]) \supset \lambda uvA[u, v] = \lambda uvB[u, v]$.

(Die Definitionen D_K7 bis D_K14 und D_K17 bis D_K22 beziehen sich üblicherweise auf Klassen s, t und r. Läßt man Individuen zu, so sind entweder die Definitionen entsprechend zu beschränken oder es ist zu beachten, daß sich Individuen bzgl. D_K7 bis D_K14, D_K19, D_K21, D_K22 wie die Nullklasse verhalten. In D_K18 ist aber jedenfalls im Definiens konjunktiv die Bedingung K(r) hinzuzufügen.)

Die Übersetzungen in $\mathfrak{G}$ verstehen sich von selbst: Λ ist z. B. der Wertverlauf des leeren Begriffs, $s \subset t$ ist die Relation zwischen dem Wertverlauf eines Begriffs und dem Wertverlauf eines Oberbegriffs, $\bar{s}$ ist der Wertverlauf des Begriffs $\neg F(x)$, wenn s der Wertverlauf von F(x) ist, usf.

Die Entsprechungen zu den angegebenen klassenlogischen Begriffsbildungen sehen so aus (F, G, .. A[x], B[x] etc. stehen nun für Funktionen):

Aus D6 folgt zunächst die Analogie zum Abstraktionsprinzip A_{K1}:

A_1: $s\eta\omega xA[x] = A[s]$

und das Extensionalitätsprinzip in der Form

E_1: $\bigwedge x(x\eta\omega yA[y] = x\eta\omega yB[y]) \supset \omega yA[y] = \omega yB[y]$.

Von der Einführung von Doppelwertverläufen war schon oben die Rede. Frege setzt:

D10: $\omega xyA[x, y] := \omega x(\omega yA[x, y])$ (GGAI, S. 55)

Danach gilt das Abstraktionsprinzip in der Form:

A_2: $s\eta(t\eta\omega yxA[x, y]) = A[s, t]$.

Für $\neg K(v)$ – das besagt nun bei Übernahme von D_K2 in $\mathfrak{G}$ mit f als Funktionsvariabler, daß v kein Wertverlauf ist – gilt $t\eta v = \Lambda$, also $\neg s\eta(t\eta v)$. Ist $v = \omega xFx$, so ist $t\eta v = F(t)$; für $\neg K(F(t))$ ist

$s\eta F(t) = \Lambda$. D10 läßt sich in $\mathfrak{K}$ nicht nachbilden, denn $\lambda x(\lambda y A[x, y])$ ist kein wohlgeformter Term. Zum Vergleich mit D_K23 ist auf Freges Definition der geordneten Paare einzugehen. Zuerst sei jedoch erwähnt, daß auch das Extensionalitätsprinzip für Doppelwertverläufe gilt:

E_2: $\wedge xy(x\eta(y\eta\omega vuA[u, v]) = x\eta(y\eta\omega vuB[u, v]) \supset \omega vuA[u, v] = \omega vuB[u, v]$.

(Frege formuliert das Prinzip in GGAII, S. 164 für Relationen.)

Frege definiert Paare wie folgt (vgl. GGAI, S. 179):

D11: $(s; t) := \omega x(s\eta(t\eta x))$.

Für diese Darstellung ist zu zeigen: $(s; t) = (s'; t') \equiv s = s' \wedge t = t'$ (vgl. dazu die Sätze 219f. in GGAI, S. 185). Die Implikation von rechts nach links ist trivial. Für den Beweis der Implikation von links nach rechts definieren wir eine Funktion $F(x)$ so, daß gilt $F(t) = \{s\}$, $F(x) = \Lambda$ für $x \neq t$. ($\{s\}$ ist wieder $\omega x(x = s)$.) Dann gilt $\omega xF(x)\eta(s; t)$. Ist aber $s' \neq s$ oder $t' \neq t$, so gilt nicht $\omega xF(x)\eta(s'; t')$, d. h. $(s; t) \neq (s'; t')$.

Nach D11 gilt $a\eta(b; c) = b\eta(c\eta a)$, speziell: $\omega yxA[x, y]\eta(s; t) \equiv s\eta(t\eta\omega xyA[x, y]) \equiv A[s, t]$. Diese Beziehung hat in $\mathfrak{K}$ keine Parallele. Man kann aber mit $(s; t)$ statt $\langle s, t\rangle$ die Definitionen $D_K17 - D_K23$ nachbilden, wobei man natürlich zu anderen Festlegungen kommt, als Frege sie angibt. Setzen wir z. B. in Analogie zu D_K23 $\lambda^*xyA[x, y] := \lambda z\vee xy(A[x, y] \wedge z = (x, y))$, so gilt nicht $\lambda^*xyA[x, y] = \lambda xyA[x, y]$, aber beide Objekte sind einander wegen der Geltung der Extensionalitätsprinzipien eineindeutig zugeordnet.

Die Definitionen Freges ergeben sich also nicht aus der Übertragung der klassenlogischen Begriffsbildungen in $\mathfrak{G}$. Er definiert in Analogie zu D9:

D12: $R_2(r) := \omega yx(-x\eta(y\eta r)) = r$ – r ist eine 2stellige *Relation* (GGAII, S. 171).

Ist $r = \omega yxr'(x, y)$, so gilt $x\eta(y\eta r) = r'(x, y)$. Ist $\wedge xy(-r'(x, y) = r'(x, y))$, so ist r' eine Funktion mit dem Wertebereich $\{w, f\}$. $\omega yx(-r'(x, y)) = \omega yxr'(x, y)$ gilt aber genau dann, wenn $\wedge xy(-r'(x, y) = r'(x, y))$. Ist r kein Doppelwertverlauf, so gilt $\omega yx(-x\eta(y\varepsilon r)) = r$ nicht.

Definitionsbereich und Wertevorrat definiert Frege wie üblich (vgl. GGAII, S. 171), der Wert der Funktion r für das Argument s (vgl. D_K22) ist durch $s\eta r$ gegeben.

Zu weiteren Definitionen Freges vgl. GGAI, S. 240. Hier sei nur noch darauf hingewiesen, daß Frege in den GGA seine Begriffsbildungen zur Relationenlogik in der BS nun von Begriffen auf Wertverläufe umschreibt. Das sieht dann z. B. so aus:

D13: $r o q := \omega xy V z(y \eta (z \eta r) \wedge z \eta (x \eta q))$ – *Relationsprodukt* (GGAI, S. 72)

(Frege schreibt $r \sqcup q$.) Es gilt also $a \eta (b \eta roq) = Vz(a \eta (z \eta r) \wedge z \eta (b \eta q))$, also $a \eta (b \eta (\omega uv F(v, u) o \omega uv G(v, u)) = Vz(F(a, z) \wedge G(z, b))$. Frege beweist dazu Sätze wie $po(qor) = (poq)or$ und $(poq)^{-1} = q^{-1}op^{-1}$, wobei $r^{-1} := \omega uv(u \eta (v \eta r))$ die Inverse zu r ist – Frege schreibt $\mathfrak{U}\, r$ (GGAI, S. 57) –, so daß gilt $a \eta (b \eta r^{-1}) = b \eta (a \eta r)$. Sind r, q Relationen im Sinne von $D_K 18$, so entspricht D13 der Definition $roq := \lambda xy Vz(\langle x, z\rangle \varepsilon r \wedge \langle z, y\rangle \varepsilon q)$.

D14: $r^{>0} := \omega uv \Lambda f(\Lambda x(fx \supset \Lambda y(x \eta (y \eta r) \supset fy)))) \wedge \Lambda z(v \eta (z \eta r) \supset fz) \supset fu)$ – *Relationskette 2. Art zu r.*

(Frege schreibt ˊr, vgl. GGAI, S. 60.)

Es gilt also $a \eta (b \eta \omega yx r(x, y))^{>0}) = \Lambda f(\Lambda x(fx \supset \Lambda y(r(x, y) \supset fy))) \wedge \Lambda z(r(a, z) \supset fz) \supset fb)$

D15: $r^{\geq 0} := \omega uv(v \eta (u \eta r^{>0}) \vee u = v)$ – *Relationskette 1. Art zu r.*

(Frege schreibt $\breve{\smile} r$, vgl. GGAI, S. 60.)

D16: $E(r) := \Lambda xy(x \eta (y \eta r) \supset \Lambda z(x \eta (z \eta r) \supset y = z)$ – die Relation r ist nacheindeutig.

(Frege schreibt $I(r)$, vgl. GGAI, S. 55.) Ist $r = \lambda vu F(u, v)$, so besagt $E(r)$, daß $F(u, v)$ nacheindeutig ist; ist $r = \omega uv F(u, v)$, so besagt $E(r)$, daß F voreindeutig ist – es gilt ja $a \eta (b \eta \omega yx F(x, y)) = F(a, b)$ und $a \eta (b \eta \omega xy F(x, y)) = F(b, a)$.

D17: $B(r) := \lambda uv(E(r) \wedge \Lambda x(x \eta v \supset Vy(y \eta u \wedge x \eta (y \eta r)))$ – die durch r definierte *Abbildungsrelation* zwischen Mengen

(Vgl. GGAI, S. 56. Frege schreibt $> r$.) Es gilt also für $r = \omega v'u' r(u', v')$ $a \eta (b \eta B(r)) = E(r) \wedge \Lambda x(x \varepsilon a \supset Vy(y \varepsilon b \wedge r(x, y)))$ – r bildet a in b ab.

D18: $A(u) := \omega v Vr(u \eta (v \eta B(r^{-1})) \wedge v \eta (u \eta B(r)))$ – die *Anzahl* des Wertverlaufs u, d. h. des Begriffes $-x \eta u$

(Frege schreibt $\mathfrak{P}\, u$, vgl. GGAI, S. 57.)

Die Anzahl des Wertverlaufs u ist also der Wertverlauf des Begriffes ‚gleichzahlig mit u'. Man sieht hier schon, daß die Begriffe recht kompliziert werden. Inhaltlich Neues gegenüber den GLA ergibt sich aber nicht, so daß wir auf die Rekonstruktion der Grundlagen der Arithmetik in der Wertverlaufslogik der GGA nach den Ausführungen in 4.5 nicht mehr einzugehen brauchen[6].

7.2 Reelle Zahlen

Im zweiten Teil der GGAII wendet sich Frege der Theorie der reellen Zahlen zu. Wie in GLA schickt er dabei seinem eigenen Ansatz (GGAII, § 165 ff., nach Vorbemerkungen in den §§ 156–164) eine Kritik anderer Ansätze voraus (GGAII, § 55 ff.), in der er insbesondere Ideen von G. Cantor, H. Heine, K. Weierstraß und R. Dedekind kritisiert. Da sich Frege dabei vor allem auf deren Definitionen bezieht, formuliert er zunächst (S. 69–80) seine Grundsätze des Definierens und begründet sie. Wir gehen darauf im Kap. 9 ein.

Freges Einwände haben für uns kein tieferes Interesse mehr. Sie beziehen sich entweder auf Theorien, die heute ohnehin einem verdienten Vergessen anheim gefallen sind, oder auf unwesentliche und leicht behebbare Mängel grundsätzlich solider Theorien. Das erste gilt für die Ansätze von Heine und Thomae[7]. Sie geben eine formalistische Version der Cantorschen Theorie, die jedoch nicht sauber durchgeführt ist, so daß Frege bei seiner Kritik leichtes Spiel hatte. Bei Cantor moniert Frege die Unklarheit, ob reelle Zahlen Zeichen oder Abstrakta sind, sowie die mangelhafte Definition der Zuordnung zwischen Fundamentalreihen und reellen Zahlen[8]. Diese Einwände sind zwar richtig – Cantor hat sich in vielen Punkten tatsächlich ungenau ausgedrückt –, aber diese Schwierigkeiten sind nicht grundsätzlicher Art, sondern behebbar und inzwischen auch behoben worden, so daß Cantors Theorie sich heute einwandfrei formulieren läßt. Entsprechendes gilt für die Theorien von Weierstraß und Dedekind. Beim letzteren hakt Frege an der ganz unwesentlichen

[6] Wie in GLA beweist Frege in den GGA auch einige Sätze über die kleinste transfinite Kardinalzahl ∞_1, vgl. die Sätze 165, 167, 172, 205, 207, 263, 325, 327, 428, 443, 484. Er definiert ∞_1 als Anzahl der Menge der natürlichen Zahlen.

[7] Frege bezieht sich auf Heine (1872) und Thomae (1898).

[8] Zu Cantors Theorie der reellen Zahlen vgl. (1932), II.5 (und II.9). Frege bezieht sich auf III.4, Nr. 5 (S. 165–209, insbesondere S. 183 ff.).

Formulierung ein, daß wir die reellen Zahlen „erschaffen“[9]. Tatsächlich definiert Dedekind reelle Zahlen auf ganz korrekte Weise durch Schnitte. Bei Weierstraß[10] kritisiert Frege dessen Vorstellungen über die elementare Arithmetik, auf der die Theorie der reellen Zahlen basiert. So berechtigt diese Kritik sein mag, so wenig relevant ist sie für Weierstrassens Theorie der reellen Zahlen, die sich wiederum so formulieren läßt, daß sie allen Anforderungen an Präzision genügt.

Bedeutsamer als der destruktive ist der konstruktive Teil: Freges eigener Ansatz zur Begründung der Analysis[11]. Bisher hat er freilich kaum Beachtung gefunden. Das liegt erstens daran, daß eine exakte Definition der reellen Zahlen schon vor Frege angegeben worden war, so daß seine Begründung der Analysis nicht die gleiche Originalität hat wie jene der Logik und Arithmetik. Zweitens hat er in den GGA die Theorie nicht vollständig ausgeführt. Er plante wohl einen dritten Band, der jedoch nicht erschien, da die Grundlage des Baus durch die Antinomien erschüttert war. Immerhin enthält der 2. Band ein so klares Programm, daß es keine Schwierigkeiten macht, Freges Gedanken zuende zu führen. Da sich Freges Ideen zur Einführung der reellen Zahlen schon in ihrem ersten Ansatz von den heute üblichen unterscheiden, können sie aber durchaus auch ein gewisses systematisches Interesse beanspruchen. Der leichteren Verständlichkeit wegen wollen wir sie hier im Rahmen der Klassenlogik darstellen.

Wie es Frege bei der Begründung der Arithmetik nicht einfach darum ging, ein mengentheoretisches Modell der Peanoaxiome anzugeben, sondern die natürlichen Zahlen als Anzahlen zu definieren, so ging es ihm bei der Begründung der Analysis darum, die reellen Zahlen als Maßzahlen zu erklären. Frege war der Ansicht, die Verwendung der Zahlen zum Zählen oder Messen müsse schon in ihre Definition eingehen und dürfe nicht nur „rein äußerlich angeflickt werden“ (GGAII, S. 157), d. h. durch eine zusätzliche Relation erklärt werden. Er unterschied bzgl. ihrer Anwendung zwei Arten von Zahlen: *Anzahlen,* mit denen wir antworten auf die Frage:

[9] Vgl. Dedekind (1872), S. 14.
[10] Zu den Quellen, auf die sich Frege bezieht, vgl. GGAII, S. 149.
[11] Vgl. dazu Kutschera (1967a).

„Wieviele Elemente enthält eine Menge?" und *Maßzahlen,* mit denen wir auf die Frage antworten: „Wie groß ist eine Größe, verglichen mit der Einheitsgröße?" Die natürlichen Zahlen (wie allgemein die Kardinalzahlen) sind dann Anzahlen, die ganzen, die rationalen und die reellen Zahlen sind Maßzahlen. Daher kann man auch nicht von einer „Erweiterung" der Klasse der natürlichen etwa zu derjenigen der ganzen oder reellen Zahlen sprechen, denn diese Zahlarten sind ganz verschiedener Natur (vgl. GGAII, S. 155). (Von Ordinalzahlen ist bei Frege nicht die Rede.) Wie die Anwendung der Anzahlen zum Zählen in ihre Definition bei Frege eingeht, haben wir schon gesehen: Er definiert die Anzahlen als Mengen aller Mengen, die diese Anzahl haben. Der Begriff der Gleichmächtigkeit, den man sonst der Definition der natürlichen Zahlen für ihre Anwendung zum Zählen noch hinzufügen muß, ist bei Frege bereits in seiner Definition der Anzahlen enthalten. Ähnlich ist Freges Vorgehen bei der Einführung der reellen Zahlen: Er definiert sie als Verhältnisse von Größen zu Einheitsgrößen, als Maßrelationen also.

Diese Erklärung kann man sich wie folgt veranschaulichen: Die Größen eines eindimensionalen Bereichs G wie z. B. Kräfte, die in einer der beiden Richtungen einer Geraden wirken, kann man als Vektoren auf dieser Geraden darstellen. Ein Vektor ist dabei charakterisiert als Verschiebung eines Punktes in einer der beiden Richtungen auf der Geraden um einen bestimmten Betrag. Man fordert, daß jeder Vektor im Endpunkt jedes anderen angreifen kann und im Angriffspunkt jedes anderen enden kann. Dann läßt sich die Addition zweier Vektoren $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ als Verschiebung $\mathfrak{a}$ gefolgt von der Verschiebung $\mathfrak{b}$ erklären, und $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ gehört zu G, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu G gehören. Ferner fordert man, daß zu jedem Vektor $\mathfrak{a}$ aus G, ein Vektor $-\mathfrak{a}$ in G existiert, so daß für alle Punkte A und B gilt: Verschiebt $\mathfrak{a}$ A in B, so verschiebt $-\mathfrak{a}$ B in A. Dann ist die Differenz $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ als $\mathfrak{a}+(-\mathfrak{b})$ erklärt. Der Nullvektor $\mathfrak{o}$ sei durch $\mathfrak{o}=\mathfrak{a}-\mathfrak{a}$ definiert. Endlich zeichnet man eine Richtung als positiv aus und damit eine Klasse G^+ positiver Vektoren dieser Richtung, so daß gilt:

1a) $\mathfrak{a}\varepsilon G^+ \supset \mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$

b) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\varepsilon G^+ \supset \mathfrak{a}+\mathfrak{b}\varepsilon G^+$

c) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\varepsilon G^+ \wedge \mathfrak{a}\neq\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}-\mathfrak{b}\varepsilon G^+ \vee \mathfrak{b}-\mathfrak{a}\varepsilon G^+$.

Es ist dann $G=\{\mathfrak{a}: \mathfrak{a}\varepsilon G^+ \vee \mathfrak{a}=\mathfrak{o} \vee -\mathfrak{a}\varepsilon G^+\}$.

Man kann nun jedem Vektor $\mathfrak{a}\varepsilon G$ die Relation a zuordnen, für die gilt: a(B, C) für alle Punkte B und C, so daß $\mathfrak{a}$ B in C verschiebt.

Im folgenden fassen wir Relationen im Sinne der Definition D_K18 in 7.1.4 als Mengen von geordneten Paaren auf. Entspricht die Relation a dem Vektor $\mathfrak{a}$ und die Relation b dem Vektor $\mathfrak{b}$, so a^{-1} dem Vektor $-\mathfrak{a}$, das Relationsprodukt aob dem Vektor $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, aob^{-1} der Differenz $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ und die Relation $\lambda xy(x=y)$, also ror^{-1}, dem Vektor $\mathfrak{o}$. Wir schreiben im folgenden 0 für $\lambda xy(x=y)$.

Frege definiert Größengebiete durch „Positivalklassen", d. h. Klassen positiver Größen:

D19: $G(X) := \lambda r(R(r) \wedge r\varepsilon X \vee r^{-1}\varepsilon X \vee r=0)$ – das *Größengebiet* von X (GGAII, S. 169).

D20: $P(X) := \neg 0\varepsilon X \wedge \bigwedge r(r\varepsilon X \supset R(r) \wedge E(r) \wedge E(r^{-1})) \wedge \bigwedge rt(r\varepsilon X \wedge t\varepsilon X \supset rot\varepsilon X \wedge rot^{-1}\varepsilon G(X) \wedge t^{-1}or\varepsilon G(X))$ – X ist eine *Positivalklasse* (GGAII, S. 171).

(Die Forderungen $rot\varepsilon X$, $rot^{-1}\varepsilon G(X)$, $t^{-1}or\varepsilon G(X)$ stellen sicher, daß gilt $r\varepsilon G(X) \wedge t\varepsilon G(X) \supset rot\varepsilon G(X)$.)

Gilt P(X) und r, $t\varepsilon G(X)$, so kann man eine Ordnungsrelation auf G(X) bzgl. X definieren durch

D21: $r<_X t := tor^{-1}\varepsilon X$ – r ist *kleiner als* t bzgl. X (GGAII, S. 185).

Für die Einführung reeller Zahlen als Maßzahlen für die oben betrachteten Vektoren muß man noch die Dichte und die Existenz einer oberen Grenze fordern, also, wenn man setzt $\mathfrak{a}<_G \mathfrak{b} := \mathfrak{b}-\mathfrak{a}\varepsilon G^+$:

2) $\bigwedge \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\varepsilon G \wedge \mathfrak{a}<_G \mathfrak{b} \supset \bigvee \mathfrak{c}(\mathfrak{c}\varepsilon G \wedge \mathfrak{a}<_G \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{c}<_G \mathfrak{b}))$ und

3) $\bigwedge AB(A\subset G \wedge B\subset G \wedge \bigwedge \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}(\mathfrak{a}\varepsilon A \wedge \mathfrak{b}\varepsilon B \supset \mathfrak{a}<_G \mathfrak{b}) \supset \bigvee \mathfrak{c}(\mathfrak{c}\varepsilon G \wedge \bigwedge \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}(\mathfrak{a}\varepsilon A \wedge \mathfrak{a}\neq \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{b}\varepsilon B \wedge \mathfrak{b}\neq\mathfrak{c} \supset \mathfrak{a}<_G \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{c}<_G \mathfrak{b})))$.

Analog bestimmt Frege Positivklassen als solche Positivalklassen, die die entsprechenden Bedingungen erfüllen. Er definiert

D22: $A \lim_X t := P(X) \wedge A\subset G(X) \wedge t\varepsilon X \wedge \bigwedge r(r\varepsilon X \wedge r<_X t \supset r\varepsilon A) \wedge \bigwedge r(t<_X r \supset \bigvee q(q\varepsilon X \wedge q<_X r \wedge \neg q\varepsilon A))$ – t ist eine *X-Grenze* von A (GGAII, S. 187).

D23: $P^*(X) := P(X) \wedge \bigwedge t(t\varepsilon X \supset \bigvee r(r\varepsilon X \wedge r<_X t))$
$\wedge \bigwedge A(A\subset G(X) \wedge \bigvee r(r\varepsilon X \wedge \bigwedge t(t\varepsilon X \wedge t<_X r \supset t\varepsilon A))$
$\wedge \bigvee r(r\varepsilon X \wedge \neg r\varepsilon A) \supset \bigvee t(A \lim_X t))$ – s ist eine *Positivklasse* (GGAII, S. 190).

Die Dichte ergibt sich aus dem 2. Konjunktionsglied im Definiens: Gilt $s<_X t$, so ist $t-s$ (d. h. tos^{-1}) in X, also gibt es ein $r\varepsilon X$ mit $r<t-s$. Es ist dann $s<_X s+r<_X t$. Gilt $P^*(X)$, so gilt in Analogie zu (3) auch $\bigwedge AB(A\subset G(X) \wedge B\subset G(X) \wedge \bigwedge sr(s\varepsilon A \wedge r\varepsilon B \supset s<_X r)$

$\supset \bigvee t(t\varepsilon G(X) \wedge \bigwedge sr(s\varepsilon A \wedge r\varepsilon B \wedge s \neq t \wedge r \neq t \supset s <_X t \wedge t <_X r)))$. Denn ist A oder B leer, so ist (für $G(X) \neq \Lambda$) das Implikat trivialerweise erfüllt. Andernfalls ist A nach oben beschränkt, es gibt also eine obere Grenze t von A, die das Implikat erfüllt.

Ist nun X eine Positivklasse, so kann man in X ein beliebiges Element e als Einselement auszeichnen und zeigen, daß das Quadrupel $\langle G(X), o, <_X, e\rangle$ – $G(X)$ für die Menge R der reellen Zahlen, o für die Addition +, $<_X$ für die Kleinerrelation < und e für die reelle Zahl 1 das Axiomensystem für die reellen Zahlen von A. Tarski erfüllt[12]

R1) $x \neq y \supset x < y \vee y < x$

R2) $x < y \supset \neg(y < x)$

R3) $x < y \supset \bigvee z(x < z \wedge z < y)$

R4) $A \subset R \quad \wedge \quad B \subset R \quad \wedge \quad \bigwedge xy(x\varepsilon A \wedge y\varepsilon B \quad \supset \quad x < y) \quad \supset$
$\bigvee z \bigwedge xy(x\varepsilon A \wedge y\varepsilon B \wedge x \neq z \wedge y \neq z \supset x < z \wedge z < y)$

R5) $x + (y+z) = (x+z)+y$[13]

R6) $\bigvee z(x = y + z)$

R7) $x+z < y+t \supset x < y \vee z < t$

R8) $1\varepsilon R$

R9) $1 < 1+1$.

Da der Nachweis, daß für $P^*(X)$ $\langle G(X), o, <_X, e\rangle$ ein Modell dieses Axiomensystems ist, in Kutschera (1967a) geführt wird, genügt es hier das Resultat am Parallelfall der Vektoren plausibel zu machen: Auch $\langle G, +, <_G, \mathfrak{e}\rangle$ bilden ein Modell der Tarski-Axiome, wo $\mathfrak{e}$ ein Vektor aus G^+ ist. Das ergibt sich praktisch unmittelbar aus den Forderungen (2) und (3), die R3 und R4 entsprechen und den übrigen Festsetzungen.

Man kann nun die Multiplikation von ganzen Zahlen mit Vektoren so definieren:

4) $0 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$
$(n+1) \cdot \mathfrak{a} = n \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$
$(-n) \cdot \mathfrak{a} = n \cdot (-\mathfrak{a})$.

[12] Vgl. dazu Tarski (1946), § 61 und (1966), S. 220.

[13] Aus R5, R6 folgt die Kommutativität der Addition: y läßt sich nach R6 in der Form $y = x + z$ darstellen, nach R5 gilt $x + (x+z) = (x+z) + x$, also $x + y = y + x$. Umgekehrt folgt aus der Kommutativität und der Assoziativität der Addition R5.

Nach (2) und (3) gibt es für jedes $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}=2 \cdot \mathfrak{b}$, so daß man setzen kann: $\mathfrak{e}/2$ ist jenes $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{e}=\mathfrak{b}+\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{e}/2^n$ jenes $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{e}/2^n=\mathfrak{b}+\mathfrak{b}$. Damit sind die Summen $\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^M \cdot \mathfrak{e}}{2^i}$ für alle n definiert, wo M eine Menge von natürlichen Zahlen $\neq 0$ ist und $c_i^M=1$ ist für $i \varepsilon M$ und sonst $c_i^M=0$. Nach (3) ist dann auch $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M \cdot \mathfrak{e}}{2^i}$ definiert als Vektor aus G. Zu jedem Vektor $\mathfrak{a}\varepsilon G$ gibt es nun genau eine ganze Zahl m und genau eine Menge M natürlicher Zahlen $\neq 0$, so daß gilt (*): $\mathfrak{a}=m \cdot \mathfrak{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M \cdot \mathfrak{e}}{2^i}$. Das folgt daraus, daß $\langle G, +, <_G, \mathfrak{n}\rangle$ ein Modell der Tarskiaxiome ist, aus denen die eindeutige Darstellbarkeit reeller Zahlen in der Gestalt $m_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M \cdot \mathfrak{e}}{2^i}$ folgt (vgl. GGAII, S. 161). Man kann dann sagen: Dem Vektor $\mathfrak{a}$ kommt bzgl. $\mathfrak{e}$ die Maßzahl $\langle m, M\rangle$ zu, wenn (*) gilt. Es gibt also eine eineindeutige Abbildung F von G auf R, für die gilt $F(\mathfrak{e})=1$, $\mathfrak{a}<_G\mathfrak{b} \equiv F(\mathfrak{a})<F(\mathfrak{b})$, und $F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=F(\mathfrak{a})+F(\mathfrak{b})$.

Analog kann man für ein Größengebiet G(X) zu einer Positivklasse X sagen: Der Größe (Relation) $r\varepsilon G(X)$ kommt bzgl. der Einheitsgröße e aus X die Maßzahl $\langle m, M\rangle$ zu, wenn gilt: $r=m \cdot e + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M \cdot e}{2^i}$. Dabei sind die Ausdrücke $m \cdot r\ (=r^m)$, $e/2^n$ und $\sum_{i=1}^{\infty} r_i$ (für Relationen r_i, für die gilt, daß die Folge der $\sum_{i=1} r_i$ nach oben beschränkt ist) rein relationenlogisch definiert.

Frege wollte die reellen Zahlen $\langle m, M\rangle$ als Relationen zwischen den Größen eines Größengebietes so definieren:

D24: $R_{\langle m, M\rangle}(r, t) := \bigvee X(P^*(X) \wedge r\varepsilon X \wedge t=m \cdot r + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M \cdot r}{2^i})$ –

t *steht im Verhältnis* $\langle m, M\rangle$ zu r.

Die reelle Zahl $\langle m, M\rangle$ selbst ist dann die Relation $\lambda rtR_{\langle m, M\rangle}(r, t)$. Die reellen Zahlen lassen sich nach dieser Definition direkt für Maßangaben verwenden: t hat gemessen an r den reellen Wert $\langle m, M\rangle$, wenn gilt $\langle r, t\rangle\varepsilon R_{\langle m, M\rangle}$. Das steht in genauer Analogie zur Aussage, die aus Freges Definition der natürlichen Zahlen folgt: $A(x)=n$, wenn $x\varepsilon n$.

Freges Konstruktion der reellen Zahlen setzt die natürlichen und die ganzen Zahlen voraus, wobei sich die ganzen Zahlen aber z. B. als geordnete Paare $m = \langle 0, m \rangle$ und $-m = \langle m, 0 \rangle$ definieren lassen. Er muß jedoch bei seinem Ansatz zeigen, daß es eine Positivklasse gibt. Dafür hatte Frege folgenden Plan (vgl. GGAII, S. 161, 243): Ausgehend von den natürlichen Zahlen definiert man die geordneten Paare $\langle m, M \rangle$ und zeigt, daß die Relationen $x + a = y$ für solche Paare und positive a ein Positivklasse bilden. Dabei ist zu setzen $\langle m, M \rangle + \langle m', M' \rangle = \langle m + m' + m'', M'' \rangle$, wo $m'' + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^{M''}}{2^i}$ die Entwicklung der Summe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^{M} + c_i^{M'}}{2^i}$ in die Normalform mit $c_i^{M''} \varepsilon \{0, 1\}$ und $M'' \neq \Lambda$ ist, und $\langle m, M \rangle < \langle m', M' \rangle$ gdw. $m < m' \vee m = m' \wedge \bigvee i (c_i^M < c_i^{M'} \wedge \bigwedge k (k < i \supset c_k^M = c_k^{M'}))$. Es wäre zweifellos einfacher, reelle Zahlen direkt als Paare $\langle m, M \rangle$ zu definieren und zu zeigen, daß die Menge dieser Paare sowie $+$, $<$, und $1 = \langle 0, N - \{0\} \rangle$ (wo N die Menge aller natürlicher Zahlen ist) ein Modell der Tarskiaxiome bilden. Es war jedoch wie gesagt Freges Ziel, die reellen Zahlen als Maßzahlen, als Größenverhältnisse zu definieren und ihre Verwendung zum Messen von Größen nicht bloß „rein äußerlich anzuflicken".

