N.T.M. 18 (2010) 293–309
0036-6978/10/030293-17
DOI 10.1007/s00048-010-0024-3

Nachdruck:

Zur Entstehungsgeschichte der abstrakten Gruppentheorie

Hans Wußing

Ein Kommentar zu diesem Nachdruck des Originalbeitrags ist im Anschluss in diesem Heft und online unter dem DOI: 10.1007/s00048-010-0025-2 zu finden.

Originalquelle: Wußing, Hans: Zur Entstehungsgeschichte der abstrakten Gruppentheorie, *NTM* 2 (1965), 5, 1–16.

Zur Entstehungsgeschichte der abstrakten Gruppentheorie *

Von HANS WUSSING (Leipzig)

Ganz unverkennbar rückt seit einiger Zeit der Begriff „Mathematische Struktur" zu einem der zentralen Begriffe der modernen Mathematik auf. Nicht nur, daß die Vokabel „Struktur" immer häufiger in der modernen Literatur auftritt, die Erforschung spezieller, aber zugleich weitreichender Strukturen wird im Interesse einer zu vereinheitlichenden und zugleich zu programmierenden Entwicklung der Mathematik zu einer zentralen Aufgabe erklärt. Die bewußte Hinwendung zum strukturellen Denken gibt sogar Veranlassung zu Begriffsbestimmungen der Mathematik selbst: Die extremste derartige Ansicht wird von dem unter dem Pseudonym *Nicolas Bourbaki* auftretenden Kollektiv hauptsächlich französischer Mathematiker vertreten — danach sei die Mathematik aufzufassen als Hierarchie von Strukturen.

Die bewußte Erforschung von Strukturen ist dabei keineswegs typisch für die Mathematik, sondern ganz allgemein zu einem Leitgedanken bei der Einschätzung und Prognose der modernen Naturwissenschaft geworden. So beruht der von dem französischen Atomphysiker *Pierre Auger* (* 1899) in Zusammenarbeit mit einer bedeutenden Anzahl von führenden Gelehrten und wissenschaftlichen Institutionen an die UNESCO erstattete Bericht „Die modernen Strömungen der wissenschaftlichen Forschung" auf der Konzeption, daß die Erforschung von Strukturen das zentrale Problem der heutigen Naturwissenschaft und Mathematik sei.

Was die Mathematik betrifft, so ist wohl zumindest der Begriff „algebraische Struktur" fest eingebürgert im Sinne einer Menge, innerhalb der eine oder mehrere Verknüpfungen (Operationen) durch Angabe der Verknüpfungsregeln erklärt sind. Bei der Erläuterung des Vorstellungsinhaltes von „algebraischer Struktur" wird in allen modernen Lehrbüchern der Algebra stets auch auf die Gruppe als ein Musterbeispiel verwiesen. Fast durchgängig ist auch das Urteil, daß die in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts sich durchsetzende neue Auffassung vom Wesen der Algebra, welche etwa in Deutschland mit den Namen *E. Noether*,

---

* Nach einem Vortrag des Verfassers in dem von der Gesellschaft tschechoslowakischer Mathematiker und Physiker, der Abteilung für Geschichte der Naturwissenschaften und Technik der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften und der Mathematisch-Physikalischen Fakultät der Karls-Universität Prag am 11. Dez. 1963 in Prag veranstalteten Kolloquium.

E. Artin, *H. Hasse*, *W. Krull* und *B. L. van der Waerden* verknüpft ist, auf der Herausarbeitung prinzipieller Strukturbegriffe wie Gruppe, Modul, Körper, Ring, Ideal, Algebra (hyperkomplexes System) beruht und daß die unter dem programmatischen Namen „moderne Algebra" damals auftretende Richtung eine wirklich tiefgreifend andere Periode der Algebra eingeleitet hat.

Indes hat sich damals die moderne Algebra keineswegs spontan und widerstandslos durchgesetzt. Ihre Vertreter, insbesondere ihre Vorkämpfer wie *van der Waerden* und *H. Hasse*, sind interessanterweise den gegen die neue Richtung vorgebrachten Einwänden mit dem Hinweis auf die Gruppentheorie entgegengetreten, welche bereits damals den Charakter einer abstrakten algebraischen Struktur, frei von der speziellen, konkreten Art ihrer Elemente erreicht hatte. In der Tat konnte die Entwicklung der Gruppentheorie als Kronzeuge für die weittragenden und fruchtbaren Resultate angerufen werden, die bei durchgängiger Anerkennung dieser neuen Auffassung zu erwarten waren (und inzwischen offensichtlich geworden sind).

