ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LIX, numer 1 – 2011

EUGENIUSZ WOJCIECHOWSKI

RACHUNEK NAZW Z LISTAMI*

Pojęcie listy jest pojęciem pierwotnym w językach programowania takich jak LISP (od *List processing*) i PROLOG (*Logical programming*), związanych z problematyką *sztucznej inteligencji*. Odpowiednikiem listy w matematyce jest *n*-tka uporządkowana, będąca rozszerzeniem pojęcia pary uporządkowanej.

Z terminem *lista* spotykamy się również w języku naturalnym. W języku naturalnym pojęcie to jest obecne jawnie (sygnalizowane jest to zwykle słowem *lista*) lub niejawnie. Z pierwszym przypadkiem mamy do czynienia wówczas, gdy mówimy np. o liście studentów, liście zakupów itp. Przypadek drugi jest realizowany najczęściej poprzez frazy typu: „a_1, ...,a_n *są y*”, „a_1, ..., $a_{n\text{-}1}$ *i* a_n *są y*”, „a_1, ..., $a_{n\text{-}1}$ *lub* a_n *jest y*” oraz „*x jest* a_1, ..., a_n”.

Frazy te mogą być modyfikowane przy pomocy wyrażeń kwantyfikujących: *wszystkie* (*wszystkie z*) oraz *pewne* (*pewne z*).

Zaproponujemy tu rachunek nazw zbudowany metodą założeniową, będący wzbogaceniem bezkwantyfikatorowego rachunku nazw o wyrażenia listowe.

Dr hab. EUGENIUSZ WOJCIECHOWSKI, prof. UR – Zakład Filozofii Przyrody, Uniwersytet Rolniczy im. Hugona Kołłątaja w Krakowie; adres do korespondencji: al. 29 Listopada 46, 31-425 Kraków; e-mail: rlwojcie@cyf-kr.edu.pl

* Praca ta była referowana na XV Konferencji „Zastosowania logiki w filozofii i podstawach matematyki”, Szklarska Poręba, 4-7 V 2010 r., zorganizowanej przez Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, Instytut Matematyki Uniwersytetu Opolskiego oraz Katedrę Logiki i Metodologii Nauk Uniwersytetu Wrocławskiego.

1. BEZKWANTYFIKATOROWY RACHUNEK NAZW

System. Bezkwantyfikatorowy rachunek nazw (**BRN**), zbudowany metodą założeniową, posiada następujące reguły[1]:

R1 $x\varepsilon y/x\varepsilon x$
R2 $x\varepsilon y \wedge y\varepsilon z/x\varepsilon z$
R3 $x\varepsilon y \wedge y\varepsilon z/y\varepsilon x$

Mamy tu również reguły opuszczania i wprowadzania funktorów istnienia, jedyności, słabej inkluzji i inkluzji cząstkowej:

O*ex* $ex(x)/A\varepsilon x$
I*ex* $x\varepsilon y/ex(y)$
O*sol* $sol(x)/z\varepsilon x \rightarrow x\varepsilon z$
I*sol* $z\varepsilon x \wedge u\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon u/sol(x)$
O$\subset$ $x\subset y/z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon y$
I$\subset$ $z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon y/x\subset y$
O$\vartriangle$ $x\vartriangle y/A\varepsilon x \wedge A\varepsilon y$
I$\vartriangle$ $z\varepsilon x \wedge z\varepsilon y/x\vartriangle y$

gdzie ‘*A*’ jest stałą nazwową, niepowtarzającą się w wierszach w przypadku zastosowania tej reguły (więcej niż jeden raz) w dowodzie. Zmienna ‘*z*’ zaś nie występuje w założeniach dowodu.
Wyrażenia elementarne z tymi funktorami czytamy następująco[2]:

$x\varepsilon y$ – *x jest y*
$ex(x)$ – *x istnieje*
$sol(x)$ – *co-najwyżej-jeden-przedmiot-jest x*
$x\subset y$ – *x zawiera-się-w y*
$x\vartriangle y$ – *pewne x jest y*

Ponadto w systemie przyjmowane są reguły opuszczania i wprowadzania funktorów kwantyfikujących *wszystkie* (π) i *pewne* (σ). Wyrażenia *każdy* i *pewien*, będące substytutami kwantyfikatorów, wprowadza się tu za pomocą reguł:

---

[1] Zob. L. B o r k o w s k i, *Bezkwantyfikatorowy założeniowy system rachunku nazw*, (Część I), „Roczniki Filozoficzne” 28 (1980), z. 1, s. 133-148; (Część II) 41 (1993), z. 1, s. 11-21.
[2] Za pomocą łącznika ‘-‘ sygnalizujemy fakt, że dana fraza traktowana jest tu jako logicznie nieanalizowalna.

Oπ	$\alpha(\pi x)/z\varepsilon x \rightarrow \alpha(z)$
Iπ	$z\varepsilon x \rightarrow \alpha(z)/\alpha(\pi x)$
Oσ	$\alpha(\sigma x)/A\varepsilon x\wedge\alpha(A)$
Iσ	$z\varepsilon x\wedge\alpha(z)/\alpha(\sigma x)$

Formuły typu $\alpha(\pi a)$ i $\alpha(\sigma a)$ są formułami atomowymi sensownymi na gruncie tego języka, takimi jednak, że wyrażenia πa i σa pojawiają się jako pierwsze z lewej strony formuły $\alpha(\pi a)$ (i odpowiednio $\alpha(\sigma a)$) i nie są poprzedzone żadnym kontekstem o postaci πb lub σb[3].