7.3 Freges Beweis der extensionalen Definitheit der Sprache $\mathfrak{S}$

In § 31 f. GGAI will Frege zeigen, daß allen Termen der Sprache $\mathfrak{S}$ durch die semantischen Festlegungen eine und nur eine Extension zugeordnet wird, wir sprechen in diesem Sinn von einer *extensionalen Definitheit* von $\mathfrak{S}$[14]. Anlaß dazu ist die Definitionslehre im § 33: Frege gibt dort solche Bedingungen für Definitionen an, daß der definierte Ausdruck immer dann eine wohlbestimmte Bedeutung$_F$

[14] Frege behauptet sogar, jedem Satz (d. h. jedem Wahrheitswertnamen) sei ein wohlbestimmter Sinn zugeordnet, denn für jeden Satz seien Wahrheitsbedingungen festgelegt und der Sinn eines Satzes sei, daß diese Bedingungen erfüllt sind (vgl. GGAI, S. 50).

hat, wenn das für den definierenden Ausdruck gilt. So will er zeigen, daß auch die Grundausdrücke von 𝔊, mit denen definiert wird, bedeutungsvoll$_F$ sind. Daneben spielte aber wohl auch das Problem eine Rolle, das Frege selbst in den Wertverlaufsnamen sah: Sind diese Namen im Kontext seiner Logik, d. h. durch das Grundgesetz AV, ausreichend bestimmt?[15] Hier sah er ein Problem, und so war auch seine erste Reaktion auf die Antinomien, den Beweis im § 31 anzuzweifeln (vgl. den Brief an B. Russell vom 22. 6. 1902, N, S. 213). Die Bedeutsamkeit dieses Beweises – oder besser: Beweisversuches – ergibt sich daraus, daß er die Grundlage für einen Nachweis der semantischen Widerspruchsfreiheit des Kalküls 𝔊 auf dem üblichen Weg bilden würde. Aus der Widersprüchlichkeit dieses Kalküls und der Tatsache, daß alle beweisbaren Terme Namen des Wahren sind, ergibt sich daher umgekehrt schon, daß der Beweisversuch nicht korrekt sein kann.

Heute würde man einen solchen Beweis als Induktionsbeweis aufbauen. Da die Terme von 𝔊 induktiv nach ihrer Länge definiert werden, hätte man von einer Interpretation auszugehen, die den kürzesten Termen, den Konstanten, eindeutig Extensionen zuordnen und dann zu zeigen, daß komplexen Termen durch die einschlägigen semantischen Regeln eindeutig eine Extension zugeordnet wird, wenn das für alle kürzeren Terme der Fall ist. Wir haben jedoch schon gesehen, daß dieses Vorgehen im Fall der Klassenlogik versagt, weil hier semantische Regeln den Termen nicht immer Extensionen nur in Abhängigkeit von jenen kürzerer Terme zuordnen. So setzt man z. B. $V(s\varepsilon\lambda xA[x]) = V(A[s])$. Dann ist aber z. B. für $s = \lambda xA[x]$ und $A[x] = \neg(x\varepsilon x)$ der Ausdruck $A[s]$, d. h. $\neg s\varepsilon s$, länger als der Ausdruck $s\varepsilon\lambda xA[x]$, d. h. $s\varepsilon s$.

Frege geht nicht induktiv vor. Er gibt zunächst Kriterien dafür an, wann ein Term bedeutungsvoll ist:

„Ein *Name einer Funktion erster Stufe mit einem Argument* hat dann eine Bedeutung (bedeutet etwas, ist bedeutungsvoll), wenn der Eigenname, der

[15] Schon in SB sagt Frege: „Von einer logisch vollkommenen Sprache (Begriffsschrift) ist zu verlangen, daß jeder Ausdruck, der aus schon eingeführten Zeichen in grammatisch richtiger Weise als Eigenname gebildet ist, auch in der Tat einen Gegenstand bezeichne, und daß kein Zeichen als Eigenname neu eingeführt werde, ohne daß ihm eine Bedeutung gesichert sei". (KS, S. 155.)

aus diesem Funktionsnamen dadurch entsteht, daß die Argumentstellen mit einem Eigennamen ausgefüllt werden, immer dann eine Bedeutung hat, wenn dieser eingesetzte Name etwas bedeutet. Ein *Eigenname* hat eine Bedeutung, wenn der Eigenname immer eine Bedeutung hat, der dadurch entsteht, daß jener die Argumentstellen eines bedeutungsvollen Namens einer Funktion erster Stufe mit einem Argument ausfüllt, und wenn der Name einer Funktion erster Stufe mit einem Argument immer eine Bedeutung hat, der dadurch entsteht, daß der zu prüfende Eigenname die ξ-Argumentstellen eines bedeutungsvollen Namens einer Funktion erster Stufe mit zwei Argumenten ausfüllt, und wenn dasselbe auch für die ζ-Argumentstellen gilt. Ein *Name einer Funktion erster Stufe mit zwei Argumenten* hat dann eine Bedeutung, wenn der Eigenname immer eine Bedeutung hat, der aus diesem Funktionsnamen dadurch entsteht, daß die ξ-Argumentstellen mit einem bedeutungsvollen Eigennamen und daß auch die ζ-Argumentstellen mit einem bedeutungsvollen Eigennamen ausgefüllt werden. Ein *Name einer Funktion zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art* hat eine Bedeutung, wenn allgemein daraus, daß der Name einer Funktion erster Stufe mit einem Argument etwas bedeute, folgt, daß der durch seine Einsetzung in die Argumentstellen unserer Funktion zweiter Stufe entstehende Eigenname eine Bedeutung habe". (GGAI, S. 45f.)

Diese vier Kriterien sind natürlich zirkulär, wenn sie die einzigen Kriterien für Bedeutungshaltigkeit$_F$ sind und man nicht z. B. von gewissen Namen ausgehen kann, die bereits nach anderen Kriterien als bedeutungsvoll$_F$ ausgewiesen sind. Bei Frege sind diese Kriterien zunächst auch nur für die Erweiterung einer Menge von bedeutungsvollen$_F$ Termen gedacht (GGAI, S. 46). Danach kann man z. B. ein einstelliges Prädikat zu einer Sprache L hinzunehmen, wenn es für alle Namen von L erklärt ist, und man kann einen Namen zu L hinzunehmen, wenn die Prädikate für ihn erklärt sind. Aus Freges Kriterien folgt, daß jeder aus bedeutungsvollen$_F$ Termen nach einer der beiden folgenden Regeln gebildete Term bedeutungsvoll$_F$ ist:

a) Einsetzung von Termen in andere für eine freie Variable der entsprechenden Kategorie.
b) Ersetzung eines Terms durch eine freie Variable der entsprechenden Kategorie (GGAI, 46f.).

Das sind aber Freges syntaktische Regeln.

Freges Beweis läuft nun so:

1) Die Namen von Wahrheitswerten seien bedeutungsvoll$_F$.

2) Die Ausdrücke $-\xi$, $\neg\xi$, $\xi \supset \zeta$, $\xi = \zeta$, $\varkappa\xi$ haben, angewendet auf Wahrheitswertnamen nach den von Frege angegebenen Wahrheitsbedingungen eine wohlbestimmte Bedeutung$_F$. ($\varkappa$a bezeichnet für Wahrheitswertnamen a dasselbe wie a.)
3) Die Ausdrücke $\wedge x A[x]$ haben, in Anwendung auf Funktionsausdrücke, die sich nach (2) bilden lassen, eine Bedeutung$_F$. Frege muß hier die Festsetzung verwenden, daß $\wedge x A[x]$ wahr ist genau dann, wenn $A[a]$ für alle Einsetzungen bedeutungsvoller$_F$ Namen a wahr ist[16]. Das ist hier zunächst unproblematisch, da der Objektbereich vorläufig nur aus der Menge $\{w, f\}$ besteht, und es Namen für diese beiden Objekte gibt.
4) Ebenso für $M_x(A[x])$.
5) Mit $\omega x A[x]$ werden nun neue Eigennamen eingeführt. Frege argumentiert so: $\omega x A[x] = \omega x B[x]$ bedeutet$_F$ dasselbe wie $\wedge x (A[x] = B[x])$. Diese Ausdrücke sind aber bereits nach (3) als bedeutungsvoll$_F$ erkannt, wo $A[\xi]$ und $B[\xi]$ nach (2), (3) gebildet sind. Wegen $w = \omega x(-x)$, $f = \omega x(x = \neg \wedge y(y = y))$ haben alle Sätze der Gestalt $s = t$ diese Form. Sie sind also alle bedeutungsvoll$_F$. Nun gilt $-x = (x = (x = x))$, also ist auch $-\omega x F(x)$ immer bedeutungsvoll$_F$. Und $\neg s$, $s \supset t$ sind immer bedeutungsvoll$_F$, wenn das für $-s$, $-t$ gilt. Also sind nach dem Kriterium für Eigennamen die Ausdrücke $\omega x A[x]$ immer bedeutungsvoll$_F$, wenn das für $A[\xi]$ gilt. Daher darf man den Kreis der bedeutungsvollen$_F$ Ausdrücke um die der Gestalt $\omega x A[x]$ erweitern, und auch die Funktionsausdrücke $\omega x F(x)$ sind bedeutungsvoll$_F$, wo F eine freie Variable der Kategorie (0) ist.
6) $\varkappa s$ bedeutet$_F$ nach der semantischen Festlegung s, wenn s kein Name für den Wertverlauf einer Funktion $x = t$ ist, sonst t. Ist also s bedeutungsvoll$_F$, so auch $\varkappa s$. Auch der Funktionsausdruck $\varkappa a$ ist also bedeutungsvoll$_F$, wo a eine freie Gegenstandsvariable ist.

Frege meint, damit sei gezeigt, daß alle logischen Grundzeichen eine Bedeutung$_F$ haben und alle mit ihnen rechtmäßig zusammengesetzten Terme von $\mathfrak{G}$. Zur Kritik ist aber folgendes zu bemerken:

[16] Vgl. dazu die Bemerkungen in 3.3.

Zu (1): Jeder Name hat als Name einen Bezug (von sinnvollen aber bedeutungslosen$_F$ Namen können wir hier absehen). Voraussetzung kann also nicht sein, daß jeder Ausdruck, der einen Wahrheitswert bezeichnet, ein bedeutungsvoller$_F$ Name ist. Frege muß also von zwei einfachen objektsprachlichen Namen, z. B. von Konstanten w und f, für die Wahrheitswerte ausgehen.

Zu (5): Nach (1) kann man dann nicht die Wahrheit der Sätze $w = \omega x(-x)$ und $f = \omega x(x = \neg \bigwedge y(y=y))$ postulieren wie in D7 und D8. Möglich wäre allein die zusätzliche Festlegung, daß die Sätze $\omega x A[x] = w$ und $\omega x A[x] = f$ falsch sind. Das Hauptproblem von (5) besteht aber darin, daß die Bedeutung$_F$ von $\bigwedge x(Gx = Fx)$ nach (3) von der Bedeutung$_F$ von $G(\omega x G(x))$, $G(\omega x F(x))$, $F(\omega x G(x))$ und $F(\omega x F(x))$ abhängt. Die Erweiterung der Sprache um die Wertverlaufsterme stellt also die Bedeutung$_F$ der in (2) und (3) behandelten Funktionsausdrücke wieder in Frage. Setzen wir z. B. $G(x) := x = \omega x F(x)$, so hängt die Bedeutung$_F$ von $\omega x G(x) = \omega x F(x)$ ab von der Bedeutung$_F$ von $\bigwedge x(Gx = Fx)$, diese aber von jener von $G(\omega x G(x)) = F(\omega x Gx)$, also von der Bedeutung$_F$ von $G(\omega x G(x))$, d. h. von jener von $\omega x G(x) = \omega x F(x)$. Solche möglichen Zirkularitäten machen Freges Beweis ungültig. Daß dabei sogar Widersprüche auftreten können, zeigt der Fall: $G(x) := \bigvee f(x = \omega y f(y) \wedge \neg f(x))$. Es ist dann

$$\begin{aligned} G(\omega x G(x)) &= \bigvee f(\omega x G(x) = \omega y f(y) \wedge \neg f(\omega x G(x))) \\ &= \omega x G(x) = \omega y G(y) \wedge \neg G(\omega x G(x)) \\ &= \neg G(\omega x G(x)). \end{aligned}$$

Ein Beweis der semantischen Definitheit müßte wie gesagt induktiv geführt werden und das gelingt in der Wertverlaufslogik ebensowenig wie in der Klassenlogik.

Freges Argumentation weist auf sein Kontextprinzip in den GLA zurück (vgl. dazu 5.2). Dort hatte sich ihm das Problem der Einführung abstrakter Gegenstände gestellt, und sein Gedanke war: Die Rede von abstrakten Objekten der Art K ist gerechtfertigt, wenn es gelingt, kohärente Wahrheitsbedingungen für Sätze mit K-Termen anzugeben. Eine konsistente (und hinreichend detaillierte) Sprache mit K-Termen legitimiert es also, diesen Termen einen Bezug zuzusprechen, insbesondere dann, wenn sich diese Sprache in die normale (ohne K-Terme) integrieren läßt und sich für gewisse Zwecke als nützlich erweist[17]. Die Idee, die Annahme von Wertverläufen oder Klassen dadurch zu rechtfertigen, daß sich eine kohärente Sprache über sie angeben läßt, wäre auch sicher stichhaltig, wenn diese Sprache tatsächlich konsistent wäre. Die Konsistenz ist das Problem der Rede über Klassen und Wertverläufe, nicht die Schwierigkeit, die Frege sah, daß nicht alle Begriffe oder Funktionen für diese Objekte erklärt sind, daß also z. B. „Julius Caesar $= \omega x(x \neq x)$“ nach dem Grundgesetz V nicht erklärt ist.

[17] Das ist ein ähnlicher Gedanke wie jener, mit dem man heute oft eine realistische Deutung theoretischer Terme rechtfertigt: Sie erweisen sich über die Theorien, in denen sie vorkommen, als nützlich für die Systematisierung, Erklärung und Prognose von Beobachtungsaussagen und zwar auch in Fällen, zu deren Systematisierung sie nicht eingeführt worden sind. Das läßt sich am besten mit der Annahme verstehen, daß ihnen tatsächlich etwas Reales entspricht.

8 Antinomien und Revisionsversuche

8.1 Die Antinomie von Russell

In einem Brief vom 16. 6. 1902 (BW, S. 211 f.), mit dem sich Russell das erstemal an Frege wendet, teilt er diesem die Antinomie mit, die heute seinen Namen trägt. Er formuliert sie so: Der Begriff F sei definiert durch $F(f) := \neg f(f)$. Daraus folgt unmittelbar $F(F) \equiv \neg F(F)$. Ebenso, sagt er, ergibt die Definition $a := \lambda x \neg (x \varepsilon x)$ den Widerspruch $a \varepsilon a \equiv \neg (a \varepsilon a)$. Russell schreibt, er hätte diesen Widerspruch schon G. Peano mitgeteilt, von diesem aber keine Antwort erhalten.

Am 22. 6. 1902 antwortet Frege:

„Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich auf's Höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik ... aufzubauen dachte, ins Wanken gerät. Es scheint danach, daß die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Wertverlaufsgleichheit (§ 9 meiner *Grundgesetze*) nicht immer erlaubt ist, daß mein Gesetz V (§ 20, S. 36) falsch ist und daß meine Ausführungen im § 31 nicht genügen, in allen Fällen meinen Zeichenverbindungen eine Bedeutung zu sichern. Ich muß noch weiter über die Sache nachdenken. Sie ist um so ernster, als mit dem Wegfall meines Gesetzes V nicht nur die Grundlage meiner Arithmetik, sondern die einzig mögliche Grundlage der Arithmetik überhaupt zu versinken scheint. Und doch, sollte ich denken, muß es möglich sein, solche Bedingungen für die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Wertverlaufsgleichheit aufzustellen, daß das Wesentliche meiner Beweise erhalten bleibt. Jedenfalls ist Ihre Entdeckung sehr merkwürdig und wird vielleicht einen großen Fortschritt in der Logik zur Folge haben, so unerwünscht sie auf den ersten Blick auch scheint ... Der zweite Band meiner Grundgesetze soll demnächst erscheinen. Ich werde ihm wohl einen Anhang geben müssen, in dem Ihre Entdeckung gewürdigt wird. Wenn ich nur erst den richtigen Gesichtspunkt dafür hätte!" (BW, S. 213 und 215.)

Im Anhang zu GGAII formuliert Frege die Antinomie so: Er setzt $Fx := Vf(x = \omega y f y \wedge \neg f x)$. Für $b := \omega y F y$ erhält man dann $F(b) = Vf(b = \omega y f y \wedge \neg f b) = \neg F(b)$.

Im Antwortbrief vom 24. 6. 1902 (BW, S. 215 ff.), schreibt Russell:

„Ich bin auf folgender Weise zum Widerspruch geführt worden. Cantor hat, wie Sie natürlich wissen, einen Beweis aufgestellt daß es keine größte Anzahl gibt ... Nun gibt es aber Begriffe deren Umfang Alles umfaßt; diese sollten also die größte Anzahl haben. Ich habe probiert, eine eineindeutige Beziehung zwischen allen Objekten und allen Klassen aufzustellen; als ich mit meiner besonderen Beziehung den Cantor'schen Beweis angewendet habe, ist mir die Klasse $[\lambda x \neg (x \varepsilon x)]$ übrig geblieben, obgleich alle Klassen schon aufgezählt waren. Schon seit ein[em] Jahr denke ich über diesen Widerspruch nach". (BW, S. 215 f.)

Cantor hatte die Antinomie, auf die sich Russell bezieht, schon 1895 gefunden[1], später auch die heute nach Burali-Forti benannte. Nach Bekanntwerden der Antinomie von Russell wurden in rascher Folge weitere konstruiert, die zeigten, daß die Grundprinzipien der klassischen Mengenlehre nicht haltbar sind.

8.2 Freges Revision seines Systems im Anhang der „Grundgesetze"

Unter großem Zeitdruck – der 2. Band der GGA war wie gesagt schon im Druck – machte Frege in dessen Anhang einen Vorschlag, wie sich die Antinomie von Russell vermeiden lassen sollte. Dazu verwarf er sein Grundgesetz V (vgl. 7.1.3). Dieses Gesetz ist äquivalent mit

Va: $\bigwedge y(Fy = Gy) \supset \omega x F x = \omega x G x$ und

Vb: $\omega x F x = \omega x g x \supset \bigwedge y(Fy = Gy)$.

Frege zeigt, daß es keine eindeutige Abbildung M der einstelligen Begriffe 1. Stufe auf die Menge der Objekte gibt. Es sei M eine Funktion 2. Stufe. Dann setzen wir

[1] Cantor hatte bewiesen, daß es keine größte Anzahl gibt, weil die Anzahl der Potenzmenge $P(x)$ einer Menge x immer größer ist als die Anzahl von x. Nun gilt aber für alle Mengen x: $x \subset V$, also müßte die Allmenge V die größte Anzahl haben.

$Fx := \bigvee g(x = M_y(gy) \wedge \neg gx)$ und $a := M_x(Fx)$.

Dann folgt wie oben aus $\neg Fa \ \bigwedge g(a = M_y(gy) \supset ga)$, daraus aber Fa; $\neg Fa \supset Fa$ impliziert aber Fa. Umgekehrt folgt aus Fa jedoch $\bigvee g(M_y(Fy) = M_y(gy) \wedge \neg ga)$. Für alle M gibt es also zwei Begriffe F und G, so daß gilt $M_y(Fy) = M_y(Gy)$, aber $\neg \bigwedge x(Fx \equiv Gx)$. M ordnet daher verschiedenen Begriffen dasselbe Objekt zu. Da nun $\omega y f y$ ein solches $M_y(fy)$ ist, kann Vb nicht gelten. Frege ersetzt daher V durch V′ (GGAII, S. 262):

V′: $(\omega x A[x] = \omega x B[x]) = \bigwedge z(z \neq \omega x A[x] \wedge z \neq \omega x B[x] \supset A[z] = B[z])$.

Daraus folgt Va, aber nicht Vb. Statt Vb erhält man nur

Vb′: $\omega x A[x] = \omega x B[x] \wedge s \neq \omega x A[x] \supset A[s] = B[s]$.

(Aus $\omega x A[x] = \omega x B[x]$ und $s \neq \omega x A[x]$ folgt ja $s \neq \omega x B[x]$.)

Damit ist die Antinomie von Russell, wie sie Frege im Anhang zu GGAII formuliert hatte (s. oben), nicht mehr ableitbar, denn aus $\omega y F y = \omega y f y$ folgt dann nur mehr $\bigwedge x(x \neq \omega y F y \supset fx = Fx)$, so daß man mit $\neg f(\omega y F y)$ nicht mehr $\neg F(\omega y F y)$ erhält. (Es gilt auch für $a := \omega x \neg (x \eta x)$ nicht mehr $a \eta a = \neg (a \eta a)$, denn nach D6 (vgl. 7.1.1) gilt $a \eta a = \varkappa \omega y \bigvee f(a = \omega z f z \wedge y = fa)$. Mit Vb würde aus $a = \omega z f z$ folgen $fa = \neg (a \eta a)$, also $a \eta a = \varkappa \omega y(y = \neg (a \eta a))$, also $a \eta a = \neg (a \eta a)$, aber mit Vb′ folgt das nicht mehr.)

Daß die Abschwächung von Vb zu Vb′ jedoch nicht ausreicht, um Widersprüche im System zu vermeiden, haben St. Lesniewski und W. V. Quine gezeigt.

Das Argument von Lesniewski sieht für Klassen so aus. Er verwendet das Prinzip

1) $\bigwedge y(y \varepsilon \lambda x A[x] \equiv y \neq \lambda x A[x] \wedge A[y])$ (vgl. GGAII, S. 264)

und die Annahme

2) $\neg \bigvee x(V = \{x\})$.

Aus (1) folgt

3) $\bigwedge xy(\{x\} = \{y\} \equiv x = y)$ und

4) $\bigwedge xy(x \varepsilon \{y\} \supset x = y)$.

Wir setzen nun $W := \lambda x \bigwedge y(x = \{y\} \supset \neg x \varepsilon y)$. Dann gilt:

$\{W\} \varepsilon W \equiv \neg \{W\} \varepsilon W \wedge \{W\} \neq W$ nach (1) und (3) also

5) $\neg \{W\} \varepsilon W \wedge \{W\} = W$.

6) $\bigwedge x(x \neq \{W\} \wedge \{x\} \neq W \supset \bigvee y(x = \{y\} \wedge x \varepsilon y)$

gilt wegen (1) und (5) und da aus $x \neq W$ mit (4) folgt $\neg x \varepsilon \{W\}$, also $\neg x \varepsilon W$. Aus (6) erhält man für $x = \{v\}$ und (3)

7) $\bigwedge v(v \neq W \wedge \{\{v\}\} \neq W \supset \{v\} \varepsilon v)$. Daraus mit (2), (4) für $v = \{V\}$

8) $\{V\}=W \vee \{\{\{V\}\}\}=W$, und auf dem gleichen Weg für $v=\{\{V\}\}$
9) $\{\{V\}\}=W \vee \{\{\{\{V\}\}\}\}=W$.

Aus (8) und (9) ergibt sich, daß zwei der vier Mengen $\{V\}$, $\{\{V\}\}$, $\{\{\{V\}\}\}$, $\{\{\{\{V\}\}\}\}$ identisch sind, im Widerspruch zu (3) und (2).

Diese Konstruktion wurde von Lesniewski schon 1938 angegeben, aber erst von B. Sobocinski in (1949) veröffentlicht. P. T. Geach hat in (1956) den Gedanken verallgemeinert, indem er, wo E eine Funktion ist, die jeder Klasse ein Objekt zuordnet, (1) durch $\Lambda y\,(y \varepsilon \lambda x A[x] \equiv y \neq E(\lambda x A[x]) \wedge A[y])$ ersetzt und zeigt, daß sich auch dann mit (2) der Widerspruch (8) und (9) ergibt. Auch Quine verwendet in seiner Konstruktion in (1955) die Annahme (2), die wegen (4) mit der Annahme äquivalent ist, daß es mindestens zwei Objekte gibt. Ohne die Geltung von (2) ließe sich mit dem modifizierten Kalkül Freges sicher nichts mehr anfangen, zumal ja die beiden Wahrheitswerte verschiedene Objekte sein müssen. Es ist aber für die Schwäche dieses Kalküls bezeichnend, daß sich (2) im System nicht beweisen läßt, denn eine Ungleichheit läßt sich nur für Wertverläufe mittels V′ beweisen, also über $\mathrm{V}z\,(z \neq \omega x Fx \wedge z \neq \omega x Gx \wedge \neg(Fz=Gz))$. Man muß also bereits eine Ungleichung bewiesen haben, um mit V′ eine beweisen zu können.

8.3 Spätere Überlegungen

Frege ist später nicht mehr auf seinen Vorschlag in GGAII zur Vermeidung der Antinomie von Russell zurückgekommen[2]. Vielleicht hat er gesehen, daß diese Modifikation von 𝔊 nicht genügte, um Widersprüche auszuschließen. Er hat aber sicher erkannt, daß damit sein Programm einer logizistischen Begründung der Arithmetik gescheitert war, da man die Verschiedenheit der Anzahlen nicht mehr beweisen kann. Vor allem konnte ihn dieser Vorschlag nicht befriedigen, da er intuitiv nicht plausibel ist. Für ihn hätte sich nur ein Weg angeboten: die Typentheorie, die er im Bereich der Funktionen

[2] Ein Echo findet sich nur noch in der Inhaltsangabe eines Fragments von 1906 (N, S. 191), wo Frege von Begriffen spricht, die in ihrem Umfang übereinstimmen, obwohl dieser Umfang nur unter den einen Begriff fällt, nicht unter den anderen.

vertrat, auf die Wertverläufe auszudehnen, wie das schon Russell in seinem Brief an Frege am 8. 8. 1902 vorschlug:

„Man könnte den Widerspruch lösen mit Hilfe der Annahme, die Wertverläufe seien nicht Gegenstände der gewöhnlichen Art; d. h. $\varphi(x)$ sei (außer in besonderen Fällen) ergänzungsbedürftig entweder durch einen Gegenstand, oder durch einen Wertverlauf von Gegenständen, oder durch einen Wertverlauf von Wertverläufen, etc. Diese Theorie ist analog der Ihrigen über Funktionen erster, zweiter, usw. Stufe. In $x \frown u$ [$x\eta u$] wäre es notwendig daß u ein Wertverlauf sei aus Objekten vom selben Grade wie x; deshalb wäre $x \frown x$ Unsinn. Auch in der Theorie der Beziehungen wäre diese Ansicht von Nutzen". (BW, S. 226.)[3]

Die Formulierung der Antinomie mit der Definition $F(f) := \neg f(f)$ ist ja im System Freges wegen der Unterscheidung der Funktionen verschiedener Stufen unmöglich, und die Idee Russells war, aufgrund einer analogen Typenunterscheidung für Klassen auch Aussagen der Form $a \varepsilon a$ auszuschließen. Frege antwortet am 23. 9. 1902:

„Ich habe manche Möglichkeiten erwogen, den Widerspruch zu lösen, und unter diesen auch die von Ihnen angedeutete, daß man nämlich die Wertverläufe und mithin die Klassen als eine besondere Art von Gegenständen aufzufassen habe, deren Namen nicht an allen Argumentstellen erster Art erscheinen dürfen. Eine Klasse wäre dann nicht ein Gegenstand im vollen Sinne des Wortes, sondern – so zu sagen – ein uneigentlicher Gegenstand, von dem der Satz des ausgeschlossenen Dritten ungültig wäre, da es Prädikate gäbe, die ihm mit Wahrheit weder beigelegt, noch abgesprochen werden könnten. Die Zahlen wären dann uneigentliche Gegenstände. Man hätte auch verschiedene Argumentstellen erster Art zu unterscheiden, nämlich solche, an denen Namen sowohl von eigentlichen, als auch von uneigentlichen Gegenständen stehen könnten und solche, an denen nur Namen von eigentlichen, und solche, an denen nur Namen von uneigentlichen Gegenständen stehen könnten. Die Stellen zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens wären von der zuerst genannten Beschaffenheit. Für diese Auffassung spricht, daß die Klassennamen ursprünglich nur an den beiden Seiten des Gleich-

[3] Diesen Weg ist Russell in (1908) gegangen und, zusammen mit Whitehead, in (1910/13). Im Brief an Frege vom 29. 9. 1902 (BW, S. 290) bezweifelte Russell freilich schon wieder die Brauchbarkeit eines typentheoretischen Ansatzes. Eine typentheoretische Lösung des Antinomienproblems hat auch A. Korselt in zwei Briefen an Frege vorgeschlagen, allerdings in sehr unklarer Form (vgl. BW, S. 141 f.). Freges Antworten sind nicht erhalten.

heitszeichens auftreten (in meinem Gesetze V); und damit ist für keine andere bis zur Einführung eines bestimmten Wertverlaufs bekannte Funktion gegeben, welchen Wert sie für diesen Wertverlauf als Argument annimmt. Hierauf läßt sich die Behauptung stützen, daß für keine vorher bekannte Funktion dieser Wertverlauf Argument sein dürfe. Um den Fall zu vermeiden, daß die Funktion $\xi = \zeta$ als Argument sowohl eigentliche als uneigentliche Gegenstände haben könnte, wäre man vielleicht geneigt, für uneigentliche Gegenstände eine besondere Art der Gleichheit (Identität) anzunehmen; aber das hat große Schwierigkeiten. Wenn man nun noch die Wertverläufe von Funktionen hinzunimmt, als deren Argument sowohl eigentliche, als auch uneigentliche, oder nur uneigentliche Gegenstände auftreten können usw., so erhält man eine solche Mannigfaltigkeit von Gegenständen und Funktionen, daß es schwer wird ein vollständiges System von logischen Gesetzen aufzustellen. Diese Bedenken halten mich zunächst noch ab, den von Ihnen vorgeschlagenen Weg zu betreten". (BW, S. 277 f.)

Für Frege ergaben sich die kategorialen Unterschiede im Gebiete der Funktionen aus der unterschiedlichen Art ihrer Ungesättigtheit, und dafür gibt es im Bereich der Gegenstände keine Analogie. Er war einerseits davon überzeugt, daß sich die Grundbegriffe der Arithmetik auf rein logischem Wege definieren lassen; als Objekte ließen sie sich dann aber nur als Klassen oder Wertverläufe erklären. Andererseits erschien ihm aber die Klassen- und Wertverlaufslogik aufgrund der Antinomien als zutiefst problematisch.

Zur Arithmetik gibt es nach den GGA von Frege nur Bruchstücke und Andeutungen im Briefwechsel und Nachlaß. Bis ca. 1918/19 scheint er nicht mehr an den Grundlagen der Arithmetik gearbeitet zu haben. Im Entwurf eines Briefes an Zsigmondy (nach 1918) sagt er:

„Es wird Ihnen bekannt sein, daß ich mich viel bemüht habe, über das ins Klare zu kommen, was man mit dem Worte „Zahl" nennen will. Vielleicht ist Ihnen auch bekannt, daß diese Bemühungen scheinbar in einen völligen Mißerfolg ausgelaufen sind. Dieser wirkte als fortwährender Reiz, der die Frage in meinem Innern nicht zur Ruhe kommen ließ. Er arbeitete in mir weiter, obwohl ich sozusagen amtlich mich nicht mehr um die Sache bemühte. Und diese Arbeit, die unabhängig von meinem Willen in mir geschehen ist, hat mir selbst überraschend plötzlich volles Licht über die Frage verbreitet". (BW, S. 269 f.)

