ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XX / 1997, s. 79–91*

Krzysztof WÓJTOWICZ

O LOSOWANIU LICZBY Z ODCINKA

Celem artykułu jest przedstawienie pewnych faktów dotyczących niespodziewanych konsekwencji „potocznie oczywistych" aksjomatów. Wskazane zostaną w nim problemy wiążące się z niezależnością zdań z zakresu teorii mnogości, dla których można (według niektórych) wskazać interpretację fizyczną i probabilistyczną. Zaprezentowany też zostanie heurystyczny „dowód" negacji hipotezy *continuum*.

I

Jednym z podstawowych obiektów matematycznych są liczby rzeczywiste. Mają one naturalną interpretację geometryczną w postaci „prostej rzeczywistej", odzwierciedlając w ten sposób naszą intuicję „ciągłości". W fizyce liczby rzeczywiste znajdują zastosowanie poprzez teorię równań różniczkowych, geometrię różniczkową (w której służą jako „pierwowzór" dla badanych przez geometrię obiektów, a mianowicie rozmaitości różniczkowych), procesy stochastyczne, teorię układów dynamicznych etc. Można by rzec, że gdyby nie było liczb rzeczywistych, nie byłoby również współczesnej nauki[1].

Wydaje się zatem, że liczby rzeczywiste są dobrze określonym, konkretnym, znanym i zbadanym obiektem, posiadającym fizyczne znaczenie i interpretację. Liczby rzeczywiste mają jednak „drugą naturę" — naturę teoriomnogościową. Wiąże się z nią szereg problemów istotnie różnych od znanych nam z matematyki stosowanej. Dla analityka najważniejsze są topologiczne czy metryczne własności liczb rzeczywistych (np. jako jednowymiarowej przestrzeni Banacha czy jako jednowymiarowej rozmaitości różniczkowej), dla algebraika własności algebraiczne (np. jako rozszerzenia ciała

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1]Sformułowania tego nie należy oczywiście rozumieć jako tezy ontologicznej, dotyczącej istnienia obiektów abstrakcyjnych, ale jako obserwację metanaukową.

liczb wymiernych), natomiast dla specjalisty z zakresu teorii mnogości interesujące są pytania dotyczące podzbiorów *continuum* (czyli „prostej rzeczywistej") definiowalnych w odpowiedni sposób[2]. Pytania z zakresu „mnogościowej teorii liczb rzeczywistych" są zaawansowane technicznie i opierają się na wynikach z zakresu podstaw matematyki i logiki formalnej.

W artykule tym nie będą (poza niezbędnym minimum) prezentowane wyniki formalne; zwrócimy raczej uwagę na fakt, że liczby rzeczywiste, dobrze znane z zastosowań w fizyce, w chemii, w ekonomii, w psychologii, w socjologii etc., kryją w sobie szereg nie rozwiązanych (i nierozwiązalnych!) problemów. Obserwacje te dostarczają jednocześnie inspiracji do przemyśleń na temat roli intuicji, argumentów heurystycznych w matematyce i ograniczeń metody formalnej.

II

Najbardziej znanym zdaniem o teoriomnogościowym charakterze, dotyczącym liczb rzeczywistych, jest hipoteza *continuum*. Przypomnijmy pokrótce okoliczności, w jakich doszło do jej sformułowania[3].

Twórcą współczesnej teorii mnogości jest Georg Cantor. Od lat siedemdziesiątych XIX w. badał on szeregi trygonometryczne pewnej szczególnej postaci. Badania te doprowadziły go do sformułowania pojęcia „ciągu pozaskończonego", czyli obiektu będącego „przedłużeniem w pozaskończoność" ciągu liczb naturalnych. Ta obserwacja legła u podstaw teorii zbiorów Cantora.

Cantor zauważył, że nieskończone liczby kardynalne (czyli moce nieskończone) są uporządkowane liniowo w ciąg rosnący (zwany ciągiem *alefów*): $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ Moc $\aleph_0$ to moc zbioru liczb naturalnych, moc $\aleph_1$ to najmniejsza moc nieprzeliczalna. Innym z podstawowych twierdzeń udowodnionych przez Cantora jest twierdzenie o równoliczności zbioru liczb rzeczywistych ze zbiorem potęgowym zbioru liczb naturalnych[4]. Cantor udowodnił zatem, że $c = 2^{\aleph_0}$. Oczywiście $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$, gdyż moc $P(N)$ jest ściśle większa od mocy

---

[2]Chodzi o badania prowadzone w ramach deskryptywnej teorii mnogości, a dotyczące np. zbiorów Borelowskich, analitycznych czy rzutowych. Por. np. [Moschovakis 1980].

