ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LX, numer 2 – 2012

EUGENIUSZ WOJCIECHOWSKI

FUNKTORY ASERCJI I KONIUNKCJI SEKWENCYJNEJ

Proponowana jest tu aksjomatyczna charakterystyka funktora *asercji sekwencyjnej*. Za jego pomocą jest definiowany funktor *koniunkcji sekwencyjnej*. W interpretacji temporalnej funktory te są czytane odpowiednio: *następnie/potem* oraz *i-następnie/i-potem*.

Dowodzi się, że w proponowanym systemie (**SAS**) i jego wzmocnieniu (**SAS***) zawierają się odpowiednio systemy von Wrighta **And Next** oraz **And Then**.

Niesprzeczność i niezależność aksjomatów bogatszej z proponowanych konstrukcji (**SAS***) jest ustalana przez interpretację w czterowartościowym rachunku zdań[1].

1. PRELIMINARIA

Funktor słabej asercji. Zdanie elementarne $+p$ z funktorem *słabej asercji* (+) jest czytane „*nieprawda-że nie p*” lub „*prawda, że p*”. W systemie z funktorem słabej asercji jako funktorem pierwotnym (**SAD**) przyjmowane są aksjomaty[2]:

A1 $p \rightarrow +p$
A2 $+(p \rightarrow q) \rightarrow (+p \rightarrow +q)$
A3 $+p \wedge +q \rightarrow +(p \wedge q)$

Dr hab. EUGENIUSZ WOJCIECHOWSKI, prof. UR – Zakład Filozofii Przyrody, Uniwersytet Rolniczy im. Hugona Kołłątaja w Krakowie; adres do korespondencji: al. 29 Listopada 46, 31-425 Kraków; e-mail: rlwojcie@cyf-kr.edu.pl

[1] Praca ta była referowana na XVI Konferencji „Zastosowania logiki w filozofii i podstawach matematyki”, Szklarska Poręba, 9-13 V 2011 r., zorganizowanej przez Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, Instytut Matematyki Uniwersytetu Opolskiego oraz Katedrę Logiki i Metodologii Nauk Uniwersytetu Wrocławskiego.

[2] Zob. E. W o j c i e c h o w s k i, *Słaba asercja*, „Roczniki Filozoficzne” 60 (2012), nr 1, s. 87-104.

W odróżnieniu od zwykłej asercji (*mocnej asercji*: $as(p) \leftrightarrow p$), wyrażającej *siłę stwierdzania/asercji* (Frege), funktorowi słabszej asercji towarzyszy „słabsza siła stwierdzania”. Funktor ten jest pomocny w analizie pewnych fraz języka naturalnego (takich jak np. „*deszcz pada i nie pada*”)[3].

Jednoargumentowym funktorem pierwotnym jest tu funktor negacji klasycznej (~).

Definicyjnie przyjmowane są tu funktory *negacji wewnętrznej* (¬), *słabej negacji* (−) i *nieokreśloności* (±)[4]:

D¬ $\neg p \leftrightarrow {\sim}{+}p$
D− $-p \leftrightarrow {\sim}p \vee \neg p$
D± $\pm p \leftrightarrow {\sim}p \wedge {\sim}\neg p$

System ten jest ufundowany na klasycznym rachunku zdań (**KRZ**).

Funktor *i następnie*. Georg H. von Wright zbudował system **And Next**, w którym charakteryzuje aksjomatycznie funktor *koniunkcji sekwencyjnej*. Zdanie elementarne z tym spójnikiem *p&q* jest czytane „*p i-następnie q* („*p and-next q*”)[5]. Przyjmiemy konwencję, że sekwencja funktorów ~,∧,∨,&,→,↔ jest uporządkowana od najsilniej wiążącego funktora negacji, do najsłabiej wiążącego funktora równoważności. Aksjomaty tego systemu mają postać:

B1 $(p \vee q \& r \vee s) \leftrightarrow (p\&r) \vee (p\&s) \vee (q\&r) \vee (q\&s)$
B2 $(p\&q) \wedge (r\&s) \leftrightarrow (p \wedge r \& q \wedge s)$

---

[3] Tamże, s. 87-90.

[4] Definicje zapisujemy tu w konwencji Leśniewskiego – jako równoważności. Funktor negacji wewnętrznej, przeciwstawiany klasycznej negacji (zwanej tu również *negacją zewnętrzną*), oraz funktor nieokreśloności wprowadził logik rosyjski Aleksander Zinoviev. Ideę tę rozwijał później logik niemiecki Horst Wessel. Tamże, s. 88. W zgodzie z przyjmowanymi tam intuicjami zdanie *Księżyc jest szczery* jest interpretowane jako nieokreślone (równoważne zdaniu: *nieprawda-że Księżyc jest szczery i nieprawda-że Księżyc nie jest szczery*). Konstrukcja z aksjomatami A1-A3 jest dalszym rozwinięciem tych idei.