Ponadto przyjmuje się odpowiedniki tych reguł, funkcjonujące w przypadkach pojawiania się tych wyrażeń kwantyfikujących w kontekście funktorów nazwotwórczych[4]:

O$f\pi$	$x\varepsilon f\pi y/z\varepsilon y \rightarrow x\varepsilon fz$
I$f\pi$	$x\varepsilon x\wedge(z\varepsilon y \rightarrow x\varepsilon fz)/x\varepsilon f\pi y$
O$f\sigma$	$x\varepsilon f\sigma y/A\varepsilon y\wedge x\varepsilon fA$
I$f\sigma$	$z\varepsilon y\wedge x\varepsilon fz/x\varepsilon f\sigma y$

Do reguł pierwotnych systemu należą też: reguła podstawiania dla nazw i reguła podstawiania dla funktorów (kategorii n/n).

Definicyjnie wprowadza się tu pojęcia przedmiotu i przedmiotu sprzecznego:

DV	$x\varepsilon \mathrm{V} \leftrightarrow x\varepsilon x$	*x jest przedmiotem*
DΛ	$x\varepsilon\Lambda \leftrightarrow x\varepsilon x\wedge{\sim}x\varepsilon x$	*x jest przedmiotem-sprzecznym*

oraz funktory: bycia przedmiotem, negacji, mocnej inkluzji, identyczności zakresowej, identyczności jednostkowej, iloczynu, sumy nazwowej i spełniania:

D*ob*	$ob(x) \leftrightarrow x\varepsilon x$	*x jest-przedmiotem*
D*n*	$x\varepsilon ny \leftrightarrow x\varepsilon x\wedge{\sim}x\varepsilon y$	*x jest nie y*
D$\sqsubset$	$x\sqsubset y \leftrightarrow ex(x)\wedge x\subset y$	*x zawiera-się-w y* (*w mocnym sensie*)
DO	$x\mathrm{O}y \leftrightarrow x\subset y\wedge y\subset x$	*x jest-zakresowo-identyczne-z y*
D=	$x=y \leftrightarrow x\varepsilon y\wedge y\varepsilon x$	*x jest-identyczne-z y*
D$\cap$	$x\varepsilon y\cap z \leftrightarrow x\varepsilon y\wedge x\varepsilon z$	*x jest y i z*
D$\cup$	$x\varepsilon y\cup z \leftrightarrow x\varepsilon y\vee x\varepsilon z$	*x jest y lub z*
D*stsf*	$x\varepsilon stsf/\alpha/ \leftrightarrow x\varepsilon x\wedge\alpha(x)$	*x jest przedmiotem-spełniającym* (*funktor*/*predykat*) α[5]

[3] Zob. B o r k o w s k i, *Bezkwantyfikatorowy założeniowy system rachunku nazw*, część I, s. 460.

[4] Dotyczą one takich przypadków jak: *x jest znawcą wszystkich dzieł tego autora*, jak również *x jest twórcą pewnych rozwiązań w tym projekcie*.

[5] Kształt nawiasów w formule $x\varepsilon stsf/\alpha/$ sygnalizuje inną niż bazową (n,s) kategorię argumentu.

Całość jest nadbudowana nad klasycznym rachunkiem zdań (**KRZ**), również założeniowo zbudowanym. Reguła odrywania (dla implikacji) jest tu odpowiednio rozszerzona, obejmując wszystkie wyrażenia sensowne tego systemu.
Regułą wtórną tego systemu jest reguła ekstensjonalności dla identyczności:

REI $x{=}y \wedge \alpha(x)/\alpha(y)$ [D=,R1,D*stsf*,R2]

Redukcja reguł pierwotnych. Bazę reguł pierwotnych tego systemu można uprościć przyjmując definicje: $ex(x) \leftrightarrow \sigma x \varepsilon x$, $sol(x) \leftrightarrow \pi x \varepsilon \pi x$, $x \subset y \leftrightarrow \pi x \varepsilon y$ i $x \vartriangle y \leftrightarrow \sigma x \varepsilon y$ oraz aksjomat (Aε): $x \varepsilon y \leftrightarrow \sigma x \varepsilon x \wedge \pi x \varepsilon \pi x \wedge \pi x \varepsilon y$[6]. Reguły O*ex*, I*ex*, O*sol*, I*sol*, O⊂,I⊂,O△ i I△ stałyby się wówczas regułami wtórnymi.
Kolejne uproszczenie reguł bazowych polega na przyjęciu reguły ekstensjonalności dla funktora epsilonowego: $x \varepsilon y/\alpha(y) \rightarrow \alpha(x)$[7]. Reguła ta pozwoliłaby wyeliminować Aε oraz reguły R1, R2 i R3.

2. BEZKWANTYFIKATOROWY RACHUNEK NAZW Z LISTAMI

Rozszerzymy język **BRN** o zmienne indywiduowe i operator listowy.
Słownik. Na słownik bezkwantyfikatorowego rachunku nazw z listami (**BRNL**) składają się:

1. zmienne nazwowe	– *x*,*y*,*z*,*u* (z indeksami lub bez)	– kategorii – *n*;
2. zmienne indywiduowe	– *a*,*b*,*c*,*d* (z indeksami lub bez)	– kategorii – *n*;
3. stałe nazwowe	– *A*,*B*,*C*,*D* (z indeksami lub bez)	– kategorii – *n*;
4. zmienne funktorowe	– *e*,*f*,*g*,*h* (z indeksami lub bez)	– kategorii – *n*/*n*;
5. stałe funktorowe:		
	~	– kategorii – *s*/*s*
	∧, ∨, → , ↔	– kategorii – *s*/*ss*
	n, π, σ	– kategorii – *n*/*n*
	ex, *sol*	– kategorii – *s*/*n*
	ε,⊂,△	– kategorii – *s*/*nn*;
6. operator listowy	– [...]	– kategorii – *n*/*n*,*n*/*nn*,..., *n*/*nn*...
7. nawiasy	– (,)	

[6] Zob. E. W o j c i e c h o w s k i, *Pewien bezkwantyfikatorowy rachunek nazw*, [w:] *Logika & Filozofia Logiczna. FLFL 1996-1998*, red. J. Perzanowski i A. Pietruszczak, Toruń 2000, s. 109-126, tu s.114 nn.