[3]Prezentacja ta będzie z konieczności skrótowa i niepełna. Czytelnika zainteresowanego historią teorii mnogości odsyłamy np. do [Kanamori 1996], [Moore 1989].

[4]Zbiór potęgowy, czyli zbiór wszystkich podzbiorów danego zbioru X oznaczamy przez $P(X)$. Przez $2^{\aleph_0}$ oznaczamy standardowo moc zbioru potęgowego liczb naturalnych, przez c (od *continuum*) — moc zbioru liczb rzeczywistych.

N^5. Powstaje jednak pytanie, w którym miejscu w ciągu *alefów* znajduje się *continuum*. Postawiona przez Cantora hipoteza (zwana obecnie hipotezą *continuum* i standardowo oznaczana w literaturze przez CH) głosi, że moc *continuum* jest pierwszą mocą nieprzeliczalną, a więc, że $c = \aleph_1$. W innym (równoważnym) sformułowaniu głosi ona, że każdy nieskończony podzbiór prostej jest albo przeliczalny, albo równoliczny z całą prostą. Innymi słowy, nie istnieje nieprzeliczalny podzbiór prostej rzeczywistej, który byłby mocy mniejszej niż cała prosta. Cantor poszukiwał dowodu swej hipotezy, jednak bezskutecznie[6].

W pierwszych latach XX w. udowodniono szereg twierdzeń, które mówiły, że wśród pewnej klasy zbiorów nie znajdziemy kontrprzykładu na hipotezę *continuum*. Najpierw udowodniono te fakty dla zbiorów doskonałych, następnie domkniętych, wreszcie dla Borelowskich[7]. Twierdzeń tych jednak nikomu nie udawało się uogólnić na klasę wszystkich zbiorów, co byłoby równoważne z udowodnieniem CH.

W roku 1940 Kurt Gödel udowodnił niesprzeczność hipotezy *continuum* z aksjomatami ZFC[8]. Okazało się zatem, że CH można dołączyć do aksjomatów ZF, nie powodując sprzeczności. W szczególności oznaczało to, że negacja CH nie jest twierdzeniem teorii mnogości ZFC, a więc że w teorii

---

[5]Twierdzenie mówiące o tym, że dla dowolnego zbioru A moc $P(A)$ jest większa od mocy A, nosi nazwę twierdzenia Cantora.

[6]Cantor był przekonany, że jest bliski znalezienia dowodu hipotezy *continuum* — por. [Moore 1989]. W artykule tym Czytelnik znajdzie dużo szczegółów dotyczących wczesnych badań nad hipotezą *continuum*.

[7]Zbiór doskonały to zbiór X, który jest równy zbiorowi swoich punktów skupienia. Innymi słowy, jest to zbiór domknięty, który nie zawiera punktów izolowanych. Klasa zbiorów Borelowskich powstaje przez domknięcie klasy zbiorów domkniętych na dopełnienia oraz przeliczalne sumy i iloczyny. Pojęcie to jest ważne w topologii i teorii miary, gdzie bada się σ–ciało zbiorów Borelowskich (por. dowolny podręcznik topologii lub teorii miary).

Fakty, o których mowa, oznaczają, że nieskończone zbiory doskonałe, domknięte czy Borelowskie są albo przeliczalne, albo mają moc *continuum*. Można zatem powiedzieć, że hipoteza *continuum* jest prawdziwa dla zbiorów z tych klas.

Obecnie znane są także silniejsze wyniki dotyczące mocy zbiorów z pewnych szczególnych klas. Wyniki te uogólniają twierdzenia dotyczące mocy zbiorów Borelowskich.