Worin das „Licht" besteht, wird aber nicht erläutert – der Entwurf bricht vorher ab.

Frege verfolgte in dieser Zeit zunächst die Idee, Zahlen seien nicht Gegenstände, sondern Begriffe 2. Stufe wie seine Anzahlbegriffe (vgl. 4.3), oder sie seien „unselbständige Bestandteile“ dieser Begriffe wie in „$A_n(f)$“.

„Da die auf Zählung beruhende Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthält, muß in einer logisch vollkommenen Sprache ein Satz, in dem eine Zahlangabe gemacht wird, zwei Teile enthalten, nämlich erstens ein Zeichen des Begriffes, von dem die Zahlaussage gemacht wird, und zweitens ein Zeichen eines Begriffes zweiter Stufe. Diese Begriffe zweiter Stufe ordnen sich in eine Reihe, und es gibt eine Regel, nach der, wenn einer dieser Begriffe bekannt ist, der nächstfolgende angegeben werden kann. Und trotzdem haben wir in ihnen nicht die Zahlen der Arithmetik, nicht Gegenstände, sondern Begriffe. Wie kann man auf einem einwandfreien Wege von jenen Begriffen zu den Zahlen der Arithmetik gelangen? Oder gibt es gar keine Zahlen der Arithmetik? Sind die Zahlzeichen etwa unselbständige Teile von Zeichen von jenen Begriffen zweiter Stufe? (N, S. 277, vom 26. 7. 1919.)

Frege sieht sich durch die Sprache irregeführt, die uns Objekte suggeriert, wo eigentlich Begriffe gemeint sind:

„Meine Anstrengungen, über das ins Klare zu kommen, was man Zahl nennen will, haben zu einem Mißerfolg geführt. Man läßt sich gar zu leicht durch die Sprache irreführen und gerade in diesem Falle ist diese Irreführung ganz besonders schlimm. Die Sätze ‚sechs ist eine gerade Zahl‘, ‚vier ist eine Quadratzahl‘, ‚fünf ist eine Primzahl‘ erscheinen vergleichbar den Sätzen ‚Sirius ist ein Fixstern‘, ‚Europa ist ein Erdteil‘, Sätzen, in denen ein Gegenstand als unter einen Begriff fallend hingestellt werden soll. Demnach erscheinen die Wörter ‚sechs‘, ‚vier‘ und ‚fünf‘ als Eigennamen von Gegenständen und ‚gerade Zahl‘, ‚Quadratzahl‘ und ‚Primzahl‘ ebenso wie auch ‚Zahl‘ selbst als Begriffswörter. So erscheint es als Aufgabe, den durch das Wort ‚Zahl‘ scheinbar bezeichneten Begriff klarer herauszuarbeiten und die durch die Zahlwörter und Zahlzeichen, wie es scheint, bezeichneten Gegenstände aufzuweisen“. (N, S. 282, vom 23. 3. 1924.)

Und in einem der letzten Entwürfe Freges von 1924/25 schreibt er:

„Eine für die Zuverlässigkeit des Denkens verhängnisvolle Eigenschaft der Sprache ist ihre Neigung, Eigennamen zu schaffen, denen kein Gegenstand entspricht. Wenn das in der Dichtung geschieht, die jeder als Dichtung versteht, so hat das keinen Nachteil. Anders ist es, wenn es in einer Darlegung geschieht, die den Anspruch auf strenge Wissenschaftlichkeit macht. Ein besonders merkwürdiges Beispiel dazu ist die Bildung eines Eigennamens nach dem Muster ‚der Umfang des Begriffes a‘, z. B. ‚der Umfang des

Begriffes Fixstern'. Dieser Ausdruck scheint einen Gegenstand zu bezeichnen wegen des bestimmten Artikels; aber es gibt keinen Gegenstand, der sprachgemäß so bezeichnet werden könnte. Hieraus sind die Paradoxien der Mengenlehre entstanden, die diese Mengenlehre vernichtet haben. Ich selbst bin bei dem Versuche, die Zahlen logisch zu begründen, dieser Täuschung unterlegen, indem ich die Zahlen als Mengen auffassen wollte. Es ist schwer, einen allgemein üblichen Ausdruck zu vermeiden, wenn man die Fehler, die daraus entspringen können, noch nicht kennengelernt hat. Es ist gar schwer, vielleicht unmöglich, jeden Ausdruck, den uns die Sprache darbietet, auf seine logische Unverfänglichkeit zu prüfen. So besteht denn ein großer Teil der Arbeit des Philosophen – oder sollte wenigstens bestehen – in einem Kampfe mit der Sprache". (N, S. 288 f.)

Der Kampf mit der vermeintlich heimtückischen Sprache, der dann mit Wittgenstein zum Panier der Philosophie wurde, ist freilich oft das Resultat falscher eigener Ansichten. Frege hatte ja auch schon in den GLA deutlich gesehen, daß sich mit den Anzahlbegriffen selbst keine Arithmetik aufbauen läßt –, der Anlaß zu ihnen zurückzukehren, war wohl lediglich die Erkenntnis, daß die Funktionenlogik (die höhere Prädikatenlogik) der BS durch die Antinomien nicht tangiert wird. So verläßt er diesen Gedanken wieder und will nun die Arithmetik auf der Basis einer geometrischen Anschauung begründen. Dabei hatte er den Plan, direkt die komplexen Zahlen einzuführen – wohl als Vektoren.

„Je mehr ich darüber nachgedacht habe, desto mehr bin ich zu der Überzeugung gekommen, daß Arithmetik und Geometrie auf demselben Grunde erwachsen sind und zwar auf geometrischem, so daß die ganze Mathematik eigentlich Geometrie ist". (N, S. 297, von 1924/25.)

Im „Neuen Versuch der Grundlegung der Arithmetik" (1924/25) heißt es:

„Zunächst wiederhole ich meine früheren Behauptungen, die ich noch als wahr anerkenne. Grundgesetze I, S. 1. Die Arithmetik braucht der Erfahrung keinen Beweisgrund zu entnehmen. Das drücke ich jetzt so aus: Die Arithmetik braucht der Sinneswahrnehmung keinen Beweisgrund zu entnehmen. Grundgesetze I, S. 3. Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe. Zweitens ziehe ich früher von mir geäußerte Meinungen zurück, die ich nicht aufrecht erhalten kann. Ich habe die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und daß demgemäß in der Arithmetik alles rein logisch bewiesen werden müsse. Zweitens habe ich die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik auch der Anschauung keinen

Beweisgrund zu entnehmen brauche, unter Anschauung verstehe ich die geometrische Erkenntnisquelle, die Erkenntnisquelle nämlich, aus der die Axiome der Geometrie fließen". (N, S. 298.)

Auf S. 301 liegt jedoch bereits bei den ersten Anfängen ein Fehler vor: Es ist plötzlich von einem Streckenverhältnis die Rede, das sich nur durch Abstraktion definieren ließe. Aber das Fragment bricht ab, bevor man näheres erfährt. Dieser Ansatz konnte auch nicht zum Erfolg führen, denn man kann zwar die Vektoren der Ebene als Modell des Raums der komplexen Zahlen ansehen, aber zu einer Arithmetik kommt man so nicht. Wie will man z. B. ohne ganze Zahlen eine Multiplikation von Vektoren einführen?

So sind alle späteren Gedanken Freges zur Begründung der Arithmetik nur mehr flüchtige Einfälle, und vergebliche Auflehnungsversuche gegen frühere Einsichten. Was Frege insbesondere in den GLA zum Verhältnis der Arithmetik zur Logik und ihrem Unterschied zur Geometrie in diesem Punkt gesagt hat, ist weit überzeugender als seine späten Gedanken. Mit der Entdeckung der Antinomien war Freges Lebenswerk zerstört: die logische Begründung der Arithmetik. Die Kraft zu einem energischen Neuanfang hat er nicht mehr gefunden.

Klar ist, daß die Zahlen der Arithmetik Objekte sind, auch wenn Zahlwörter oft im Sinn von Anzahlbegriffen verwendet werden, wie in dem Satz „In diesem Raum befinden sich (genau) zwei Leute". Klar ist ferner, daß eine Definition der Zahlen nur in einem mengentheoretischen Rahmen möglich ist. Um eine konsistente und vom Ansatz her intuitiv überzeugende Mengenlehre aufzubauen, muß man konstruktiv vorgehen, d. h. die Prozesse der Mengenbildung so ansetzen, daß sich eine Quasiordnung aller Mengen ergibt, für die gilt, daß jede Menge nur Elemente enthält, die ihr in dieser Ordnung vorhergehen. Eine konstruktive, konzeptualistische Auffassung von Mengen war aber Frege fremd. Er hat immer, und besonders deutlich noch in den LU, einen dezidierten Realismus vertreten (vgl. dazu 10.2). Der Konzeptualismus stand für ihn dem Psychologismus zu nahe, den er zurecht scharf abgelehnt hat.

9 Definitionen

9.1 Die Auszeichnung expliziter Definitionen

In Erkenntnis ihrer Bedeutung für einen korrekten Aufbau von Logik und Mathematik hat Frege der Definitionslehre stets größtes Gewicht beigemessen und ihr nicht weniger Aufmerksamkeit geschenkt als der Theorie des Schließens. Die Klärung der Frage, welchen Kriterien Definitionen genügen müssen, zählt sicher zu seinen bedeutenden Leistungen. Die Ausführungen dazu finden sich verstreut in seinem Werk[1]. In den von ihm veröffentlichten Schriften ist er nur in den GGAII im Zusammenhang auf dieses Thema eingegangen, aber in seinem Nachlaß finden sich mehrere größere Darlegungen dazu. Für Frege war seine Definitionslehre zugleich eine Hauptwaffe in der Auseinandersetzung mit konkurrierenden Theorien, denen er fast immer eine Mißachtung elementarer Definitionskriterien vorwarf.

Freges Leistung besteht vor allem darin, daß er anstelle einzelner Kriterien wie Nichtkreativität oder Eliminierbarkeit des Definiendums eine systematische Definitionstheorie entwickelt hat, die sich konsequent aus der Bestimmung vom Wesen einer Definition ergibt. Daneben hat er Kriterien für korrekte Definitionen für seine begriffsschriftliche Sprache präzisiert.

1) Definition vs. Erläuterung

Man kann nicht alle Ausdrücke definieren, denn jede Definition setzt Ausdrücke voraus, deren Bedeutung bereits bekannt ist. Man muß also immer von *Grundtermen einer Sprache S* ausgehen, welche

[1] Vgl. dazu GGAI, S. XIII f., 44 f. und § 33; GGAII, S. 69–80; GLG (bes. KS, S. 287–90); BW, S. 62–64, 194 ff.; N, S. 164 ff., 219 ff. (bes. 224–232). Vgl. zum folgenden auch die Darstellung in Kutschera (1967), 6.3.2.

die Grundlage aller Definitionen in S bilden. Diese Grundterme kann man nur erläutern:

„Wir müssen logische Urelemente anerkennen, die nicht definierbar sind. Auch hierbei stellt sich das Bedürfnis ein, sicherzustellen, daß man mit demselben Zeichen (Worte) dasselbe bezeichnet. Wenn sich die Forscher über diese Urelemente und ihre Bezeichnungen verständigt haben, ist das Einverständnis über das logisch Zusammengesetzte durch Definition leicht erreichbar. Da bei den Urelementen diese nicht möglich sind, muß hier etwas anderes eintreten; ich nenne es Erläuterung. Diese dient also den Zwecken der Verständigung der Forscher untereinander und der Mitteilung der Wissenschaft. Man kann sie einer Propädeutik zuweisen. Im System der Wissenschaft hat sie keine Stelle; in diesem wird kein Schluß auf sie gegründet. Jemand, der nur für sich forschte, brauchte sie nicht. Der Zweck der Erläuterungen ist ein praktischer, und wenn dieser erreicht ist, muß man mit ihnen zufrieden sein. Dabei muß auf etwas guten Willen, auf entgegenkommendes Verständnis, auf Erraten gerechnet werden können; denn ohne eine Bildlichkeit des Ausdrucks wird oft nicht auszukommen sein. Aber von dem Urheber einer Erläuterung kann man immerhin verlangen, daß er selbst bestimmt wisse, was er meine, daß er mit sich selbst im Einklange bleibe und daß er, wenn sich die Möglichkeit eines Mißverstehens auch bei gutem Willen ergibt, bereit sei, seine Erläuterung zu vervollständigen und zu verbessern. Da ohne gegenseitiges Verständnis der Forscher ein Zusammenarbeiten an der Wissenschaft nicht möglich ist, muß man das Vertrauen haben, daß ein solches Verständnis durch Erläuterungen erreicht werden kann, obwohl theoretisch das Gegenteil nicht ausgeschlossen ist". (KS, S. 288, aus GLGI.)

In dem nachgelassenen Aufsatz „Logik in der Mathematik" heißt es dazu:

„Von den eigentlichen Definitionen sind die Erläuterungen zu unterscheiden. Wenn wir die Wissenschaft beginnen, können wir nicht vermeiden, die Wörter unserer Sprache zu gebrauchen. Aber diese Wörter sind meist für wissenschaftliche Zwecke nicht recht geeignet, weil sie nicht bestimmt genug und schwankend im Gebrauche sind. Die Wissenschaft bedarf der Kunstausdrücke, die ganz bestimmte und feste Bedeutungen haben; und um sich über diese Bedeutungen zu verständigen und mögliche Mißverständnisse auszuschließen, wird man Erläuterungen geben. Freilich kann man auch dabei nur wieder Wörter der Sprache gebrauchen, die vielleicht ähnliche Mängel zeigen, wie die sind, denen die Erläuterung abhelfen sollte. So scheinen denn wieder neue Erläuterungen nötig zu werden. Theoretisch betrachtet kommt man so eigentlich nie ans Ziel; praktisch gelingt es doch, sich über die Bedeutungen der Wörter zu verständigen. Freilich muß man dabei auf ein verständnisvolles Entgegenkommen, auf ein Erraten dessen, was man im Auge hat, rechnen können. Alles dieses aber geht dem Aufbau des Systems voraus, gehört nicht ins System. Bei dem Aufbau selbst muß vorausgesetzt werden, daß die Wörter bestimmte und bekannte Bedeutungen haben". (N, S. 224. Vgl. dazu auch BW, S. 63 und GLGI, S. 287–290.)

2) Nominaldefinitionen vs. Analysen

Beim Aufbau einer Theorie

„kann dieselbe Gruppe von Zeichen, seien es nun Laute oder Lautverbindungen oder Schriftzeichen, wiederholt auftreten, und man wird dadurch veranlaßt, für diese Gruppe ein einfaches Zeichen einzuführen durch die Festsetzung, daß dieses einfache Zeichen immer anstelle jener Gruppe stehen solle. Wie der Satz im allgemeinen ein zusammengesetztes Zeichen ist, so ist auch der Gedanke, den er ausdrückt, zusammengesetzt; und zwar so, daß Teile des Gedankens Teilen des Satzes entsprechen. So wird im allgemeinen auch eine Gruppe von Zeichen, die in einem Satze vorkommt, einen Sinn haben, der Teil des Gedankens ist. Wenn nun für eine solche Zeichengruppe ein einfaches Zeichen, wie eben gesagt, eingeführt wird, so ist eine solche Festsetzung eine Definition. Das einfache Zeichen erhält dadurch einen Sinn, nämlich denselben, den die Zeichengruppe hat. Durchaus notwendig für das System ist die Definition nicht. Man könnte überall die Zeichengruppe beibehalten. Durch die Einführung des einfachen Zeichens wird inhaltlich nichts hinzugefügt; nur der Ausdruck wird einfacher, handlicher gemacht. Die Definition hat also eigentlich nur mit den Zeichen zu tun. Das einfache Zeichen wollen wir das erklärte, die zusammengesetzte Zeichengruppe, für die es gesetzt worden ist, wollen wir den erklärenden Ausdruck nennen. Das erklärte Zeichen soll seinen Sinn nur durch den erklärenden Ausdruck erhalten. Er wird aufgebaut aus den Sinnen der Teile des erklärenden Ausdrucks. Die Erläuterung baut den Sinn eines Zeichens nicht in dieser Weise aus einfacheren Bestandteilen auf, sondern behandelt ihn als einfach; sie wehrt nur bei mehrdeutigen Ausdrücken Mißverständnisse ab. Nachdem nun durch eine Definition einem Zeichen eine Bedeutung gegeben worden ist, hat es diese nunmehr; und die Definition geht in einen Satz über, in dem eine Identität behauptet wird. Freilich enthält er eigentlich nur eine Tautologie, die unsere Erkenntnis nicht erweitert. Er enthält eine Wahrheit, die so selbstverständlich ist, daß sie inhaltleer erscheint; und doch wird sie im Aufbau des Systems scheinbar als Prämisse gebraucht. Ich sage scheinbar; denn was sich dabei in der Form eines Schlusses darstellt, bringt keine neue Erkenntnis zustande, sondern bewirkt im Grunde nur eine Änderung des Ausdrucks, auf die man verzichten könnte, wenn nicht eben die Vereinfachung des Ausdrucks wünschenswert erschiene. In der Tat darf nicht erst durch eine Definition eine Wahrheit bewiesen werden können, die ohne sie unbeweisbar wäre. Wo wirklich das, was sich als eine Definition darstellt, den Beweis einer Wahrheit erst möglich macht, haben wir keine reine Definition, sondern es muß in ihr etwas stecken, was entweder als Theorem bewiesen oder als Axiom anerkannt werden müßte. Freilich kann es scheinen, als ob eine Definition einen Beweis erst möglich machen könnte. Man muß dabei aber zwischen dem Satze und dem darin ausgedrückten Gedanken unterscheiden. Wenn in einem Satze der erklärende Ausdruck vorkommt und wir ersetzen ihn durch das erklärte Zeichen, so ändert sich im Gedanken gar nichts. Wir erhalten dann zwar einen anderen Satz, aber nicht einen anderen Gedanken. Wenn wir diesen Gedanken so beweisen wollen, daß er in der Form des zweiten Satzes erscheinen solle, bedürfen wir dazu freilich der Definition. Aber wenn der Gedanke überhaupt bewiesen werden kann, kann er auch so bewiesen werden, daß er in der Form des ersten Satzes erscheint, und dann braucht man die Definition nicht. Wenn man also als das, was bewiesen wird, den Satz annimmt, kann die Definition wesentlich sein, nicht aber, wenn man den Gedanken als das zu Beweisende ansieht". (N, S. 224 f.)

Frege setzt hier also Definitionen mit *Nominaldefinitionen* gleich und spricht die Prinzipien der *Eliminierbarkeit* definierter Ausdrücke und der *Nichtkreativität* von Definitionen aus. Diese Grundsätze kann man so formulieren:

1) Aus jedem Satz müssen sich alle definierten Ausdrücke durch Ersetzung durch die sie definierenden Ausdrücke eliminieren lassen.

Denn sind definierte Zeichen lediglich Abkürzungen, so müssen sie grundsätzlich entbehrlich sein, sich also in allen Kontexten sämtlich so ersetzen lassen, daß der neue Satz mit dem alten analytisch äquivalent ist.

2) Jeder beweisbare Satz, der ein definiertes Zeichen nicht enthält, muß sich auch ohne Rückgriff auf dessen Definition beweisen lassen.

Denn aus Definitionen als sprachlichen Festlegungen dürfen keine neuen Sachbehauptungen folgen.

Eine bevorzugte Zielscheibe von Freges Kritik waren die *schöpferischen Definitionen*, also kreative Definitionen, wie z. B. „i sei die Zahl, die mit sich selbst multipliziert -1 ergibt". Hier wäre zu zeigen, daß es genau eine solche Zahl gibt, was im Bereich der reellen Zahlen nicht gilt. Durch bloße Definitionen kann man einen gegebenen Bereich von Zahlen nicht erweitern (vgl. dazu auch GGAII, S. 142 ff.).

Dem Einwand, daß solche Nominaldefinitionen wegen ihrer Eliminierbarkeit ohne wissenschaftliches Interesse seien, während eine Definition doch tatsächlich oft einen Fortschritt in der Wissenschaft bedeute, hält Frege entgegen:

„Die logische Unwichtigkeit ist noch keineswegs eine psychologische. Wenn wir unsere geistige Arbeit, wie sie wirklich vor sich geht, betrachten, finden wir, daß keineswegs immer ein Gedanke in allen seinen Teilen klar in unserem Bewußtsein steht. Wenn wir z. B. das Wort „Integral" gebrauchen, sind wir uns dann immer alles dessen bewußt, was zum Sinne dieses Wortes gehört? Ich glaube, nur in ganz seltenen Fällen. Meistens wird nur das Wort in unserem Bewußtsein sein, allerdings verbunden mit dem mehr oder weniger dunklen Wissen, daß dieses Wort ein Zeichen ist, das einen Sinn hat, und daß wir uns auch an diesen Sinn erinnern können, wenn wir wollen. Aber mit dem Bewußtsein, es zu können, begnügen wir uns meistens. Wenn wir uns an alles, was zum Sinne dieses Wortes gehört, erinnern wollten, kämen wir nicht vorwärts. Unser Bewußtsein ist eben nicht umfassend genug. Wir haben oft ein Zeichen nötig, mit dem wir einen sehr zusammengesetzten Sinn verbinden. Dieses Zeichen dient uns sozusagen als Gefäß, in dem wir diesen Sinn mit uns führen können, immer in dem Bewußtsein, daß wir dieses Gefäß öffnen können, wenn wir seines Inhaltes bedürfen sollten. Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß der Gedanke, wie ich das Wort verstehe, keineswegs zusammenfällt mit einem Inhalte meines Bewußtseins. Wenn wir demnach solche Zeichen nötig haben, in denen wir sozusagen einen sehr zusammengesetzten Sinn wie in einem Gefäße bergen, so brauchen wir auch Definitionen, mit denen wir diesen Sinn in das Gefäß füllen, mit denen wir andererseits diesen Sinn auch wieder hervorholen können. Wenn demnach die Definitionen, logisch betrachtet, eigentlich ganz unwesentlich sind, so haben sie doch große Wichtigkeit für das Denken, wie es bei uns Menschen wirklich abläuft". (N, S. 225f.)

Von Definitionen als *Festlegungen* über die Bedeutung von Ausdrücken, die bisher noch keine Bedeutung hatten, sind Begriffs- (oder Bedeutungs-) *Analysen* zu unterscheiden, die *Behauptungen* über die Bedeutung von Ausdrücken sind:

„Wir haben also *zwei ganz verschiedene* Fälle zu unterscheiden. 1. Wir bauen einen Sinn aus seinen Bestandteilen auf und führen ein ganz neues einfaches Zeichen ein, um diesen Sinn auszudrücken. Man kann dies „aufbauende Definition" nennen; wir wollen es aber lieber „Definition" schlechtweg nennen. 2. Schon längst ist ein einfaches Zeichen in Gebrauch gewesen. Wir glauben seinen Sinn logisch zerlegen zu können und erhalten einen zusammengesetzten Ausdruck, von dem wir meinen, daß er denselben Sinn ausdrücke wie jener. Als Bestandteil eines zusammengesetzten Ausdrucks lassen wir nur etwas gelten, was selbst einen anerkannten Sinn hat. Der Sinn dieses zusammengesetzten Ausdrucks muß sich aus seiner Zusammensetzung ergeben. Daß er mit dem des längst gebräuchlichen einfachen Zeichens übereinstimme, ist nicht Sache einer willkürlichen Festsetzung, sondern kann nur durch unmittelbares Einleuchten erkannt werden. Man spricht hier auch wohl von Definition. Zum Unterschied vom ersten Falle könnte man „zerlegende Definition" sagen. Besser aber ist es, hier das Wort „Definition" ganz zu vermeiden, weil das, was man hierbei Definition nennen möchte, eigentlich als Axiom aufzufassen ist. In diesem zweiten Falle bleibt für eine willkürliche Festsetzung kein Raum, weil das einfache Zeichen schon einen Sinn hat. Nur einem Zeichen, das noch keinen Sinn hat, kann willkürlich ein Sinn beigelegt werden". (N, S. 227, vgl. dazu auch KS, S. 290.)

Auf *Explikationen* ist Frege nicht näher eingegangen (vgl. nur N, S. 228). Eine Explikation ist eine Präzisierung eines Wortes der Alltagssprache zu wissenschaftlichen Zwecken. Als gebräuchliches Wort hat es bereits eine Bedeutung, die aber für seine geplanten Verwendungen nicht scharf genug bestimmt ist oder nicht genau das Gemeinte trifft. Eine Explikation steht daher zwischen Definition und Bedeutungsanalyse: Sie ist eine Festsetzung, für die es aber im Gegensatz zur Nominaldefinition Adäquatheitskriterien gibt. Die Neubestimmung muß z. B. im wesentlichen den alten Sinn bewahren.

3) Grundforderungen an Definitionen

Freges erste Grundforderung an Definitionen ist ihre *Freiheit*: Für ihre Zulässigkeit darf kein Beweis erforderlich sein[2]. Das ergibt sich für ihn direkt aus dem Charakter der Nominaldefinition als Bedeutungsfestsetzung:

„Jede Definition enthält ein Zeichen (einen Ausdruck, ein Wort), das vorher noch keine Bedeutung hatte, dem erst durch die Definition eine Bedeutung gegeben wird. Nachdem dies geschehen ist, kann man aus der Definition einen selbstverständlichen Satz machen, der wie ein Axiom zu gebrauchen ist. Es ist aber daran festzuhalten, daß in der Definition nichts behauptet, sondern etwas festgesetzt wird. Es darf also nie etwas als Definition hingestellt werden, was eines Beweises oder sonst einer Begründung seiner Wahrheit bedarf". (BW, S. 62.)

[2] Pascal spricht schon von „définition libre", vgl. das Zitat in der Anmerkung der Hg. zu N, S. 227.

„Es ist überhaupt eine solche Weise des Definierens zu verwerfen, bei welcher die Rechtmäßigkeit einer Definition von einem vorher zu führenden Beweise abhängig wird; denn dadurch wird es außerordentlich erschwert, die Strenge der Beweisführung nachzuprüfen, weil dann bei jeder Definition eine Untersuchung nötig ist, ob vor ihrer Aufstellung irgendwelche Sätze zu beweisen seien; eine Untersuchung, die dann doch fast immer unterbleibt". (GGAII, S. 73.)

Die zweite Grundforderung Freges ist, daß definierte Ausdrücke in allen Kontexten, in denen sie nach den grammatikalischen Regeln auftreten können, eine Bedeutung haben müssen. Sie dürfen also nicht nur für spezielle Verwendungen erklärt sein. Alle in der Wissenschaft verwendeten Termini müssen nach Frege eine wohlbestimmte, selbständige Bedeutung haben, und daraus folgt, daß sie auch *unbeschränkt verwendet* werden dürfen. (Das verträgt sich schlecht mit dem Kontextprinzip, von dem wir aber schon sahen, daß es bei Frege eine insgesamt untergeordnete Rolle spielt.)

4) Grundsatz der Vollständigkeit

In GGAII formuliert Frege zwei Grundsätze des Definierens, als notwendige (und hinreichende) Kriterien für korrekte Definitionen. Sie ergeben sich aus den Grundforderungen nach (3). Durch Anwendung auf eine begriffsschriftliche Sprache resultieren dann wiederum spezielle Definitionskriterien für solche Sprachen, die er in GGAI erörtert.

Der erste Grundsatz der *Vollständigkeit* ergibt sich aus der Forderung der unbeschränkten Verwendbarkeit, angewandt auf einstellige Prädikate – für mehrstellige Prädikate und Funktionsausdrücke gilt Entsprechendes. Er deckt sich mit Freges Forderung der Vollständigkeit für Begriffe (vgl. 6.5) und seinem Kriterium für die Bedeutung von Prädikaten (vgl. 7.3).

„Eine Definition eines Begriffes (möglichen Prädikates) muß vollständig sein, sie muß für jeden Gegenstand unzweideutig bestimmen, ob er unter den Begriff falle (ob das Prädikat mit Wahrheit von ihm ausgesagt werden könne) oder nicht. Es darf also keinen Gegenstand geben, für den es nach der Definition zweifelhaft bliebe, ob er unter den Begriff fiele, wenn es auch für uns Menschen bei unserm mangelhaften Wissen nicht immer möglich sein mag, die Frage zu entscheiden". (GGAII, S. 69.)

Daraus ergibt sich das *Verbot des stückweise Definierens.*

„Dies besteht darin, daß man die Definition für einen besonderen Fall gibt – z. B. für den der positiven ganzen Zahlen – und von ihr Gebrauch macht, dann nach manchen Lehrsätzen eine zweite Erklärung folgen läßt für einen anderen Fall – z. B. für den der negativen ganzen Zahlen und der Null – wobei dann oft noch der Fehler gemacht wird, für den schon erledigten Fall noch einmal Bestimmungen zu treffen. Wenn man nun auch tatsächlich Widersprüche vermeiden wird, so schließt man sie doch durch die Methode nicht grundsätzlich aus. Meistens gelangt man auch nicht zu einem Abschlusse, sondern läßt Fälle übrig, für die man keine Bestimmung trifft; und Manche sind so naiv, auch in diesen Fällen das Wort oder Zeichen zu gebrauchen, als ob sie ihm eine Bedeutung beigelegt hätten. Ein solches stückweises Definieren ist zu vergleichen dem Verfahren, die Grenzlinie eines Flächenstückes in Absätzen zu ziehen, ohne sie vielleicht je in sich zurücklaufen zu lassen. Der Hauptfehler aber ist der, daß man das Zeichen (Wort) schon, bevor man es vollständig erklärt hat, benutzt zu Lehrsätzen, vielfach auch zur weiteren Fortsetzung der Erklärung selbst. Ehe ein Wort oder Zeichen seiner Bedeutung nach nicht vollständig erklärt oder sonst bekannt ist, darf es in einer strengen Wissenschaft nicht gebraucht werden, am wenigsten aber dazu, seine eigene Erklärung weiter fortzuführen". (GGAII, S. 70.)

Der einfachste Fall einer stückweisen Definition liegt vor, wenn man setzt

$$(*)\ F(x) := \begin{cases} G_1(x) \text{ für } x\varepsilon A_1 \\ \vdots \\ G_n(x) \text{ für } x\varepsilon A_n \end{cases}$$

Gilt (a) $A_i \cap A_k = \Lambda$ für $i \neq k$ ($i, k = 1, \ldots, n$) und
(b) $A_1 \cup \ldots \cup A_n = V$,
d. h. bilden die A_i eine disjunkte und vollständige Zerlegung des gesamten Gegenstandsbereiches, so kann man zu einer korrekten Definition
$F(x) := G_1(x) \wedge x\varepsilon A_1 \vee \ldots \vee G_n(x) \wedge x\varepsilon A_n$
übergehen; ein stückweises Definieren ist dann also unnötig. Gilt dagegen (a) nicht und ist z. B. $A_1 \cap A_2 \neq \Lambda$, so ist zu zeigen $\bigwedge x(x\varepsilon A_1 \wedge x\varepsilon A_2 \supset G_1(x) \equiv G_2(x))$ (α). Die Zulässigkeit der Definition (*) wäre also zu beweisen, und das widerspricht dem Grundprinzip der Freiheit der Definition. Gilt (α), so kann man zudem die Bedingung „$F(x) = G_2(x)$ für $x\varepsilon A_2$" durch „$F(x) = G_2(x)$ für $x\varepsilon A_2 - A_1$" ersetzen. Gilt (b) nicht, so ist der Grundsatz der Vollständigkeit verletzt.