So gesehen erscheint ein Rückblick auf die Geschichte der Gruppentheorie als ein Rückblick auf die Entwicklung einer mathematischen Disziplin, die in doppelter Weise als Schrittmacher für die moderne Algebra gedient hat: *als zeitlich frühester Fall der Emanzipation einer abstrakten algebraischen Struktur und als Geburtshelfer der modernen Algebra, welche auf das Studium algebraischer Strukturen abzielt.*

Eine Untersuchung über die Entstehungsgeschichte der abstrakten Gruppentheorie kann unter diesem Gesichtspunkt mehr sein als bloße Inventarisierung historischen Materials, sie könnte einige geistige Wurzeln der anhaltenden fruchtbaren Entwicklung der modernen Mathematik verdeutlichen, soweit sie innermathematischer Art sind. Selbstverständlich aber liegt auch der stürmischen Entfaltung der Mathematik nach Breite und Tiefe während der letzten anderthalb Jahrhunderte als entscheidende Triebkraft die gesellschaftliche Entwicklung zugrunde: Die mit der industriellen Revolution neu eingeleitete und zu Beginn unseres Jahrhunderts abermals sprunghaft erhöhte Anforderung an die Leistungsfähigkeit mathematischer Methoden gab und gibt den Untergrund ab, der das Interesse an abstrakten Fragestellungen, Methoden und Begriffsbildungen ständig wachhält und aus dem heraus sogar ein partieller und bedeutender Vorlauf einiger mathematischer Disziplinen vor der Anwendung ihrer Ergebnisse auf naturwissenschaftliche und andere praktische Probleme erreicht werden konnte.

Bei den Untersuchungen über die Entstehungsgeschichte der abstrakten Gruppentheorie hat sich ergeben, daß diese, historisch gesehen, drei Wurzeln besitzt. Wohl ist die Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen, welche im allgemeinen als die Hauptquelle der Gruppentheorie angesehen wird, eine der Wurzeln der Gruppentheorie — es genügt zunächst, hier die Namen *Lagrange, Ruffini, Abel, Gauß, Cauchy, Galois* und *C. Jordan* zu nennen —, aber weder die allein bestimmende und schon gar nicht die einzige. Aus der Entwicklung von Geometrie und Zahlentheorie im 19. Jahrhundert entsprangen zwei weitere Quellen der späteren abstrakten Gruppentheorie – von gleicher Ergiebigkeit und befruchtender Wirkung wie die Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen.

Die Tatsache von den drei Wurzeln der Gruppentheorie ist indes bisher dadurch weitgehend verdeckt geblieben, daß es sich dort um implizite gruppentheoretische Denkformen gehandelt hat, gänzlich ohne Verwendung des Wortes Gruppe und in den Anfängen zumindest ohne Beziehung zur parallellaufenden Entwicklung der Theorie der Permutationsgruppen. Der historische Beobachter sieht sich daher vor die Notwendigkeit gestellt, große Teilgebiete der Mathematik systematisch daraufhin durchzumustern, wo Schlußweisen und Methoden vollzogen und Begriffe verwendet wurden, die heutigen gruppentheoretischen Begriffsbildungen gleichwertig sind, und dann dem einsetzenden Emanzipationsprozeß des so verstandenen impliziten gruppentheoretischen Denkens zur expliziten Gruppentheorie nachzuspüren.