[8]ZF oznacza standardowo teorię mnogości Zermelo–Fraenkla. Jest to najpopularniejsza wersja teorii mnogości, sformułowana w języku predykatów pierwszego rzędu z identycznością, z jednym dwuargumentowym predykatem należenia $\in$. Aksjomaty teorii ZF obejmują aksjomat istnienia zbioru pustego, pary, sumy, zbioru potęgowego, ufundowania, schemat aksjomatów wyróżniania i schemat aksjomatów zastępowania. ZFC oznacza teorię mnogości Zermelo–Fraenckla z pewnikiem wyboru. Aksjomatykę w postaci formalnej Czytelnik znajdzie w dowolnym podręczniku teorii mnogości.

mnogości nie da się hipotezy *continuum* obalić. Pozostawała zatem jeszcze możliwość, że hipotezę *continuum* da się w ramach teorii mnogości udowodnić. Jednak w 1963 r. matematyk amerykański Paul Cohen udowodnił, że również negacja hipotezy *continuum* jest niesprzeczna z ZFC.

Metoda stworzona przez Cohena nosi nazwę *forcingu*. Jej odkrycie stało się momentem przełomowym we współczesnej teorii mnogości. W uproszczeniu, metoda ta polega na konstruowaniu modeli dla ZF+φ oraz ZF+$\neg\varphi$, gdzie φ jest zdaniem, którego niezależość dowodzimy. W tym celu wychodzi się od pewnego przeliczalnego modelu dla teorii mnogości M i „dorzuca" do niego pewną ilość zbiorów, otrzymując w ten sposób model o żądanych własnościach. Model taki często oznacza się przez $M[G]$, gdzie G jest pewnym szczególnym zbiorem, którego dołączenie do modelu M „wymusza" odpowiednie własności modelu $M[G]$.

Wyniki Cohena i innych badaczy pokazują, że moc *continuum* może przyjmować niemalże dowolne wartości. Niesprzeczne z aksjomatami ZFC jest np. założenie, że moc *continuum* to $\aleph_1, \aleph_{1997}$ czy $\aleph_{\omega+1}$. Znaczy to tyle, że dla teorii ZFC+„$c = \aleph_1$", ZFC+„$c = \aleph_{1997}$" oraz ZFC+„$c = \aleph_{\omega+1}$" istnieją odpowiednie modele.

Okazało się zatem, że odpowiedzi na pytanie o „prawdziwą" wartość *continuum*[9] nie możemy poszukiwać w sformalizowanej teorii mnogości. Hipoteza *continuum* staje się zatem problemem z pogranicza matematyki i filozofii. Nie da się podać formalnego dowodu CH lub negacji CH, możemy jednak próbować wskazać pozamatematyczne (filozoficzne, metodologiczne, heurystyczne, etc.) argumenty na rzecz jej przyjęcia lub odrzucenia. Metody heurystyczne, jakimi posługują się badacze teorii mnogości, analizuje

[9]Takie sformułowanie może budzić wątpliwości. Nie wszyscy matematycy uważają pytanie o „prawdziwą wartość *continuum*" za dobrze postawione. Cohen twierdzi wręcz, że pytanie to jest bez sensu. Według niego stwierdzenie, iż CH jest niezależna od aksjomatów ZFC, zamyka dyskusję (por. [Albers, Alexanderson, Reid 1990]). Z drugiej strony, wielu matematyków twierdzi, że wprawdzie pytanie to nie jest możliwe do rozstrzygnięcia w ramach teorii ZFC, ale jest dobrze określonym pytaniem dotyczącym rzeczywistości zbiorów (por. [Gödel 1947/64]). Stanowisko w sprawie CH w istotny sposób zależy od tego, czy dany matematyk jest platonikiem czy formalistą.

Warto tu także wspomnieć o tym, że pytanie o prawdziwą wartość *continuum jest rozstrzygnięte* w ramach teorii mnogości drugiego rzędu (ZFC^2). Dowiadujemy się o tym z metateorii, która mówi nam, że wartość *continuum* we wszystkich modelach dla ZFC^2 jest taka sama. Jednak z powodu braku efektywnego systemu dowodzenia tautologii logiki drugiego rzędu nie będziemy mogli nigdy dowiedzieć się, jaka jest ta wartość. ZFC^2 rozstrzyga ten problem, ale „odpowiedź zachowuje dla siebie".