Ein Beispiel für den Fall, den Frege am Ende des letzten Zitats erwähnt, liegt vor bei einer Definition der Addition von Brüchen nach dem Schema

$$\frac{x}{y} + \frac{u}{v} := \frac{x \cdot v + y \cdot u}{y \cdot v}.$$

Hier kommt das Zeichen + für die Addition von ganzen Zahlen im Definiens vor, so daß man im Definiendum ein anderes Zeichen verwenden müßte. Frege sagt dazu:

„Man sollte es doch als ganz selbstverständlich ansehen, daß man ein Wort nicht durch sich selbst erklären darf, weil man es dann in einem Atem als bekannt und als unbekannt behandelt. Wenn es bekannt ist, so ist eine Erklärung mindestens überflüssig, wenn es aber nicht bekannt ist, kann es nicht zur Erklärung dienen". (GGAII, S. 72.)

Frege verbietet auch *mehrfache Definitionen* desselben Zeichens, die sich ebenfalls unter das Schema (*) subsumieren lassen:

„Ich verwerfe die Vielfachheit der Definitionen für dasselbe Zeichen aus folgendem Grunde. Nehmen wir an, es lägen zwei Definitionen vor, die beide demselben Zeichen eine Bedeutung beilegen. Dann sind nur zwei Fälle denkbar: entweder geben beide dem Zeichen dieselbe Bedeutung, oder nicht. Im ersten haben wir wieder zwei Möglichkeiten: entweder beide Definitionen verleihen dem Zeichen denselben Sinn, besagen ganz dasselbe, oder nicht. Im ersten Falle ist eine von beiden überflüssig, im andern wäre zu beweisen, daß sie dem Zeichen dieselbe Bedeutung zuteilen, obwohl sie ihm verschiedenen Sinn geben. Man müßte etwa eine von beiden als Definition stehen lassen, die andere in einen Lehrsatz verwandeln und beweisen. Um diesen Beweis betrügt man den Leser, indem man als Definition hinstellt, was ein Lehrsatz sein sollte. Wenn endlich die Definitionen demselben Zeichen verschiedene Bedeutung geben, nicht nur verschiedenen Sinn, so widersprechen sie einander, und eine von beiden muß weichen". (BW, S. 182.)
„Und es ist überdies so leicht, mehrfache Erklärungen desselben Zeichens zu vermeiden. Statt es zuerst für ein beschränkteres Gebiet zu erklären und es dann zu benutzen, um es selbst für ein weiteres Gebiet zu erklären, statt also zweimal das gleiche, braucht man ja nur verschiedene Zeichen zu wählen, indem man die Bedeutung des ersten endgültig auf das engere Gebiet einschränkt, so daß nun auch die erste Definition vollständig ist und scharfe Grenzen zieht. Dann ist die logische Beziehung zwischen den Bedeutungen der beiden Zeichen nicht irgendwie präjudiziert und mag untersucht werden, ohne daß durch den Ausfall dieser Untersuchung die Rechtmäßigkeit der Definitionen in Frage gestellt werden kann. Es ist doch wahrhaftig der Mühe wert, ein neues Zeichen zu erfinden, wenn dadurch nicht geringe logische

Bedenken gehoben und die Strenge der Beweise gesichert werden kann. Aber der Sinn für die logische Reinlichkeit und Genauigkeit scheint bei manchen Mathematikern so gering zu sein, daß sie lieber ein Wort in drei oder vier Bedeutungen gebrauchen, als den ungeheuren Entschluß fassen, ein neues Wort zu erfinden". (GGAII, S. 73 f.)

Aus dem Grundsatz der Vollständigkeit folgt auch das *Verbot bedingter Definitionen*: Diese fallen entweder auch unter das Schema (*), oder man kann sie so darstellen:

$$(**)\quad \begin{array}{l} \text{Gilt } x\varepsilon A_1\text{, so soll gelten } Fx \equiv G_1x \\ \vdots \\ \text{Gilt } x\varepsilon A_n\text{, so soll gelten } Fx \equiv G_nx. \end{array}$$

Das läuft aber auf dasselbe hinaus wie (*). Ein Beispiel dafür ist die Erklärung der Division nur für Divisoren, die von 0 verschieden sind.

5) Grundsatz der Einfachheit des Definiendums

Aus der Forderung der Freiheit folgt, daß das Definiendum einfach sein muß, d. h. (außer Variablen) nur das zu definierende Zeichen (den zu definierenden Ausdruck) enthalten darf:

„Daß durch die Bedeutung eines Ausdrucks und eines seiner Teile die Bedeutung des übrigen Teils nicht immer bestimmt ist, leuchtet ein. Man darf also ein Zeichen oder Wort nicht dadurch erklären, daß man einen Ausdruck erklärt, in dem es vorkommt, während die übrigen Teile bekannt sind. Denn es wäre erst eine Untersuchung nötig, ob die Auflösung für die Unbekannte – ich bediene mich eines wohl verständlichen algebraischen Bildes – möglich sei, und ob die Unbekannte eindeutig bestimmt werde. Es ist aber, wie oben schon gesagt, untunlich, die Rechtmäßigkeit einer Definition von dem Ausfall einer solchen Untersuchung abhängig zu machen". (GGAII, S. 79.)

Aus diesem Grundsatz der Einfachheit folgt insbesondere das Verbot von *Kontextdefinitionen*. Ein Beispiel für eine fehlerhafte Kontextdefinition hat Peano angegeben:

$\frac{x}{y} * \frac{u}{v} := \frac{x+u}{y+v}$. Hier kommt im Definiendum neben dem zu definierenden Zeichen * der bereits definierte Bruchstrich vor. Aus der Definition ergibt sich z. B. folgender Widerspruch:

$\frac{3}{4} * \frac{5}{3} = \frac{8}{7}$ und $\frac{6}{8} * \frac{5}{3} = \frac{11}{11} = 1$. Nun ist aber $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, so daß wir den falschen Satz $\frac{8}{7} = 1$ erhalten.

Bei einer Kontextdefinition mit dem Definiendum A[F] ist zu zeigen, daß es einen und nur einen Begriff F dieser Art gibt. Kann man das aber zeigen, so kann man (in einer hinreichend starken Logik) auch eine Definition nach dem Grundsatz der Einfachheit angeben, nämlich $F := \iota f A[f]$. Kontextdefinitionen sind also überflüssig oder unkorrekt. Ebenso argumentiert man im Fall, daß das Definiendum zwei oder mehr neue Ausdrücke enthält.

Definitionen, die den Grundsätzen der Vollständigkeit und der Einfachheit genügen, nennt man *Explizitdefinitionen.* Nur solche Definitionen sind also nach Frege korrekt.

6) Exkurs

Frege hat gezeigt, daß Explizitdefinitionen eliminierbar und nicht kreativ sind. Die übrigen Bemerkungen zum Verhältnis der Definitionskriterien finden sich bei ihm hingegen nicht, haben also den Charakter eines Exkurses.

Wir setzen eine formale Sprache S_o voraus wie etwa jene der BS ($\mathfrak{B}$) oder die der GGA ($\mathfrak{G}$), die aber auch nichtlogische Konstanten enthalten kann. Durch Einführung neuer Konstanten der Menge Z werde S_o zu S erweitert. Die Konstanten von S_o zählen also als Grundterme von S, jene aus Z sind die definierten Terme. Der Satz, der aus einer Explizitdefinition des Ausdrucks X hervorgeht, in dem wir das Zeichen := je nach Kategorie von Definiens und Definiendum durch = oder ≡ ersetzen, nennt man *Definitionsformel* für X. Ist a z. B. ein Name, so erhält man aus $a := s$ die Definitionsformel $a = s$. Ist F ein n-stelliges Funktions- (bzw. Prädikat-)zeichen 1. Stufe und sind $a_1, \ldots, a_n$ Gegenstandskonstanten (oder freie Gegenstandsvariablen), so erhält man aus $F(a_1, \ldots, a_n) := A[a_1, \ldots, a_n]$ die Definitionsformel $F(a_1, \ldots, a_n) = A[a_1, \ldots, a_n]$ bzw. $F(a_1, \ldots, a_n) \equiv A[a_1, \ldots, a_n]$. Das ist äquivalent mit $\wedge x(F(x_1, \ldots, x_n) = A[x_1, \ldots, x_n])$. Da wir im folgenden aber nicht nur von Explizitdefinitionen sprechen, wollen wir als Definitionsformel für ein oder mehrere Zeichen jenen Satz bezeichnen, der, als wahr postuliert, die Bedeutungen dieser Zeichen festlegen soll.

Mit D(Z) bezeichnen wir die Konjunktion aller Definitionsformeln für die Konstanten aus Z, mit $\Vdash$ die logische Folgebeziehung. Ist $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$, so schreiben wir statt D(Z) auch $D[z_1, \ldots, z_n]$.

Das Kriterium der *Eliminierbarkeit* läßt sich dann so formulieren:

E) Zu jedem Satz A von S, der Konstanten aus Z enthält, gibt es einen Satz B von S_o, so daß gilt $D(Z) \Vdash A \equiv B$.

Das Kriterium der *Nichtkreativität* (für alle Definitionen in S) besagt:

N) Ist B ein Satz von S_o und gilt $D(Z) \Vdash B$, so gilt auch $\Vdash B$, d. h. B ist analytisch wahr.

(Daraus folgt: Sind $A_1, \ldots, A_n$, B Sätze aus S_o und gilt $A_1, \ldots, A_n, D(Z) \Vdash B$, so auch $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$.)

Als drittes Kriterium betrachten wir das der *Vollständigkeit*. Danach müssen die Konstanten aus Z so eingeführt werden, daß ihre Extension eindeutig bestimmt ist. Es soll also gelten: Alle Interpretationen V und V′, die D(Z) erfüllen und bis auf höchstens die Konstanten aus Z übereinstimmen, stimmen vollständig überein. Und das gilt genau dann, wenn gilt:

V) $\bigvee x_1 \ldots x_n \bigwedge y_1 \ldots y_n (D[y_1, \ldots, y_n] \equiv y_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge y_n = x_n)$.

Es gilt nun:

1) D(Z) ist vollständig genau dann, wenn aus D(Z) für alle Konstanten aus Z explizite Definitionsformeln folgen, deren Definientia Ausdrücke von S_o sind.

Wir beweisen den Satz hier für einstellige Prädikatkonstanten F aus Z. Gibt es für ein F aus Z ein Prädikat A[x] von S_o mit $D(Z) \Vdash \bigwedge x(F(x) \equiv A[x])$, so gilt für alle Interpretationen V, V′, die D(Z) erfüllen und sich höchstens in den Werten V(F), V′(F) unterscheiden, auch $V(F) = V'(F)$. Ist umgekehrt D(Z) vollständig, so ist $z_1 := \iota x_1 \bigvee x_2 \ldots x_n D[x_1, \ldots, x_n]$ eine Explizitdefinition von z_1, die aus D(Z) folgt, und Analoges gilt für $z_2, \ldots, z_n$.

2) Aus D(Z) folgen für alle $z \varepsilon Z$ explizite Definitionsformeln mit Definientia aus S_o genau dann, wenn D(Z) das Kriterium der Eliminierbarkeit erfüllt.

Die Implikation von links nach rechts ist trivial. Die Umkehrung beweist man im Fall einer einstelligen Prädikatkonstanten F so: Ist F eliminierbar, so gibt es für jede Gegenstandskonstante a aus S_o, die in D(Z) nicht vorkommt, nach E einen Satz A[a] von S_o, so daß gilt $D(Z) \Vdash Fa \equiv A[a]$. Dann gilt aber auch $D(Z) \Vdash \bigwedge x(Fx \equiv A[x])$, so daß für F aus D(Z) eine Explizitdefinition für Z folgt.

V und E sind daher äquivalent.

Aus der Vollständigkeit folgt nicht die Nichtkreativität: Ist z. B. $Z = \{F\}$ und $D(Z)$ der Satz $Fa \wedge \bigwedge x(Fx \equiv Gx)$, so daß G und a aus S_o sind, so gilt $D(Z) \Vdash \bigwedge x(Fx \equiv Gx)$, aber Fa, das aus $D(Z)$ folgt, ist ohne $D(Z)$ nicht beweisbar. Aus der Nichtkreativität von $D(Z)$ folgt umgekehrt auch nicht die Vollständigkeit: $D(Z) = \bigvee xGx$ ist z. B. nichtkreativ, da $\bigvee xG(x) \Vdash B$ für einen Satz B von S_o genau dann gilt, wenn $\bigvee fxf(x) \Vdash B$ gilt; der Satz $\bigvee fxf(x)$ ist aber logisch wahr. Aus $D(Z)$ folgt hingegen keine Explizitdefinition von G in S_o.

3) $D(Z)$ ist vollständig und nichtkreativ genau dann, wenn $D(Z)$ logisch äquivalent ist mit einer Konjunktion von expliziten Definitionsformeln $D_i(z_i)$ $(1 \leq i \leq n)$, deren Definiens jeweils ein Ausdruck von S_o ist.

Die Implikation von rechts nach links ergibt sich aus (1) und der Nichtkreativität expliziter Definitionen: Gilt z. B. $\bigwedge x(Fx \equiv A[x]) \Vdash B$, wo F nicht in B vorkommt, so gilt ja $\bigvee f \bigwedge x(fx \equiv A[x])) \Vdash B$, und da die Prämisse eine Tautologie ist, die aus $\bigwedge x(A[x] \equiv A[x])$ folgt, gilt also auch $\Vdash B$. Ist umgekehrt $D(Z)$ vollständig, so folgen aus $D(Z)$ nach (1) explizite Definitionsformeln $D_i(z_i)$, so daß gilt $\Vdash D(Z) \supset D_1(z_1) \wedge \ldots \wedge D_n(z_n)$. Mit der Nichtkreativität, also mit $\Vdash \bigvee x_1 \ldots x_n D[x_1, \ldots, x_n]$ folgt dann $\Vdash \bigvee x_1 \ldots x_n(D[x_1, \ldots, x_n] \wedge D_1[x_1] \wedge \ldots \wedge D_n[x_n])$. Nun gilt aber für alle i $\bigvee! z_i D_i[z_i]$, also gilt auch $\Vdash \bigwedge x_1 \ldots x_n(D_1[x_1] \wedge \ldots \wedge D_n[x_n] \supset D[x_1, \ldots, x_n])$, d. h. $\Vdash D_1[z_1] \wedge \ldots \wedge D_n[z_n] \supset D[z_1, \ldots, z_n]$.

Zusammenfassend kann man also sagen: Explizitdefinitionen und nur sie erfüllen beide Kriterien V (und damit auch E) und N. Freges Beschränkung auf Explizitdefinitionen ist also notwendig und hinreichend für Definitionen, die im Sinne der drei Kriterien E, N und V korrekt sind.

Wir haben hier Explizitdefinitionen für die Zeichen aus Z immer so aufgefaßt, daß ihr Definiens ein Ausdruck von S_o ist. Statt dessen kann man offensichtlich auch zulassen, daß es eine Folge $D_1(z_1)$, $\ldots$, $D_n(z_n)$ von Explizitdefinitionen gibt, so daß das Definiens von $D_i(z_i)$ von den Zeichen aus Z höchstens $z_1, \ldots, z_{i-1}$ enthält $(1 \leq i \leq n)$ – jenes von $D_1(z_1)$ soll kein Zeichen aus Z enthalten. Denn dann lassen sich aus dem Definiens von $D_i(z_i)$ schrittweise die Zeichen $z_{i-1}, z_{i-2}, \ldots$ durch Ersetzung durch ihr Definiens eliminieren.

7) Definitionsregeln für Logiksprachen

Frege hat für die formale Sprache der GGA auch Bedingungen dafür angegeben, wie Explizitdefinitionen zu formulieren sind, damit sie den generellen Anforderungen genügen. Übertragen auf die übliche Sprache L der P. L. 1. Stufe ergibt sich dabei etwa die Regel:

Eine n-stellige Prädikatkonstante F ist zu definieren in der Form

a) $F(a_1, \dots, a_n) := A[a_1, \dots, a_n]$.

Dabei sind $a_1, \dots, a_n$ Gegenstandskonstanten (bzw. freie Gegenstandsvariablen). Frege fordert nun: (1) In dem Satz $A[a_1, \dots, a_n]$ dürfen neben den Grundtermen von L nur solche Ausdrücke von L vorkommen, die bereits früher definiert worden sind. (2) $a_1, \dots, a_n$ sind n verschiedene Konstanten. (3) Der Satz $A[a_1, \dots, a_n]$ enthält nur die Konstanten $a_1, \dots, a_n$. Die Forderung (2) ist notwendig, denn durch $F(a, a) := A[a, a]$ würden für $a \neq b$ die Ausdrücke $F(a, b)$ nicht erklärt, so daß F nicht in allen Kontexten eliminierbar wäre. (3) ist wichtig, weil sich z. B. aus $F(a) := G(a, b)$ ergibt $\bigwedge xy(F(x) \equiv G(x, y))$. Die Korrektheit dieser Definition wäre im Widerspruch zum Freiheitsgrundsatz zu beweisen, d. h. es wäre zu zeigen, daß gilt (*) $\bigwedge xyz(G(x, y) \equiv G(x, z))$. Andernfalls erhielte man z. B. für $G(a, b) \wedge \neg G(a, c)$ $F(a) \wedge \neg F(a)$, also einen Widerspruch. Gilt aber (*), so kann man im Einklang mit (3) auch setzen: $F(a) := \bigvee yG(a, y)$. Kommen andererseits nicht alle Konstanten $a_1, \dots, a_n$ im Definiens vor, so kann sich zwar kein Widerspruch ergeben, denn aus $F(a, b) := G(a)$ folgt nur, daß $F(a, b)$ nicht von b abhängt, man kann dann aber auch die Definition im Sinne von (3) korrekt als $F(a, b) := G(a) \wedge b = b$ schreiben.

Aus (a) ergibt sich die Definitionsformel $F(a_1, \dots, a_n) \equiv A[a_1, \dots, a_n]$, die man auch in der äquivalenten generellen Form $\bigwedge x_1 \dots x_n (F(x_1, \dots, x_n) \equiv A[x_1, \dots, x_n])$ schreiben kann, wobei $x_1, \dots, x_n$ verschiedene Variablen sind.

Es ist freilich nicht zweckmäßig, nur Explizitdefinitionen zuzulassen. So kann man z. B. die Kontextdefinition des Kennzeichnungsoperators

b) $\iota xA[x] = a := \bigvee !xA[x] \wedge A[a] \vee \neg \bigvee !xA[x] \wedge a = d$

– d sei eine bestimmte Konstante von L – in L nicht in eine Explizitdefinition umformen. Diese Definition ist aber korrekt, denn es gibt genau eine Funktion, die einstelligen Begriffen Objekte zuordnet und die Definitionsformel erfüllt. Sie erfüllt auch die Kriterien E, N und V. Denn es gilt $B[\iota xA[x]] \equiv \bigvee y(\iota xA[x] = y \wedge B[y])$, und im rechten Ausdruck läßt sich der Term $\iota x A[x]$ nach (b) eliminieren. Folgt ferner aus (b) ein Satz B ohne Kennzeichnungsterme, so folgt B auch aus $\bigvee g \bigwedge fy(g(f)=y \equiv \bigvee!xfx \wedge fy \vee \neg\bigvee!xfx \wedge y=d)$, wir haben aber bereits gesehen, daß dieser Satz eine Tautologie ist. Nun haben wir zwar in (6) gezeigt, daß jede Definition, die E und N erfüllt, mit einer Explizitdefinition äquivalent ist, aber das gilt erstens nur in der höheren P. L. und zweitens muß man im Beweis entweder schon Kennzeichnungen benützen, oder die Formeln $\bigwedge f(\bigwedge x_1..x_n(F(x_1, \ldots, x_n) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)) \equiv A[f])$, bzw. $\bigwedge x_1..x_n y(G(x_1, \ldots, x_n)=y \equiv A[x_1, \ldots, x_n, y])$ oder $\bigwedge x(a=x \equiv A[x])$ als explizite Definitionsformeln ansehen, falls im 2. Fall gilt $\bigwedge x_1..x_n\bigvee!yA[x_1, \ldots, x_n, y]$ und im 3. Fall $\bigvee!xA[x]$. (F sei eine n-stellige Prädikatkonstante, G eine n-stellige Funktionskonstante, a eine Gegenstandskonstante.) Frege entgeht diesem Problem, indem er seinen Kennzeichnungsoperator $\varkappa$ als logisches Grundsymbol einführt.

9.2 Implizite Definitionen – Die Kontroverse mit Hilbert

Frege hat sich auch ausführlich mit dem Problem der impliziten Definitionen auseinandergesetzt. Den Anstoß dazu gab das Buch „Grundlagen der Geometrie“ (1899) von David Hilbert, in dem dieser ein Axiomensystem der Geometrie formulierte und dabei auf die traditionellen „Definitionen“ der in den Axiomen vorkommenden geometrischen Grundterme wie „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“ etc. verzichtete. In den „Elementen“ von Euklid heißt es: „Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Eine Linie ist breitenlose Länge. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat“ usf., und das kann man bestenfalls als Erläuterungen ansehen, aber nicht als Definitionen. Hilbert verzichtet nun auf jeden Definitions- oder Erläuterungsversuch und will die Grundbegriffe nur durch die Aussagen charakterisieren, die in den Axiomen von ihnen gemacht werden. Die Formulierung Hilberts, diese Begriffe würden durch die Axiome definiert, forderte den Protest Freges heraus. Er machte seine Einwände zunächst in einem Briefwechsel mit Hilbert geltend (vgl. BW, S. 60–79, vom Oktober 1895 bis zum September 1900), dann, als Hilbert im wesentlichen auf seiner Meinung beharrte, in den GLGI, II. Als A. Korselt in (1903) zu vermitteln versuchte, antwortete Frege noch einmal in den GLGIII. (Vgl. dazu auch N, S. 185 ff. und 229 f.)

Um Freges Auseinandersetzung mit Hilbert zu verstehen, muß man neben seiner Definitionstheorie auch seinen Axiomenbegriff vor Augen haben. Für ihn ist ein Axiom im traditionellen Sinn ein wahrer – also auch bedeutungsvoller – aber unbeweisbarer Satz:

„Von alters her nennt man Axiom einen Gedanken, dessen Wahrheit fest steht, ohne jedoch durch eine logische Schlußkette bewiesen werden zu können". (KS, S. 262.)

Frege fährt fort:

„Definitionen nennt man in der Mathematik wohl allgemein die Festsetzung der Bedeutung eines Wortes oder Zeichens. Die Definition unterscheidet sich von allen andern mathematischen Sätzen dadurch, daß sie ein Wort oder Zeichen enthält, das bis dahin keine Bedeutung hatte, nun aber durch sie eine bekommt. Alle andern mathematischen Sätze (axiomatische und Lehrsätze) dürfen keinen Eigennamen, kein Begriffswort, kein Beziehungswort oder Funktionszeichen enthalten, dessen Bedeutung nicht schon vorher feststände". (KS, S. 262 f.)

Axiome können also nach Frege unmöglich Definitionen oder Bestandteile von Definitionen sein. Sie sind Aussagen, keine Festsetzungen, und daher müssen alle in ihnen vorkommenden Ausdrücke erklärt sein. Das ist Freges erster Einwand gegen eine Auffassung von (axiomatischen) Theorien als Definitionen. Sein zweiter Einwand lautet:

„Wenn wir das Ganze der Erklärungen und Axiome des Herrn Hilbert überblicken, so erscheint es vergleichbar einem System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten; denn in einem Axiom kommen in der Regel mehrere der unbekannten Ausdrücke „Punkt", „Gerade", „Ebene", „liegen", „zwischen" usw. vor, so daß erst das Ganze, nicht einzelne Axiome oder Gruppen von solchen zur Bestimmung der Unbekannten genügen. Aber genügt dazu das Ganze? Wer sagt, daß dies System für die Unbekannten auflösbar sei, und daß diese eindeutig bestimmt seien? Wie würde die Lösung aussehen, wenn sie möglich wäre? Jeder der Ausdrücke „Punkt", „Gerade" usw. müßte einzeln erklärt sein in einem Satze, in dem sonst alle Wörter bekannt wären. Wenn eine solche Lösung des Hilbertschen Systems von Definitionen und Axiomen möglich wäre, müßte sie gegeben werden; aber sie ist wohl unmöglich". (KS, S. 268, vgl. a. S. 303.)

Das Problem, um das es bei diesem zweiten Einwand geht, läßt sich einfacher an den Peanoaxiomen für die Arithmetik verdeutlichen (vgl. dazu 4.5). Kann man behaupten, daß durch sie die in ihnen vorkommenden Grundterme N, 0 und $'$ definiert werden? Dem Postulat der Vollständigkeit würde die Konjunktion dieser Axiome nach Satz 1 aus 9.1, Punkt 6 nur dann genügen, wenn aus ihnen explizite Definitionsformeln für diese drei Zeichen folgen würden, wobei im Definiens nur logische Konstanten vorkommen dürften. Man hätte dann eine logische Begründung der Arithmetik, die direkt aus den Peanoaxiomen folgen würde. So eine Ableitung ist offenbar unmöglich, denn es gibt mehrere Modelle des Axiomensystems, in denen N für verschiedene Mengen, $'$ für verschiedene Funktionen und 0 für verschiedene Objekte steht. Analoges gilt für die theoretischen Terme in empirischen Theorien. Geht man von einer Grundsprache S aus (der „Beobachtungssprache") und führt in sie neue Konstanten $t_1, \ldots, t_n$ ein (als „theoretische Terme"), die in den Axiomen einer Theorie T vorkommen und nur durch sie festgelegt werden, so gilt: T läßt sich nur dann als Definition der theoretischen Terme ansehen, wenn aus T explizite Definitionsformeln für die t_i $(1 \leq i \leq n)$ folgen, deren Definiens ein Ausdruck von S ist; dann handelt es sich aber gerade nicht um theoretische Terme, sondern um in der Beobachtungssprache S definierbare Terme, also Beobachtungsterme. Der erste Einwand Freges besagt in diesem Fall: Sieht man T als Definition der t_i an, so ist T eine Festsetzung, keine empirische Behauptung. Die Theorie dürfte dann auch nicht kreativ sein, was sie als empirische Theorie gerade sein muß: Aus T sollen ja Sätze der Beobachtungssprache S folgen, die ohne Bezugnahme auf T nicht zu begründen sind. Auch die Peanoaxiome sind kreativ, denn aus ihnen folgt die Existenz unendlich vieler Objekte, die keine logische Tautologie (der P. L., in der sie formuliert sind) ist.

Schreiben wir $T[t_1, \ldots, t_n]$ für T, so ist der Ramsey-Satz von T: $R(T) := \bigvee x_1 \ldots x_n T[x_1, \ldots, x_n]$ (wo $x_1, \ldots, x_n$ passende Variablen sind) ein Satz von S (vorausgesetzt S enthält hinreichend starke logische Ausdrucksmittel, z. B. die Möglichkeit, über Begriffe oder Funktionen 1. Stufe zu quantifizieren). Dieser Satz hat also einen wohlbestimmten Wahrheitswert, da wir voraussetzen, daß S in bestimmter Weise interpretiert ist. Ist nun R(T) falsch, so gibt es keine Interpretation der t_i, die eine Erweiterung der gegebenen Interpretation von S ist und T erfüllt. Die „Definition" der t_i durch T ist also in ihrer Korrektheit abhängig von empirischen Voraussetzungen, was dem Freiheitspostulat widerspricht[3]. Im Fall der geometrischen oder arithmetischen Axiome wäre für die Korrektheit der Definition zu zeigen, daß es ein Modell der Axiome gibt. Kann man das aber tun, so kann man die geometrischen bzw. arithmetischen Grundbegriffe auch im Sinne dieses Modells deuten und dann die Wahrheit der Axiome beweisen, so wie das Frege im arithmetischen Fall getan hat. Das ist Freges dritter Einwand.

Er vergleicht Hilberts Axiomatik mit dem ontologischen Gottesbeweis. Im Sinne Hilberts könnte man sagen:

> „Erklärung. Wir denken uns Gegenstände, die wir Götter nennen. Axiom 1. Jeder Gott ist allmächtig. Axiom 2. Es gibt wenigstens einen Gott. Wäre dies zulässig, so wäre der ontologische Gottesbeweis glänzend gerechtfertigt". (KS, S. 269.)

In diesem Beispiel kann man aus den Axiomen nicht schließen, daß es Götter gibt; dazu wäre zunächst zu zeigen, daß sie erfüllbar sind, daß es also einen Begriff G gibt, so daß 1. alle G's allmächtig sind, und es 2. G's gibt (d. h. daß es allmächtige Wesen gibt). Kann man das aber zeigen, so braucht man diesen „ontologischen Gottesbeweis" nicht mehr, und man kann die Wahrheit der beiden Axiome beweisen, indem man „Gott" als „allmächtiges Wesen" erklärt.

Frege betont, daß bei Ableitungen aus den Axiomen die in ihnen neu eingeführten Terme wie Variablen fungieren und die Behauptung des abgeleiteten Satzes $B[t_1, \ldots, t_n]$ (wobei nicht alle t_i in B vorzukommen brauchen) immer als hypothetische Behauptung der Form: $\wedge x_1 \ldots x_n (T[x_1, \ldots, x_n] \supset B[x_1, \ldots, x_n])$ zu verstehen ist. Im Beispiel wäre also der Satz „Es gibt einen Gott" im Sinn der Tautologie zu verstehen: „Für alle Begriffe G gilt: Wenn alle G's allmächtig sind und es G's gibt, so gibt es G's". Frege schreibt an Hilbert:

[3] Nach einem Vorschlag von R. Carnap kann man die Theorie T in das Bedeutungspostulat $R(T) \supset T$ und die empirische Behauptung R (T) aufspalten, denn es gilt $T \equiv (R(T) \supset T) \wedge R(T)$. Gilt ferner für einen Satz B von S: $R(T) \supset T \Vdash B$, so gilt $R(R(T) \supset T) \Vdash B$, also $R(T) \supset R(T) \Vdash B$, also $\Vdash B$, so daß das Bedeutungspostulat jedenfalls nicht kreativ ist. Es legt aber nur im Fall der Wahrheit von R (T) etwas über die theoretischen Terme fest, und erfüllt nicht die Forderung der Vollständigkeit (und damit auch nicht jene der Eliminierbarkeit).

„Es scheint mir, daß Sie die Geometrie von der Raumanschauung ganz loslösen und zu einer rein logischen Wissenschaft gleich der Arithmetik machen wollen. Die Axiome, die sonst wohl als durch die Raumanschauung verbürgt, dem ganzen Baue zu Grunde gelegt werden, sollen, wenn ich Sie recht verstehe als Bedingungen in jedem Lehrsatz mitgeführt werden, zwar nicht im vollen Wortlaute ausgesprochen, aber als in den Wörtern „Punkt“, „Gerade“, usw. eingeschlossen.“ (BW, S. 70.)