[5] Zmieniamy tu symbol tego funktora. Zob. G.H. von Wright, *And Next*, „Acta Philosophica Fennica” 18 (1965), s. 293-304. We frazach oddających preferowane tu sposoby czytania zdań elementarnych posługujemy się łącznikiem „-” dla podkreślenia, że w danym kontekście traktujemy tak wyróżniony ciąg wyrażeń jako logicznie nieanalizowalny. Ogólne intuicje filozoficzne leżące u podstaw tego i następnego systemu von Wrighta oraz intuicje związane z czasem w sensie fizykalnym są interesująco przedstawione w artykule: A. Kozanecka, M. Leszczyńska, *O wyrażalności niektórych relacji czasowych w języku systemów logiki temporalnej G.H. von Wrighta*, „Roczniki Filozoficzne” 55 (2007), nr 2, s. 43-65.

B3 $p \leftrightarrow (p\&q \vee \sim q)$
B4 $\sim(p\&q \wedge \sim q)$

Przyjmowane są tu reguły podstawiania, odrywania (MP) i ekstensjonalności. Na mocy reguły ekstensjonalności, mając tezę systemu w postaci równoważności $\alpha \leftrightarrow \beta$, tezą systemu jest równoważność postała z członów α i β przez ich &-koniunkcję z dowolną formułą γ systemu. Ponieważ w grę wchodzi lewostronna lub prawostronna &-koniunkcja członów α/β z γ, reguła ekstensjonalności (RE&) można przedstawić w formie dwuczłonowej:

RE& $\alpha \leftrightarrow \beta$ / $(\alpha\&\gamma) \leftrightarrow (\beta\&\gamma)$ $\alpha \leftrightarrow \beta$ / $(\gamma\&\alpha) \leftrightarrow (\gamma\&\beta)$

System ten jest również nadbudowany nad **KRZ**.

Funktor *i potem*. Druga z konstrukcji G.H. von Wrighta to system **And Then**, w którym funktorem pierwotnym jest również funktor koniunkcji sekwencyjnej. Zdanie elementarne z tym spójnikiem *p&q* jest tym razem czytane „*p i-potem q* („*p and-then q*”)[6]. Przyjmiemy tu taką samą konwencję notacyjną. Aksjomaty tego systemu mają formę:

B1 $(\mathrm{p} \vee q\&r \vee s) \leftrightarrow (p\&r) \vee (p\&s) \vee (q\&r) \vee (q\&s)$
B2* $(p\&q) \wedge (r\&s) \leftrightarrow (p \wedge r\&q \wedge s \vee (q\&s) \vee (s\&q))$
B3 $p \leftrightarrow (p\&q \vee \sim q)$
B4 $\sim(p\&q \wedge \sim q)$

Przyjmowane są tu reguły jak poprzednio. System ten jest również nadbudowany nad **KRZ**.

2. SYSTEM ASERCJI SEKWENCYJNEJ

Wyrażenie •*p* będziemy czytali „*następnie*/*z-kolei p*”. Zdania tego typu będą odnosiły do elementów jakieś sekwencji zdarzeń (stanów rzeczy). Nasuwa się tu temporalna lub spacjalna interpretacja tych zdań.

---

[6] Zob. G.H. von Wright, *And Then*, „Commentationes Physico-Mathematicae” 32(1966), nr 7, s. 1-11. Tak jak wyżej, zmieniamy tu symbol tego funktora.

System. Aksjomatykę *systemu asercji sekwencyjnej* (**SAS**) tworzą[7]:

C1 $\sim\bullet p \rightarrow \bullet\sim p$
C2 $\bullet(p \rightarrow q) \rightarrow (\bullet p \rightarrow \bullet q)$
C3 $t \rightarrow \sim\bullet\sim t$

Implikacja odwrotna do C1 nie jest tezą tego systemu[8].
Symbol t w ostatnim aksjomacie reprezentuje dowolną tezę systemu.
Definicyjnie wprowadzamy tu funktor *koniunkcji sekwencyjnej* (&)[9]:

D& $p\&q \leftrightarrow p\wedge\bullet q$

Regułami systemu są reguła odrywania (MP) i reguła podstawiania.
System ten jest również nadbudowany nad klasycznym rachunkiem zdań.