[7] Zob. t e n ż e, *Bezkwantyfikatorowy rachunek nazw z regułą ekstensjonalności*, „Roczniki Filozoficzne" 56 (2008), nr 1, s. 417-429, tu s. 421 nn.

Indukcyjnie wprowadzimy pojęcia terminu i formuły tego języka.

Termin.

1. zmienne nazwowe są terminami.
2. zmienne indywiduowe są terminami.
3. stałe nazwowe są terminami.
4. jeżeli t jest terminem, to nt też jest terminem.
5. jeżeli $t_1,\dots,t_n$ są terminami, to $[t_1,\dots,t_n]$ też jest terminem.
6. jeżeli t jest terminem, to πt i σt również są terminami.

Formuła.

1. jeżeli t jest terminem, to $ex(t)$ i $sol(t)$ są formułami.
2. jeżeli s i t są terminami, to $s\varepsilon t$, $s\subset t$ i $s \vartriangle t$ są formułami.
3. jeżeli α jest formułą, to $\sim\alpha$ jest też formułą.
4. jeżeli α i β są formułami, to $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha \to \beta$ i $\alpha \leftrightarrow \beta$ również są formułami.

Przyjmiemy aksjomat:

AI $a\varepsilon a$

Jako reguły przyjmiemy, podobnie jak poprzednio:

R1 $x\varepsilon y/x\varepsilon x$
R2 $x\varepsilon y\wedge y\varepsilon z/x\varepsilon z$
R3* $x\varepsilon y\wedge y\varepsilon z/y\varepsilon x$ o ile y nie jest listą

Przyjmiemy też pozostałe reguły systemu **BRN**[8].
Regułami specyficznymi tego systemu, determinującymi posługiwanie się operatorem listowym, są:

OL $x\varepsilon[z_1,\dots,z_n]/x\varepsilon z_1\vee\dots\vee x\varepsilon z_n$ $[x_1,\dots,x_n]\varepsilon y/x_1\varepsilon y\wedge\dots\wedge x_n\varepsilon y$ o ile y nie jest listą
IL $x\varepsilon z_1\vee\dots\vee x\varepsilon z_n/x\varepsilon[z_1,\dots,z_n]$ $x_1\varepsilon y\wedge\dots\wedge x_n\varepsilon y/[x_1,\dots,x_n]\varepsilon y$
RL $[x_1,x_2,\dots,x_n]\varepsilon[z_1,z_2,\dots,z_n]/x_1\varepsilon z_1\wedge[x_2,\dots,x_n]\varepsilon[z_2,\dots,z_n]$ $[x]\varepsilon[z]/x\varepsilon z$

Reguły OL i IL są dwuczłonowe. Ich pierwsze człony dotyczą prawostronnego pojawiania się (po funktorze *jest*) wyrażenia listowego. Drugie człony tych reguł determinują lewostronne wystąpienie tych wyrażeń, tj. jako pierwszy argument funktora epsilonowego. Wyrażenia $x\varepsilon[z_1,\dots,z_n]$ i $[x_1,\dots,x_n]\varepsilon y$ możemy czytać – w duchu języka naturalnego – odpowiednio: „*x jest*

[8] Regułę I$f\pi$ można tu sformułować prościej: $z\varepsilon y \to a\varepsilon fz/a\varepsilon f\pi y$.

$z_1,z_2,$...*lub* z_n" oraz „$x_1,x_2,$...*i* x_n *jest* (*są*) y". Przykładami podstawień pod te frazy są: *Andrzej jest matematykiem, fizykiem lub biologiem* oraz *Andrzej, Paweł i Piotr są logikami*.

Z kolei reguła RL określa, w sposób indukcyjny, znaczenie frazy typu *lista_1 jest listą_2*.

Frazę $[x_1,x_2,...,x_n]\varepsilon[z_1,z_2,...,z_n]$ możemy czytać na gruncie języka naturalnego również tak: „$x_1,x_2,$...*i* x_n *są* (*-odpowiednio*) $z_1,z_2,$...*i* z_n. Przykładowo: *Jan, Paweł i Piotr są-odpowiednio matematykiem, fizykiem i biologiem*. Innym przypadkiem tego typu byłoby: *Jan, Paweł i Piotr są-odpowiednio ojcem Anny, ojcem Ewy i ojcem Zofii*. W ostatnim przykładzie, z uwagi na jednostkowość nazw pojawiających się po prawej stronie, mamy do czynienia z determinacją słowa *są* (*są-odpowiednio*), które znaczy w tym kontekście tyle co: *są-identyczne* (*są-odpowiednio-identyczne-z*).

Przyjmiemy wszystkie definicje systemu poprzedniego.

Ograniczenie stosowalności reguły R3* wiąże się z eliminacją niepożądanych konsekwencji, które uzyskalibyśmy, gdybyśmy tego ograniczenia nie wprowadzili. Znosząc to ograniczenie, otrzymalibyśmy w szczególności:

$[x,y]\varepsilon z \rightarrow x=y$

Dem.