In einer Rekonstruktion der Hilbertschen Axiomatik ersetzt Frege die Ausdrücke „Gerade“, „Punkt“, „Ebene“, „zwischen“ etc. dementsprechend durch freie Variable (A, α, Π, p, q), und sagt:

„Die Buchstaben ‚Π‘, ‚p‘ und ‚q‘ bedeuten weder etwas, noch sollen sie den einzelnen Pseudoaxiomen Allgemeinheit des Inhalts verleihen; daher drücken diese keine Gedanken aus, sondern sind für sich allein sinnlos. Darum füge ich das „Pseudo“ hinzu. Denn in den eigentlichen Grundsätzen muß man Gedanken haben. Die Buchstaben ‚Π‘, ‚p‘ und ‚q‘ sollen zwar auch eine Allgemeinheit bewirken; aber diese soll sich auf einen Lehrsatz erstrecken, von dem die Pseudoaxiome uneigentliche Bedingungssätze sind. Ein Vorteil, scheint mir, springt bei dieser Weise, die Hilbertschen Pseudoaxiome wiederzugeben, sofort in die Augen, nämlich daß niemand sich einbilden wird, er versteht ein solches Pseudoaxiom, er finde in ihm einen Gedanken ausgedrückt, während doch in Wahrheit nichts Wesentliches geändert ist dadurch, daß man statt der Ausdrücke „Punkt“, „liegen in“, „liegen auf“ Buchstaben gebraucht, sofern wenigstens diese Ausdrücke nichts bedeuten, sondern wie die Buchstaben einem reinen Lehrbegriffe, um mit Herrn Korselt zu reden, Allgemeinheit verleihen sollen. Wenn nun diese Pseudoaxiome in der Hilbertschen Fassung den Eindruck des Sinnvollen machen, so liegt das offenbar daran, daß wir von der Euklidischen Geometrie her gewohnt sind, mit jenen Wörtern „Punkt“, „liegen in“ usw. einen Sinn zu verbinden, und daß wir dies nicht, wie wir müßten, vergessen, wenn wir uns mit den Hilbertschen Grundlagen beschäftigen. In der Tat müssen wir uns hierbei auf den Standpunkt von Leuten stellen, die nie etwas von Punkten, Ebenen usw. gehört haben; und das gelingt uns schlecht. Viel besser gelingt es uns mit Zeichen, mit denen wir in der Tat noch keinen Sinn verbunden haben. Sachlich aber ist es einerlei“. (KS, S. 305 f., vgl. a. S. 307 f.)

Hilbert meinte, die Existenz des Modells für ein Axiomensystem sei durch einen Beweis seiner syntaktischen Widerspruchsfreiheit garantiert, Frege meinte umgekehrt: Nur durch den Beweis der Existenz eines Modells lasse sich die Widerspruchsfreiheit beweisen. Hilbert sagt dazu:

„Ihr Satz „Aus der Wahrheit der Axiome folgt, daß sie einander nicht widersprechen“ hat mich sehr interessiert, da ich nämlich, solange ich über solche Dinge denke, schreibe, vortrage, gerade umgekehrt sage: wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge. Das ist für mich das Kriterium der Wahrheit und der Existenz“. (BW, S. 68.)

Von einer Wahrheit der Axiome kann man aber nur bzgl. einer Interpretation sprechen, ungedeutete Sätze sind nicht wahr oder falsch. Richtig ist nur, daß man für Sätze z. B. einer p. l. Sprache 1. Stufe, für die ein Interpretationsbegriff festliegt, sagen kann, daß es zu jeder syntaktisch widerspruchsfreien Satzmenge eine Interpretation gibt, die alle Sätze dieser Menge erfüllt. Das liegt an der Vollständigkeit der P. L. 1. Stufe. Von solchen Überlegungen war man aber zur Zeit der Frege-Hilbert-Kontroverse weit entfernt.

Soweit ist also Freges Stellungnahme zu den impliziten Definitionen Hilberts ablehnend: Dessen Axiome sind weder Definitionen, noch Axiome im echten Sinn, d. h. Behauptungen, sondern sinnlose Ausdrücke. Was man für solche Theorien beweisen kann, sind nur die logisch wahren Sätze, daß die Theoreme wahr sind (für alle möglichen Deutungen der deskriptiven Terme), wenn die Axiome wahr sind. Frege hat darüber hinaus aber auch die Funktion impliziter Definitionen richtig analysiert: Ist eine axiomatische Theorie mit den „theoretischen“ Termen $t_1, \ldots, t_n$ gegeben, so werden durch T zwar nicht die t_i definiert, aber der Begriff höherer Stufe ‚Das n-tupel $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ (f_i sei von der gleichen Kategorie wie t_i) ist ein *Modell* von T'. Die Peanoaxiome definieren also nicht die Ausdrücke N, 0, ′, sondern nur den Begriff ‚Ein Tripel, bestehend aus einer Menge X von Objekten, einem Objekt y aus X und einer einstelligen Funktion f, die X in X abbildet, ist ein Modell der Peanoaxiome‘. Ebenso definieren die Axiome für Gruppen nicht eine spezielle Gruppe, eine bestimmte Menge G von Objekten und eine 2stellige Operation auf G, sondern eine algebraische Struktur, d. h. sie sagen, wann ein geordnetes Paar, bestehend aus einer Menge G und einer 2stelligen Operation auf G, eine Gruppe ist. Sie definieren also nicht eine Gruppe, sondern den Gruppenbegriff. Frege schreibt an Hilbert:

„Die Merkmale, die Sie in ihren Axiomen angeben, sind wohl sämtlich höherer als erster Stufe; d. h. sie antworten nicht auf die Frage „Welche

Eigenschaften muß ein Gegenstand haben, um ein Punkt (eine Gerade, Ebene usw.) zu sein?", sondern sie enthalten z. B. Beziehungen zweiter-Stufe, etwa des Begriffes Punkt zum Begriffe Gerade. Es scheint mir, daß Sie eigentlich Begriffe zweiter Stufe definieren wollen, aber diese von denen erster Stufe nicht deutlich unterscheiden". (BW, S. 74, vgl. a. KS, S. 271 f., 304 ff.)

Was Hilbert also definiert, ist ein Geometriebegriff, den Begriff einer euklidischen Geometrie als System bestehend aus drei Objektmengen X (Punkte), Y (Geraden), Z (Ebenen) und verschiedenen Relationen auf ihnen (liegen auf, liegen zwischen ... und, kongruent). Frege sagt dazu:

„Danach wird sich die Euklidische Geometrie als ein besonderer Fall eines umfassenderen Lehrgebäudes darstellen, neben dem es vielleicht noch unzählige andere besondere Fälle geben kann, unzählige Geometrien, wenn man dies Wort noch zulassen will. Und in jeder dieser Geometrien wird es einen Punktbegriff (erster Stufe) geben, und diese werden alle in denselben Begriff zweiter Stufe fallen. Wenn man nun das Wort „Punkt" in jeder dieser Geometrien gebrauchen wollte, so würde es vieldeutig, und man müßte, um dies zu vermeiden, den Namen der Geometrie hinzufügen, z. B. „Punkt der A-Geometrie", „Punkt der B-Geometrie" usw. Ähnliches wird von den Wörtern „Gerade" und „Ebene" gelten. Und unter diesem Gesichtspunkt werden die Fragen nach der Widerspruchslosigkeit und nach der Unabhängigkeit der Axiome voneinander, nach der Unbeweisbarkeit von Sätzen aus gewissen Voraussetzungen einer erneuten Prüfung zu unterwerfen sein. Man wird nicht einfach sagen können „das Parallelenaxiom"; denn in den verschiedenen Geometrien wird es verschiedene Parallelenaxiome geben. Wenn der Wortlaut derselbe sein sollte, so ist das nur fehlerhafterweise dadurch bewirkt worden, daß man z. B. statt „Gerade der A-Geometrie" einfach „Gerade" sagt, wodurch die Verschiedenheit des Gedankeninhalts zwar verhüllt, aber nicht aufgehoben werden kann". (KS, S. 272.)

Frege betont hier also auch, daß die Bedeutung implizit definierter Ausdrücke von der Theorie abhängt, die als Bedeutungspostulat für sie dient. Streicht man z. B. das Parallelenaxiom und geht so von der euklidischen zur absoluten Geometrie über, oder fügt man statt des Parallelenaxioms eines der Axiome der nichteuklidischen Geometrien hinzu, so kann man nicht sagen, daß die Ausdrücke „Gerade", „Dreieck" etc. ihre Bedeutung behielten.

Obwohl Frege implizite Definitionen richtig charakterisiert, hat er ihren Wert und speziell den des Aufbaus der Geometrie durch Hilbert nicht erkannt. Die Leistung von Axiomensystemen mit undefinierten

Grundtermen besteht darin, daß man generelle Aussagen über Strukturen machen kann und Fragen der Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit rein formal prüfen kann. Ferner war Frege bzgl. der Möglichkeit einzelne Begriffe (1. Stufe) so zu definieren, daß sie das Postulat der Vollständigkeit erfüllen, also für alle Gegenstände überhaupt erklärt sind, zu optimistisch. Unsere alltäglichen wie wissenschaftlichen Begriffe erfüllen dieses Postulat in der Regel nicht, sie sind offen, d. h. nicht für alle Anwendungen definiert und haben oft unscharfe Grenzen. Es erscheint realistischer anzunehmen, daß Begriffe vielfach nur durch ihre Beziehungen zu anderen erklärbar sind, so daß man insgesamt nur ein Begriffsnetz fixiert. Hilbert sagt dazu:

„Meine Meinung ist eben die, daß ein Begriff nur durch seine Beziehungen zu anderen Begriffen logisch festgelegt werden kann. Diese Beziehungen, in bestimmten Aussagen formuliert, nenne ich Axiome und komme so dazu, daß die Axiome (evtl. mit Hinzunahme der Namengebungen für die Begriffe) die Definitionen der Begriffe sind. Diese Auffassung habe ich mir nicht etwa zur Kurzweil ausgedacht, sondern ich sah mich zu derselben gedrängt durch die Forderung der Strenge beim logischen Schließen und beim logischen Aufbau einer Theorie. Ich bin zu der Überzeugung gekommen, daß man in der Mathematik und den Naturwissenschaften subtilere Dinge nur so mit Sicherheit behandeln kann, anderenfalls sich bloß im Kreise dreht". (BW, S. 79.)

Diese Konzeption ist sicher moderner als die Fregesche. In der Wissenschaftstheorie geht man heute z. B. davon aus, daß unsere empirische Sprache „theoriebeladen" ist, d. h. daß die Anwendungskriterien für Prädikate z. B. auf vorgängigen Annahmen oder Erwartungen beruhen, und daß sich mit unseren Annahmen über die Welt auch unsere Sprache ändert. Man hat also die scharfe Trennung zwischen Beobachtungssprache und theoretischer Sprache aufgegeben, und damit hat das Problem der bloß impliziten Definition theoretischer Terme an Gewicht verloren: Was für diese Terme gilt, gilt — wenn auch in geringerem Maße — ebenso für Beobachtungsterme. Auch sie sind also nur im Kontext einer Theorie erklärt, wobei das Wort „Theorie" freilich in seinem sehr weiten und nichtformalen Sinn zu verstehen ist. Ebenso erscheint es zweifelhaft, ob man ohne Bezugnahme auf eine bestimmte Geometrie sinnvoll von „Geraden", „Ebenen" etc. sprechen kann. Es ist auch ein Verdienst Hilberts, auf solche Probleme hingewiesen zu haben.

10 Ontologische und erkenntnistheoretische Überlegungen

10.1 Kritik am Psychologismus

Die Psychologie hat sich erst im Verlauf des 19. Jahrhunderts aus der Philosophie emanzipiert und als eigenständige Wissenschaft etabliert. Als ihr eigentlicher Begründer gilt Wilhelm Wundt (1832–1920). In der anfänglichen Überschätzung ihrer Leistungsfähigkeit wurde die psychologische Betrachtungsweise von der Untersuchung individueller Erkenntnisvorgänge auf ihre Produkte (insbesondere wissenschaftliche Theorien) und Gegenstände ausgedehnt. Als *Psychologismus* bezeichnet man die Ansicht, Psychologie sei insofern die Grundwissenschaft, als sich alle Erkenntnisleistungen nur psychologisch analysieren ließen. Es entstand eine psychologische Logik, in der die Gesetze der Logik als Denkgesetze aufgefaßt wurden (Chr. v. Sigwart, Th. Lipps, B. Erdmann), und selbst die Mathematik wurde in psychologische Betrachtungen einbezogen (E. Husserl). Die Tendenz ging dahin, objektive Sachverhalte als durch psychische Vorgänge konstituiert anzusehen, die tatsächlich nur eine Erkenntnis dieser Sachverhalte vermitteln. Damit wurden nicht nur Denken und Erkennen, sondern auch die gedachten und erkannten Sachverhalte als Psychisches aufgefaßt. Frege hat sich entschieden gegen diesen Psychologismus gewandt, besonders gegen sein Eindringen in die Logik und Mathematik, und hat ihm gegenüber eine realistische Konzeption der Erkenntnisgegenstände vertreten. Seine Aussagen dazu finden sich vor allem in der Einleitung zu den GLA (S. XVII ff.), in jener zum 1. Band der GGA, in LUI, in der Rezension von E. Husserls „Philosophie der Arithmetik“ (Bd. I, 1891) und im Brief an Husserl vom 30. 10./31. 11. 1906 (BW, S. 101 f.). Er hat dabei die unpräzise Verwendung des Wortes „Vorstellung“ als Quelle der Verwirrungen ausgemacht, des Nachfolgers der Bezeichnung „idea“, die schon in der Erkenntnistheorie von Descartes bis Hume eine berüchtigte Rolle gespielt hat.

„Nicht alles ist Vorstellung. Sonst enthielte die Psychologie alle Wissenschaften in sich oder wäre wenigstens die oberste Richterin über alle Wissenschaften. Sonst beherrschte die Psychologie auch die Logik und die Mathematik. Nichts hieße aber die Mathematik mehr verkennen als ihre Unterordnung unter die Psychologie. Weder die Logik noch die Mathematik hat als Aufgabe, die Seelen und den Bewußtseinsinhalt zu erforschen, dessen Träger der einzelne Mensch ist. Eher könnte man vielleicht als ihre Aufgabe die Erforschung des Geistes hinstellen, *des* Geistes, nicht der Geister. Das Fassen der Gedanken setzt einen Fassenden, einen Denkenden voraus. Dieser ist dann Träger des Denkens, nicht aber des Gedankens. Obgleich zum Bewußtseinsinhalte des Denkenden der Gedanke nicht gehört, muß doch in dem Bewußtsein etwas auf den Gedanken hinzielen. Dieses darf aber nicht mit dem Gedanken selbst verwechselt werden. So ist auch Algol selbst verschieden von der Vorstellung, die jemand von Algol hat". (KS, S. 359.)

Frege versteht unter Vorstellungen nicht nur Phantasievorstellungen, sondern auch Sinneseindrücke, Empfindungen, Gefühle und Stimmungen, Neigungen und Wünsche (KS, S. 351). Diese Ausweitung der Terminologie ist ungünstig, denn Frege unterscheidet den Vorstellungsakt vom Vorgestellten, und das paßt nur auf intentionale Phänomene, nicht auf Empfindungen wie Schmerzen, die keine Empfindungen von Gegenständlichem sind. Für das folgende genügt es jedoch, den Begriff der Vorstellung als Oberbegriff für intentionale mentale Akte zu verwenden, worunter dann aber auch Akte des Denkens und Wahrnehmens zu rechnen wären. Frege macht hier freilich einen Unterschied: Für ihn sind die Inhalte des Wahrnehmens und Denkens begrifflich bestimmt, nicht aber jene des Empfindens (vgl. KS, S. 360) – wir gehen darauf in 10.2 ein, wollen aber zunächst davon absehen. Gegenüber Frege ist ferner innerhalb des Vorgestellten noch der Gegenstand einer Vorstellung von ihrem Inhalt zu unterscheiden, der ein Sachverhalt ist: Nehme ich wahr, daß diese Rose rot ist, so ist diese Rose der Gegenstand meiner Wahrnehmung, der Sachverhalt, daß sie rot ist, ihr Inhalt[1]. Der Inhalt ist also die Charakterisierung, in der der Gegenstand vorgestellt wird; er wird

[1] Von *dem* Gegenstand einer Vorstellung reden wir nur der Einfachheit halber, es können auch mehrere Gegenstände sein, z. B. mehrere Personen, ein Ganzes, das aus Teilen besteht, etc.

bestimmt durch die Eigenschaften, die dem Gegenstand in der Vorstellung zugeschrieben werden. Diese Eigenschaften sind von jenen zu unterscheiden, die den Vorstellungsakt charakterisieren: Das Vorstellen ist z. B. klar und detailliert, aber nicht sein Gegenstand. Vorstellungen als Akte sind nun subjektiv in dem Sinn, daß sie Akte einer Person sind; Frege sagt: Sie bedürfen eines Trägers. Der Gegenstand einer Vorstellung ist hingegen (wenn er nicht selbst wieder ein mentaler Akt oder Zustand ist) objektiv, und auch der Inhalt ist in gewisser Hinsicht objektiv. Er ist zwar ein Sachverhalt, den sich jemand als bestehend vorstellt, aber er kann erstens tatsächlich bestehen und zweitens können sich ihn verschiedene Personen vorstellen. Stellt sich jemand vor, daß die Rose rot ist, so wird dieser Sachverhalt dadurch nicht zu etwas Subjektivem, ebensowenig wie die Rose selbst, wenn sie sich jemand vorstellt. Frege wirft nun dem Psychologismus vor, zwischen Vorstellung als Akt und Vorgestelltem (das ist für ihn immer ein Gegenstand) nicht zu unterscheiden. Tatsächlich tut er das aber selbst oft nicht. Er behauptet z. B., daß Vorstellungen und Eindrücke verschiedener Menschen unvergleichbar sind:

„Mein Begleiter und ich sind überzeugt, daß wir beide dieselbe Wiese sehen; aber jeder von uns hat einen besonderen Sinneseindruck des Grünen. Ich erblicke eine Erdbeere zwischen den grünen Erdbeerblättern. Mein Begleiter findet sie nicht; er ist farbenblind. Der Farbeneindruck, den er von der Erdbeere erhält, unterscheidet sich nicht merklich von dem, den er von dem Blatt erhält. Sieht nun mein Begleiter das grüne Blatt rot, oder sieht er die rote Beere grün? oder sieht er beide in einer Farbe, die ich gar nicht kenne? Das sind unbeantwortbare, ja eigentlich unsinnige Fragen. Denn das Wort „rot", wenn es nicht eine Eigenschaft von Dingen angeben, sondern meinem Bewußtsein angehörende Sinneseindrücke kennzeichnen soll, ist anwendbar nur im Gebiete meines Bewußtseins; denn es ist unmöglich, meinen Sinneseindruck mit dem eines andern zu vergleichen. Dazu wäre erforderlich, einen Sinneseindruck, der einem Bewußtsein angehört und einen Sinneseindruck, der einem andern Bewußtsein angehört, in einem Bewußtsein zu vereinigen ... Ich pflücke die Erdbeere ab; ich halte sie zwischen den Fingern. Jetzt sieht sie auch mein Begleiter, dieselbe Erdbeere; aber jeder von uns hat seine eigene Vorstellung. Kein anderer hat meine Vorstellung; aber viele können dasselbe Ding sehen. Kein anderer hat meinen Schmerz. Jemand kann Mitleid mit mir haben; aber dabei gehört doch immer mein Schmerz mir und sein Mitleid ihm an. Er hat nicht meinen Schmerz und ich habe nicht sein Mitleid". (KS, S. 351 f.)

Vorstellungen verschiedener Personen sind als Akte natürlich verschieden, sie können aber wie gesagt denselben Gegenstand und Inhalt haben, und sie können auch gleiche Eigenschaften haben. Warum sollte die Art und Weise, wie verschiedenen Personen dieselbe Sache erscheint, wie sie sie erleben, nicht vergleichbar sein? Aussagen, daß einer ein Ereignis intensiver, klarer oder mit größerer innerer Beteiligung erlebt als ein anderer, sind zweifellos sinnvoll und lassen sich oft begründen. Dazu ist es nicht erforderlich, „zwei Eindrücke in einem Bewußtsein zu vereinigen". Im Sinn des psychologischen Funktionalismus kann man davon ausgehen, daß sich alle mentalen Zustände durch ihre kausale Rolle eindeutig charakterisieren lassen, d. h. durch ihre Ursachen (äußere Reize, evtl. in Verbindung mit anderen mentalen Zuständen) und ihre Wirkungen (das Verhalten oder andere mentale Zustände, die sie auslösen). Über diese funktionale Rolle läßt sich dann auch Identität oder Verschiedenheit von Eindrücken feststellen.

Die Quelle des Psychologismus in der Logik sah Frege darin, daß kein Bereich des Objektiven neben dem des Physischen anerkannt wird – Frege spricht von einem „objektiven Nichtwirklichen" (vgl. dazu 10.2) – und daher Begriffe und Gedanken als Vorstellungen angesehen werden:

> „Weil die psychologischen Logiker die Möglichkeit des objektiven Nichtwirklichen verkennen, halten sie die Begriffe für Vorstellungen und weisen sie damit der Psychologie zu. Aber die wahre Sachlage macht sich doch zu mächtig geltend, als daß dies leicht durchzuführen wäre. Und daher kommt ein Schwanken in den Gebrauch des Wortes „Vorstellung", indem es bald etwas zu bedeuten scheint, was dem Seelenleben des Einzelnen angehört und nach psychologischen Gesetzen mit andern Vorstellungen verschmilzt, sich mit ihnen assoziiert, bald etwas Allen gleicherweise Gegenüberstehendes, bei dem ein Vorstellender weder genannt noch auch nur vorausgesetzt wird ... Der schwankende Gebrauch dieses Wortes bewirkt Unklarheit und hilft den psychologischen Logikern ihre Schwäche verbergen. Wann wird man dem endlich einmal ein Ende machen! So wird schließlich Alles in den Bereich der Psychologie hineingezogen; die Grenze zwischen Objektivem und Subjektivem verschwindet mehr und mehr, und selbst wirkliche Gegenstände werden als Vorstellungen psychologisch behandelt. Denn was ist *wirklich* anders als ein Prädikat? und was sind logische Prädikate anders als Vorstellungen? So mündet denn Alles in den Idealismus und bei größter Folgerichtigkeit in den Solipsismus ein. Wenn jeder mit dem Namen „Mond" etwas Anderes bezeichnete, nämlich eine seiner Vorstellungen, etwa so, wie er mit

dem Ausrufe „au!“ seinen Schmerz äußerte, so wäre freilich die psychologische Betrachtungsweise gerechtfertigt; aber ein Streit über die Eigenschaften des Mondes wäre gegenstandslos: der Eine könnte von seinem Monde ganz gut das Gegenteil von dem behaupten, was der Andere mit demselben Rechte von seinem sagte. Wenn wir nichts erfassen könnten, als was in uns selbst ist, so wäre ein Widerstreit der Meinungen, eine gegenseitige Verständigung unmöglich, weil ein gemeinsamer Boden fehlte, und ein solcher kann keine Vorstellung im Sinne der Psychologie sein. Es gäbe keine Logik, die berufen wäre, Schiedsrichterin im Streite der Meinungen zu sein“. (GGAI, S. XVIII f.)

Freges Fazit ist also:

„Wenn wir überhaupt aus dem Subjektiven herauskommen wollen, so müssen wir das Erkennen auffassen als eine Tätigkeit, die das Erkannte nicht erzeugt, sondern das schon Vorhandene ergreift. Das Bild des Ergreifens ist recht geeignet, die Sache zu erläutern. Wenn ich einen Bleistift ergreife, so geht dabei in meinem Leibe mancherlei vor: Nervenerregungen, Veränderungen der Spannung und des Druckes von Muskeln, Sehnen und Knochen, Veränderungen der Blutbewegung. Aber die Gesamtheit dieser Vorgänge ist weder der Bleistift, noch erzeugt sie ihn. Dieser besteht unabhängig von diesen Vorgängen. Und es ist wesentlich für das Ergreifen, daß etwas da ist, was ergriffen wird; die innern Veränderungen allein sind das Ergreifen nicht. So besteht auch das, was wir geistig erfassen, unabhängig von dieser Tätigkeit, von den Vorstellungen und deren Veränderungen, die zu diesem Erfassen gehören oder es begleiten, ist weder die Gesamtheit dieser Vorgänge, noch wird es durch sie als Teil unseres seelischen Lebens erzeugt“. (GGAI, S. XXIV.)

Die Nichtunterscheidung von Vorstellung und Vorgestelltem führt nun aber nicht nur dazu, daß Begriffe und Propositionen als etwas Psychisches aufgefaßt werden, sondern auch zur Auflösung der Außenwelt in Vorstellungen im Sinne des Phänomenalismus:

„Alles ist Vorstellung? Alles bedarf eines Trägers, ohne den es keinen Bestand hat? Ich habe mich als Träger meiner Vorstellungen angesehen; aber bin ich nicht selbst eine Vorstellung? Es ist mir so, als läge ich auf einem Liegestuhle, als sähe ich ein Paar gewichster Stiefelspitzen, die Vorderseite einer Hose, eine Weste, Knöpfe, Teile eines Rockes, insbesondere Ärmel, zwei Hände, einige Barthaare, verschwommene Umrisse einer Nase. Und dieser ganze Verein von Gesichtseindrücken, diese Gesamtvorstellung bin ich selbst? Es ist mir auch so, als sähe ich dort einen Stuhl. Es ist eine Vorstellung. Eigentlich unterscheide ich mich gar nicht so sehr von dieser; denn bin ich nicht selbst ebenfalls ein Verein von Sinneseindrücken, eine Vorstellung? Wo ist denn aber der Träger dieser Vorstellungen? Wie komme ich dazu, eine dieser Vorstellungen herauszugreifen und sie als Trägerin der andern hinzustellen? Warum muß das die Vorstellung sein, die ich ‚ich' zu nennen beliebe? Könnte ich nicht ebensogut die dazu wählen, die ich einen Stuhl zu nennen in Versuchung bin? Doch wozu überhaupt ein Träger der Vorstellungen? Ein solcher wäre doch immer etwas von den bloß getragenen Vorstellungen wesentlich Verschiedenes, etwas Selbständiges, was keines fremden Trägers bedürfte. Wenn alles Vorstellung ist, so gibt es keinen Träger der Vorstellungen. Und so erlebe ich nun wieder einen Umschlag ins Entgegengesetzte. Wenn es keinen Träger der Vorstellungen gibt, so gibt es auch keine Vorstellungen; denn Vorstellungen bedürfen eines Trägers, ohne den sie nicht bestehen können. Wenn kein Herrscher da ist, gibt es auch keine Untertanen. Die Unselbständigkeit, die ich der Empfindung gegenüber dem Empfindenden zuzuerkennen mich bewogen fand, fällt weg, wenn kein Träger mehr da ist. Was ich Vorstellungen nannte, sind dann selbständige Gegenstände. Demjenigen Gegenstande, den ich ‚ich' nenne, eine besondere Stellung einzuräumen, fehlt jeder Grund. Aber ist denn das möglich? Kann es ein Erleben geben, ohne jemanden, der es erlebt? Was wäre dieses ganze Schauspiel ohne einen Zuschauer? Kann es einen Schmerz geben, ohne jemanden, der ihn hat? Das Empfundenwerden gehört notwendig zum Schmerze, und zum Empfundenwerden gehört wieder jemand, der empfindet. Dann aber gibt es etwas, was nicht meine Vorstellung ist und doch Gegenstand meiner Betrachtung, meines Denkens sein kann, und ich bin von der Art. Oder kann ich Teil des Inhalts meines Bewußtseins sein, während ein anderer Teil vielleicht eine Mondvorstellung ist? Findet das etwa statt, wenn ich urteile, daß ich den Mond betrachte? Dann hätte dieser erste Teil ein Bewußtsein, und ein Teil des Inhalts dieses Bewußtseins wäre wiederum ich. Und so fort. Daß ich so ins Unendliche in mir eingeschachtelt wäre, ist doch wohl undenkbar; denn dann gäbe es ja nicht nur ein ich, sondern unendlich viele. Ich bin nicht meine eigene Vorstellung, und wenn ich etwas von mir behaupte, z. B. daß ich augenblicklich keinen Schmerz empfinde, so betrifft mein Urteil etwas, was nicht Inhalt meines Bewußtseins, nicht meine Vorstellung ist, nämlich mich selbst. Also ist das, wovon ich etwas aussage, nicht notwendig meine Vorstellung. Aber, wendet man vielleicht ein, wenn ich denke, daß ich augenblicklich keinen Schmerz habe, entspricht dann nicht doch dem Worte „ich" etwas im Inhalte meines Bewußtseins? Und ist das nicht eine Vorstellung? Das mag sein. Mit der Vorstellung des Wortes „ich" mag in meinem Bewußtsein eine gewisse Vorstellung verbunden sein. Dann aber ist sie eine Vorstellung neben andern Vorstellungen, und ich bin ihr Träger wie der Träger der andern Vorstellungen. Ich habe eine Vorstellung von mir, aber ich bin nicht diese Vorstellung. Es ist scharf zu unterscheiden zwischen dem, was Inhalt meines Bewußtseins, meine Vorstellung ist, und dem, was Gegenstand meines Denkens ist. Also ist der Satz falsch, daß nur das Gegenstand meiner Betrachtung, meines Denkens sein kann, was zum Inhalte meines Bewußtseins gehört". (KS, S. 356 f.)