Maddy w znakomitym artykule [Maddy 1988][10]. W niniejszym artykule nie będziemy dyskutować tego zagadnienia, odsyłając czytelnika do [Maddy 1988]. Zajmiemy się natomiast prezentacją „filozoficznego" dowodu negacji hipotezy *continuum* i pewnika wyboru, podanych przez Freilinga w jego [1986].

III

Freiling analizuje pewien eksperyment myślowy, polegający na losowym rzucaniu strzałek w odcinek $[0, 1]$[11]. Zauważmy, że prawdopodobieństwo trafienia w *konkretną* liczbę rzeczywistą z przedziału $[0, 1]$ wynosi 0. Jest to zgodne z naszymi intuicjami, mówiącymi nam, że jest „w zasadzie niemożliwe" trafić w żądaną liczbę.

Zastanówmy się teraz, jakie jest prawdopodobieństwo trafienia w liczbę wymierną. Zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, a zatem liczb tych, w stosunku do całego odcinka, jest „bardzo mało". Naturalne jest przypuszczenie, że jest „w zasadzie niemożliwe" trafić w zbiór liczb wymierynych. Intuicja ta znajduje formalne odzwierciedlenie w elementarnych wynikach teorii miary, zgodnie z którymi prawdopodobieństwo trafienia liczby wymiernej jest równe 0[12]. Możemy zatem mieć pewność, że rzucając w odcinek strzałką „nie grozi" nam trafienie liczby wymiernej. Fakt ten nie wynika z żadnych szczególnych własności liczb wymiernych (topologicznych, metrycznych etc.) — jedynie z faktu, że jest ich przeliczalnie wiele. Liczby wymierne nie są wśród zbiorów przeliczalnych wyróżnione: trudno jest trafić w jakikolwiek z góry ustalony zbiór przeliczalny. Wynika to z faktu, że wszystkie zbiory przeliczalne mają miarę równą 0.

Wyobraźmy sobie teraz, że rzucamy dwie strzałki, jedna po drugiej. Oznaczymy wynik pierwszego rzutu przez x_1. Zastanówmy się, czy druga strzałka trafi w punkt różniący się od x_1 o liczbę wymierną. Zauważmy, że zbiór liczb różniących się od danej liczby x_1 o liczbę wymierną (tzn.

[10] Oczywiście nie chodzi o to, że posługują się heurystyką przy dowodzeniu twierdzeń, ale o to, że zastanawiają się, jakie (dodatkowe) aksjomaty są „naturalne", „intuicyjne", „pożądane" etc.

[11] Innymi słowy, chodzi o „losowanie" liczby z odcinka.

[12] Miara probabilistyczna na odcinku $[0, 1]$, którą mamy na myśli, to po prostu miara Lebesgue'a, będąca pewnego rodzaju uogólnieniem pojęcia długości na szeroką klasę zbiorów „niemierzalnych za pomocą linijki". Szczegóły techniczne dotyczące konstrukcji tej miary nie są istotne, ważne jest jedynie to, że zbiory przeliczalne mają zawsze miarę Lebesgue'a 0 (zgodnie z intuicją, że „krótkiemu" zbiorowi przypisujemy zerową „długość") (por. dowolny podręcznik teorii miary i całki).

liczb postaci $x_1 + r$, gdzie r jest liczbą wymierną) jest przeliczalny, więc prawdopodobieństwo jego trafienia jest równe 0. Zatem zgodnie z tym, co powiedzieliśmy przedtem, prawie na pewno za drugim rzutem nie trafimy w punkt różniący się od wyniku pierwszego rzutu o liczbę wymierną.

Jak ustaliliśmy, małe szanse na trafienie tego zbioru nie wynikają z jego szczególnej struktury, ale jedynie z faktu, że jest on przeliczalny. Wyobraźmy sobie więc, że f jest funkcją, która liczbom rzeczywistym z odcinka $[0,1]$ przyporządkowuje przeliczalne podzbiory odcinka $[0,1]$ (oznaczmy te podzbiory przez $P_{\leq\omega}([0,1])$). Będą nas zatem interesować funkcje $f\colon [0,1] \to P_{\leq\omega}([0,1])$. Oznaczymy teraz przez x_1 wynik pierwszego rzutu, a przez x_2 wynik drugiego rzutu. Wiemy już, że prawie na pewno wynik drugiego rzutu nie będzie należał do zbioru przeliczalnego związanego z wynikiem pierwszego rzutu. Symbolicznie fakt ten zapiszemy jako $x_2 \notin f(x_1)$.