Wybrane tezy. Do tez tak określonego systemu należą[10]:

T1 $t \rightarrow \bullet t$ gdzie t jest tezą systemu
Dem.
Hp(1) $\rightarrow$

(2)	$\sim\bullet t$	[zdn]
(3)	$\sim\bullet t \rightarrow \bullet\sim t$	[C1]
(4)	$\bullet\sim t$	[2,3×MP]
(5)	$\sim\bullet\sim t$	[1,C3×MP]
	sprz.	[4,5]

[7] We wcześniejszej wersji tej pracy (prezentowanej na konferencji) zamiast aksjomatu C1 występował aksjomat: $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\bullet p \leftrightarrow \bullet q)$. Prof. Andrzej Pietruszczak zasugerował mi jego zastąpienie regułą ekstensjonalności (EA), która z kolei byłaby wtórną, o ile przyjąć jako regułę pierwotną α / $\bullet\alpha$. Biorąc pod uwagę fakt, że potrzebna jest w systemie teza $\sim\bullet p \rightarrow \bullet\sim p$ (inferencyjnie mocniejszej od ostatniej z reguł), przyjmuję ją ostatecznie jako aksjomat C1.

[8] Aksjomatyczne przyjęcie dodatkowo implikacji odwrotnej do C1 miałoby niepożądane konsekwencje. Zob. punkt 3 tej pracy: aksjomat D1 i wyprowadzalna z niego formuła (c).

[9] W tej części przedstawiamy ogólne własności tych funktorów. Z uwagi na różne interpretacje tych funktorów wstrzymujemy się na razie z czytaniem fraz z tymi funktorami. Sposób ich czytania będzie zależny od danej interpretacji.

[10] Dowody będą budowane metodą założeniową. Pojawiające się w nich wyrażenia „z”, „zd”, „zdn” i „sprz.” są odpowiednio skrótami wyrażeń: „założenie”, „założenie dodatkowe”, „założenie dowodu niewprost” i „sprzeczność”. Z kolei Hp(...) i T znaczą odpowiednio: *założenie*(*liczba przesłanek*) oraz *teza* (=dowodzony następnik implikacji).

Do reguł wtórnych systemu należą reguły: *asercji* (RA), *dystrybucji* (RD), *kontrapozycji asercji* (KA), *monotoniczności* (RM) i *ekstensjonalności* (EA):

RA $\alpha / \bullet\alpha$ $\quad\quad$ $\alpha / \sim\bullet\sim\alpha$ [T1,C3]
RD $\bullet(\alpha \to \beta) / \bullet\alpha \to \bullet\beta$ [C2]
KA $\sim\bullet\alpha / \bullet\sim\alpha$ [C1]
RM $\alpha \to \beta / \bullet\alpha \to \bullet\beta$
Der.
(1) $\alpha \to \beta$ [z]
(2) $\bullet(\alpha \to \beta)$ [1×RA]
(3) $\bullet\alpha \to \bullet\beta$ [2,C2]

EA $\alpha \leftrightarrow \beta / \bullet\alpha \leftrightarrow \bullet\beta$ [**KRZ**,RM]

T2 $\bullet p \lor \bullet\sim p$
Dem.
(1) $\sim(\bullet p \lor \bullet\sim p)$ [zdn]
(2) $\sim\bullet p \land \sim\bullet\sim p$ [1]
(3) $\sim\bullet p$ [2]
(4) $\sim\bullet\sim p$ [2]
(5) $\bullet\sim\sim p$ [4×KA]
(6) $\sim\sim p \to p$ [**KRZ**]
(7) $\bullet\sim\sim p \to \bullet p$ [6×RM]
(8) $\bullet p$ [5,7×MP]
sprz. [3,8]

T3 $\bullet(p \lor q) \to \bullet p \lor \bullet q$
Dem.
Hp(1) $\to$
(2) $(p \lor q) \to (\sim p \to q)$ [**KRZ**]
(3) $\bullet(p \lor q) \to \bullet(\sim p \to q)$ [2×RM]
(4) $\bullet(\sim p \to q)$ [1,3×MP]
(5) $\bullet\sim p \to \bullet q$ [4×RD]
(6) $\sim\bullet\sim p \lor \bullet q$ [5,**KRZ**]
(7) $\sim\bullet\sim p \to \bullet p$ [T2]
(8) T [5,6,**KRZ**]

T4a $\bullet p \to \bullet(p \lor q)$

Dem.

(1)	$p \to p \lor q$	[**KRZ**]
(2)	$\bullet(p \to p \lor q)$	[1×RA]
(3)	$\bullet p \to \bullet(p \lor q)$	[2×RD]

T4b $\bullet q \to \bullet(p \lor q)$ [**KRZ**,RA,RD,MP]

T4 $\bullet p \lor \bullet q \to \bullet(p \lor q)$ [T4a,T4b]

T5 $\bullet(p \lor q) \leftrightarrow \bullet p \lor \bullet q$ [T3,T4]

T6 $\bullet(p \land q) \to \bullet(q \land p)$

Dem.