Dieser Text ist eine der besten Widerlegungen des Idealismus, speziell in der Version von Hume. Frege meint:

„Wenn die Idealisten folgerecht dächten, so würden sie den Satz „Karl der Große besiegte die Sachsen" weder für wahr noch für falsch, sondern für Dichtung ausgeben, wie wir gewohnt sind, etwa den Satz „Nessus trug die Deianira über den Fluß Euenus" aufzufassen; denn auch der Satz „Nessus trug die Deianira nicht über den Fluß Euenus" könnte nur wahr sein, wenn der Name „Nessus" einen Träger hätte. Von diesem Standpunkte wären die Idealisten wohl nicht leicht zu vertreiben. Aber das braucht man sich nicht gefallen zu lassen, daß sie den Sinn des Satzes in der Weise fälschen, als ob ich von meiner Vorstellung etwas aussagen wollte, wenn ich von Karl, dem Großen spreche; ich will doch einen von mir und meinem Vorstellen unabhängigen Mann bezeichnen und von diesem etwas aussagen. Man kann den Idealisten zugeben, daß die Erreichung dieser Absicht nicht völlig sicher ist, daß ich vielleicht damit, ohne es zu wollen, aus der Wahrheit in die Dichtung verfalle. Damit kann aber an dem Sinne nichts geändert werden. Mit dem Satz „dieser Grashalm ist grün" sage ich nichts von meiner Vorstellung aus; ich bezeichne keine meiner Vorstellungen mit den Worten „dieser Grashalm", und wenn ich es täte, so wäre der Satz falsch. Da tritt nun eine zweite Fälschung ein, daß nämlich meine Vorstellung des Grünen ausgesagt werde von meiner Vorstellung dieses Grashalms. Ich wiederhole: von meinen Vorstellungen ist in diesem Satze durchaus nicht die Rede; man schiebt einen ganz andern Sinn unter. Beiläufig bemerkt, verstehe ich gar nicht, wie überhaupt eine Vorstellung von etwas ausgesagt werden könne ... Wie begreiflich wehrt sich die Natur der Sache gegen das Versinken in den Idealismus, und Herr Erdmann möchte nicht zugeben, daß es für ihn keine eigentliche Objektivität gebe; aber ebenso begreiflich ist die Vergeblichkeit dieses Bemühens. Denn wenn alle Subjekte und alle Prädikate Vorstellungen sind und wenn alles Denken nichts ist als Erzeugen, Verbinden, Verändern von Vorstellungen, so ist nicht einzusehen, wie jemals etwas Objektives erreicht werden könne. Ein Anzeichen dieses vergeblichen Sträubens ist schon der Gebrauch der Wörter „Vorgestelltes" und „Gegenstand", die zunächst etwas Objektives im Gegensatz zur Vorstellung bezeichnen zu wollen scheinen, aber auch nur scheinen; denn es zeigt sich, daß sie dasselbe bedeuten. Wozu nun dieser Überfluß von Ausdrücken? Das ist nicht schwer zu erraten. Man bemerke auch, daß von einem Gegenstande der Vorstellung die Rede ist, obwohl der Gegenstand selber Vorstellung sein soll. Das wäre also eine Vorstellung der Vorstellung. Welche Beziehung von Vorstellungen soll hiermit bezeichnet werden? So unklar dies auch ist, so verständlich ist es doch auch, wie durch das Gegeneinanderarbeiten der Natur der Sache und des Idealismus solche Strudel entstehen können. Wir sehen hier überall den Gegenstand, von dem ich mir eine Vorstellung mache, mit dieser Vorstellung verwechselt und dann doch wieder die Verschiedenheit hervortreten". (GGAI, S. XXI f.)[2]

Im Gegensatz zu Aussagen über unsere eigenen Vorstellungen (im weiten Sinn Freges) sind jene über die Außenwelt zwar problematisch, aber doch oft praktisch sicher:

„Ich bin überzeugt, daß der Vorstellung, die ich mit den Worten „mein Bruder" verbinde, etwas entspricht, was nicht meine Vorstellung ist, und wovon ich etwas aussagen kann. Aber kann ich mich nicht darin irren? Solche Irrtümer kommen vor. Wir verfallen dann wider unsere Absicht in Dichtung. In der Tat! Mit dem Schritte, mit dem ich mir eine Umwelt erobere, setze ich mich der Gefahr des Irrtums aus. Und hier stoße ich auf einen weiteren Unterschied meiner Innenwelt von der Außenwelt. Daß ich den Gesichtseindruck des Grünen habe, kann mir nicht zweifelhaft sein; daß ich aber ein Lindenblatt sehe, ist nicht so sicher. So finden wir im Gegensatze zu weit verbreiteten Meinungen in der Innenwelt Sicherheit, während uns bei unsern Ausflügen in die Außenwelt der Zweifel nie ganz verläßt. Dennoch ist die Wahrscheinlichkeit auch hierbei in vielen Fällen von der Gewißheit kaum zu unterscheiden, so daß wir es wagen können, über die Dinge der Außenwelt zu urteilen. Und wir müssen das sogar wagen auf die Gefahr des Irrtums hin, wenn wir nicht weit größeren Gefahren erliegen wollen". (KS, S. 358.)

Die Suche nach einer festen, unbezweifelbaren Basis der Erkenntnis war ein Motiv für den Phänomenalismus, da man die Existenz und Beschaffenheit der eigenen Vorstellungen (im Moment, in dem man sie hat), nicht sinnvoll infrage stellen kann. Frege betont hier, daß sich von dieser Basis aus eine Erkenntnis der Außenwelt nicht erreichen läßt, denn eine Außenwelt ist *per definitionem* etwas, das nicht oder jedenfalls nicht vollständig durch unsere Vorstellungen bestimmt ist. Bei Frege fehlen freilich genauere Aussagen darüber, wie wir von Sinneseindrücken zu Annahmen über die Außenwelt gelangen, aber er wollte ja auch keine Erkenntnistheorie schreiben, sondern nur den Psychologismus und Idealismus abwehren, ihn als

[2] Frege bezieht sich hier auf die „Logik" (1892) von Benno Erdmann (1851–1921).

generell, speziell also auch auf dem Gebiete der Logik, als unhaltbar erweisen.

Auch Freges Rezension von Edmund Husserls „Philosophie der Arithmetik", Bd. I (1891) ist eine scharfe Attacke gegen den Psychologismus in der Logik. Er schreibt:

„Es verschwimmt hierbei der Unterschied zwischen Vorstellung und Begriff, zwischen Vorstellen und Denken. Alles wird ins Subjektive herübergespielt. Aber gerade dadurch, daß die Grenze zwischen Subjektivem und Objektivem verwischt wird, bekommt auch umgekehrt das Subjektive den Anschein des Objektiven. Man spricht z. B. von dieser oder jener Vorstellung, als ob sie sich, abgelöst vom Vorstellenden, in der Öffentlichkeit sehen ließe. Und doch hat niemand die Vorstellung eines andern, sondern nur seine eigne, und niemand weiß sogar, wieweit seine Vorstellung — des Roten z. B. — mit der eines andern übereinstimmt; denn das Eigenartige der Vorstellung, die ich mit dem Worte „rot" verbinde, kann ich nicht äußern. Man müßte die Vorstellungen des einen und des andern in demselben Bewußtsein vereinigt haben, um sie vergleichen zu können, und müßte sicher sein, daß sie sich bei der Überführung nicht geändert hätten. Ganz anders bei den Gedanken: ein und derselbe Gedanke kann von vielen Menschen gefaßt werden. Die Gedankenteile und um so mehr die Sachen selbst sind von den Vorstellungen zu unterscheiden, die in einer Seele das Fassen des Gedankens begleiten, und die sich jemand von den Sachen macht. Dadurch nun, daß man Subjektives und Objektives unter dem Worte „Vorstellung" zusammenfaßt, verwischt man die Grenze zwischen beiden so, daß bald eine Vorstellung im eigentlichen Sinne des Wortes wie etwa Objektives, bald etwas Objektives wie eine Vorstellung behandelt wird". (KS, S. 182.)

„Objektiv" in diesem Sinn ist ein Gedanke als Inhalt des Denkens, der den Denkakten verschiedener Menschen gemeinsam sein kann. Eine Objektivität i. e. S., eine Unabhängigkeit vom Denken überhaupt ist damit, wie wir noch sehen werden, nicht impliziert.

Frege hat auch an speziellen Lehren des Psychologismus Kritik geübt, so an der Abstraktionstheorie von Husserl:

„Da nun alles Vorstellung ist, können wir leicht die Gegenstände durch Hin- und Ablenkung der Aufmerksamkeit verändern. Besonders das letzte ist wirksam. Wir merken weniger auf eine Eigenschaft, und sie verschwindet. Indem wir so ein Merkmal nach dem andern verschwinden lassen, erhalten wir immer abstraktere Begriffe. Auch die Begriffe sind also Vorstellungen, nur weniger vollständige als die Gegenstände; sie haben noch die Eigenschaften jener, von denen nicht abstrahiert ist. Die Unaufmerksamkeit ist eine höchst wirksame logische Kraft; daher vermutlich die Zerstreutheit der Gelehrten. Nehmen wir z. B. an, es sitzen vor uns nebeneinander eine schwarze und eine weiße Katze. Wir achten nicht auf ihre Farbe: sie werden farblos, sitzen aber noch nebeneinander. Wir achten nicht auf ihre Körperhaltung: sie sitzen nicht mehr, ohne jedoch eine andere Haltung angenommen zu haben; aber jede ist noch an ihrer Stelle. Wir achten nicht mehr auf den Ort: sie werden ortlos, bleiben aber immer noch wohl geschieden. So haben wir vielleicht aus jeder einen allgemeinen Katzenbegriff gewonnen. Jeder Gegenstand verwandelt sich bei fortgesetzter Anwendung dieses Verfahrens in ein immer blutleereres Gespenst. Wir gewinnen so schließlich aus jedem Gegenstande ein Etwas, das gänzlich inhaltsentschränkt ist; aber das Etwas, das aus dem einen Gegenstande gewonnen ist, unterscheidet sich doch von dem aus einem andern Gegenstande gewonnenen, obwohl nicht leicht zu sagen ist, wodurch". (KS, S. 181.)

Frege schließt die Besprechung von Husserls „Philosophie der Arithmetik" mit den Worten

„Beim Lesen dieses Werkes habe ich den Umfang der Verwüstungen ermessen können, die der Einbruch der Psychologie in die Logik angerichtet hat, und ich habe es hier für meine Aufgabe gehalten, den Schaden recht ans Licht zu stellen. Die Fehler, die ich geglaubt habe aufzeigen zu müssen, fallen weniger dem Verfasser zur Last, als einer weitverbreiteten philosophischen Krankheit. Mein so grundverschiedener Standpunkt macht es mir schwer, seinen Verdiensten gerecht zu werden, die ich auf dem Gebiete der Psychologie vermute". (KS, S. 192.)

Freges Kritik war wohl zumindest einer der Gründe dafür, daß sich Husserl später vom Psychologismus abwandte, wie die „Logischen Untersuchungen" (1900/01) zeigen.

10.2 Freges realistische Auffassung abstrakter Entitäten

Bei der Erläuterung seines Begriffs des Gedankens in LUI betont Frege zunächst, daß Gedanken keine empirischen Gegenstände sind:

„Der Gedanke ist etwas Unsinnliches und alle sinnlich wahrnehmbaren Dinge sind von dem Gebiete dessen auszuschließen, bei dem überhaupt Wahrheit in Frage kommen kann. Wahrheit ist nicht eine Eigenschaft, die einer besonderen Art von Sinneseindrücken entspricht. So unterscheidet sie sich scharf von Eigenschaften, die wir mit den Wörtern „rot", „bitter", „fliederduftend" benennen. Aber sehen wir nicht, daß die Sonne aufgegangen ist? und sehen wir nicht damit auch, daß dies wahr ist? Daß die Sonne aufgegangen ist, ist kein Gegenstand, der Strahlen aussendet, die in mein Auge gelangen, ist kein sichtbares Ding wie die Sonne selbst. Daß die Sonne aufgegangen ist, wird auf Grund von Sinneseindrücken als wahr erkannt. Dennoch ist das Wahrsein keine sinnlich wahrnehmbare Eigenschaft. Auch das Magnetischsein wird auf Grund von Sinneseindrücken an einem Dinge erkannt, obwohl dieser Eigenschaft ebensowenig wie der Wahrheit eine besondere Art von Sinneseindrücken entspricht. Darin stimmen diese Eigenschaften überein. Um aber einen Körper als magnetisch zu erkennen, haben wir Sinneseindrücke nötig. Wenn ich es dagegen wahr finde, daß ich in diesem Augenblick nichts rieche, so tue ich das nicht auf Grund von Sinneseindrücken". (KS, S. 345.)

Das letztere Beispiel ist zwar etwas unglücklich, da man aufgrund fehlender Geruchsempfindungen und insofern doch wieder unter Bezugnahme auf Sinnesempfindungen urteilt, daß man nichts riecht. Aber trotzdem bleibt richtig, daß Wahrheit keine Eigenschaft von physikalischen Dingen ist. Da Gedanken für Frege das sind, was wahr oder falsch sein kann, können sie also keine solchen Dinge sein. Der Hinweis darauf, daß wir Wahrheit oft feststellen, ohne auf Sinneseindrücke Bezug zu nehmen, ließe sich einfacher mit Beispielen logischer oder mathematischer Sätze belegen.

Neben der Außenwelt gibt es nun den Bereich des Seelischen und Mentalen, den Bereich der Vorstellungen im weiten Sinn Freges. Gedanken sind nun auch keine Vorstellungen – auf Freges diesbezügliche Argumente sind wir schon in 10.1 eingegangen.

„So scheint das Ergebnis zu sein: Die Gedanken sind weder Dinge der Außenwelt, noch Vorstellungen. Ein drittes Reich muß anerkannt werden. Was zu diesem gehört, stimmt mit den Vorstellungen darin überein, daß es nicht mit den Sinnen wahrgenommen werden kann, mit den Dingen aber darin, daß es keines Trägers bedarf, zu dessen Bewußtseinsinhalte es gehört. So ist z. B. der Gedanke, den wir im pythagoreischen Lehrsatz aussprachen, zeitlos wahr, unabhängig davon wahr, ob irgend jemand ihn für wahr hält. Er bedarf keines Trägers. Er ist wahr nicht erst, seitdem er entdeckt worden ist wie ein Planet, schon bevor jemand ihn gesehen hat, mit andern Planeten in Wechselwirkung gewesen ist". (KS, S. 353 f.)

Angesichts der Argumentation Freges für ein „drittes Reich" stellen sich zwei Probleme: Erstens bilden für Frege Gedanken (Propositionen, Sachverhalte) keine eigene ontologische Kategorie. Da sie nicht ungesättigt sind, sind sie keine Funktionen, also Gegenstände. Dann ist aber Frege Hinweis im vorletzten Zitat, daß Gedanken keine Dinge der Außenwelt sind, irrelevant für die Frage, ob sie Gegenstände der Außenwelt in seinem Sinn sind. Physikalische Sachverhalte wird man zweifellos annehmen müssen: Es gibt physische Dinge wie Steine und physikalische Attribute dieser Dinge wie ihr Gewicht oder ihre Farbe. Das Zutreffen solch eines Attributs auf ein derartiges Ding wird man dann aber auch als physikalischen Sachverhalt bezeichnen. Ebenso gibt es psychologische Sachverhalte. Die Außenwelt wie die Welt des Psychischen besteht nicht nur aus Objekten. Es wäre unsinnig, Attribute und Sachverhalte einem ganz anderen Realitätsbereich zuzuordnen, als dem Bereich jener Objekte, auf den die Attribute zutreffen und auf den sich die Sachverhalte beziehen. Freges Klassifikation ist also wenig klar: Man kann entweder die Bereiche des Physikalischen und Mentalen z. B. von jenem des Mathematischen unterscheiden mit jeweils verschiedenen Objekten, Attributen und Sachverhalten. Oder man kann die Kategorien Objekt – Attribut – Sachverhalt unterscheiden, und dann gibt es in jeder der drei genannten Welten Entitäten all dieser Kategorien. Freges „drittes Reich“ entspricht keiner der beiden Klassifikationen.

Das zweite Problem betrifft Freges Abgrenzung der Gedanken von Vorstellungen. Ebenso wie bei Vorstellungen muß man bei Gedanken (im normalen Sinn dieses Wortes) den Akt des Denkens, seinen Gegenstand und seinen Inhalt unterscheiden. In Freges Terminologie ist „Gedanke“ immer Inhalt des Denkens. Frege vergleicht nun aber den Gedankeninhalt mit dem Vorstellungsakt, und dieser Vergleich ist schief und trägt nichts zur Unterscheidung von Vorstellungen und Gedanken als Akten oder als Inhalten bei. Freges These von der Unvergleichbarkeit der Vorstellungen ist zudem unhaltbar, wie wir im letzten Abschnitt sahen, selbst wenn man Vorstellungsakte meint, und Vorstellungsinhalte sind ebenso objektiv wie Gedankeninhalte.

Was sich also Freges Argument zunächst entnehmen läßt, ist nicht mehr als die triviale Feststellung, daß Gedanken(inhalte) keine physischen Dinge sind und auch keine Vorstellungsakte. Er meint aber wohl, der Vorstellungsinhalt sei Produkt des Vorstellens, ein Gedanke ist für ihn hingegen kein Produkt des Denkens. Wie wir schon in 5.2 sahen, unterscheidet er das Fassen eines Gedankens von der Anerkennung seiner Wahrheit (seiner Behauptung). Beides, so betont er, schafft nicht den Gedanken, sondern ist ein Akt, mit dem wir zu ihm als zu etwas Vorgegebenen in Beziehung treten, ähnlich wie wir beim Wahrnehmen den wahrgenommenen Gegenstand nicht produzieren, sondern erfassen.

„Beim Denken erzeugen wir nicht die Gedanken, sondern wir fassen sie". (KS, S. 359.)
„Die Gedanken sind nicht seelische Gebilde, und das Denken ist nicht ein inneres Erzeugen und Bilden, sondern ein Fassen von Gedanken, die schon objektiv vorhanden sind". (BW, S. 102.)
„Wenn man einen Gedanken faßt oder denkt, so schafft man ihn nicht, sondern tritt nur zu ihm, der schon vorher bestand, in eine gewisse Beziehung ..." (KS, S. 354, vgl. dazu auch S. 371 (zitiert in 5.2) und GGAI, S. XVIII.)

Freges Argument wäre also: Ein Vorstellungsinhalt wird vom Vorstellenden gebildet und existiert nur solange wie der Akt des Vorstellens dauert. Ein Gedanke (im Sinn Freges) ist hingegen zeitlos. Er existiert nicht erst, seitdem ihn jemand gedacht hat, und existiert auch dann, wenn niemand ihn denkt. Für ihn gilt also nicht *esse est cogitari*. Frege spricht jedoch wie gesagt nur von „Vorstellung" und „Gedanken" und faßt jene als Akt auf, diesen als Inhalt. Worin soll nun die spezifische Differenz zwischen Vorstellungs- und Gedankeninhalt liegen, auf die sich dieser Unterschied in ihrem ontologischen Status gründet? Frege meinte wohl, der Vorstellungsinhalt sei etwas Anschauliches, das durch unser sinnliches Empfinden geprägt sei, Gedankeninhalte seien hingegen begrifflich bestimmt. Anschauliches Vorstellen ist aber schon immer mit begrifflicher Bestimmung verbunden[3]. Es ist daher nicht ersichtlich, wieso Gedanken(inhalte) grundsätzlich objektiver sein sollten als Vorstellungsinhalte.

Frege bezeichnet die abstrakten Entitäten nicht als „wirklich". „Wirklich" nennt er nur die empirische Realität:

„Freilich ist der Gedanke nicht etwas, was man wirklich zu nennen gewohnt ist. Die Welt des Wirklichen ist eine Welt, in der dieses auf jenes wirkt, es verändert und selbst wieder Gegenwirkungen erfährt und dadurch verändert wird. Alles das ist ein Geschehen in der Zeit. Was zeitlos und unveränderlich ist, werden wir schwerlich als wirklich anerkennen. Ist nun der Gedanke veränderlich, oder ist er zeitlos? Der Gedanke, den wir im pythagoreischen

[3] Vgl. dazu z. B. Hanson (1958), Kap. 1.

Lehrsatz aussprechen, ist doch wohl zeitlos, ewig, unveränderlich. Aber gibt es nicht auch Gedanken, die heute wahr sind, nach einem halben Jahre aber falsch? Der Gedanke z. B., daß der Baum dort grün belaubt ist, ist doch wohl nach einem halben Jahre falsch? Nein; denn es ist gar nicht derselbe Gedanke. Der Wortlaut „dieser Baum ist grün belaubt" allein genügt ja nicht zum Ausdrucke, denn die Zeit des Sprechens gehört dazu. Ohne die Zeitbestimmung, die dadurch gegeben ist, haben wir keinen vollständigen Gedanken, d. h. überhaupt keinen Gedanken. Erst der durch die Zeitbestimmung ergänzte und in jeder Hinsicht vollständige Satz drückt einen Gedanken aus. Dieser ist aber, wenn er wahr ist, nicht nur heute oder morgen, sondern zeitlos wahr". (KS, S. 360 f.)

Gedanken sind nun nicht schlechthin unwirklich. Sie wirken, indem ein Mensch sie faßt und danach handelt. Das ist freilich keine Wirkung im physikalischen Sinn.

„Etwas ganz und in jeder Hinsicht Unwirksames wäre auch ganz unwirklich und für uns nicht vorhanden. Selbst das Zeitlose muß irgendwie mit der Zeitlichkeit verflochten sein, wenn es uns etwas sein soll. Was wäre ein Gedanke für mich, der nie von mir gefaßt würde! Dadurch aber, daß ich einen Gedanken fasse, trete ich zu ihm in eine Beziehung und er zu mir. Es ist möglich, daß derselbe Gedanke, der heute von mir gedacht wird, gestern nicht von mir gedacht wurde. Damit ist die strenge Unzeitlichkeit des Gedankens allerdings aufgehoben. Aber man wird geneigt sein, zwischen wesentlichen und unwesentlichen Eigenschaften zu unterscheiden und etwas als zeitlos anzuerkennen, wenn die Veränderungen, die es erfährt, nur die unwesentlichen Eigenschaften betreffen. Unwesentlich wird man eine Eigenschaft eines Gedankens nennen, die darin besteht oder daraus folgt, daß er von einem Denkenden gefaßt wird. Wie wirkt ein Gedanke? Dadurch, daß er gefaßt und für wahr gehalten wird. Das ist ein Vorgang in der Innenwelt eines Denkenden, der weitere Folgen in dieser Innenwelt haben kann, die, auf das Gebiet des Willens übergreifend, sich auch in der Außenwelt bemerkbar machen ... Das Wirken von Mensch auf Mensch wird zumeist durch Gedanken vermittelt. Man teilt einen Gedanken mit. Wie geschieht das? Man bewirkt Veränderungen in der gemeinsamen Außenwelt, die, von dem andern wahrgenommen, ihn veranlassen sollen, einen Gedanken zu fassen, und ihn für wahr zu halten. Die großen Begebenheiten der Weltgeschichte, konnten sie anders als durch Gedankenmitteilung zustande kommen? Und doch sind wir geneigt, die Gedanken für unwirklich zu halten, weil sie bei den Vorgängen untätig erscheinen, während das Denken, Urteilen, Aussprechen, Verstehen, alles Tun dabei Sache der Menschen ist. Wie ganz anders wirklich erscheint doch ein Hammer, verglichen mit einem Gedanken! Wie anders ist der Vorgang beim Überreichen eines Hammers, als bei der

Mitteilung eines Gedankens! Der Hammer geht aus einem Machtbereich in einen andern über, er wird ergriffen, erfährt dabei einen Druck, dadurch wird seine Dichte, die Lagerung seiner Teile stellenweise geändert. Von alledem hat man beim Gedanken eigentlich nichts. Der Gedanke verläßt bei der Mitteilung das Machtgebiet des Mitteilenden nicht; denn im Grunde hat der Mensch keine Macht über ihn. Indem der Gedanke gefaßt wird, bewirkt er Veränderungen zunächst nur in der Innenwelt des Fassenden; doch bleibt er selbst im Kerne seines Wesens davon unberührt, da die Veränderungen, die er erfährt, nur unwesentliche Eigenschaften betreffen. Es fehlt hier das, was wir im Naturgeschehen überall erkennen: die Wechselwirkung. Die Gedanken sind nicht durchaus unwirklich, aber ihre Wirklichkeit ist ganz anderer Art, als die der Dinge. Und ihr Wirken wird ausgelöst durch ein Tun der Denkenden, ohne das sie wirkungslos wären, wenigstens soweit wir sehen können. Und doch schafft der Denkende sie nicht, sondern muß sie nehmen, wie sie sind. Sie können wahr sein, ohne von einem Denkenden gefaßt zu werden, und sind auch dann nicht ganz unwirklich, wenigstens wenn sie gefaßt und dadurch in Wirksamkeit gesetzt werden können". (KS, S. 361 f.)

Bilden die abstrakten Entitäten, die Propositionen, Begriffe, Funktionen, Klassen und Wertverläufe (von den letzteren spricht Frege freilich in seinen späteren Schriften nicht mehr) eine Art supranaturaler Außenwelt, so stellt sich natürlich die Frage nach ihrer Erkennbarkeit. Frege sagt dazu:

„Es wird manchem, denke ich, unmöglich scheinen, von etwas Kunde zu erlangen, was nicht seiner Innenwelt angehört, außer durch Sinneswahrnehmung. In der Tat wird die Sinneswahrnehmung oft als die sicherste, ja sogar als die einzige Erkenntnisquelle für alles angesehen, was nicht der Innenwelt angehört. Aber mit welchem Rechte? Zur Sinneswahrnehmung gehört doch wohl als notwendiger Bestandteil der Sinneseindruck und dieser ist Teil der Innenwelt. Denselben haben zwei Menschen jedenfalls nicht, wenn sie auch ähnliche Sinneseindrücke haben mögen. Diese allein eröffnen uns nicht die Außenwelt. Vielleicht gibt es ein Wesen, das nur Sinneseindrücke hat, ohne Dinge zu sehen oder zu tasten. Das Haben von Gesichtseindrücken ist noch kein Sehen von Dingen. Wie kommt es, daß ich den Baum gerade dort sehe, wo ich ihn sehe? Offenbar liegt es an den Gesichtseindrücken, die ich habe, und an der besonderen Art von solchen, die dadurch zustande kommen, daß ich mit zwei Augen sehe. Auf jeder der beiden Netzhäute entsteht, physikalisch gesprochen, ein besonderes Bild. Ein anderer sieht den Baum an derselben Stelle. Auch er hat zwei Netzhautbilder, die aber von meinen abweichen. Wir müssen annehmen, daß diese Netzhautbilder für unsere Eindrücke bestimmend sind. Demnach haben wir nicht nur nicht dieselben, sondern merklich voneinander abweichende Gesichtseindrücke. Und doch bewegen wir uns in derselben Außenwelt. Das Haben von Gesichtseindrücken ist zwar nötig zum Sehen der Dinge, aber nicht hinreichend. Was noch hinzukommen muß, ist nichts Sinnliches. Und dieses ist es doch gerade, was uns die Außenwelt aufschließt; denn ohne dieses Nichtsinnliche bliebe jeder in seiner Innenwelt eingeschlossen. Da also die Entscheidung im Nichtsinnlichen liegt, könnte ein Nichtsinnliches auch da, wo keine Sinneseindrücke mitwirken, uns aus der Innenwelt hinausführen und uns Gedanken fassen lassen. Außer seiner Innenwelt hätte man zu unterscheiden die eigentliche Außenwelt der sinnlich wahrnehmbaren Dinge und das Reich desjenigen, was nicht sinnlich wahrnehmbar ist. Zur Anerkennung beider Reiche bedürften wir eines Unsinnlichen; aber bei der sinnlichen Wahrnehmung der Dinge hätten wir außerdem noch Sinneseindrücke nötig, und diese gehören ja ganz der Innenwelt an. So ist dasjenige, worauf der Unterschied des Gegebenseins eines Dinges von dem eines Gedankens hauptsächlich beruht, etwas, was keinem der beiden Reiche, sondern der Innenwelt zuzuweisen ist. So kann ich diesen Unterschied nicht so groß finden, daß dadurch das Gegebensein eines der Innenwelt nicht angehörenden Gedankens unmöglich werden könnte". (KS, S. 360.)

Das Nichtsinnliche, was nach Frege notwenig ist um von Eindrücken zu Wahrnehmungen oder Erfahrungen zu gelangen, sind Begriffe – hier berühren sich seine Ideen mit jenen von Kant. Erst indem wir unsere Eindrücke als Eindrücke von Gegenständen mit gewissen Attributen deuten, werden sie zu Wahrnehmungen einer Außenwelt. Die Objektivität dieser Außenwelt und ihre (relative) Unabhängigkeit von der Art und Weise, wie sie uns erscheint, wird u. a. dadurch deutlich, daß die Begriffe, die wir auf die Dinge anwenden, in gewissem Zusammenhang miteinander stehen wie z. B. in Naturgesetzen, so daß wir Beobachtungen durch andere Beobachtungen kontrollieren können. Eindrücke sind unkorrigierbar; es ist für das Subjekt unproblematisch, ob es diesen oder jenen Eindruck hat oder nicht. Daher rechnen wir Eindrücke zum Bereich des Subjektiven. Aussagen über die Welt sind hingegen problematisch, sie hängen also nicht nur von subjektiven Parametern ab. Freges Aussagen dazu haben wir schon in 10.1 referiert. In unserem Zitat betont er nun lediglich, daß auch empirische Erkenntnis sich schon mit Begriffen und Propositionen vollzieht, daß diese also nicht unerkennbar sein können. Die Frage ist aber doch, wie wir die abstrakten Entitäten und ihre Eigenschaften erkennen, von welcher Art diese Erkenntnis ist und ob auch sie die Möglichkeit des Irrtums einschließt. Dazu finden sich in Freges Texten nur wenige Bemerkungen. In GGAI sagt er:

„Die Frage nun, warum und mit welchem Rechte wir ein logisches Gesetz als wahr anerkennen, kann die Logik nur dadurch beantworten, daß sie es auf andere logische Gesetze zurückführt. Wo das nicht möglich ist, muß sie die Antwort schuldig bleiben. Aus der Logik heraustretend kann man sagen: wir sind durch unsere Natur und die äußeren Umstände zum Urteilen genötigt, und wenn wir urteilen, können wir dieses Gesetz – der Identität z. B. – nicht verwerfen, wir müssen es anerkennen, wenn wir nicht unser Denken in Verwirrung bringen und zuletzt auf jedes Urteil verzichten wollen. Ich will diese Meinung weder bestreiten noch bestätigen und nur bemerken, daß wir hier keine logische Folgerung haben. Nicht ein Grund des Wahrseins wird angegeben, sondern unseres Fürwahrhaltens. Und ferner: diese Unmöglichkeit, die für uns besteht, das Gesetz zu verwerfen, hindert uns zwar nicht, Wesen anzunehmen, die es verwerfen; aber sie hindert uns, anzunehmen, daß jene Wesen darin Recht haben; sie hindert uns auch, daran zu zweifeln, ob wir oder jene Recht haben“. (GGAI, S. XVII.)

Frege läßt es hier also offen, ob wir die Gesetze der Logik aufgrund unserer Vernunftorganisation anerkennen müssen, aber er betont, daß unsere Vernunftorganisation jedenfalls nicht der Grund der Wahrheit der logischen Gesetze ist, sondern allenfalls der Grund dafür, daß wir sie für wahr halten. Damit lehnt er eine Begründung der Logik ab, nach der die Gesetze der Logik Denkgesetze sind, die sich aus unserer Vernunftorganisation ergeben, handelt sich aber das Problem ein, warum wir annehmen können, daß das, was wir für wahr halten müssen, auch tatsächlich wahr ist. In nachgelassenen Entwürfen aus den Jahren 1924/25 (vgl. N, S. 286 ff. und S. 298 ff.) spricht Frege von einer „logischen Erkenntnisquelle“, die er von Sinneswahrnehmung und geometrischer Erkenntnisquelle unterscheidet. Er sagt aber nicht, was sie uns vermittelt und wie sie das tut. Sie ist

„beteiligt, wo Schlüsse gezogen werden ... Doch scheint es, daß durch diese allein uns keine Gegenstände gegeben werden“. (N, S. 299.)

Im zweiten Satz kommt Freges spätere Auffassung zum Ausdruck, die durch seine Skepsis bzgl. der Annahme von Klassen und Wertverläufen geprägt ist (vgl. 8.3). Im übrigen spricht er nur von den Täuschungen des Denkens – des Erfassens von Gedanken – durch die Sprache (N, S. 288 ff.).

War Frege ein Platonist? Die Antwort auf diese Frage hängt natürlich davon ab, wie man den Platonismus bestimmt, ist also z. T. eine Sache der Terminologie[4]. Es liegt aber nahe den Platonismus durch die These zu kennzeichnen: „Abstrakte Entitäten sind in ihrer Existenz wie Beschaffenheit unabhängig vom menschlichen Denken, von den einzelnen Denkakten wie der Existenz und Beschaffenheit menschlicher Vernunft überhaupt." In diesem Sinn war Frege kein Platonist, denn er behauptet zwar eine Unabhängigkeit der Existenz wie Beschaffenheit abstrakter Entitäten von den Akten des Denkens, aber nicht ihre Unabhängigkeit von menschlicher Vernunft. Er sagt:

> „So verstehe ich unter Objektivität eine Unabhängigkeit von unserm Empfinden, Anschauen und Vorstellen, von dem Entwerfen innerer Bilder aus den Erinnerungen früherer Empfindungen, aber nicht eine Unabhängigkeit von der Vernunft; denn die Frage beantworten, was die Dinge unabhängig von der Vernunft sind, hieße urteilen, ohne zu urteilen, den Pelz waschen, ohne ihn naß zu machen". (GLA, S. 36.)