Zauważmy teraz, że kolejność, w jakiej trafiliśmy liczby x_1 i x_2, nie jest istotna. Odcinek „nie wie", w jakiej kolejności rzucaliśmy strzałki[13]. Zatem ze względu na symetrię sytuacji, także $x_1 \notin f(x_2)$. Obserwacje te prowadzą nas do sformułowania następującej hipotezy:

$$\forall f\colon [0,1] \to P_{\leq\omega}([0,1]) \exists x_1, x_2 [x_1 \notin f(x_2) \land x_2 \notin f(x_1)] \qquad (*)$$

Zauważmy, że hipoteza ta tak naprawdę jest formalizacją słabszej intuicji: mówi jedynie, że dla każdego przyporządkowania $f\colon [0,1] \to P_{\leq\omega}([0,1])$ istnieją dwa punkty o tej własności, że ani pierwszy nie należy do zbioru przeliczalnego związanego z drugim, ani odwrotnie. Jak pisze Freiling: „gdybyśmy zatem 'jakimś cudem' trafili w 'niechciany' zbiór przeliczalny, to możemy rzut ponowić, aż do skutku".

Okazuje się, że sformułowany wyżej aksjomat (*) jest równoważny negacji hipotezy *continuum*[14].

---

[13] Aby lepiej sobie to uzmysłowić, wyobraźmy sobie, że po prostu rzucamy obiema strzałkami naraz. Nie ma wtedy potrzeby odwoływać się do „czasowej symetrii eksperymentu".

[14] Dla porządku prezentujemy dowód, który nie jest jednak istotny dla zrozumienia artykułu — Czytelnik może go pominąć.

1. (*) $\Rightarrow \neg$CH. Nie wprost: niech $<$ będzie dobrym porządkiem na $[0,1]$ typu $\aleph_1$. Zdefiniujmy $f(x) := \{y\colon y < x\}$. Oczywiście $f\colon [0,1] \to P_{\leq\omega}([0,1])$. Gdyby (*) był prawdziwy, to musiałyby istnieć x_1 i x_2 takie, że $x_1 < x_2$ i $x_2 < x_1$, co daje sprzeczność.

2. $\neg$CH $\Rightarrow$ (*). Niech $x_1, x_2, \ldots, x_\xi, \ldots$ będzie ciągiem różnych liczb rzeczywistych, długości $\aleph_1$. Niech $f\colon [0,1] \to P_{\leq\omega}([0,1])$. Rozważmy teraz zbiór $A = \{x\colon (\exists \xi < \aleph_1) x \in f(x_\xi)\}$. Zbiór ten jest sumą $\aleph_1$ zbiorów przeliczalnych, ma zatem moc $\aleph_1$. Ponieważ *continuum* ¿ $\aleph_1$, musi istnieć *y nie należące* do zbioru A. Oznacza to, że $\forall \xi < \aleph_1, y \notin$

IV

Freiling wskazuje na fakt, że aby odrzucić aksjomat (*)[15], należałoby odrzucić jedno z czterech, oczywistych według niego, założeń:

(i) losowe wybieranie liczb z odcinka ma sens fizyczny (a w każdym razie dostarcza intuicji, które matematyka powinna uwzględnić i umieć sformalizować);

(ii) możemy przewidzieć, że dany zbiór przeliczalny nie zostanie trafiony rzucaną przez nas strzałką. Zauważmy, że nie chodzi o stwierdzenie, że niemożliwe jest takie trafienie, ale że zawsze możliwe jest trafienie w dopełnienie zbioru przeliczalnego, co jest znacznie słabszym założeniem.

(iii) jeśli można dokonywać przewidywań po zajściu pewnego zdarzenia wstępnego (zdarzeniem takim może być np. pierwszy rzut), zaś wynik przewidywania nie zależy od wyniku tego zdarzenia wstępnego, to, w pewnym sensie, wynik ten jest już ustalony przed zajściem tego zdarzenia wstępnego.

