RECENZJE

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XIV / 1992, s. 117–121*

Ewa WÓJTOWICZ

ISTOTA DOŚWIADCZENIA MATEMATYCZNEGO

- P. J. Davis, R. Herch, *The Mathematical Experience*, Houghton Mifflin Company, Boston 1981, XIX + 440 pp.

„Znakomity i porywający obraz rozwoju matematyki... Zdumiewający w ukazywaniu czytelnikom jej piękna i uroku...", „Absolutnie doskonała książka", „Prawdziwa perła, jedno z arcydzieł naszych czasów" — takimi komentarzami opatrzono książkę Philipa J. Davisa i Reubena Hersha *The Mathematical Experience* w recenzjach zamieszczonych w „Naw York Times", „The New Yorker", „American Mathematical Monthly".

O książce tej nieprzypadkowo pisano również na łamach prasy codziennej. Powstała ona z myślą o szerokim kręgu czytelników, niekoniecznie przygotowanych do sięgania po literaturę specjalistyczną, a chcących przybliżyć sobie zagadnienia współczesnej i dawnej matematyki. Cieszyła się dużą popularnością w Stanach Zjednoczonych, została uznana za najlepszą książkę roku 1983.

Jej autorzy: Philip J. Davis — profesor matematyki stosowanej w Brown University i Reuben Hersh — profesor matematyki w University of New Mexico w Albuquerque, poza czynnym uprawianiem matematyki, interesują się także jej historią, filozofią i dydaktyką, a ponadto popularyzują różnorodne jej osiągnięcia. Już wcześniej opublikowali razem kilka artykułów w czasopismach matematycznych. Część materiału, zawartego w ich książce, stamtąd została zaczerpnięta. Czyta się ją z dużym zainteresowaniem, jest napisana barwnym, żywym językiem, uderza mnogością zagadnień.

Pierwsze dwa rozdziały — wprowadzające — ukazują różnorodność krajobrazu matematycznego, jego zależność od epoki, dostępnych środków

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

i metod, indywidualnych oraz grupowych preferencji i zapatrywań osób go kształtujących.

W trzecim zasygnalizowane są problemy adekwatności matematyki, jako środka opisu rzeczywistości przyrodniczej, jej zastosowania w innych naukach, technice, handlu, powiązania z religią, teologią i filozofią, jak również z mistycyzmem liczbowym, „czarną magią” i astrologią.

Następny rozdział poświęcają autorzy omówieniu niektórych pojęć, właściwych matematyce, takich jak: abstrakcja, uogólnianie, formalizacja, obiekty i struktury matematyczne, dowód, nieskończoność, by następnie wskazać na jej walory estetyczne, tajemniczość, różnorodność zagadnień i wielość możliwych sposobów ich rozważania, dynamizm rozwoju.

Wybrane zagadnienia matematyczne — to tytuł rozdziału piątego. Można w nim przeczytać o teorii grup skończonych, twierdzeniu o liczbach pierwszych, geometriach nieeuklidesowych, hipotezie *continuum* oraz wynikach Gödla i Cohena, o analizie niestandardowej i analizie Fouriera.

Szósty rozdział dotyczy dydaktyki matematyki. Zawiera on między innymi interesujące przykłady poprowadzenia uczniów drogą zgodną z modelem odkrycia matematycznego Lakatosa, co w dużym stopniu uatrakcyjnia zajęcia, zmusza do aktywnego w nich uczestniczenia i daje dobre wyniki w przyswajaniu nowego materiału.

W rozdziale siódmym autorzy zaznajamiają czytelnika z wielkimi przeobrażeniami w matematyce, związanymi z pojawieniem się geometrii nieeuklidesowych oraz kryzysem w teorii mnogości, zarysowują obraz trzech głównych kierunków w filozofii matematyki: platonizmu, formalizmu i konstruktywizmu, sporo miejsca poświęcają poglądom Imre Lakatosa.

Przeczytawszy ostatni — ósmy rozdział, uświadamiamy sobie, jak istotnie różnią się od siebie metody komputerowe, stosowane obecnie w matematyce i dlaczego niektóre z nich są przyjmowane bez zastrzeżeń, a inne budzą wiele emocji i sporów, jak było w przypadku dowodu twierdzenia czterech barw, przedstawionego przez Appela i Hakena w roku 1976.

W rozdziale tym zamieszczony jest również interesujący artykuł, poświęcony intuicji matematycznej. Przedstawiam jego dość dokładne streszczenie, jako próbkę stylu Daviesa i Hersha.