Dieses Zitat steht im Kontext eines Arguments, mit dem Frege zeigen will, daß empirische Begriffe auf die Gegenstände selbst zutreffen, daß ihre Anwendung sich nicht (allein) nach unseren Empfindungen richtet, daß sie also einen objektiven Charakter haben. In ihm drückt sich aber ein klares Bewußtsein dafür aus, daß wir Objekte nur mit unseren Begriffen bestimmen können, so daß die Vorstellung davon, wie sie unabhängig von begrifflichen Bestimmungen sind, notwendig leer bleibt. Die Objektivität der abstrakten Entitäten ist für Frege also keine Unabhängigkeit von der Vernunft in dem Sinn, daß wir ihre Beschaffenheit an sich von der Art und Weise unterscheiden könnten, wie wir sie begreifen. Sie sind nicht Produkte des Denkens, aber sie sind das, als was wir sie begreifen, ebenso wie die Außenwelt zwar kein Produkt der Erfahrung ist, aber für uns doch immer nur das sein kann, was sich uns in der Erfahrung zeigt[5].

Wir wollen Freges Position „realistisch" nennen. Sie ist also schwächer als die des Platonismus. Sie besagt zunächst, daß abstrakte Entitäten keine Produkte einzelner Denkakte sind. Sie entstehen nicht durch solche Akte und existieren nicht nur, wenn sie gedacht werden; ihr *esse* besteht also, wie wir gesagt haben, nicht im *cogitari*.

[4] Zum Platonismus vgl. Dummett (1978).
[5] Vgl. dazu z. B. Kutschera (1981), Kap. 8.

Wenn Frege keine Unabhängigkeit der abstrakten Entitäten von der menschlichen Vernunft behauptet, so kann das bedeuten, daß sich eine solche Unabhängigkeit nicht begründet behaupten läßt, oder stärker, daß eine solche Unabhängigkeit nicht besteht. Die zweite Ansicht würde besagen, daß unsere Vernunftorganisation nicht nur die Menge der abstrakten Entitäten beschränkt, die wir erfassen können, sondern bestimmt, welche abstrakten Entitäten es gibt – diese wären also von vornherein als denkmögliche Entitäten bestimmt. Das obige Zitat aus GGAI, S. XVIII legt jedoch die erste Deutung nahe.

Der Platonismus scheitert an folgenden Schwierigkeiten: Nach ihm sind die abstrakten Entitäten dem Denken ebenso vorgegeben wie die Gegenstände der Außenwelt. Damit stellen sich erstens auch analoge erkenntnistheoretische Probleme, also z. B. wie (kraft welcher Fähigkeit) wir eine Wirklichkeit erkennen können, die nach Voraussetzung von unserem Denken völlig unabhängig ist, und wie wir insbesondere sicher sein können, daß unsere Annahmen über diese Wirklichkeit richtig sind. Gravierender noch ist ein zweites Bedenken: Von einer von unserem Denken (und Erfassen) unabhängigen Realität kann es keine apriorische, insbesondere keine analytische Erkenntnis geben. Aussagen über abstrakte Entitäten (daß ein Begriff eine zweistellige Beziehung ist, daß er transitiv ist, daß ein Begriff Oberbegriff eines anderen ist etc.) gelten aber analytisch. Drittens sind Begriffe (1. Stufe) Formen des Bestimmens von Objekten, und Propositionen sind Inhalte von Akten des Denkens (Glaubens, Urteilens, Annehmens etc.). Aus der Tatsache, daß ich jetzt ein Ding als rot begreife (wahrnehme), folgt die Existenz des Begriffes Rot, und aus der Tatsache, daß ich jetzt glaube, daß dieses Ding rot ist, folgt die Existenz der Proposition, daß es rot ist. Anders ausgedrückt: Begriffe sind Prädikatbedeutungen, die ergeben sich aber durch die Verwendung der Prädikate in der betreffenden Sprachgemeinschaft, also aus Konventionen. Begriffe werden also mit der Sprache gebildet, und Analoges gilt für Propositionen. Daß die Verwendung von Begriffen und Propositionen durch uns eine hinreichende Bedingung für ihre objektive Existenz ist, läßt sich aber nach dem Platonismus nicht verstehen: Er geht von einer klaren Unterscheidung von Sein und Denken aus, und die besteht im Bereich der abstrakten Entitäten nicht. Viertens setzt das Erkennen oder Erfassen von Gegenständen die Verwendung von Begriffen voraus und Denken vollzieht sich in Propositionen. Begriffe und Propositionen sind also Voraussetzungen und Mittel des Denkens, nicht nur seine Gegenstände. Wie sollten wir die objektiven Begriffe erkennen oder erfassen, ohne dabei schon Begriffe zu verwenden? Diesen Problemen begegnet auch der Realismus Freges, wobei die Einwände 2 und 3 nur dann gemildert würden, wenn man von einer Abhängigkeit der abstrakten Entitäten von der Vernunft ausginge, wofür sich aber bei Frege kein Beleg findet.

Freges Anliegen war, die Vermischung von Akt, Inhalt und Gegenstand des Vorstellens und Denkens im Wort „Vorstellung" in der psychologistischen Logik seiner Zeit aufzudecken und einen deutlichen Unterschied zwischen Akten und Inhalten des Denkens zu machen. Er wollte ferner die Objektivität der Inhalte gegenüber der Subjektivität der Akte betonen und die Unabhängigkeit der Existenz der Inhalte von ihrem Gedachtwerden. Diesem Anliegen trägt aber auch der *Konzeptualismus* Rechnung, der die Probleme von Platonismus und Realismus vermeidet, wenn man ihn anders bestimmt als Frege das tat – für ihn fiel er mit dem Psychologismus zusammen. Der Konzeptualismus geht davon aus, daß Propositionen Inhalte des Denkens sind – man denkt (nimmt an, glaubt, etc.), daß etwas der Fall ist. Diese Inhalte können, im Gegensatz zu den Akten, verschiedenen Personen gemeinsam sein, sie sind also objektiv im Sinne von intersubjektiv. Da man begriffliches Denken als stilles Sprechen auffassen kann und es sich jedenfalls im Rahmen der Ausdrucksmöglichkeiten einer Sprache vollzieht, sind Propositionen Satzbedeutungen und Begriffe Prädikatbedeutungen. Die Sprache, die wir verwenden, bzw. ihre Bedeutungswelt ist also der Rahmen, in dem sich unser Denken bewegt, und insofern sind die abstrakten Entitäten sprachabhängig. Von ihrer Existenz kann man nur relativ zu einer Sprache reden. Wie die Sprache nicht Produkt des Sprechens (der einzelnen Sprechakte) ist, sondern der vorgegebene Rahmen, in dem sich Sprechen vollzieht (wenn natürlich auch eine Änderung der Sprechgewohnheiten die Sprache verändert), so sind sprachliche Bedeutungen und die abstrakten Entitäten nicht Produkte einzelner Denkakte, sondern das Inventar der Denkmöglichkeiten, welche die Sprache eröffnet. Man kann zwar sagen, daß eine Sprache keine Ausdrucksmöglichkeiten für bestimmte Begriffe oder Propositionen enthält, daß es also abstrakte Entitäten gibt, die nicht zum Inventar dieser Sprache gehören, aber Beispiele dafür lassen sich nur in einer anderen Sprache angeben. Selbst wenn man von der Gesamtheit aller Begriffe und Propositionen redet, die sich in irgendeiner (möglichen) Sprache ausdrücken lassen, bleibt ihre Beziehung auf Sprache und Denken erhalten. Auch im Sinn des Konzeptualismus sind abstrakte Entitäten zeitlos – sie sind dem individuellen Denken vorgegeben und zeitliche Bestimmungen werden nur auf empirische Objekte angewendet.

Abgesehen von ontologischen und erkenntnistheoretischen Fragen ist der Unterschied zwischen Konzeptualismus und Platonismus (bzw. Realismus) auch für die Logik relevant. Für den Platonisten ist z. B. die Gesamtheit aller Mengen, die sich über einer Klasse von Individuen bilden lasen, fertig vorgegeben. Für den Konzeptualisten gibt es hingegen nur jene Mengen, die sich auf irgendeinem Weg konstruktiv erzeugen lassen. Diese schrittweise Konstruktion ergibt eine Hierarchie von Mengen, eine Quasiordnung, in der jede Menge nur Elemente enthält, die ihr in dieser Ordnung vorhergehen, und dabei ist nicht gesagt, daß eine solche Hierarchie alle Mengen enthält, die für den Realisten existieren. Realismus und Konzeptualismus können also zu unterschiedlichen Logiksystemen führen, und diese Unterschiede sind für das Antinomienproblem relevant.

10.3 Der Gegenstand der Logik

Für Aristoteles war Logik die Theorie der Schlüsse, Sätze und Begriffe. Frege hat eine zweite klassisch zu nennende Bestimmung des Gegenstands der Logik angegeben: Ihr Thema sind die *Gesetze des Wahrseins*:

„Wie das Wort „schön“ der Ästhetik und „gut“ der Ethik, so weist „wahr“ ... der Logik die Richtung. Zwar haben alle Wissenschaften Wahrheit als Ziel; aber die Logik beschäftigt sich noch in ganz anderer Weise mit ihr. Sie verhält sich zur Wahrheit etwa so, wie die Physik zur Schwere oder zur Wärme. Wahrheiten zu entdecken, ist Aufgabe aller Wissenschaften; der Logik kommt es zu, die Gesetze des Wahrseins zu erkennen. Man gebraucht das Wort „Gesetz“ in doppeltem Sinne. Wenn wir von Sittengesetzen und Staatsgesetzen sprechen, meinen wir Vorschriften, die befolgt werden sollen, mit denen das Geschehen nicht immer im Einklang steht. Die Naturgesetze sind das Allgemeine des Naturgeschehens, dem dieses immer gemäß ist.

Mehr in diesem Sinne spreche ich von Gesetzen des Wahrseins. Freilich handelt es sich hierbei nicht um ein Geschehen, sondern um ein Sein. Aus den Gesetzen des Wahrseins ergeben sich nun Vorschriften für das Fürwahrhalten, das Denken, Urteilen, Schließen. Und so spricht man wohl auch von Denkgesetzen. Aber hierbei liegt die Gefahr nahe, verschiedenes zu vermischen. Man versteht vielleicht das Wort „Denkgesetz" ähnlich wie „Naturgesetz" und meint dabei das Allgemeine im seelischen Geschehen des Denkens. Ein Denkgesetz in diesem Sinne wäre ein psychologisches Gesetz. Und so kann man zu der Meinung kommen, es handle sich in der Logik um den seelischen Vorgang des Denkens und um die psychologischen Gesetze, nach denen es geschieht. Aber damit wäre die Aufgabe der Logik verkannt; denn hierbei erhält die Wahrheit nicht die ihr gebührende Stellung. Der Irrtum, der Aberglaube hat ebenso seine Ursachen wie die richtige Erkenntnis. Das Fürwahrhalten des Falschen und das Fürwahrhalten des Wahren kommen beide nach psychologischen Gesetzen zustande. Eine Ableitung aus diesen und eine Erklärung eines seelischen Vorganges, der in ein Fürwahrhalten ausläuft, kann nie einen Beweis dessen ersetzen, auf das sich dieses Fürwahrhalten bezieht. Können bei diesem seelischen Vorgange nicht auch logische Gesetze beteiligt gewesen sein? Ich will das nicht bestreiten; aber wenn es sich um Wahrheit handelt, kann die Möglichkeit nicht genügen. Möglich, daß auch Nichtlogisches beteiligt gewesen ist und von der Wahrheit abgelenkt hat. Erst nachdem wir die Gesetze des Wahrseins erkannt haben, können wir das entscheiden; dann aber werden wir die Ableitung und Erklärung des seelischen Vorganges wahrscheinlich entbehren können, wenn es uns darauf ankommt zu entscheiden, ob das Fürwahrhalten, in das es ausläuft, gerechtfertigt ist. Um jedes Mißverständnis auszuschließen und die Grenze zwischen Psychologie und Logik nicht verwischen zu lassen, weise ich der Logik die Aufgabe zu, die Gesetze des Wahrseins zu finden, nicht die des Fürwahrhaltens oder Denkens. In den Gesetzen des Wahrseins wird die Bedeutung des Wortes „wahr" entwickelt". (KS, S. 342f., aus LUI.)

Frege unterscheidet also normative und deskriptive Gesetze, und die logischen Gesetze des Wahrseins von den ebenfalls deskriptiven psychologischen Gesetzen des Denkens und von normativen Vorschriften für das Denken. In der Logik geht es um Geltungsfragen, in der Psychologie um die Frage, wie Denkvorgänge tatsächlich ablaufen, unabhängig davon, ob richtig oder falsch gedacht wird. Aus den Gesetzen des Wahrseins ergeben sich Forderungen für richtiges Schließen, aber die Gesetze der Logik sind nicht als Vorschriften, sondern als Behauptungen formuliert. Ähnlich äußert sich Frege in GGAI:

„Daß die logischen Gesetze Richtschnuren für das Denken sein sollen zur Erreichung der Wahrheit, wird zwar vorweg allgemein zugegeben; aber es gerät nur zu leicht in Vergessenheit. Der Doppelsinn des Wortes „Gesetz" ist hier verhängnisvoll. In dem einen Sinne besagt es, was ist, in dem andern schreibt es vor, was sein soll. Nur in diesem Sinne können die logischen Gesetze Denkgesetze genannt werden, indem sie festsetzen, wie gedacht werden soll. Jedes Gesetz, das besagt, was ist, kann aufgefaßt werden als vorschreibend, es solle im Einklange damit gedacht werden, und ist also in dem Sinne ein Denkgesetz. Das gilt von den geometrischen und physikalischen nicht minder als von den logischen. Diese verdienen den Namen „Denkgesetze" nur dann mit mehr Recht, wenn damit gesagt sein soll, daß sie die allgemeinsten sind, die überall da vorschreiben, wie gedacht werden soll, wo überhaupt gedacht wird. Aber das Wort „Denkgesetz" verleitet zu der Meinung, diese Gesetze reagierten in derselben Weise das Denken, wie die Naturgesetze die Vorgänge in der Außenwelt. Dann können sie nichts anderes als psychologische Gesetze sein; denn das Denken ist ein seelischer Vorgang. Und wenn die Logik mit diesen psychologischen Gesetzen zu tun hätte, so wäre sie ein Teil der Psychologie. Und so wird sie in der Tat aufgefaßt. Als Richtschnuren können diese Denkgesetze dann in der Weise aufgefaßt werden, daß sie einen mittlern Durchschnitt angeben, ähnlich wie man sagen kann, wie die gesunde Verdauung beim Menschen vor sich geht, oder wie man grammatisch richtig spricht, oder wie man sich modern kleidet. Man kann dann nur sagen: nach diesen Gesetzen richtet sich im Durchschnitt das Fürwahrhalten der Menschen, jetzt und soweit die Menschen bekannt sind; wenn man also mit dem Durchschnitte im Einklang bleiben will, richte man sich nach ihnen. Aber, wie das, was heute modern ist, nach einiger Zeit nicht mehr modern sein wird und bei den Chinesen jetzt nicht modern ist, so kann man die psychologischen Denkgesetze auch nur mit Einschränkungen als maßgebend hinstellen. Ja, wenn es sich in der Logik um das Fürwahrgehaltenwerden handelte, und nicht vielmehr um das Wahrsein! Und das verwechseln die psychologischen Logiker ... Wenn so das Wahrsein unabhängig davon ist, daß es von irgendeinem anerkannt wird, so sind auch die Gesetze des Wahrseins nicht psychologische Gesetze, sondern Grenzsteine in einem ewigen Grunde befestigt, von unserm Denken überflutbar zwar, doch nicht verrückbar. Und weil sie das sind, sind sie für unser Denken maßgebend, wenn es die Wahrheit erreichen will. Sie stehen nicht in dem Verhältnisse zum Denken, wie die grammatischen Gesetze zur Sprache, so daß sie das Wesen unseres menschlichen Denkens zum Ausdruck brächten und sich mit ihm änderten". (GGAI, S. XV f.)

Gesetze des Wahrseins werden insbesondere in Schlüssen formuliert, die besagen, daß aus der Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion folgt. Daher ist die Logik auch nach Freges Bestimmung eine Theorie des Schließens. Schon in den GLA (vgl. 4.1) hatte er betont, daß die Gesetze der Logik für alle Gegenstandsbereiche gelten. Die Logik ist also für alle Wissenschaften relevant, zumal Frege auch die Definitionstheorie zur Logik zählt.

Wahrheiten sind ewig und unabhängig von unserem Fürwahrhalten:

„‚2 mal 2 ist 4‘ bleibt wahr, auch wenn infolge darwinscher Entwicklung alle Menschen dahin kämen zu behaupten, 2 mal 2 sei 5. Jede Wahrheit ist ewig und unabhängig davon, ob sie gedacht werde, und von der psychologischen Beschaffenheit dessen, der sie denkt“. (N, S. 190.)

Hier betont Frege noch einmal die Objektivität des Wahrseins und impliziert seine Unabhängigkeit von der menschlichen Vernunft, von der er in GLA, S. 36 (vgl. das Zitat in 10.2) sagte, daß sie sich nicht begründen lasse. Die Erkennbarkeit von Wahrheiten hängt hingegen naturgemäß von unserer Verstandesorganisation ab.

Freges Bestimmung der logischen Gesetze als Gesetze des Wahrseins gibt Anlaß, noch einmal auf seine Konzeption der Wahrheit zurückzukommen. Bei der Darstellung seiner Gedanken aus SB hatten wir in 5.2 gesehen, daß er dort das Wort „wahr“ nicht als Prädikat auffaßt, sondern als Namen für den Wahrheitswert des Wahren. In anderen Kontexten hingegen behandelt er es auch, seiner grammatischen Form entsprechend, als Prädikat, z. B. in dem Text, den wir in 10.2 aus KS, S. 345 zitiert haben. In LUI kommt er noch einmal auf das Thema zurück und unterscheidet zunächst den für die Logik allein relevanten Sinn des Wortes „wahr“, den es in Anwendung auf Gedanken (oder Sätze) hat, von anderen Verwendungen, wie z. B. „wahrer Freund“ (KS, S. 343).

Er setzt sich dann kritisch mit der *Adäquationstheorie* der Wahrheit auseinander. Sie ist nach Frege von der Relation eines Bildes zu seinem Urbild abgezogen. Aber Wahrheit ist keine Relation:

„Das Wort „wahr“ erscheint sprachlich als Eigenschaftswort. Dabei entsteht der Wunsch, das Gebiet enger abzugrenzen, auf dem die Wahrheit ausgesagt werden, wo überhaupt Wahrheit in Frage kommen könne. Man findet die Wahrheit ausgesagt von Bildern, Vorstellungen, Sätzen und Gedanken. Es fällt auf, daß hier sichtbare und hörbare Dinge zusammen mit Sachen vorkommen, die nicht mit den Sinnen wahrgenommen werden können. Das deutet darauf hin, daß Verschiebungen des Sinnes vorgekommen sind. In der Tat! Ist denn ein Bild als bloßes sichtbares, tastbares Ding eigentlich wahr? und ein Stein, ein Blatt ist nicht wahr? Offenbar würde man das Bild nicht wahr nennen, wenn nicht eine Absicht dabei wäre. Das Bild soll etwas darstellen. Auch die Vorstellung wird nicht an sich wahr genannt, sondern nur im Hinblick auf eine Absicht, daß sie mit etwas übereinstimmen solle. Danach kann man vermuten, daß die Wahrheit in einer Übereinstimmung eines Bilds mit dem Abgebildeten bestehe. Eine Übereinstimmung ist eine Beziehung. Dem widerspricht aber die Gebrauchsweise des Wortes „wahr", das kein Beziehungswort ist, keinen Hinweis auf etwas anderes enthält, mit dem etwas übereinstimmen solle. Wenn ich nicht weiß, daß ein Bild den Kölner Dom darstellen solle, weiß ich nicht, womit ich das Bild vergleichen müsse, um über seine Wahrheit zu entscheiden. Auch kann eine Übereinstimmung ja nur dann vollkommen sein, wenn die übereinstimmenden Dinge zusammenfallen, also gar nicht verschiedene Dinge sind. Man soll die Echtheit einer Banknote prüfen können, indem man sie mit einer echten stereoskopisch zur Deckung zu bringen sucht. Aber der Versuch, ein Goldstück mit einem Zwanzigmarkschein stereoskopisch zur Deckung zu bringen, wäre lächerlich. Eine Vorstellung mit einem Dinge zur Deckung zu bringen, wäre nur möglich, wenn auch das Ding eine Vorstellung wäre. Und wenn dann die erste mit der zweiten vollkommen übereinstimmt, fallen sie zusammen. Aber das will man gerade nicht, wenn man die Wahrheit als Übereinstimmung einer Vorstellung mit etwas Wirklichem bestimmt. Dabei ist es gerade wesentlich, daß das Wirkliche von der Vorstellung verschieden sei. Dann aber gibt es keine vollkommene Übereinstimmung, keine vollkommene Wahrheit. Dann wäre überhaupt nichts wahr; denn was nur halb wahr ist, ist unwahr. Die Wahrheit verträgt kein Mehr oder Minder. Oder doch? Kann man nicht festsetzen, daß Wahrheit bestehe, wenn die Übereinstimmung in einer gewissen Hinsicht stattfinde? Aber in welcher? Was müßten wir dann aber tun, um zu entscheiden, ob etwas wahr wäre? Wir müßten untersuchen, ob es wahr wäre, daß – etwa eine Vorstellung und ein Wirkliches – in der festgesetzten Hinsicht übereinstimmten. Und damit ständen wir wieder vor einer Frage derselben Art, und das Spiel könnte von neuem beginnen. So scheitert dieser Versuch, die Wahrheit als eine Übereinstimmung zu erklären. So scheitert aber auch jeder andere Versuch, das Wahrsein zu definieren. Denn in einer Definition gäbe man gewisse Merkmale an. Und bei der Anwendung auf einen besonderen Fall käme es dann immer darauf an, ob es wahr wäre, daß diese Merkmale zuträfen. So drehte man sich im Kreise. Hiernach ist es wahrscheinlich, daß der Inhalt des Wortes „wahr" ganz einzigartig und undefinierbar ist". (KS, S. 343 f.)

Sachverhalte könnten, so meint Frege, nur wahr genannt werden, wenn sie mit Tatsachen übereinstimmen. Aber Tatsachen sind wahre Sachverhalte, und so wiederholt sich die Frage nach dem Wahrsein ins Unendliche. A. Tarski hat das Wahrheitsprädikat in Anwendung auf Sätze so bestimmt, daß ein Satz genau dann wahr ist, wenn der Sachverhalt besteht, den er ausdrückt. Ebenso könnte man das Prädikat in Anwendung auf Sachverhalte so erklären, daß man sagt: Ein Sachverhalt ist genau dann wahr, wenn er besteht. Diese Erklärung ist korrekt, da der Ausdruck „wahr" im Definiens nicht vorkommt. Sie vermeidet zudem den fragwürdigen Begriff einer Übereinstimmung eines mentalen Zustands mit einem realen, wobei gerade die Verschiedenheit beider vorausgesetzt wird, wie Frege sagt. Entsprechend wird man auch die Wahrheit von Propositionen oder Gedanken bestimmen, denn auch sie sind Sachverhalte[6].

In SB hatte Frege gesagt: Das Verhältnis des Gedankens zur Wahrheit ist nicht das eines Subjekts zum Prädikat, sondern das des Sinnes eines Satzes zu seiner Bedeutung. Diese Auffassung wiederholt er in LUI:

„In der Form des Behauptungssatzes sprechen wir die Anerkennung der Wahrheit aus. Wir brauchen dazu das Wort „wahr" nicht. Und selbst, wenn wir es gebrauchen, liegt die eigentlich behauptende Kraft nicht in ihm, sondern in der Form des Behauptungssatzes, und wo diese ihre behauptende Kraft verliert, kann auch das Wort „wahr" sie nicht wieder herstellen. Das geschieht, wenn wir nicht im Ernste sprechen". (KS, S. 347.)

Frege betont zurecht, daß das Wort „wahr" nicht den Akt des Behauptens, die behauptende Verwendung von Aussagesätzen ersetzen kann. Im Behaupten eines Satzes beziehen wir ihn auf die Realität. Das Wort „wahr" stellt diesen Bezug nicht her, denn der Satz „‚2+2=4' ist wahr" (oder „Der Gedanke, daß 2+2=4 ist, ist wahr") drückt zunächst ebenso wie der Satz „2+2=4" nur einen Gedanken aus, der erst durch die Behauptung auf die Realität bezogen wird. Frege würde wohl sagen: Die Wahrheitskonvention Tarskis erklärt zwar, wie wir das Wort „wahr" gebrauchen, aber nicht die Funktion der behauptenden Rede. Eine Erklärung des

6 Man könnte einen Unterschied zwischen Propositionen als Satzinhalten und Sachverhalten als objektiven, von unserer Sprache wie unserem Denken unabhängigen Gegebenheiten machen. Aber das paßt erstens nur auf Tatsachen (bestehende Sachverhalte), und zweitens kann man mit der Vorstellung eines Sachverhalts, der kein möglicher Gedanken- oder Satzinhalt ist, kaum einen vernünftigen Sinn verbinden.

Wortes, nach der es redundant ist – man bezeichnet Tarskis Theorie auch als „Redundanztheorie der Wahrheit" –, zeigt, daß das Entscheidende der Frage nach Wahrheit verfehlt ist. Nach Frege ist Wahrheit nicht definierbar – ebensowenig, könnte man sagen, wie Realität, denn die ist die Menge der bestehenden Sachverhalte; welche Sachverhalte bestehen, läßt sich aber nur von Fall zu Fall sagen. Ebenso läßt sich Wahrheit nicht in einer informativen Weise generell definieren, denn die Wirklichkeit ist für uns ein offener Bereich, den wir nicht überblicken. Die Beziehung eines Satzes zur Wirklichkeit ist sein Bezug und daher sagt Frege, daß Wahrheit keine Eigenschaft von Gedanken ist, sondern deren Bezug:

> „Daraus ist zu entnehmen, daß das Verhältnis des Gedankens zum Wahren doch mit dem des Subjekts zum Prädikate nicht verglichen werden darf. Subjekt und Prädikat sind ja (im logischen Sinne verstanden) Gedankenteile; sie stehen auf derselben Stufe für das Erkennen. Man gelangt durch die Zusammenfügung von Subjekt und Prädikat immer nur zu einem Gedanken, nie von einem Sinne zu dessen Bedeutung, nie von einem Gedanken zu dessen Wahrheitswerte. Man bewegt sich auf derselben Stufe, aber man schreitet nicht von einer Stufe zur nächsten vor. Ein Wahrheitswert kann nicht Teil eines Gedankens sein, sowenig wie etwa die Sonne, weil er kein Sinn ist, sondern ein Gegenstand". (KS, S. 150.)

Aus Freges Überlegungen folgt aber nicht, daß Wahr und Falsch keine Eigenschaften von Gedanken sind, denn es ist sicher eine Eigenschaft eines Gedankens, daß sein Wahrheitswert das Wahre bzw. das Falsche ist. Es ist freilich nicht eine Eigenschaft, die der Gedanke als solcher hat, sondern eine Eigenschaft, die ihm kraft seiner Beziehung auf die Wirklichkeit zukommt.

10.4 Geometrie

Zu den Grundlagen der Geometrie finden sich in den Schriften Freges nur wenige Äußerungen. Seine Ausführungen in GLG beziehen sich lediglich auf das Problem der impliziten Definitionen. Sie zeigen aber immerhin, daß er Hilberts Ansatz zur Algebraisierung der Geometrie nicht akzeptiert hat. Für ihn gab es nicht beliebige, durch verschiedene Axiomensysteme bestimmte Geometrien, sondern nur eine wahre Geometrie, die euklidische, die nicht durch ein Axiomensystem definiert wird, sondern umgekehrt die Axiome der euklidischen Theorie als wahre Aussagen auszeichnet. Neben der Dissertation und der Habilitationsschrift (vgl. KS, S. 50) sind die GLA (bes. S. 19–21, 35 f., 101 f.) und drei Stücke aus dem Nachlaß (N, S. 182 ff., 286 ff., 298 ff.) unsere einzige Quelle für Freges Auffassung über die Grundlagen der Geometrie. Frege schreibt zwar am 27. 12. 1899 an Hilbert, er habe sich früher selbst damit befaßt, unter seinen Veröffentlichungen wie im Nachlaß findet sich jedoch keine systematische Abhandlung dazu.

Wir wollen zunächst die wichtigsten Aussagen Freges über die Grundlagen der Geometrie referieren. In seiner Dissertation sagt er, die Gültigkeit der geometrischen Axiome leite sich aus der Natur unseres Anschauungsvermögens her (KS, S. 1). Auch in der Habilitationsschrift heißt es, Anschauung sei die Quelle der geometrischen Axiome (KS, S. 50). In der Rezension von H. Cohens „Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte" meint er, die geometrischen Gegenstände seien zwar objektiv, aber nicht real. Das entspricht wohl der idealistischen Auffassung Kants, denn den Begriff des objektiven Nichtwirklichen hat Frege erst später entwickelt. In den GLA nimmt er an, daß geometrische Erkenntnis synthetisch und apriorisch ist (GLA, S. 101 f.). Geometrie beruht auf Raumanschauung und die zeichnet die euklidische Geometrie aus. Die synthetische Natur der geometrischen Axiome ergibt sich daraus, daß sich begriffliches Denken auch mit anderen Geometrien befassen kann.

„Der Raum gehört nach Kant der Erscheinung an. Es wäre möglich, daß er andern Vernunftwesen sich ganz anders als uns darstellte. Ja, wir können nicht einmal wissen, ob er dem einen Menschen sowie dem andern erscheint; denn wir können die Raumanschauung des einen nicht neben die des andern legen, um sie zu vergleichen. Aber dennoch ist darin etwas Objektives enthalten; Alle erkennen dieselben geometrischen Axiome, wenn auch nur durch die Tat, an und müssen es, um sich in der Welt zurechtzufinden. Objektiv ist darin das Gesetzmäßige, Begriffliche, Beurteilbare, was sich in Worten ausdrücken läßt. Das rein Anschauliche ist nicht mitteilbar. Nehmen wir zur Verdeutlichung zwei Vernunftwesen an, denen nur die projektivischen Eigenschaften und Beziehungen anschaulich sind: das Liegen von drei Punkten in einer Gerade, von vier Punkten in einer Ebene, usw.; es möge dem einen das als Ebene erscheinen, was das andere als Punkt anschaut und umgekehrt. Was dem einen die Verbindungslinie von Punkten ist, möge dem andern die Schnittkante von Ebenen sein usw. immer dualistisch entsprechend. Dann könnten sie sich sehr wohl miteinander verständigen und würden die Verschiedenheit ihres Anschauens nie gewahr werden, weil in der projektivischen Geometrie jedem Lehrsatze ein anderer dualistisch gegenübersteht; denn das Abweichen in einer ästhetischen Wertschätzung würde kein sicheres Zeichen sein. In Bezug auf alle geometrische Lehrsätze wären sie völlig im Einklange; sie würden sich nur die Wörter in ihre Anschauung verschieden übersetzen. Mit dem Worte „Punkt" verbände etwa das eine diese, das andere jene Anschauung. So kann man immerhin sagen, daß ihnen dies Wort etwas Objektives bedeute; nur darf man unter dieser Bedeutung nicht das Besondere ihrer Anschauung verstehen". (GLA, S. 35 f.)