(iv) prosta rzeczywista „nie potrafi” wskazać kolejności rzutów[16].

Rozumowaniom Freilinga można postawić zarzut, że trafne skądinąd intuicje fizyczne („nieskończenie łatwiej” jest trafić w dopełnienie zbioru przeliczalnego niż w ten zbiór) zostały uogólnione w błędny, zbyt „szeroki” sposób. Mówimy bowiem o fizycznej interpretacji, czyli o „sensie fizycznym” rozważań na temat losowego rzucania strzałkami (czyli losowania liczby

---

$f(x_\xi)$. Ponieważ jednak $f(y)$ jest zbiorem przeliczalnym, istnieje takie $\delta < \aleph_1$, że $x_\delta \notin f(y)$. Zatem $x_\delta \notin f(y)$ i $y \notin f(x_\delta)$, co kończy dowód.

[15] Freiling w pracy rozważa szereg uogólnień aksjomatu (*):

(i) rozważa rzuty większą ilością strzałek;

(ii) rozważa funkcje prowadzące nie z $[0,1]$ w przeliczalne podzbiory odcinka, ale także funkcje prowadzące z $[0,1]$ w podzbiory odcinka miary 0;

(iii) rozważa funkcje prowadzące z odcinka $[0,1]$ w podzbiory odcinka mocy mniejszej niż *continuum*.

Dla każdego z tych uogólnień Freiling dowodzi zaskakujących wniosków dotyczących teorii miary i topologii.

[16] Ilustracją tej zasady będzie np: wyobraźmy sobie, że rzucamy kostką, po czym stawiamy hipotezę co do tego, czy jutro wzejdzie słońce. Ponieważ niezależnie od tego, jaki będzie wynik rzutu postawimy hipotezę, że słońce jutro wzejdzie, to możemy powiedzieć, że hipoteza ta była postawiona już przed wykonaniem rzutu.

rzeczywistej). Konsekwentnie moglibyśmy stwierdzić, że intuicje dotyczące nietrafiania w zbiory przeliczalne odnoszą się tak naprawdę tylko do tych zbiorów przeliczalnych, którym (przy całej nieostrości tego pojęcia) możemy przypisać „sens fizyczny", i tylko do „fizycznie sensownych" odwzorowań $f\colon [0,1] \to P_{\leq\omega}([0,1])$. Tymczasem zbiory przeliczalne (używane w dowodzie negacji CH), powstające jako odcinki początkowe pewnego dobrego porządku na odcinku są czymś, co całkowicie wymyka się naszym intuicjom — nie możemy o nich *absolutnie nic* powiedzieć[17].

W rozważaniach Freilinga mamy do czynienia z wszystkimi możliwymi odwzorowaniami $f\colon [0,1] \to P_{\leq\omega}([0,1])$. Jeśli zatem uznamy zarzuty dotyczące „fizycznej sensowności" funkcji za zasadne, i konsekwentnie ograniczymy nasze aksjomaty do węższej klasy funkcji $f\colon [0,1] \to P_{\leq\omega}([0,1])$, to hipotezy *continuum* nie da się już obalić (wystarczy, aby pominąć jakąkolwiek funkcję $f\colon [0,1] \to P_{\leq\omega}([0,1])$)[18], aby nie dało się obalić hipotezy *continuum*. Hipoteza *continuum* jest bowiem równoważna istnieniu funkcji nie spełniającej warunku (*). Takie rozumowanie prowadzi nas do odrzucenia aksjomatów proponowanych przez Freilinga jako nieadekwatnie (zbyt szeroko) formalizujących intuicje dotyczące *continuum* i losowości[19].