(1)	$p \land q \to q \land p$	[**KRZ**]
(2)	$\bullet(p \land q) \to \bullet(q \land p)$	[1×RM]

T7 $\bullet p \land \bullet{\sim}p \to \bullet(p \land q)$

Dem.

	Hp(2) $\to$	
(3)	$\bullet({\sim}p \lor (p \land q))$	[2,T4a]
(4)	$({\sim}p \lor (p \land q)) \to (p \to p \land q)$	[**KRZ**]
(5)	$\bullet({\sim}p \lor (p \land q)) \to \bullet(p \to p \land q)$	[4×RM]
(6)	$\bullet(p \to p \land q)$	[3,5×MP]
(7)	$\bullet p \to \bullet(p \land q)$	[6×RD]
(8)	T	[1,7×MP]

T8a $\bullet(p \land q) \to \bullet p$

Dem.

	Hp(1) $\to$	
(2)	$p \land q \to p$	[**KRZ**]
(3)	$\bullet(p \land q \to p)$	[2×RA]
(4)	$\bullet(p \land q) \to \bullet p$	[3×RD]
(5)	T	[1,4×MP]

T8b $\bullet(p \land q) \to \bullet q$ [**KRZ**,RA,RD,MP]

T8 $\bullet(p \land q) \to \bullet p \land \bullet q$ [T8a,T8b]

T9 $\bullet p \wedge \bullet q \rightarrow \bullet(p \wedge q)$

Dem.

Hp(2) →

(3)	$\sim\bullet(p \wedge q)$	[zdn]
(4)	$\bullet\sim(p \wedge q)$	[3×KA]
(5)	$\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim p \vee \sim q$	[**KRZ**]
(6)	$\bullet\sim(p \wedge q) \rightarrow \bullet(\sim p \vee \sim q)$	[5×RM]
(7)	$\bullet(\sim p \vee \sim q)$	[4,6×MP]
(8)	$\bullet\sim p \vee \bullet\sim q$	[7,T5]
(9)	$\bullet\sim p \rightarrow \bullet(p \wedge q)$	[1,T7,**KRZ**]
(10)	$\bullet\sim q \rightarrow \bullet(p \wedge q)$	[2,T7,T6,**KRZ**]
(12)	$\bullet\sim p \vee \bullet\sim q \rightarrow \bullet(p \wedge q)$	[9,10]
(11)	$\bullet(p \wedge q)$	[8,11×MP]
	sprz.	[3,12]

T10 $\bullet(p \wedge q) \leftrightarrow \bullet p \wedge \bullet q$ [T8,T9]

Odnotujmy jeszcze parę tez charakteryzujących koniunkcję sekwencyjną:

T11 $(p\&q) \wedge (q\&r) \rightarrow p\&r$ [D&]

T12 $(p\&q)\&(q\&r) \rightarrow p\&\bullet r$

Dem.

Hp(1) →

(2)	$(p\&q) \wedge \bullet(q\&r)$	[1,D&]
(3)	$p\&q$	[2]
(4)	$\bullet(q\&r)$	[2]
(5)	p	[3,D&]
(6)	$\bullet(q \wedge \bullet r)$	[4,D&]
(7)	$\bullet q \wedge \bullet\bullet r$	[6,T10]
(8)	$\bullet\bullet r$	[7]
(9)	T	[5,8,D&]

T13a $(p\&q)\&r \rightarrow p\&(q \wedge r)$

Dem.

Hp(1) →

(2)	$(p \wedge \bullet q) \wedge \bullet r$	[1,D&]
(3)	$p \wedge \bullet(q \wedge r)$	[2,T10]
(4)	T	[3,D&]

T13b $p\&(q\wedge r) \rightarrow (p\&q)\&r$ [D&,T10]

T13 $(p\&q)\&r \leftrightarrow p\&(q\wedge r)$ [T13a,T13b]

T14a $(p\vee q)\&r \rightarrow p\&r\vee q\&r$

Dem.

Hp(1) →

(2) $(p\vee q)\wedge\bullet r$ [1,D&]

(3) $p\wedge\bullet r\vee q\wedge\bullet r$ [2]

(4) T [3,D&]

T14b $p\&r\vee q\&r \rightarrow (p\vee q)\&r$ [D&]

T14 $(p\vee q)\&r \leftrightarrow p\&r\vee q\&r$ [T14a,T14b]

3. SYSTEM ASERCJI SEKWENCYJNEJ W INTERPRETACJI TEMPORALNEJ

Interpretacja stałych zgodna z systemem And Next. Wyrażenie $\bullet p$ jest tu czytane „*następnie p*”, a wyrażenie $p\&q$ – w zgodzie z D& – „*p i-następnie q*”. Udowodnimy twierdzenie:

Twierdzenie 1. *System* **And Next** *zawiera się inferencyjnie w* **SAS**.