	Hp(1) $\rightarrow$	
(2a)	$a\varepsilon[x,y]\wedge b\varepsilon[x,y]$	[zd1]
(2b)	$[x,y]\varepsilon a\wedge[x,y]\varepsilon b$	[1,2a,R3]
(2c)	$x\varepsilon a$	[2b,OL]
(2d)	$x\varepsilon b$	[2b,OL]
(2e)	$a\varepsilon a$	[2a×R1]
(2f)	$a\varepsilon x$	[2c,2e×R3]
(2g)	$a\varepsilon b$	[2d,2f×R2]
(2)	$a\varepsilon[x,y]\wedge b\varepsilon[x,y] \rightarrow a\varepsilon b$	[2a → 2g]
(3)	$sol([x,y])$	[2×I*sol*]
(4)	$x\varepsilon z$	[1×OL]
(5)	$x\varepsilon x$	[4×R1]
(6)	$x\varepsilon x \rightarrow x\varepsilon[x,y]$	[IL]
(7)	$x\varepsilon[x,y]$	[5,6×MP]
(8)	$x\varepsilon[x,y] \rightarrow [x,y]\varepsilon x$	[3×O*sol*]
(9)	$[x,y]\varepsilon x$	[7,8×MP]
(10)	$x\varepsilon y$	[7×OL]
(11)	$y\varepsilon x$	[9×OL]
(12)	T	[10,11,D=]

Konwencja notacyjna. Przyjmiemy pewne uproszczenie w zapisie list. Wyrażenie:

$[x_i]_1^n$ – jest skrótem dla $[x_1,\ldots,x_n]$

Wybrane tezy. Do tez z listami należą[9]:

T1 $x\varepsilon[a_i]_1^n \rightarrow x=a_1\vee\ldots\vee x=a_n$

Dem.

Hp(1) →

(2)	$x\varepsilon a_1\vee\ldots\vee x\varepsilon a_n$	[1×OL]
(3)	$a_1\varepsilon a_1\wedge\ldots\wedge a_n\varepsilon a_n$	[AI]
(4)	T	[2,3,**BRN**]

T2 $x\varepsilon y \rightarrow x\varepsilon[z_1,\ldots,z_m,y,z_{m+1},\ldots,z_n]$ [**BRN**,IL]

T3a $\pi[a_i]_1^n\ \varepsilon x \rightarrow [a_i]_1^n\ \varepsilon x$

Dem.

Hp(1) →

(2)	$a_1\varepsilon a_1\wedge\ldots\wedge a_n\varepsilon a_n$	[AI]
(3)	$a_1\varepsilon[a_i]_1^n\wedge\ldots\wedge a_n\varepsilon[a_i]_1^n$	[2,T2]
(4)	$(a_1\varepsilon[a_i]_1^n \rightarrow a_1\varepsilon x)\ \wedge\ldots\wedge(a_n\varepsilon[a_i]_1^n \rightarrow a_n\varepsilon x)$	[1×Oπ]
(5)	$a_1\varepsilon x\wedge\ldots\wedge a_n\varepsilon x$	[3,4]
(6)	T	[5×IL]

T3b $[a_i]_1^n\ \varepsilon x \rightarrow \pi[a_i]_1^n\ \varepsilon x$

Dem.

Hp(1) →

(2)	$a_1\varepsilon x\wedge\ldots\wedge a_n\varepsilon x$	[1×OL]
(3)	$(z\varepsilon a_1 \rightarrow z\varepsilon x)\ \wedge\ldots\wedge\ (z\varepsilon a_n \rightarrow z\varepsilon x)$	[2,**BRN**]
(4)	$z\varepsilon[a_i]_1^n \rightarrow z\varepsilon x$	[3,**BRN**,IL]
(5)	T	[4×Iπ]

T3 $\pi[a_i]_1^n\ \varepsilon\ x \leftrightarrow [a_i]_1^n\ \varepsilon x$ [T3a,T3b]

Zgodnie z tą tezą, w przypadku gdy wyrażenie listowe, utworzone z nazw indywiduowych, znajduje się przed funktorem *jest* (ε), jego poprzedzenie funktorem *wszystkie* (π) jest redundantne. Ogólność jest tu wyrażana przez sam fakt pojawienia się listy po lewej stronie funktora *jest*.

[9] Wyrażenia „z" i „zd", występujące w wierszach dowodowych, są odpowiednio skrótami wyrażeń: „założenie" i „założenie dodatkowe". Symbole Hp(...) i T znaczą tu odpowiednio: *założenie*(*liczba przesłanek*) oraz *teza* = dowodzony następnik implikacji.

Tego typu wyrażenie jest oddawane na gruncie języka naturalnego za pomocą fraz: *każde z* $a_1,\ldots,a_n$ *jest* x lub a_1 *i...i* a_n *jest* x. W ostatniej frazie mamy do czynienia z tzw. *i n-numeratyw-nym*[10]. Tadeusz Kotarbiński przestrzegał przed utożsamieniem tego funktora z funktorem iloczynu nazwowego[11]. Można przyjąć definicję *n-numeratywnego* funktora *i*, taką by – w zgodzie z językiem naturalnym – zagwarantować sobie inferencję: *x i y jest z* → *x jest z* ∧*y jest z*[12].

T4a $x\varepsilon\pi[a_i]_1^n \rightarrow x\varepsilon a_1 \wedge\ldots\wedge x\varepsilon a_n$

Dem.

	Hp(1) →	
(2)	$a_1\varepsilon a_1 \wedge\ldots\wedge a_n\varepsilon a_n$	[AI]
(3)	$a_1\varepsilon[a_i]_1^n \wedge\ldots\wedge a_n\varepsilon[a_i]_1^n$	[2,T2]
(4)	$(a_1\varepsilon[a_i]_1^n \rightarrow x\varepsilon a_1) \wedge\ldots\wedge(a_n\varepsilon[a_i]_1^n \rightarrow x\varepsilon a_n)$	[1×Oπ]
(5)	T	[3,4]

T4b $x\varepsilon a_1 \wedge\ldots\wedge x\varepsilon a_n \rightarrow x\varepsilon\pi[a_i]_1^n$

Dem.