Z drugiej jednak strony, skąd *a priori* wiadomo, które funkcje mają sens fizyczny, a które nie? Negacja aksjomatu (*) (równoważna hipotezie *continuum*) mówi, że istnieje taka funkcja $f\colon [0,1] \to P_{\leq\omega}([0,1])$, że $\forall x_1, x_2[x_1 \in f(x_2) \wedge x_2 \in f(x_1)]$. Czy taką funkcję możemy zdefiniować? Przy założeniu hipotezy *continuum* oczywiście tak: weźmy dowolny dobry porządek typu $\aleph_1$ na $[0,1]$ i zdefiniujmy $f(x) := \{y\colon y \leq x\}$. Jednak o takiej funkcji nic nie wiemy — jej definicja jest całkowicie niekonstruktywna, podobnie jak definicja niemierzalnego podzbioru $[0,1]$. Nie wiemy, jaki zbiór

[17] Jeśli ustawimy liczby rzeczywiste z odcinka w pozaskończony ciąg $\{x_\xi : \xi < c\}$ (długości *continuum*) i będziemy rozważać zbiory postaci $\{x\colon x < y\}$, gdzie y jest pewnym elementem tego porządku, to nie będziemy wiedzieć, jak liczby z takiego zbioru są rozłożone w odcinku $[0,1]$. Może np. okazać się, że są to akurat wszystkie liczby wymierne z odcinka albo że wszystkie te liczby są niewymierne i zawarte w odcinku $[0, 10^{-1000}]$. Nie będziemy w stanie się dowiedzieć, czy np. liczba 0 poprzedza liczbę 1 w takim porządku.

[18] Aksjomat (*) przyjąłby zatem słabszą postać:

$$\forall f \in \Phi \exists x_1, x_2[x_1 \notin f(x_2) \wedge x_2 \notin f(x_1)], \tag{$*$}_\Phi$$

gdzie Φ jest pewną podklasą funkcji z $[0,1]$ w $P_{\leq\omega}([0,1])$, np. klasą funkcji, które potrafimy efektywnie zdefiniować.

[19] Posługując się stylistyką ostatniego przypisu, znaczy to tyle, że Freiling sformułował swój aksjomat (*) dla zbyt szerokiej klasy funkcji. Nasze „dane obserwacyjne" pozwalają nam jednak jedynie na sformułowanie aksjomatu $(*)_\Phi$ dla węższej klasy funkcji Φ.

przeliczalny przypisany jest np. liczbie 0. Mając dane liczby x_1, x_2, nie mamy sposobu, aby stwierdzić, czy $x_1 \in f(x_2)$ — musielibyśmy bowiem umieć stwierdzić, w jakiej kolejności liczby x_1 i x_2 występują w odpowiednim dobrym porządku. Fakt, że (*) jest równoważny CH, oznacza, że nie da się takiej funkcji zdefiniować *explicite*, w ramach dostępnych nam środków językowych. Nawet przy założeniu CH definicja taka może być jedynie niekonstruktywna. Wszystkie funkcje, jakie potrafimy wskazać, w szczególności wszystkie funkcje mające sens fizyczny, spełniają warunek (*)[20].

Argumenty Freilinga opierają się na uogólnieniu pewnych intuicji dotyczących „rzucania w odcinek" na klasę wszystkich przyporządkowań $f\colon [0,1] \to P_{\leq\omega}([0,1])$. Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy wcześniej, nie jest wcale oczywiste, że uogólnienie takie jest uzasadnione. Jednak nie potrafimy (nie odwołując się do CH i pewnika wyboru) wskazać sytuacji (tj. funkcji), dla której to uogólnienie jest nieuzasadnione. Mamy pewne niejasne poczucie, że „coś jest tu niedobrze", jednak nie potrafimy tego poczucia doprecyzować. Pojawia się zatem „obszar niewiedzy", do którego brak nam bezpośredniego dostępu. Hipotezy na jego temat można „testować" jedynie poprzez analizę wniosków z tych hipotez, przez analizę, na ile wnioski te są naturalne, pożądane, na ile porządkują teorię[21]. Analizy takie nie należą już do samej teorii formalnej; dotyczą raczej metodologii badań.