W dowodzie tego twierdzenia wystarczy pokazać, że aksjomaty pierwszego systemu i reguła ekstensjonalności RE& są odpowiednio tezami oraz regułą wtórną systemu drugiego. Ma to istotnie miejsce:

T15a $(p\vee q\&r\vee s) \rightarrow (p\&r)\vee(p\&s)\vee(q\&r)\vee(q\&s)$

Dem.

Hp(1) →

(2) $(p\vee q)\wedge\bullet(r\vee s)$ [1,D&]

(3) $(p\vee q)\wedge(\bullet r\vee\bullet s)$ [2,T5]

(4) $(p\wedge\bullet r)\vee(p\wedge\bullet s)\vee(q\wedge\bullet r)\vee(q\wedge\bullet s)$ [3]

(5) T [4,D&]

T15b $(p\&r)\vee(p\&s)\vee(q\&r)\vee(q\&s) \to (p\vee q\&r\vee s)$

Dem.

Hp(1) →

(2)	$(p\wedge\bullet r)\vee(p\wedge\bullet s)\vee(q\wedge\bullet r)\vee(q\wedge\bullet s)$	[1,D&]
(3)	$(p\wedge(\bullet r\vee\bullet s))\vee(q\wedge(\bullet r\vee\bullet s))$	[2]
(4)	$(p\vee q)\wedge(\bullet r\vee\bullet s)$	[3]
(5)	$(p\vee q)\wedge\bullet(r\vee s)$	[4,T5]
(6)	T	[5,D&]

T15 $(p\vee q\&r\vee s) \leftrightarrow (p\&r)\vee(p\&s)\vee(q\&r)\vee(q\&s)$ (=B1) [T15a,T15b]

T16a $(p\&q)\wedge(r\&s) \to (p\wedge r\&q\wedge s)$

Dem.

Hp(2) →

(3)	$p\wedge\bullet q$	[1,D&]
(4)	$r\wedge\bullet s$	[2,D&]
(5)	$p\wedge r$	[3,4]
(6)	$\bullet q\wedge\bullet s$	[3,4]
(7)	$\bullet(q\wedge s)$	[6,T10]
(8)	T	[5,7,D&]

T16b $(p\wedge r\&q\wedge s) \to (p\&q)\wedge(r\&s)$

Dem.

Hp(1) →

(2)	$p\wedge r\wedge\bullet(q\wedge s)$	[1,D&]
(3)	$p\wedge r\wedge\bullet q\wedge\bullet s$	[2,T10]
(4)	$p\wedge\bullet q\wedge r\wedge\bullet s$	[3]
(5)	T	[4,D&]

T16 $(p\&q)\wedge(r\&s) \leftrightarrow (p\wedge r\&q\wedge s)$ (=B2) [T16a,T16b]

T17a $p \to (p\&q\vee\sim q)$

Dem.

Hp(1) →

(2)	$q\vee\sim q$	[**KRZ**]
(3)	$\bullet(q\vee\sim q)$	[2×RA]
(4)	T	[1,3,D&]

T17b $(p\&q\vee{\sim}q) \rightarrow p$ [D&]

T17 $p \leftrightarrow (p\&q\vee{\sim}q)$ (=B3) [T17a,T17b]

T18 ${\sim}(p\&q\wedge{\sim}q)$

Dem.

(1) $p\&q\wedge{\sim}q$ [zdn]

(2) $\bullet(q\wedge{\sim}q)$ [1,D&]

(3) ${\sim}(q\wedge{\sim}q)$ [**KRZ**]

(4) ${\sim}\bullet(q\wedge{\sim}q)$ [3×RA]

sprz. [2,4]

Regułami wtórnymi są tu:

RE1 $\alpha \leftrightarrow \beta$ / $(\alpha\&\gamma) \leftrightarrow (\beta\&\gamma)$

Der.

(1) $\alpha \leftrightarrow \beta$ [z]

(2) $\alpha\wedge\bullet\gamma \leftrightarrow \beta \wedge\bullet\gamma$ [1,**KRZ**]

(3) $(\alpha\&\gamma) \leftrightarrow (\beta\&\gamma)$ [2,D&]

RE2 $\alpha \leftrightarrow \beta$ / $(\gamma\&\alpha) \leftrightarrow (\gamma\&\beta)$

Der.