	Hp(1) →	
(2a)	$z\varepsilon[a_i]_1^n$	[zd1]
(2b)	$z\varepsilon a_1 \vee\ldots\vee z\varepsilon a_n$	[2a×OL]
(2c)	$a_1\varepsilon a_1 \wedge\ldots\wedge a_n\varepsilon a_n$	[AI]
(2d)	$a_1\varepsilon z \vee\ldots\vee a_n\varepsilon z$	[2b,2c,R3*]
(2e)	$x\varepsilon z$	[1,2d,R2]
(3)	$z\varepsilon[a_i]_1^n \rightarrow x\varepsilon z$	[2a → 2e]
(4)	T	[2×Iπ]

T4 $x\varepsilon\pi[a_i]_1^n \leftrightarrow x\varepsilon a_1 \wedge\ldots\wedge x\varepsilon a_n$ [T4a,T4b]

Teza T4 pokazuje, że funktor *wszystkie* istotnie modyfikuje prawostronne wystąpienie wyrażenia listowego, składającego się z nazw indywiduowych. Prawy człon tej równoważności, z uwagi na AI, jest równoważny z: $x=a_1 \wedge\ldots\wedge x=a_n$.

[10] Zob. T. K o t a r b i ń s k i, *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, Lwów 1929, s. 229 n. Pewną rekonstrukcję logiczną tego funktora można znaleźć w: E. W o j c i e c h o w s k i, *Zwei enumerative Funktoren*, „Conceptus” 26 (1992/1993), Nr. 68/69, s. 185-190, s. 187.

[11] K o t a r b i ń s k i, *Elementy teorii poznania*, s. 230 n.

[12] Taką definicję zaproponowałem w *Zwei enumerative Funktoren*, s. 187.

T5a $x\varepsilon\sigma[y_i]_1^n \rightarrow x\varepsilon[y_i]_1^n$

Dem.

	Hp(1) $\rightarrow$	
(2)	$A\varepsilon[y_i]_1^n \wedge x\varepsilon A$	[1×Oσ]
(3)	T	[2×R2]

T5b $x\varepsilon[y_i]_1^n \rightarrow x\varepsilon\sigma[y_i]_1^n$

Dem.

	Hp(1) $\rightarrow$	
(2)	$x\varepsilon x$	[1×R1]
(3)	T	[1,2×Iσ]

T5 $x\varepsilon\sigma[y_i]_1^n \leftrightarrow x\varepsilon[y_i]_1^n$ [T5a,T5b]

Podobnie jak T3, wystąpienie funktora *pewne* przed listą – tym razem – po prawej stronie funktora epsilonowego jest redundantne.

T6a $\sigma[a_i]_1^n\ \varepsilon x \rightarrow a_1\varepsilon x \vee \ldots \vee a_n\varepsilon x$

Dem.

	Hp(1) $\rightarrow$	
(2)	$A\varepsilon[a_i]_1^n$	[1×Oσ]
(3)	$A\varepsilon x$	[1×Oσ]
(4)	$a_1\varepsilon a_1 \wedge \ldots \wedge a_n\varepsilon a_n$	[AI]
(5)	$A\varepsilon a_1 \vee \ldots \vee A\varepsilon a_n$	[2×OL]
(6)	$a_1\varepsilon A \vee \ldots \vee a_n\varepsilon A$	[4,5,R3*]
(7)	T	[3,6,R2]

T6b $a_1\varepsilon x \vee \ldots \vee a_n\varepsilon x \rightarrow \sigma[a_i]_1^n\ \varepsilon x$

Dem.

	Hp(1) $\rightarrow$	
(2)	$[a_i]_1^n\ \varepsilon x$	[1×IL]
(3)	$ex([a_i]_1^n)$	[2,**BRN**]
(4)	$A\varepsilon[a_i]_1^n$	[3×Oex]
(5)	$A\varepsilon x$	[2,4×R2]
(6)	T	[4,5×Iσ]

T6 $\sigma[a_i]_1^n\ \varepsilon x \leftrightarrow a_1\varepsilon x \vee \ldots \vee a_n\varepsilon x$ [T6a,T6b]

Tu funktor *pewne* istotnie modyfikuje lewostronne wystąpienie wyrażenia listowego złożonego z nazw indywiduowych. Wyrażenie znajdujące się po lewej stronie tej równoważności jest formalnym odpowiednikiem fraz języka naturalnego: *pewne z* $a_1,\ldots,a_n$ *jest* x lub a_1 *lub...lub* a_n *jest* x. W drugiej z nich mamy funktor *lub n-numeratywne*[13]. Podobnie jak przy *i n-numeratywnym*, należy rozróżniać między *n-numeratywnym* funktorem *lub* a funktorem sumy nazwowej[14].

T7a $[x,y]=[z,u] \rightarrow x=z \wedge y=u$

Dem.

	Hp(1) $\rightarrow$	
(2)	$[x,y]\varepsilon[z,u] \wedge [z,u]\varepsilon[x,y]$	[1,D=]
(3)	$x\varepsilon z \wedge [y]\varepsilon[u]$	[2×RL]
(4)	$z\varepsilon x \wedge [u]\varepsilon[y]$	[2×RL]
(5)	$x\varepsilon z \wedge z\varepsilon x$	[3,4]
(6)	$y\varepsilon u \wedge u\varepsilon y$	[3,4,RL]
(7)	T	[5,6,D=]

Teza ta wyraża własność listy dwuelementowej, która jest odpowiednikiem analogicznej własności teoriomnogościowej pary uporządkowanej.

W odróżnieniu od teoriomnogościowej pary uprządkowanej i jej indukcyjnego uogólnienia *n*-tki uporządkowanej, elementami list na gruncie naszego rachunku mogą być również nazwy ogólne[15]. Własność wyrażona w tezie T7a jest dla par uporządkowanych rezultatem definicji pary uporządkowanej, redukującej ją do pary nieuporządkowanej[16]. Z takim podejściem spotykamy się w standardowych ujęciach teorii mnogości[17].

Z kolei, pojęcie listy obecne w językach programowania takich jak LISP czy PROLOG jest pojęciem pierwotnym. Elementami list mogą być tam przedmioty będące indywiduami lub listami. Spotykamy się tam też z pojęciem listy pustej[18].

[13] Zob. K o t a r b i ń s k i, *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, s. 229 n.; W o j c i e c h o w s k i, *Zwei enumerative Funktoren*, s.188.