Zatrzymajmy się jeszcze na krótko przy zarzutach ogólniejszej natury, dotyczącej sensowności pewnych eksperymentów myślowych. Nie ma strzałek „nieskończenie cienkich", tak jak nie można „wylosować" liczby z odcinka. Jest to daleko idąca idealizacja, której nie odpowiada żadna sytuacja fizyczna. Uznanie tego zarzutu pozwalałoby nam na odrzucenie rozważań Freilinga jako pozbawionych fizycznego sensu. Wyjaśnienie paradoksu byłoby zatem bardzo proste. Jednak wszelkiego typu idealizacje występują w fizyce: np. mechanika punktu materialnego bada bezwymiarowy obiekt obdarzony masą, hydrodynamika bada przepływ płynu nieściśliwego, elektrostatyka bada zachowanie się naładowanej cząstki pomiędzy dwoma nieskończonymi, naładowanymi płytami etc. Z wynikami tych badań wiążemy pewne intuicje fizyczne, zastanawiamy się, jak dany punkt materialny będzie zachowywał się np. w danym polu sił, czy przepływ płynu będzie turblentny, gdzie znajdzie się cząstka po pewnym czasie etc. Jeśli uznamy za sensowne rozważania na temat bezwymiarowego punktu obdarzonego masą i ładun-

[20] Gdyby było inaczej, to potrafilibyśmy wskazać funkcję mającą sens fizyczny i stanowiącą „żywy dowód" hipotezy *continuum*.

[21] Taka metoda jest stosowana przez matematyków. Por. np. [Maddy 1988].

kiem, poruszającego się pomiędzy dwoma nieskończonymi, naładowanymi płytami, to nie widać powodu, dla którego należałoby odrzucić jako bezsensowne analizy dotyczące losowania liczby z odcinka. Problemy pojawiają się zatem nie w momencie uznania analiz dotyczących rzucania strzałek za sensowne, ale w momencie nadawania naszym intuicjom postaci aksjomatycznej.

Zakończmy uwagą natury ogólnej. Argumenty Freilinga oczywiście nie przekonają żadnego „teoriomnogościowca", że negacja hipotezy *continuum* jest bardziej wiarygodna niż hipoteza *continuum*. Wskaże on np. na fakt, że podobne rozumowanie stosuje się także do pewnika wyboru[22], a pewnika wyboru z całą pewnością nikt nie uzna za niewiarygodny na podstawie tak prostych rozważań (por. [Maddy 1988, 500]). Okazuje się, że pozornie oczywiste i intuicyjne założenia „odsłaniają swoje prawdziwe oblicze" dopiero po zbadaniu ich konsekwencji i całego „matematycznego otoczenia". Dlatego aksjomaty Freilinga nie stanowią szczególnie ważnego argumentu w sporze o prawdziwość hipotezy *continuum* czy pewnika wyboru. Stanowią jednak ciekawą (a formalnie prostą) ilustrację faktu, że najbardziej abstrakcyjne działy matematyki, takie jak teoria mnogości, mogą mieć niespodziewane związki z hipotezami uogólniającymi pewne intuicje fizyczne i probabilistyczne. A na ile te uogólnienia są właściwe... To już inna historia.

BIBLIOGRAFIA

Albers D. J, Alexanderson G. L., Reid C.
[1990] *More mathematical people*, Harcourt Brace Jovanovich, Boston.

Freiling C.
[1986] „Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line", *Journal of Symbolic Logic*, 51, 190–200.

Gödel K.
[1947/64] „What is Cantor's *continuum* problem?", przedrukowane w: Benacerraf P., Putnam H., *Philosophy of Mathematics*, Prentice–Hall, 1964, 258–273.

[22] Freiling rozważa też taki aksjomat:

$$\forall f\colon [0,1] \to P_{\leq c}([0,1]) \exists x_1, x_2 [x_1 \notin f(x_2) \wedge x_2 \notin f(x_1)]. \qquad (*)_{<c}$$

$P_{\leq c}([0,1])$ oznacza podzbiory odcinka $[0,1]$ mocy mniejszej niż *continuum*. Łatwo wykazać, że $(*)_{<c}$ implikuje niemożliwość dobrego uporządkowania odcinka $[0,1]$, a tym samym zaprzeczenie pewnika wyboru.

Kanamori A.
[1996] „The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen", *Bulletin of Symbolic Logic*, 2, 1–71.

Maddy P.
[1988*a*] „Believing the axioms. I", *Journal of Symbolic Logic*, 53, 481–511.

Moore G.
[1989] „Towards a history of Cantor's *continuum* problem", w: Rowe D. E., McCleary J. (red.): *The History of Modern Mathematics*, vol. 1. Academic Press, 79–121.

Moschovakis Y.
[1980] *Descriptive Set Theory*, North–Holland.