(1) $\alpha \leftrightarrow \beta$ [z]

(2) $\bullet\alpha \leftrightarrow \bullet\beta$ [1×EA]

(3) $\gamma\wedge\bullet\alpha \leftrightarrow \gamma\wedge\bullet\beta$ [2,**KRZ**]

(4) $(\gamma\&\alpha) \leftrightarrow (\gamma\&\beta)$ [3,D&]

Reguły te są członami RE&. Kończy to dowód tego twierdzenia.

Pewne rozszerzenie systemu And Next. Józef Wajszczyk proponował pewne rozszerzenie tego systemu von Wrighta (**AN**’), które z kolei jest fragmentem ogólniejszej konstrukcji – logiki zmian dychotomicznych[11]. W systemie **AN**’ możemy przyjąć następujące aksjomaty specyficzne[12]:

[11] Zob. J. W a j s z c z y k, *Logika a czas i zmiana*, Olsztyn: Wydawnictwo WSP 1995, s. 93.

[12] Dokładnie jest to równoważne sformułowanie tego rachunku. Tamże, s. 93. Zmieniamy tu symbole, zgodnie z przyjętą w naszej pracy notacją.

D1 $\bullet{\sim}p \leftrightarrow {\sim}\bullet p$
D2 $\bullet(p\wedge q) \leftrightarrow (\bullet p\wedge\bullet q)$
D3 $\bullet\bullet p \leftrightarrow \bullet p$

oraz regułę specyficzną RE&. Jest on ufundowany na **KRZ**.

Funktor asercji sekwencyjnej jest tu definiowany analogicznie (D&)[13].
Łatwo pokazać, że regułą wtórną jest tu reguła ekstensjonalności EA:

EA $\alpha \leftrightarrow \beta \,/\, \bullet\alpha \leftrightarrow \bullet\beta$
Der.
(1) $\alpha \leftrightarrow \beta$ [z]
(2) $(p\vee{\sim}p)\&\alpha \leftrightarrow (p\vee{\sim}p)\&\beta$ [1×RE&]
(3) $(p\vee{\sim}p)\wedge\bullet\alpha \leftrightarrow (p\vee{\sim}p)\wedge\bullet\beta$ [2,D&]
(4) $\bullet\alpha \leftrightarrow \bullet\beta$ [3]

Na gruncie tego systemu są inferowalne tezy:

(a) $p \rightarrow \bullet p$
Dem.
Hp(1) →
(2) ${\sim}\bullet p$ [zdn]
(3) $p \leftrightarrow {\sim}\bullet p$ [1,2]
(4) $\bullet p \leftrightarrow \bullet{\sim}\bullet p$ [3×EA]
(5) ${\sim}\bullet{\sim}\bullet p$ [2,4]
(6) $\bullet{\sim}{\sim}\bullet p$ [5,D1]
(7) ${\sim}{\sim}\bullet p \leftrightarrow \bullet p$ [**KRZ**]
(8) $\bullet{\sim}{\sim}\bullet p \leftrightarrow \bullet\bullet p$ [7×EA]
(9) $\bullet\bullet p$ [6,8]
(10) $\bullet p$ [9,D3]
sprz. [2,10]

(b) $\bullet p \rightarrow p$
Dem.
Hp(1) →
(2) ${\sim}p$ [zdn]

[13] Wajszczyk w zapisie definicji posługuje się równością definicyjną. Tamże, s. 90.

(3)	$\bullet p \wedge \sim p$	[1,2]
(4)	$\bullet p \wedge \sim p \rightarrow \bullet(\bullet p \wedge \sim p)$	[(a)]
(5)	$\bullet(\bullet p \wedge \sim p)$	[3,4×MP]
(6)	$\bullet\bullet p \wedge \bullet\sim p$	[5,D3]
(7)	$\bullet\sim p$	[6]
(8)	$\sim\bullet p$	[7,D1]
	sprz.	[1,7]

a stąd otrzymujemy natychmiast:

(c) $\bullet p \leftrightarrow p$

Prowadzi to niestety do trywializacji tej konstrukcji, wbrew intuicjom wyjściowym autora systemu **AN'**. W szczególności funktor koniunkcji klasycznej i funktor koniunkcji sekwencyjnej są tu nieodróżnialne. Jest to zbyt silna charakterystyka funktora asercji sekwencyjnej. Aksjomat D1 jest odpowiedzialny za zniesienie rozróżnienia między mocną asercją i asercją sekwencyjną oraz – w konsekwencji – utożsamienie obu funktorów koniunkcji.

Interpretacja stałych zgodna z systemem And Then. Oznaczmy przez **SAS*** rozszerzenie systemu **SAS** o nowy aksjomat:

C4 $\bullet\bullet p \leftrightarrow \bullet p$

Przyjmujemy tu również taką samą definicję funktora koniunkcji sekwencyjnej. Udowodnimy twierdzenie:

Twierdzenie 2. System **And Then** zawiera się inferencyjnie w **SAS***.