[14] K o t a r b i ń s k i, *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, s. 229 n. W pracy *Zwei enumerative Funktoren* (s. 188) funktor ten został również zdefiniowany.

[15] Na gruncie teorii mnogości elementami pary uporządkowanej (tj. jej element pierwszy i jej element drugi) są przedmioty jednostkowe – indywidua, zbiory lub inne pary uporządkowane (*n*-tki uporządkowane).

[16] Definicja ta ma postać: $\langle x,y\rangle = \{\{x\},\{x,y\}\}$. Jej autorem jest Kazimierz Kuratowski (*Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles*, „Fundamenta Mathematicae" 3 (1921), s. 161-171).

[17] Z niestandardowym ujęciem tej własności pary uporządkowanej spotykamy się u bourbakistów (N. B o u r b a k i, *Elements of Mathematics*: *Theory of Sets*, Berlin 2004). Ta własność pary uporządkowanej jest tam wyrażona w postaci aksjomatu.

[18] Pojęcie listy pustej pełni tam rolę techniczną. Jest pomocne w definicjach indukcyjnych predykatów (operacji), których co najmniej jeden argument jest listą.

T7b $[x_i]_1^n=[z_i]_1^n \rightarrow x_1=z_1\wedge\ldots\wedge x_n=z_n$ [D=,RL]

T8a $sol([a])$

Dem.

(1a) $z\varepsilon[a]\wedge u\varepsilon[a]$ [zd1]

(1b) $z\varepsilon a\wedge u\varepsilon a$ [1a×OL]

(1c) $a\varepsilon a$ [AI]

(1d) $a\varepsilon u$ [1b,1c×R3*]

(1e) $z\varepsilon u$ [1b,1d×R2]

(1) $z\varepsilon[a]\wedge u\varepsilon[a] \rightarrow z\varepsilon u$ [1a → 1e]

(2) $sol([a])$ [1×I*sol*]

T8b $sol([a,\ldots,a])$ [OL,AI,R3*,R2,I*sol*]

T8c $x=y \rightarrow sol([x,y])$

Dem.

Hp(1) →

(2a) $z\varepsilon[x,y]\wedge u\varepsilon[x,y]$ [zd1]

(2b) $z\varepsilon x\vee z\varepsilon y$ [2a×OL]

(2c) $u\varepsilon x\vee u\varepsilon y$ [2a×OL]

(2d) $z\varepsilon x$ [1,2b,**BRN**]

(2e) $u\varepsilon x$ [1,2c,**BRN**]

(2f) $x\varepsilon x$ [1,**BRN**]

(2g) $x\varepsilon u$ [2e,2f×R3*]

(2h) $z\varepsilon u$ [2d,2g×R2]

(2) $z\varepsilon[x,y]\wedge u\varepsilon[x,y] \rightarrow z\varepsilon u$ [2a → 2h]

(3) T [2×I*sol*]

T9 $z\varepsilon[x_i]_1^m\cap[x_i]_1^n \leftrightarrow z\varepsilon[x_m]\wedge z\varepsilon[x_i]_1^n$ [D∩]

T10 $z\varepsilon[x_i]_1^m\cup[x_i]_1^n \leftrightarrow z\varepsilon[x_i]_1^m\vee z\varepsilon[x_i]_1^n$ [D∪]

T11 $[x_i]_1^m\cup[z_i]_1^n \circ [x_1,\ldots,x_m,z_1,\ldots,z_n]$ [D○,T10,OL,RL,**BRN**,IL]

T12 $x_1\varepsilon z_1\wedge\ldots\wedge x_n\varepsilon z_n \rightarrow [x_i]_1^n\varepsilon[z_i]_1^n$

Dem.

Hp(1) →

(2) $x_1\varepsilon[z_i]_1^n\wedge\ldots\wedge x_n\varepsilon[z_i]_1^n$ [1,T2]

(3) T [2×IL]

T13 $x_1=z_1\wedge\ldots\wedge x_n=z_n \rightarrow [x_i]_1^n = [z_i]_1^n$ [D=,T12]

T14 $x\varepsilon n[z_i]_1^n \rightarrow x\varepsilon nz_1\wedge\ldots\wedge x\varepsilon nz_n$

Dem.

Hp(1) →

(2) $x\varepsilon x$ [1,Dn]

(3) $\sim x\varepsilon[z_n]_1^n$ [1,Dn]

(4) $\sim x\varepsilon[z_1,\ldots,z_n]$ [3]

(5) $x\varepsilon z_1\vee\ldots\vee x\varepsilon z_n \rightarrow x\varepsilon[z_1,\ldots,z_n]$ [IL]

(6) $\sim x\varepsilon z_1\wedge\ldots\wedge\sim x\varepsilon z_n$ [4,5]

(7) T [2,6,Dn]

T15 $x\circ[x_i]_1^m\wedge y\circ[z_i]_1^n\wedge z\circ[x_i]_1^m\cup[z_i]_1^n \rightarrow z\circ[x,y]$

Dem.

Hp(3) →

(4a) $u\varepsilon z$ [zd1]

(4b) $u\varepsilon[x_i]_1^m\cup[z_i]_1^n$ [3,4a,**BRN**]

(4c) $u\varepsilon[x_i]_1^m\vee u\varepsilon[z_i]_1^n$ [4b,D∪]

(4d) $u\varepsilon x\vee u\varepsilon y$ [1,2,4c,**BRN**]

(4e) $u\varepsilon[x,y]$ [4d×IL]

(4) $u\varepsilon z \rightarrow u\varepsilon[x,y]$ [4a → 4e]

(5a) $u\varepsilon[x,y]$ [zd2]

(5b) $u\varepsilon x\vee u\varepsilon y$ [5a×OL]

(5c) $u\varepsilon[x_i]_1^m\vee u\varepsilon[z_i]_1^n$ [1,2,5b,**BRN**]

(5d) $u\varepsilon[x_i]_1^m\cup[z_i]_1^n$ [5c,D∪]