Słowa „intuicja”, „intuicyjny”, używane przez matematyków są wieloznaczne i nieco tajemnicze. W związku z tym autorzy rozpoczynają swe rozważania od zestawienia najczęściej spotykanych sposobów rozumienia tych terminów. Ich opracowanie wprowadza następujące grupy pojęć:

(1) „Intuicyjny” jako przeciwstawienie „ścisłego”. Użycie to nie jest zupełnie jasne, ponieważ pojęcie „ścisły” nie jest określone precyzyjnie. Można by powiedzieć, że „intuicyjny” to uchybiający wymogom ścisłości, ale samo pojęcie ścisłości jest zdefiniowane raczej intuicyjnie niż ściśle.

(2) „Intuicyjny” jako „wizualny”. I tak intuicyjna topologia lub geometria różni się od ścisłej (formalnej, abstrakcyjnej) topologii lub geometrii pod dwoma względami. Z jednej strony wersja intuicyjna posiada znaczenie, ilustrację w dziedzinie wizualnych krzywych i powierzchni, w przypadku wersji abstrakcyjnej tak nie jest. Pod tym względem wersja intuicyjna jest doskonalsza — posiada cenną własność, której abstrakcyjna nie ma. Jednak z drugiej strony, wizualizacja może prowadzić do ujmowania jako jasne i oczywiste twierdzeń, które są niepewne lub nawet fałszywe.

(3) „Intuicyjny” jako „wiarogodny”, przekonywający wobec braku dowodu, „to, co można przypuszczać jako prawdziwe w danym przypadku, na podstawie doświadczenia z pokrewnymi obiektami i sytuacjami”. „Intuicyjnie wiarogodne” oznacza rozsądną hipotezę, godną prób udowodnienia.

(4) „Intuicyjny” jako „wymagający uzupełnienia”. Jeśli ktoś przenosi symbol obliczania granicy sprzed pod znak całki, nie odwoławszy się do twierdzenia Lebesgue’a lub korzysta z faktu możliwości przedstawienia pewnej funkcji w postaci szeregu potęgowego, nie sprawdziwszy wcześniej, czy jest ona analityczna, to taka luka logiczna jest do przyjęcia, ale przy nazwaniu rozumowania intuicyjnym.

(5) „Intuicyjny” jako „odwołujący się do fizycznego modelu” lub pewnych znaczących przykładów. W tym sensie „intuicyjny” to prawie to samo co „heurystyczny”.

(6) „Intuicyjny” jako „całościowy” lub „scalający” w przeciwieństwie do „szczegółowego” lub „analitycznego”. Jeśli rozważamy teorię matematyczną jako całość i uznajemy pewne jej twierdzenie za prawdziwe z tego względu, że jest ono zgodne (spójne) ze wszystkim, co udało nam się do tej pory ustalić, to wówczas rozumujemy intuicyjnie. Gdy chcemy być ściśli, musimy udowodnić nasze twierdzenie dedukcyjnie, budując łańcuch rozumowania, gdzie każdy krok jest dokonany zgodnie z przyjętymi regułami dedukcji, punktem wyjściowym jest coś, co jest nam wiadome (aksjomaty lub wcześniej udowodnione twierdzenia), zaś ostatnim — pożądany rezultat.

Autorzy uważają, że:

A. Każdy z głównych kierunków w filozofii matematyki, tj. platonizm, konstruktywizm i formalizm w istotny sposób odwołuje się do pewnego pojęcia intuicji.

B. Żaden z nich nie próbuje nawet wyjaśnić natury i znaczenia postulowanego przez siebie pojęcia intuicji.

C. Rozważanie intuicji, tak jak jest ona faktycznie doświadczana, prowadzi do pojęcia, które jest trudne i złożone, ale wyjaśnialne i analizowalne. Realistyczna analiza intuicji matematycznej jest rozsądnym przedsięwzięciem i powinna zajmować znaczące miejsce w adekwatnej filozofii matematyki.

Pojęcie intuicji sprawia wiele kłopotu platonikom. Według nich, jest ona konieczna do ustalenia związków między ludzką świadomością, a idealnym, niematerialnym światem obiektów matematycznych.

Rozważmy dla przykładu hipotezę *continuum*. Wiadomo, na mocy odkryć Gödla i Cohena, iż nie można jej udowodnić ani obalić na gruncie systemu aksjomatów Zermelo–Fraenkla, stojących u podstaw teorii mnogości i tym samym całej współczesnej matematyki. Ale dla platoników *continuum* jest określonym obiektem, istniejącym niezależnie od umysłu ludzkiego i albo posiadającym nieskończony podzbiór nieprzeliczalny, nierównoliczny ze zbiorem liczb rzeczywisrych, albo go nie posiadającym. Pozostaje tylko wytłumaczenie, że sytuacja ta jest świadectwem naszej ignorancji, niedoskonałości, posiadanej przez nas aktualnie, intuicji.