Nach Frege entspricht das Verhältnis subjektiver räumlicher Anschauungen zur Objektivität der Geometrie dem Verhältnis von Sinnesempfindungen zur Objektivität physikalischer Sachverhalte: In beiden Fällen wird Objektivität durch die begriffliche Bestimmung des Empfundenen bzw. Angeschauten erreicht (vgl. dazu die Bemerkungen in 10.2). Damit differenziert Frege nun die Aussage, Geometrie beruhe auf Anschauung. Räumliche Anschauungen sind subjektiv, sie sind Vorstellungen im weiten Sinn Freges. Diese Vorstellungen können also auch nicht den einzelnen Termen wie „Punkt", „Gerade" oder „Ebene" eine feste Bedeutung verleihen, die ergibt sich allein aus Beziehungen dieser Begriffe, wie sie sich in den Axiomen ausdrücken. Dieser Gedanke, konsequent weitergeführt, hätte Frege einen Zugang zum Hilbertschen Ansatz eröffnet. Die Frage, wie Anschauung als etwas Subjektives die objektive Geltung der geometrischen Axiome begründen kann, verfolgt Frege jedoch in den GLA nicht weiter, deren Thema ja auch die Arithmetik ist. Seine Hinweise auf die Geometrie dienen nur dazu, die Eigenart der Arithmetik ihr gegenüber herauszustellen. Gegen eine Begründung der Geometrie durch Anschauung ließen sich ähnliche Einwände erheben wie sie Frege gegen die anschauliche Begründung der Arithmetik bei Kant geltend gemacht hat (vgl. dazu GLA, S. 5 f. und unseren Abschnitt 4.2): Einfache geometrische Sachverhalte sind anschaulich evident, komplexe nicht; zwischen beiden gibt es aber keine scharfe Grenze. Anschauungen sind als Vorstellungen ferner immer Anschauungen von partikulären Sachverhalten, Allgemeinvorstellungen gibt es nicht, wie Frege selbst betont. Wie lassen sich aber generelle geometrische Sätze anschaulich begründen? Frege sagt dazu (GLA, S. 19 f.), Punkte, Geraden, Ebenen etc. seien keine

Individuen, wir unterschieden sie nur relativ zueinander. Geometrische Anschauung zeigt uns danach im Gegensatz zu jener von konkreten Dingen einen generellen Sachverhalt, daß z. B. alle Punkte und Geraden, die in den gegebenen Beziehungen zueinander stehen, auch in den und den anderen Beziehungen zueinander stehen. Das löst aber das Problem nicht: Wieso zeigt die Anschauung, daß sich in einem Dreieck mit bestimmten Winkeln die Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden, daß das in allen Dreiecken so ist? Anschaulich sind spitz-, stumpf- und rechtwinklige Dreiecke durchaus verschieden und die Seiten und Seitenhalbierenden stehen hier nicht alle im selben Verhältnis zueinander.

Die drei Stücke aus dem Nachlaß sind wenig bedeutsam, was die Geometrie angeht. Das Fragment „Über Euklidische Geometrie" (1899–1906, also aus der Zeit der Auseinandersetzung mit Hilbert, vgl. N, S. 182 ff.) enthält nur die These, die euklidische Geometrie sei mit anderen unverträglich. Frege geht von seinem Axiomenbegriff aus, nach dem Axiome wahre Sätze mit wohlbestimmter Bedeutung sind, und sagt:

„Wer die euklidische Geometrie für wahr hält, wird jedem ihrer Lehrsätze einen Sinn zuerkennen, er wird in jedem ihrer Lehrsätze eine Wahrheit ausgedrückt finden. Damit ist von selbst gegeben, daß er die Begriffswörter „Punkt", Gerade", „Ebene" als sinnvoll anerkennt. In der euklidischen Geometrie sind gewisse Wahrheiten als Axiome überliefert worden. Wer einen Gedanken für falsch hält, kann ihn nicht als Axiom anerkennen; denn ein Axiom ist eine Wahrheit". (N, S. 183.)

Wenn also die Wörter „Punkt", „Gerade", „Ebene" etc. eine bestimmte Bedeutung haben, so können nicht Sätze mit diesen Termen, die im Widerspruch zueinander stehen, zugleich wahr sein. In diesem Sinn sagt Frege:

„Niemand kann zwei Herren dienen. Man kann nicht der Wahrheit dienen und der Unwahrheit. Wenn die euklidische Geometrie wahr ist, so ist die nichteuklidische Geometrie falsch, und wenn die nichteuklidische wahr ist, so ist die euklidische Geometrie falsch ... Wer die euklidische Geometrie als wahr anerkennt, muß die nichteuklidische als falsch verwerfen, und wer die nichteuklidische als wahr anerkennt, muß die euklidische verwerfen. Man hat einst geglaubt, eine Wissenschaft zu betreiben, die man Alchimie nannte; als man aber erkannt hatte, daß diese vermeintliche Wissenschaft durch und durch irrtümlich war, verbannte man sie aus der Reihe der Wissenschaften. Ebenso hat man einst geglaubt, eine Wissenschaft zu betreiben, die man

Astrologie nannte. Auch diese verbannte man aus der Reihe der Wissenschaften, nachdem man ihre Unwissenschaftlichkeit durchschaut hatte. Jetzt handelt es sich darum, die euklidische oder nichteuklidische Geometrie aus der Reihe der Wissenschaften zu streichen und der Alchimie und Astrologie als Mumie anzureihen. Wo man sich nur von Vorstellungen umgaukeln lassen will, braucht man es nicht so ernst zu nehmen; in der Wissenschaft aber muß das Wahrheitsstreben eine strenge Herrschaft führen. Da heißt es: entweder herein oder hinaus! Soll nun die euklidische oder die nichteuklidische Geometrie hinausfliegen? Das ist die Frage. Wagt man es, Euklids Elemente, die mehr als 2000 Jahre ein unbestrittenes Ansehen behauptet haben, als Astrologie zu behandeln? Nur dann, wenn man es nicht wagt, kann man auch Euklids Axiome nicht als falsch oder zweifelhaft hinstellen. Dann muß die nichteuklidische Geometrie zu den Unwissenschaften gezählt werden, die man nur noch als geschichtliche Seltsamkeiten einer geringen Beachtung wert achtet". (N, S. 183 f.)

Das klingt wie eine kategorische Ablehnung der nichteuklidischen Geometrie. Man muß diesen Text aber doch im Zusammenhang mit den Aussagen Freges in den GLG sehen (vgl. dazu 9.2, speziell das Zitat aus KS, S. 272). Danach hängt die Auszeichnung einer Geometrie von der Interpretation ihrer Grundterme ab. Freges Ansicht ist danach nur: Bei der normalen, euklidischen Interpretation dieser Terme kann allein die Euklidische Geometrie wahr sein.

In den „Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften" (1924/25, N, S. 286 ff.) sagt Frege:

„Ich unterscheide folgende Erkenntnisquellen: 1. Die Sinneswahrnehmung, 2. die logische Erkenntnisquelle, 3. die geometrische Erkenntnisquelle und die zeitliche Erkenntnisquelle. Jeder dieser Erkenntnisquellen entsprechen Trübungen, die deren Wert verringern". (N, S. 286.)

Über die geometrische Erkenntnisquelle wird aber nur gesagt, daß aus ihr die Axiome der Geometrie fließen (N, S. 292) und das Unendliche:

„Aus der geometrischen Erkenntnisquelle fließt das Unendliche im eigentlichen und strengsten Sinne des Wortes. Von dem Sprachgebrauch des Lebens ist hier abzusehen, wo „unendlich groß" und „unendlich viel" nichts weiter besagt als „sehr groß" und „sehr viel". Wir haben auf jeder geraden Strecke, auf jeder Kreislinie unendlich viele Punkte, durch jeden Punkt unendlich viele Gerade. Daß wir uns diese nicht sämtlich einzeln vorstellen können, tut nichts zur Sache. Dieser mag sich mehr, jener weniger vorstellen können, hier befinden wir uns nicht auf dem Gebiete der Psychologie, auf dem der

Vorstellungen, auf dem des Subjektiven, sondern auf dem des Objektiven, auf dem des Wahren ... Es leuchtet ein, daß aus der sinnlichen Wahrnehmung nichts Unendliches gewonnen werden kann. Wieviel Sterne wir auch in unser Verzeichnis aufnehmen mögen, es werden nie unendlich viele, und ebenso geht es uns mit den Sandkörnern am Strande des Meeres. Wo wir also Unendliches mit Fug und Recht anerkennen, haben wir es nicht aus der sinnlichen Wahrnehmung gewonnen. Dazu bedürfen wir einer besonderen Erkenntnisquelle und eine solche ist die geometrische". (N, S. 293 f.)

Über die Natur geometrischer Anschauung und Erkenntnis wird aber nichts gesagt. Im „Neuen Versuch der Grundlegung der Arithmetik" (1924/25, N, S. 298 ff.) bemerkt Frege darüber hinaus nur:

„Bei der Arithmetik sowie bei der Geometrie schließe ich nur die Sinneswahrnehmung als Erkenntnisquelle aus". (N, S. 299.)

Aus all dem ergibt sich, daß Frege über die Grundlagen der Geometrie nichts gesagt hat, was sich an Bedeutung auch nur entfernt mit dem messen könnte, was er zu jenen der Arithmetik ausgeführt hat. Die Geometrie war kein zentrales Thema seines Interesses. Zudem sind seine Aussagen nicht konsistent, und die Widersprüchlichkeit seiner Auffassungen läßt sich auch nicht durch eine Änderung seiner Ansichten erklären.

Frege hat immer behauptet, daß die Sätze der Geometrie synthetische Sätze apriori sind. Er hat sich dabei auf Kant berufen. Daraus folgt jedoch nicht, daß er auch Kants transzendentalen Idealismus übernommen hätte. Der ergibt sich bei Kant aus dem synthetisch-apriorischen Charakter der Geometrie, der sich nach ihm nur durch die Annahme erklären läßt, daß der Raum eine Anschauungsform ist, daß die Natur unserer Sinnlichkeit den Erscheinungen die Form von Gegenständen im Raum aufprägt. Diese Konzeption macht sich Frege nur in seiner Dissertation und in der Rezension von Cohen explizit zueigen. Gegen einen Idealismus sprechen seine Aussagen in den GLA, die Geometrie handle nicht von Anschauungen (also wohl auch nicht von Anschauungsformen), die Frege dort eindeutig dem Bereich des Subjektiven, der Vorstellung zuordnet, sondern von etwas „Objektivem Nichtwirklichem", wobei er sagt:

„So verstehe ich unter Objektivität eine Unabhängigkeit von unserem Empfinden, Anschauen und Vorstellen ..." (GLA, S. 36.)

Der Raum, die Gegenstände der Geometrie und deren Eigenschaften und Beziehungen erscheinen hier also nicht als etwas, das durch unsere Anschauung konstituiert wird. Wenn Frege sagt, Geometrie beruhe auf Anschauung, so widerspricht das dem nicht. Anschauung kann unsere Erkenntnisquelle für objektive geometrische Sachverhalte sein, wie unsere sinnliche Erfahrung die Erkenntnisquelle für Sachverhalte der Außenwelt ist, ohne diese zu konstituieren.

Unsere Anschauung zeichnet die euklidische Geometrie aus; diese ist die einzige, die wir uns anschaulich vorstellen können. Ist sie deswegen aber auch die einzig wahre? Damit würde ihre Objektivität, ihre Unabhängigkeit von der Anschauung aufgegeben, die Frege in den GLA behauptet. Gehört die Welt der geometrischen Gebilde zum Bereich des „objektiven Nichtwirklichen", so gibt es vermutlich nur eine. Die Entsprechung zwischen unserer Anschauung und den Gegebenheiten des objektiven Raums wäre dann eine rein faktische und ließe sich nicht mehr so begründen wie bei Kant, da ja unsere Raumanschauung unser einziger Zugang zu dieser Welt ist. Das Problem besteht nun darin: Entweder ist die Struktur des objektiven Raumes unabhängig von unserer Raumanschauung – dann ist nicht ersichtlich, wieso geometrische Erkenntnis apriorischen Charakter haben kann –, oder sie ist von unserer Raumanschauung abhängig – dann wäre der Raum nichts Objektives im Sinne Freges. Hier liegt also tatsächlich eine Inkonsistenz in den Aussagen Freges vor. Er hat seine Auffassung, geometrische Erkenntnisse seien synthetisch apriorisch und beruhten auf Anschauung, nicht konsequent durchdacht und seine Ausführungen bewegen sich nicht auf demselben Reflexionsniveau wie jene Kants. Es muß aber noch einmal daran erinnert werden, daß er die Grundlagen der Geometrie nie zum Thema spezieller Untersuchungen gemacht hat.

10.5 Die Leistungen Freges

Abschließend wollen wir noch einmal auf die Leistungen Freges zurückblicken und sie uns in Form einer Liste der Gedanken, Theorien und begrifflichen Unterscheidungen vor Augen stellen, die er zuerst entwickelt oder präzisiert hat.

A) Grundlegende Begriffe und Unterscheidungen

Der Funktionsbegriff, die Hierarchie der Funktionen, Begriffe als spezielle Funktionen (vgl. 6.1 und 6.2)

Wertverlauf und Klassenbegriff (6.3 und 6.4)
Die Neufassung der Unterscheidung von Sinn und Bezug und der funktionalen Prinzipien (Kap. 5)
Indexausdrücke (5.2)
Die Unterscheidung von Gedanke und Urteil (3.2 und 5.2), und von Objekt- und Metasprache (3.2)
Die Bestimmung des Gegenstands der Logik als Gesetze des Wahrseins (10.3)

B) Aussagenlogik
Der syntaktisch exakte Aufbau von Kunstsprachen (3.1)
Der Begriff der Wahrheitswertfunktion und des a. l. Operators (3.2)
Die Definition der logischen Operatoren durch Wahrheitsbedingungen (3.2)
Der Gedanke eines vollständigen Systems von a. l. Operatoren (3.2)
Ein vollständiges System der reinen A. L. (3.2)

C) Prädikatenlogik
Einführung der Quantoren (3.3 und 3.5)
Theorie der Identität (3.4, sowie 5.1 und 5.2)
Ein System der höheren P. L. (3.5)
Das erste vollständige System der P. L. (3.3)
Relationsketten, Relationsprodukte (3.5 und 7.1.4).

D) Eine Wertverlaufslogik als Termlogik
Damit auch der erste exakte Kalkül der klassischen Mengenlehre (7.1)
Kennzeichnungen (7.1)
Definitionen von Paaren und Relationen (7.1.4).

E) Arithmetik
Eine logische Begründung der Arithmetik (Kap. 4)
Die Theorie der reellen Zahlen als Größenverhältnisse (7.2)

F) Definitionstheorie
Die erste systematische Definitionstheorie (9.1)
Analyse der impliziten Definitionen (9.2)

Ferner ist hinzuweisen auf folgende interessante Ideen Freges

Der Gedanke eines Beweises der semantischen Definitheit formaler Sprachen (7.3)
Die Idee einer logischen Kritik der Sprache (3.1)
Kritik der Adäquationstheorie der Wahrheit (10.3)
Die Unterscheidung von Vorstellung und Vorgestelltem als Argument gegen den Psychologismus und Idealismus (10.1)
Die Unterscheidung des Mentalen vom Bereich abstrakter Entitäten, die realistische Auffassung dieser Entitäten (10.2).

Hält man sich all das vor Augen, so wird man in Frege zuerst eine der hervorragendsten Gestalten in der gesamten Geschichte der Logik sehen, dann aber auch seine Bedeutung für die Philosophie anerkennen müssen, zumal die Logik in ihrer modernen Form in unserem Jahrhundert ihre Bedeutung als wichtiges philosophisches Organon zurückgewonnen hat[7].

[7] Vgl. dazu auch Dummett (1973), Kap. 19.

Literaturverzeichnis

I Schriften Freges

- Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene. Göttinger Dissertation, Jena, 1873. Abgedr. in KS.
- Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffes gründen, (Jenaer Habilitationsschrift) Jena, 1874. Abgedr. in KS.
- Rezension von: H. Seeger: Die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeitet (Schwerin 1874), Jenaer Literaturzeitung 1 (1874), Nr. 46, S. 722. Abgedr. in KS.
- Rezension von A. v. Gall und E. Winter: Die analytische Geometrie des Punktes und der Geraden und ihre Anwendung auf Aufgaben (Darmstadt 1876), Jenaer Literaturzeitung 4 (1877), Nr. 9, S. 133 f. Abgedr. in KS.
- Rezension von Johannes Thomae: Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhainschen Funktionen gebraucht werden (Halle 1876), Jenaer Literaturzeitung 4 (1877), Nr. 30, S. 472. Abgedr. in KS.
- Über eine Weise, die Gestalt eines Dreiecks als komplexe Größe aufzufassen, Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr 1878, Jena 1879, S. XVIII (= Sitzung vom 8. Februar). (Suppl. z. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaften (JZN) 12 (N.F. Bd. 5), 1878.) Abgedr. in KS.
- Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle a. S. 1879. Neudr. Darmstadt 1964. **[BS]**
- Anwendungen der Begriffschrift, Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr 1879, Jena 1879, S. 29–33 (= Sitzung vom 24. Januar). Suppl. z. JNZ, 13 (N. F. Bd. 6), 1879. Abgedr. in BS (1964) und KS. **[ABS]**
- Rezension von Hoppe: Lehrbuch der analytischen Geometrie I (Leipzig 1880), Deutsche Literaturzeitung 1 (1880), S. 210-211.
- Über den Briefwechsel Leibnizens und Huygens mit Papin, Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr 1881, Jena 1881, S. 29–32 (= Sitzung vom 15. Juli 1881). (Suppl. z. JZN, 15, (N. F. Bd. 8), 1881/1882.) Abgedr. in BS (1964).

– Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 81 (1882), S. 48–56. Abgedr. in BS (1964), KS, FFB. **[BBS]**
– Über den Zweck der Begriffsschrift, Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr 1882, Jena 1883, S. 1–10 (= Sitzung vom 27. Januar 1882). (Suppl. z. JZN, 16, (N. F. Bd. 9), 1882/1883.) Abgedr. in BS (1964). **[ZBS]**
– Geometrie der Punktpaare in der Ebene, Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr 1883, Jena 1884, S. 98–102 (= Sitzung vom 2. November 1883). (Suppl. z. JZN, 17, (N. F. Bd. 10) 1884.) Abgedr. in KS.
– Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884. Neudr. Darmstadt 1961. **[GLA]**
Rezension von H. Cohen, Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte (Berlin, 1883), Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 87 (1885), S. 324–329.
– Über Formale Theorien der Arithmetik, Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr 1885, Jena 1885, S. 94–104 (= Sitzung vom 17. Juli 1885). (Suppl. z. JZN, 19, (N. F. Bd. 12). 1885/1886.) Abgedr. in KS. **[FTA]**
– Erwiderung [auf Cantors Rezension der „Grundlagen der Arithmetik"], Deutsche Literaturzeitung 6 (1885), Nr. 29, Spalte 1030. Abgedr. in KS.
– Über das Trägheitsgesetz, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 98, 1891, S. 145–161. Abgedr. in KS.
– Funktion und Begriff. (Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft.) Jena 1891. Abgedr. in KS, FFB. **[FB]**
– Über Sinn und Bedeutung, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 100 (1892), S. 25–50. Abgedr. in KS, FFB. **[SB]**
– Rezension von G. Cantor, Zur Lehre vom Transfiniten. Gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. Erste Abteilung. (Halle a. S. 1890), Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 100, (1892), S. 269–272. Abgedr. in KS.
– Über Begriff und Gegenstand, Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie 16 (1892), S. 192–205. Abgedr. in KS, FFB. **[BG]**
– Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriflich abgeleitet, 2 Bde. Jena 1893 und 1903. Neudr. Darmstadt 1962. **[GGA]**
– Rezension von E. Husserl: Philosophie der Arithmetik, Erster Band (Leipzig 1891), Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 103 (1894), S. 313–332. Abgedr. in KS.
– Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik, Archiv für systematische Philosophie 1 (1895), S. 433–456. Abgedr. in KS.

– Le nombre entier, Revue de Métaphysique et de Morale 3 (1895), S. 73–78. Abgedr. in KS.
– Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene, Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse, 48 (1896), S. 361–378. Abgedr. in KS. **[BSP]**
– Lettera del sig. G. Frege all'editore [= Giuseppe Peano; datiert: Jena, 29. September 1896], Revue de Mathematiques (Rivista di Matematica) 6 (1896–1899), S. 53–59. Abgedr. in KS.
– Über die Zahlen des Herrn H. Schubert, Jena 1899. Abgedr. in KS.
– Über die Grundlagen der Geometrie, Teile I, II, III, 1–3, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 12 (1903), S. 319–24, 368–75 und 15 (1906), S. 293–309, 377–403, 423–30, Abgedr. in KS. **[GLG]**
– Was ist eine Funktion?, in: Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage, 20. Februar 1904, Leipzig 1904, S. 656–666. Abgedr. in KS, FFB. **[WF]**
– Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 15 (1906), S. 586–590. Abgedr. in KS.
– Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs neue nachgewiesen, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 17 (1908), S. 52–55. Abgedr. in KS.
– Schlußbemerkung, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 17 (1908), S. 56. Abgedr. in KS.
– Anmerkungen zu Philip E. B. Jourdain: The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 43 (1912), S. 237–269. Abgedr. in KS.
– Der Gedanke. Eine logische Untersuchung, Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus 1 (1918), S. 58–77. Abgedr. in KS. **[LUI]**
– Die Verneinung. Eine logische Untersuchung, Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus 1 (1918), S. 143–157. Abgedr. in KS. **[LUII]**
– Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge, Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus 3 (1923), S. 36–51. Abgedr. in KS. **[LUIII]**
– Nachgelassene Schriften, hg. H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach, Hamburg 1969. **[N]**
– Briefwechsel, hg. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, A. Veraart, Hamburg 1976. **[BW]**

II Sammlungen von Aufsätzen Freges

- Kleine Schriften, hg. I. Angelelli, Darmstadt 1967. **[KS]**
- Funktion, Begriff, Bedeutung, hg. G. Patzig, Göttingen 1962. **[FFB]**
- Schriften zur Logik und Sprachphilosophie aus dem Nachlaß, hg. G. Gabriel, Hamburg 1971. **[LS]**

III Literaturangaben zum Text

Aczel, P.: Frege structures and the notions of proposition, truth and set, in J. Barwise, H. J. Keisler, K. Kunen (Hg): The Kleene Symposium, Amsterdam 1980, S. 31–59

Bartlett, J. M.: Funktion und Gegenstand, Münchner Diss. 1961

Bernays, P.: Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der Principia mathematica, Mathematische Zeitschrift 25 (1926), 305–320

Bolzano, B.: Wissenschaftslehre, 4 Bde., Sulzbach 1837

Bolzano, B.: Grundlagen der Logik, hg. F. Kambartel, Hamburg 1963

Boole, G.: The Mathematical Analysis of Logic, London 1847; abgedr. in Boole (1916), Neudruck Oxford 1965

Boole, G.: The Calculus of logic, The Cambridge and Dublin Mathematical Journal 3 (1848), 183–198; abgedr. in Boole (1916), Bd. I

Boole, G.: Collected Logical Works, hg. P. E. B. Jourdain, 2 Bde., New York ^{1}1916, ^{3}1951

Cantor, G.: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883; abgedr. in Cantor (1932), S. 165ff.

Cantor, G.: Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, Mathematische Annalen 15 (1879), 1–7; 17 (1880), 355–58; 20 (1882), 113–21; 21 (1883), 51–58 und 545–86; 23 (1884), 453–488. Abgedr. in Cantor (1932)

Cantor, G.: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, hg. E. Zermelo, Berlin 1932, Nachdr. Hildesheim 1962

Carnap, R.: Meaning and Necessity, Chicago ^{1}1947, ^{2}1956

Church, A.: Review of Quine's ‚Notes on existence and necessity', Journal of Symbolic Logic 8 (1943), 45–47

Church, A.: Rezension von Aufsätzen von M. G. White und M. Black, Journal of Symbolic Logic 11 (1946), 132–34

Church, A.: A formulation of the logic of sense and denotation, in P. Henle (Hg.): Essays in Honor of Henry Sheffer, New York 1951, 3–24

Couturat, L.: Opuscules et fragments inédits de Leibniz, Paris 1903

Dedekind, R.: Stetigkeit und Irrationale Zahlen, Braunschweig 1872

Dedekind, R.: Was sind und was sollen die Zahlen?, Braunschweig [1]1888, [2]1893
DeMorgan, A.: Formal Logic, London 1847
DeMorgan, A.: On the syllogism, No. IV, and on the logic of relations, Transactions of the Cambridge Philosophical Society 10 (1864), 331–58
Dummett, M.: Frege: Philosophy of Language, London, [1]1973, [2]1981
Dummett, M.: Frege's Philosophy, in: Dummett: Truth and Other Enigmas, Cambridge/Mass. 1978
Dummett, M.: Platonism, in Dummett: Truth and Other Enigmas, London 1978, S. 202–14
Dummett, M.: The Interpretation of Frege's Philosophy, London 1981
Geach, P.: On Frege's way out, Mind 65 (1956), 408f., abgedr. in Klemke (1968)
Gödel, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte für Mathematik und Physik 37 (1930), 349–360
Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, ebenda 38 (1931), 173–198
Hankel, H.: Theorie der komplexen Zahlsysteme, Leipzig 1867
Hanson, R. N.: Patterns of Discovery, Cambridge 1958
Heine, E.: Elemente der Funktionenlehre, Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik 74 (1872)
Hermes, H.: Eine Termlogik mit Auswahloperator, Berlin 1965
Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie, [1]Leipzig 1899, [11]Stuttgart 1972
Hinst, P.: Syntaktische und semantische Untersuchungen über Freges „Grundgesetze der Arithmetik", München 1965
Husserl, E.: Philosophie der Arithmetik, Bd. I, Halle 1891
Jevons, W. St.: Pure Logic, or The Logic of Quality apart from Quantity, London 1864
Jourdain, P. E. B.: The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 41 (1910), 324–52; 43 (1912), 219–314; 44 (1913), 113–128
Klemke, E. D. (Hg.): Essays on Frege, Urbana/Ill. 1968
Korselt, A.: Über die Grundlagen der Geometrie, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 12 (1903), 402–407
Kripke, S.: Naming and necessity, in G. Harman und D. Davidson (Hg.): Semantics of Natural Language, Dordrecht 1972, S. 253–355, 763–69
Kutschera, F. v.: Elementare Logik, Wien 1967
Kutschera, F. v.: Freges Begründung der Analysis, Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung 9 (1967), 102–111 (= 1967a), abgedr. in Schirn (1976)
Kutschera, F. v. und Breitkopf, A.: Einführung in die moderne Logik, Freiburg [4]1979

Kutschera, F. v.: Grundfragen der Erkenntnistheorie, Berlin 1981

Langford, C. H.: The notion of analysis in Moore's philosophy, in Schilpp (1942), 321–42

Lenzen, W.: Das System der Leibnizschen Logik, Berlin 1989

Lukasiewicz, J.: Zur Geschichte der Aussagenlogik, Erkenntnis 5 (1936), 111–31

Lukasiewicz, J. und Tarski, A.: Untersuchungen über den Aussagenkalkül, Comptes Rendus des séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie 23 (1930), cl. III, 30–50; engl. Übers. in Tarski (1956)

McColl, H.: The calculus of equivalent statements, Proceedings of the London Mathematical Society 9 (1877/78), 9–20, 177–86; 10 (1878/79), 26–28; 11 (1879/80), 113–121

McColl, H.: Symbolic Logic and Its Applications, London 1906

Mill, J. St.: A System of Logic, Ratiocinative and Inductive, 2 Bde., London 1843

Montague, R.: Universal grammar, Theoria 36 (1970), 373–398

Neumann, J. v.: Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, Journal für Mathematik 154 (1925), 219–40

Patzig, G.: Die aristotelische Syllogistik, Göttingen 1959

Peano, G.: Notations de logique mathématique, Turin 1894

Peano, G.: Formulaire de mathématiques, Turin 1895–1908

Peirce, C. S.: On an improvement in Boole's calculus of logic, Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences 7 (1867), 250–61; abgedr. in: Collected Papers, 8 Bde., hg. C. Hartshorne, P. Weiss, A. W. Burks, Cambridge/Mass. 1931–58, Bd. III

Post, E. L.: Introduction to a general theory of elementary propositions, The American Journal of Mathematics 43 (1921), 163–185

Quine, W. V.: On Frege's way out, Mind n. s. 64 (1955), 145–159, abgedr. in Quine (1966) und Klemke (1968)

Quine, W. V.: From a Logical Point of View, Cambridge/Mass. ^{2}1964

Quine, W. V.: Reference and modality, in Quine (1964), S. 139–59 (= 1964a)

Quine, W. V.: Selected Logic Papers, New York 1966

Russell, B.: The Principles of Mathematics, Cambridge 1903

Russell, B.: Mathematical logic as based on the theory of types, American Journal of Mathematics 30 (1908), 222–62

Schilpp, P. A. (Hg.): The Philosophy of G. E. Moore, Evanston/Ill. 1942

Schirn, M. (Hrsg.): Studien zu Frege, 3 Bde., Stuttgart 1976

Scholz, H.: Gottlob Frege, in Scholz (1961)

Scholz, H.: Mathesis Universalis, Basel 1961

Schröder, E.: Der Operationskreis des Logikkalküls, Leipzig 1877

Schröder, E.: Rezension von Freges „Begriffsschrift", Zeitschrift für Mathematik und Physik 25 (1881), 81–94

Schröder, E.: Vorlesungen über die Algebra der Logik, 3 Bde., Leipzig 1890–1905
Sluga, H. D.: Gottlob Frege, London 1980
Sobocinski, B.: L'analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski. IV: La correction de Frege, Methodos 1 (1949), 220–28
Tarski, A.: On the primitive term of logistic, in Tarski (1956), 1–23. (= 1923)
Tarski, A.: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, Studia philosophica 1 (1936), 261–405 (Übers. der polnischen Originalarbeit); engl. Übersetzung in Tarski (1956) (= 1933)
Tarski, A.: Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences, New York ²1946
Tarski, A.: Logic, Semantics, Metamathematics, Oxford 1956
Tarski, A.: Einführung in die mathematische Logik, Göttingen 1966
Thiel, C.: Sinn und Bedeutung in der Logik Gottlob Freges, Meisenheim 1965
Thiel, C. (Hg.): Frege und die moderne Grundlagenforschung, Meisenheim 1975
Thiel, C.: Die Unvollständigkeit der Fregeschen „Grundgesetze der Arithmetik", in J. Mittelstraß und M. Riedel (Hg.): Vernünftiges Denken, Berlin 1978, S. 104–06
Thiel, C.: Die Revisionsbedürftigkeit der logischen Semantik Freges, Anuario Filosofico (Universidad de Navarra) 16 (1983), No. 1, S. 293–301
Thomae, J.: Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Halle ²1898
Thomae, J.: Gedankenlose Denker. Eine Ferienplauderei. Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 15 (1906), 434–38
Whitehead, A. N. und Russell, B.: Principia Mathematica, 3 Bde. London 1910–13 (PM)
Zermelo, E.: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen 65 (1908), 261–81.

Stichwörter