(5e) $u\varepsilon z$ [5d,3,**BRN**]

(5) $u\varepsilon[x,y] \rightarrow u\varepsilon z$ [5a → 5e]

(6) $[x,y]\subset z\wedge z\subset[x,y]$ [4×I⊂,5×I⊂]

(7) T [5,6,D○]

T16 $x\circ[y,[z_i]_1^n] \rightarrow x\circ[y,z_1,\ldots,z_n]$ [**BRN**,OL,IL]

Reguły wtórne. Do reguł wtórnych **BRNL** należą:

LR1 $[x_1,\ldots,x_n]\varepsilon y/x_1\varepsilon x_1\wedge\ldots\wedge x_n\varepsilon x_n$ [OL,R1]

LR2 $[x_i]_1^n\varepsilon[y_i]_1^n\wedge[y_i]_1^n\varepsilon[z_i]_1^n/[x_i]_1^n\varepsilon[z_i]_1^n$

Der.

⊢

(1) $[x_i]_1^n\varepsilon[y_i]_1^n$ [z]

(2) $[y_i]_1^n\varepsilon[z_i]_1^n$ [z]

(3) $x_1\varepsilon y_1\wedge\ldots\wedge x_n\varepsilon y_n$ [1×RL]

(4) $y_1\varepsilon z_1\wedge\ldots\wedge y_n\varepsilon z_n$ [2×RL]

(5) $x_1 \varepsilon z_1 \wedge \ldots \wedge x_n \varepsilon z_n$ [3,4,R2]
(6) $[x_i]_1^n \varepsilon [z_i]_1^n$ [5,T12]

LR3* $[x_i]_1^n \varepsilon y \wedge y \varepsilon z / y \varepsilon [x_i]_1^n$ o ile y nie jest listą
Dem.

$\vdash$
(1) $[x_i]_1^n \varepsilon y$ [z]
(2) $y \varepsilon z$ [z]
(3) $x_1 \varepsilon y \wedge \ldots \wedge x_n \varepsilon y$ [1×OL]
(4) $y \varepsilon x_1 \wedge \ldots \wedge y \varepsilon x_n$ [2,3,R3*]
(5) $y \varepsilon x_1 \vee \ldots \vee y \varepsilon x_n$ [4]
(6) $y \varepsilon [x_i]_1^n$ [5×IL]

LO⊂ $[x_i]_1^m \subset [x_i]_1^n / z \varepsilon [x_i]_1^m \rightarrow z \varepsilon [x_i]_1^n$ [O⊂]

LI⊂ $z \varepsilon [x_i]_1^m \rightarrow z \varepsilon [x_i]_1^n / [x_i]_1^m \subset [x_i]_1^n$ [I⊂]

LI*sol* $[z,u] \varepsilon x \rightarrow z \varepsilon u / sol(x)$
Der.

$\vdash$
(1) $[z,u] \varepsilon x \rightarrow z \varepsilon u$ [z]
(2a) $z \varepsilon x \wedge u \varepsilon x$ [zd1]
(2b) $[z,u] \varepsilon x$ [2a×IL]
(2c) $z \varepsilon u$ [1,2b×MP]
(2) $z \varepsilon x \wedge u \varepsilon x \rightarrow z \varepsilon u$ [2a → 2c]
(3) $sol(x)$ [2×I*sol*]

Mamy tu również reguły opuszczania i wprowadzania funktorów π i σ z wyrażeniami listowymi[19]:

LOπ $\alpha(\pi[a_i]_1^n) / \alpha(a_1) \wedge \ldots \wedge \alpha(a_n)$
Der.

$\vdash$
(1) $\alpha(\pi[a_i]_1^n)$ [z]
(2) $a_1 \varepsilon a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \varepsilon a_n$ [AI]
(3) $a_1 \varepsilon [a_i]_1^n \wedge \ldots \wedge a_n \varepsilon [a_i]_1^n$ [1,T2]
(4) $(a_1 \varepsilon [a_i]_1^n \rightarrow \alpha(a_1)) \wedge \ldots \wedge (a_n \varepsilon [a_i]_1^n \rightarrow \alpha(a_n))$ [1×Oπ]
(5) $\alpha(a_1) \wedge \ldots \wedge \alpha(a_n)$ [3,4]

---

[19] Por. P.T. G e a c h, *Logika list*, [w:] t e n ż e, *Do czego odnoszą się wyrażenia ogólne?*, Warszawa 2006, s. 115-133, tu s. 117 n.

LIπ $\alpha(a_1) \wedge\ldots\wedge\alpha(a_n)/\alpha(\pi[a_i]_1^n)$

Der.

	$\vdash$	
(1a)	$x\varepsilon[a_i]_1^n$	[zd1]
(1b)	$x=a_1\vee\ldots\vee x=a_n$	[1a,T1×MP]
(1c)	$\alpha(x)$	[1a,1b×REI]
(1)	$x\varepsilon[a_i]_1^n \rightarrow \alpha(x)$	[1a → 1c]
(2)	$\alpha(\pi[a_i]_1^n)$	[1×Iπ]

LOσ $\alpha(\sigma[a_i]_1^n)/\alpha(a_1) \vee\ldots\vee\alpha(a_n)$

Der.

	$\vdash$	
(1)	$\alpha(\sigma[a_i]_1^n)$	[z]
(2)	$A\varepsilon[a_i]_1^n\wedge\alpha(A)$	[1×Oσ]
(3)	$(A=a_1\vee\ldots\vee A=a_n)\wedge\alpha(A)$	[2,T1]
(4)	$\alpha(a_1) \vee\ldots\vee\alpha(a_n)$	[3×REI]

LIσ $\alpha(a_1) \vee\ldots\vee\alpha(a_n)/\alpha(\sigma[a_i]_1^n)$

Der.