W jego dowodzie wystarczy pokazać, że aksjomat specyficzny pierwszego systemu (B2*) jest tezą systemu drugiego:

T19a $(p\&q)\wedge(r\&s) \rightarrow (p\wedge r\&q\wedge s\vee(q\&s)\vee(s\&q))$

Dem.

	Hp(2) $\rightarrow$	
(3)	$\sim(p\wedge r\&q\wedge s\vee(q\&s)\vee(s\&q))$	[zdn]
(4)	$\sim(p\wedge r\wedge\bullet(q\wedge s\vee q\wedge\bullet s\vee s\wedge\bullet q))$	[3,D&]
(5)	$\sim p\vee\sim r\vee\sim\bullet(q\wedge s\vee q\wedge\bullet s\vee s\wedge\bullet q)$	[4]

(6) $p\wedge\bullet q\wedge r\wedge\bullet s$ [1,D&]
(7) $\sim\bullet(q\wedge s\vee q\wedge\bullet s\vee s\wedge\bullet q)$ [5,6]
(8) $\sim(\bullet q\wedge\bullet s\vee\bullet q\wedge\bullet\bullet s\vee\bullet s\wedge\bullet\bullet q)$ [7,T5,T10]
(9) $\sim(\bullet q\wedge\bullet s\vee\bullet q\wedge\bullet s\vee\bullet s\wedge\bullet q)$ [8,C4]
(10) $\sim(\bullet q\wedge\bullet s)$ [9]
(11) $\bullet q\wedge\bullet s$ [6]
sprz. [10,11]

T19b $(p\wedge r\&q\wedge s\vee(q\&s)\vee(s\&q)) \rightarrow (p\&q)\wedge(r\&s)$
Dem.
Hp(1) $\rightarrow$
(2) $p\wedge r\wedge\bullet(q\wedge s\vee q\wedge\bullet s\vee s\wedge\bullet q)$ [1,D&]
(3) $p\wedge r\wedge(\bullet q\wedge\bullet s\vee\bullet q\wedge\bullet\bullet s\vee\bullet s\wedge\bullet\bullet q)$ [2,T5,T10]
(4) $p\wedge r\wedge(\bullet q\wedge\bullet s\vee\bullet q\wedge\bullet s\vee\bullet s\wedge\bullet q)$ [3,C4]
(5) $p\wedge r\wedge\bullet q\wedge\bullet s$ [4]
(6) $p\wedge\bullet q\wedge r\wedge\bullet s$ [5]
(7) T [6,D&]

T19 $(p\&q)\wedge(r\&s) \leftrightarrow (p\wedge r\&q\wedge s\vee(q\&s)\vee(s\&q))$ (=B2*) [T19a,T19b]

Kończy to dowód tego twierdzenia.

4. NIESPRZECZNOŚĆ SYSTEMU I NIEZALEŻNOŚĆ AKSJOMATÓW

Niesprzeczność najbogatszego z proponowanych tu systemów (**SAS***) z aksjomatami C1, C2, C3 i C4 ustalimy za pomocą interpretacji I^0, którą traktujemy tu jako interpretację standardową. Niezależność tych aksjomatów przeprowadzimy odpowiednio przez interpretacje I^1, I^2, I^3 i I^4. Ustalenie niezależności danego aksjomatu od pozostałych aksjomatów aksjomatyki przy tej metodzie polega – jak wiadomo – na podaniu takiej interpretacji, przy której dany aksjomat jest fałszywy, a pozostałe aksjomaty prawdziwe. Interpretacje te mają miejsce w czterowartościowym rachunku zdaniowym. Odpowiedniki funktorów dwuargumentowych występujących w tej aksjomatyce, w danej interpretacji, oznaczymy w notacji Łukasiewicza. Matryca funktora jednoargumentowego będzie przedstawiana w formie skróconej [*abcd*], gdzie *a*, *b*, *c*, *d* są jego wartościami – odpowiednio dla wartości jego argumentu – 1, 2, 3 i 4. Interpretacje te są zestawione w poniższej tabeli:

	Opis	Interpretacja	
		~	•
I^0	Niesprzeczność	[4321]	[1144]
I^1	Niezależność C1	[4321]	[1244]
I^2	Niezależność C2	[4321]	[1134]
I^3	Niezależność C3	[4321]	[1133]
I^4	Niezależność C4	[4321]	[1324]

Matryce dla funktorów implikacji, koniunkcji i równoważności są ujęte w tabeli:

p	C	K	E
	q 1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
1	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
2	1 1 3 3	2 2 4 4	2 1 4 3
3	1 2 1 2	3 4 3 4	3 4 1 2
4	1 1 1 1	4 4 4 4	4 3 2 1

Na przykład: gdy pierwszy argument (p) jest równy 2, a drugi (q) jest równy 3, to zgodnie z tą tabelą: $C23 = 3$, $K23 = 4$ i $E23 = 4$. Wyróżnioną wartością jest wartość 1.