Jeśli rozumiemy intuicję jako zdolność postrzegania idealnej rzeczywistości matematycznej, staje się ona drugim idealnym bytem obok obiektów matematycznych. Mamy w ten sposób dwie tajemnice zamiast jednej — nie tylko zagadkowość związków między idealną rzeczywistością ponadczasowych obiektów, a ziemskim światem ciągłych zmian, ale także relacji pomiędzy psychofizycznym matematykiem, żyjącym w zmiennym świecie, a jego intuicyjną zdolnością, dzięki której sięga do rzeczywistości ponadczasowej.

Platonicy nie usiłują wgłębiać się w pojęcie intuicji. Uważają ją za niezbędną, lecz nieanalizowalną zdolność człowieka.

Konstruktywiści nawiązują do filozofii Kanta. Tak jak on uznają za dane intuicyjnie pojęcia: liczb naturalnych i konstruowania — operacji, która zawsze może być iterowana. Nie wydaje się to wielce problematyczne. Jednak sami konstruktywiści nie zawsze byli zgodni w opiniach co do właściwych metod tworzenia matematyki. Fakt ten stanowi poważną trudność dla szkoły, która nie opiera się na niczym innym, tylko na powszechnej i wyraźnej intuicji. Ponadto, zdaniem autorów książek, dogmatu, że intuicja systemu liczb naturalnych jest powszechna, nie można utrzymać w świetle wyników badań historycznych, pedagogicznych i antropologicznych.

Jeśli chodzi o formalistów, to problem intuicji znika, jak długo traktujemy matematykę jako zbiór formalnych dedukcji z formalnych twierdzeń. To wiośnie formalista A. Lichnerowicz napisał:

„[...] dowody naszych poprzedników dłużej nas nie satysfakcjonują, ale, odkryte przez nich, fakty matematyczne pozostają [pewne], a my udowadniamy je przy pomocy nieskończenie bardziej ścisłych i precyzyjnych metod, metod, z których wykluczona została geometryczna intuicja [...]".

Trudności sprawia formalistom odpowiedź na pytanie o przyczyny skłaniające ludzi do zajmowania się formułowaniem pewnych i superprecyzyjnych twierdzeń matematycznych. Mogą oni wskazywać jedynie na ich znaczenie, które ma charakter niematematyczny. Zapytani z kolei: co umożliwiało matematykom w przeszłości dochodzenie do prawdziwych twierdzeń przy pomocy niewłaściwego rozumowania, odpowiadają — intuicja. Pozwoliła ona na przykład Cauchy'emu sformułować prawdziwe twierdzenie całkowe, choć nie dysponował on nawet formalnymi definicjami pojęć w nim występujących. Lecz czym jest intuicja? Platonicy wierzą przynajmniej w istnienie idealnych obiektów matematycznych i w związku z tym mają co postrzegać, czy też wyczuwać intuicyjnie.

Formaliści mogą wskazać jedynie na nieświadome rozumowanie. Cauchy był geniuszem i podświadomie znał ścisłe definicje pojęć występujących w twierdzeniu oraz prawidłowy jego dowód. Formaliści, rozważający problem odkrycia matematycznego, musieli wprowadzić pojęcie intuicji dla wytłumaczenia przepaści pomiędzy przedstawianym przez nich obrazem matematyki, jako gry w oparciu o pewne ustalone zasady, a rzeczywistym jej doświadczeniem, gdzie często więcej osiąga się dzięki omijaniu reguł niż rygorystycznemu trzymaniu się ich.

W końcu artykułu autorzy zamieszczają własne uwagi na temat intuicji w matematyce. Według nich, nie jest ona postrzeganiem czegoś istniejącego wiecznie i niezależnie od nas. Posiadamy w umysłach przedstawienia obiektów matematycznych. Nabywamy je dzięki doświadczeniom w operowaniu konkretnymi rzeczami fizycznymi, a w dalszej fazie znaczkami na papierze lub nawet obrazami umysłowymi. Stąd też pochodzi intuicja — zdolność rozważania i badania przedmiotów matematycznych, rozumianych jako wewnętrzne obiekty naszych umysłów.

Chociaż w streszczonym przeze mnie fragmencie książki zagadnienia związane z intuicją matematyczną świadomie zostały jedynie naszkicowane, bez wgłębiania się w niuanse, jednak, jak sądzę, udało się autorom wyeksponować wagę pojęcia intuicji w filozofii matematyki i wskazać na poważne trudności, jakie sprawia ono poszczególnym jej kierunkom, nie mogącym się jednak bez niego obejść. Czytelnik zostaje włączony w te rozważania, uświadamia sobie problemy, których wcześniej nie dostrzegał i próbuje zająć własne stanowisko.

Philip J. Davies i Reuben Hersh swą książką *The Mathematical Experience* odnoszą sukces; przedstawiając zagadnienia matematyczne na szerszym tle filozoficznym, zrywają z rozpowszechnionym myślowym schematem, że matematyka to tylko suche wyliczenia, w których nie ma miejsca nawet na odrobinę fantazji.

Ewa Wójtowicz