	$\vdash$	
(1)	$\alpha(a_1) \vee\ldots\vee\alpha(a_n)$	[z]
(2)	$a_1\varepsilon a_1\wedge\ldots\wedge a_n\varepsilon a_n$	[AI]
(3)	$a_1\varepsilon[a_i]_1^n\wedge\ldots\wedge a_n\varepsilon[a_i]_1^n$	[2,T2]
(4)	$(a_1\varepsilon[a_i]_1^n\wedge\alpha(a_1)) \vee\ldots\vee(a_n\varepsilon[a_i]_1^n\wedge\alpha(a_n))$	[1,3]
(5)	$\alpha(\sigma[a_i]_1^n)$	[4×Iσ]

Szczególnymi przypadkami reguł O*f*π,I*f*π,O*f*σ i I*f*σ są:

LO*f*π	$x\varepsilon f\pi[y_i]_1^n/z\varepsilon[y_i]_1^n \rightarrow x\varepsilon fz$	[O*f*π]
LI*f*π	$x\varepsilon x\wedge(z\varepsilon[y_i]_1^n \rightarrow x\varepsilon fz)/x\varepsilon f\pi[y_i]_1^n$	[I*f*π]
LO*f*σ	$x\varepsilon f\sigma[y_i]_1^n/A\varepsilon[y_i]_1^n\wedge x\varepsilon fA$	[O*f*σ]
LI*f*σ	$z\varepsilon[y_i]_1^n\wedge x\varepsilon fz/x\varepsilon f\sigma[y_i]_1^n$	[I*f*σ]

Przykładowo, zgodnie z tymi regułami:

(LO*f*π) *Jeżeli x jest miłośnikiem twórczości wszystkich_z listy L, to jeżeli z jest z listy L, to x jest miłośnikiem twórczości z.*

(LO*f*σ) *Jeżeli x jest znawcą pewnych dzieł Platona, Arystotelesa lub Kanta, to coś jest dziełem z tejże listy i x jest znawcą tego dzieła.*

3. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiony tu bezkwantyfikatorowy rachunek nazw można traktować jako narzędzie pomocne w analizie języka naturalnego. Pozwala ono w szczególności na uchwycenie różnicy między trzema znaczeniami słów *i* oraz *lub* obecnych w języku naturalnym, gdzie *i*/*lub* jest jednym z dwóch klasycznych funktorów o kategorii [*s*/*ss*,*n*/*nn*] lub jest funktorem *n*-numeratywnym, wyznaczającym listę funktorów (typu *n*/*n*...). W przypadku funktorów *n*-numeratywnych nie bez znaczenia jest lewostronne lub prawostronne się ich pojawianie w kontekście funktora *jest* (ε) lub innych funktorów tego typu, pojawiających się przy predykacji (⊂,⊏,▵,○,=).

Mamy tu do czynienia z pewnego rodzaju grą między funktorami *wszystkie* i *pewne* a wyrażeniami listowymi. Te pierwsze mogą determinować to, czy w danej frazie lista wyraża *i* *n*-numeratywne czy *lub* *n*-numeratywne.

Interesująca byłaby analiza, za pomocą tego narzędzia, takich słów jak *większość* i *mniejszość* (czy raczej *większość-z* i *mniejszość-z*) pojawiających się w kontekście wyrażeń listowych[20].

BIBLIOGRAFIA

B o r k o w s k i L.: Bezkwantyfikatorowy założeniowy system rachunku nazw. Część I, „Roczniki Filozoficzne" 28 (1980), z. 1, s. 133-148; Część II, „Roczniki Filozoficzne" 41 (1993), z. 1, s. 11-21.

B o u r b a k i N.: Elements of Mathematics: Theory of Sets, Berlin: Springer-Verlag 2004.

G e a c h P.: Logika list, [w:] t e n ż e, Do czego odnoszą się wyrażenia ogólne?, tł. z ang. J. Odrowąż-Sypniewska, Warszawa: Semper 2006, s. 115-133.

K o t a r b i ń s k i T.: Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk, Lwów: Ossolineum 1929.

K u r a t o w s k i K.: Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles, „Fundamenta Mathematicae" 3 (1921), s. 161-171.

W o j c i e c h o w s k i E.: Zwei enumerative Funktoren, „Conceptus" 26 (1992/1993), Nr 68/69, s. 185-190.

— Pewien bezkwantyfikatorowy rachunek nazw, [w:] Logika & Filozofia Logiczna. FLFL 1996-1998, red. J. Perzanowski, A. Pietruszczak, Toruń: Wydawnictwo UMK 2000, s. 109-126.

— Bezkwantyfikatorowy rachunek nazw z regułą ekstensjonalności, „Roczniki Filozoficzne" 56 (2008), nr 1, s. 417-429.

[20] Na co również zwraca uwagę P. Geach (*Logika list*, s. 120).

THE CALCULUS OF NAMES WITH LISTS

S u m m a r y

In its suppositional phrasing the quantifier-less calculus of names has rules of introduction and Omission of the *all* (π) and *some* (σ) functors of the *n/n* category. The functors are the equivalents of quantifiers. A certain extension of its language by individual variables and a list Operator ([…]) is proposed here. In so extended language the quantifier-less calculus of names with lists is constructed, where axiom AI (a Substitute of the axiom of the theory of identity) and the rules characterising the list Operator are adopted.

Summarised by Eugeniusz Wojciechowski

Słowa kluczowe: bezkwantyfikatorowy rachunek nazw, lista, Operator listowy, ontologia elementarna, systemy Leśniewskiego.

Key words: quantifier-less calculus of names, list, list Operator, elementary ontology, Leśniewski's Systems.

Information about Author: Information about Author: Prof. Dr. EUGENIUSZ WOJCIECHOWSKI – Division of Philosophy of Nature, Hugo Kołłątaj Agriculture University of Cracow; address for correspondence: al. 29 Listopada 46, PL 31-425 Kraków; e-mail: rlwojcie@cyf-kr.edu.pl