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy zwrócono uwagę na funktor asercji sekwencyjnej, którego własności różnią się od własności funktora słabej asercji. Jak pokazano, za pomocą asercji sekwencyjnej można zdefiniować stosunkowo prosto funktor koniunkcji sekwencyjnej. Zaproponowany system asercji sekwencyjnej **SAS**, jak również jego rozszerzenie **SAS*** może znaleźć zastosowanie w analizie filozoficznej logik temporalnych[14]. Funktor koniunkcji sekwencyjnej będzie również pomocny w analizie języka naturalnego. Na przykład jest on obecny w zdaniach:

[14] W naszej pracy zajmowaliśmy się jedynie syntaktyczną charakterystyką tych funktorów. W aspekcie semantycznym ograniczyniliśmy się jedynie do naszkicowania pewnych intuicji. Pozostaje sprawą otwartą formalna analiza semantyczna tych konstrukcji.

(1) *Huknął strzał i dzik zwalił się martwy na ziemię*[15]

oraz

(2) *Maria wyszła za mąż i urodziła syna.*

Zmiana kolejności członów w zdaniu (1) pociąga utratę jego sensu. Z kolei zmiana kolejności członów w zdaniu (2) zmienia jego sens[16].

BIBLIOGRAFIA

K o z a n e c k a A., L e s z c z y ń s k a M.: O wyrażalności niektórych relacji czasowych w języku systemów logiki temporalnej G.H. von Wrighta, „Roczniki Filozoficzne” 55 (2007), nr. 2, s. 43-65.
S u c h o ń W.: Prolegomena do retoryki logicznej, Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego 2005.
W a j s z c z y k J.: Logika a czas i zmiana, Olsztyn: Wydawnictwo WSP w Olsztynie 1995.
W r i g h t G.H. von: And Next, „Acta Philosophica Fennica” 18 (1965), s. 293-304.
— And Then, „Commentationes Physico-Mathematicae” 32 (1966), Nr 7, s. 1-11.
W o j c i e c h o w s k i E.: Słaba asercja, „Roczniki Filozoficzne” 60 (2012), nr 1, s. 87-104.
W o j t a s i e w i c z O.A.: Formalna i semantyczna analiza polskich spójników przyzdaniowych i międzyzdaniowych oraz wyrazów pokrewnych, „Studia Semiotyczne” 1972, III, s. 109-144.

FUNCTORS OF ASSERTION AND SEQUENTIAL CONJUNCTION

S u m m a r y

An axiomatic characterisation of the functor of *sequential assertion* is propsed here. By means of it the functor of *sequential conjunction* is defined. In the temporal interpretation these functors are respectively read as: *next*/*then* and *and-next*/*and-then.* It is proved that the proposed system (**SAS**) and its strenghtening (**SAS***) comprise respectively von Wright's **And Next** and **And Then** systems. The consistency and independence of axioms of the richer of the two proposed structures (**SAS***) is settled by interpretation in the quadrivalent propositional calculus.

Summarised and translated by Eugeniusz Wojciechowski

---

[15] Zob. O.A. W o j t a s i e w i c z, *Formalna i semantyczna analiza polskich spójników przyzdaniowych i międzyzdaniowych oraz wyrazów pokrewnych*, „Studia Semiotyczne”, 1972, III, s. 136.

[16] W przypadku gdy podczas dyskursu zostało wypowiedziane zdanie (2), zmiana w kolejności jego członów może być interpretowana jako naruszenie maksymy sposobu (*maksymy konwersacyne* Grice'a). Zob. W. S u c h o ń, *Prolegomena do retoryki logicznej*, Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego 2005, s. 63 n.

Słowa kluczowe: asercja sekwencyjna, koniunkcja sekwencyjna, systemy **And Next** i **And Then** von Wrighta.

Key words: sequential assertion, sequential conjunction, von Wright's **And Next** and **And Then** systems.

Information about Author: Prof. Dr. EUGENIUSZ WOJCIECHOWSKI – Division of Philosophy of Nature at the Hugo Kołłątaj Agriculture University of Cracow; address for correspondence: al. 29 Listopada 46, PL 31-425 Kraków; e-mail: rlwojcie@cyf-kr.edu.pl