Man hat für die Suche nach impliziten gruppentheoretischen Denkformen bei aller Schwierigkeit allerdings einen ziemlich sicheren mathematischen Anhaltspunkt: Da die Automorphismen von Strukturen eine Gruppe bilden, wird man dort anzusetzen haben, wo Automorphismen zahlentheoretischer oder geometrischer oder algebraischer Gesamtheiten betrachtet worden sind. Das ist natürlich nur eine notwendige Bedingung – aber es ist wirklich eine notwendige Bedingung: Das Studium von Gesamtheiten, in denen zwischen den Elementen Verknüpfungsvorschriften erklärt sind, hat niemals aus sich heraus zum gruppentheoretischen Denken geführt, sondern erst die Untersuchung ihrer Automorphismen. Beispielsweise hat die sich zu Beginn des 19. Jahrhunderts allgemein durchsetzende Kompositionsvorschrift der Kräfte nach dem Kräfteparallelogramm genausowenig zum Gruppengedanken geführt wie die traditionellen Rechenoperationen im Bereich der ganzen Zahlen.

Eine letzte methodologische Bemerkung betrifft den ungefähren Zeitpunkt, an dem diese Untersuchungen einzusetzen hätten. Durch *Andreas Speiser* weiß man um jahrtausendealte gruppentheoretische Denkformen in der Ornamentik; diese Untersuchungen sind in sein bekanntes Lehrbuch der Gruppentheorie aufgenommen worden. Im Zusammenhang mit Studien über magische Quadrate ist der byzantinische Gelehrte *Manuel Moschopulos* zu permutationenähnlichen Operationen vorgestoßen. Diese und ähnliche weit zurückliegende sporadische Ansatzpunkte sollen indes unberücksichtigt bleiben. Die Darlegungen sollen mit der Periode einsetzen, wo zusammenhängende Entwicklungszüge wirksam geworden sind; sie treten auf mit der Ende des 18., Anfang des 19. Jahrhunderts sichtbar werdenden Umorientierung der Gesamtauffassung von der Mathematik.

In Anbetracht des zur Verfügung stehenden Raumes mußte schließlich bei der Fülle des Stoffes ein strenges Auswahlprinzip angewendet werden; es ist von doppelter Art: Einmal in der Wahl des Themas: Der Beitrag soll sich in der Hauptsache auf die Schilderung der Entstehungsgeschichte des abstrakten Gruppen*begriffes* beschränken, während die Darstellung der Geschichte der Gruppen*theorie* nur den dafür notwendigen Hintergrund abgeben wird. Zum anderen kann die

Darlegung im wesentlichen nur Einschätzungen historisch-mathematischer Entwicklungsgänge bringen, und nur gelegentlich, sozusagen symptomatisch, kann der Beweis am konkreten mathematischen Material angetreten werden.

I.

Das 19. Jahrhundert wird vielfach mathematikhistorisch als Jahrhundert der Geometrie eingeschätzt. Abgesehen von der Frage, ob diese Charakterisierung ausreicht, hat die Geometrie im 19. Jahrhundert tatsächlich — freilich verspätet gegenüber Analysis und Algebra — prinzipielle Schritte über die antike Auffassung hinaus tun können.

Der mächtige, von *G. Monge* (1746—1818) und *J.-V. Poncelet* (1788—1867) ausgehende Impuls an die Geometrie führte zur Ausbildung der projektiven Geometrie, die bald in zwei sich bekämpfende Richtungen, die synthetische und die analytische, zerfiel. Die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie, zunächst der hyperbolischen zu Anfang des Jahrhunderts und dann durch *B. Riemann* (1826—1866) der elliptischen, warf zugleich schwierige erkenntnistheoretische Probleme auf. Das Ergebnis dieser Entwicklung bestand Mitte des Jahrhunderts

1. in einer Auflockerung des traditionellen Koordinatenbegriffes (nicht nur Punktkoordinaten werden verwendet, sondern auch Ebenenkoordinaten, Linienkoordinaten, Tetraederkoordinaten — d. h. verschiedenartigste Parameter der geometrischen Mannigfaltigkeit, deren geometrische Bedeutung völlig unterschiedlich ist),
2. in der Aufhebung der bis dahin scheinbar unabdingbaren Koppelung von Geometrie und Metrik und
3. in einer Wendung zum Abstrakten durch den Übergang zu beliebig hohen, aber endlichen Dimensionen Anfang der 40er Jahre durch *A. Cayley* (1821—1895) und *H. Grassmann* (1809—1877).

Bemerkenswerterweise handelte es sich demnach bei der Entwicklung der Geometrie im 19. Jahrhundert n i c h t um die Abfolge e i n e r Entwicklungsrichtung, n i c h t um eine lineare Entwicklung, sondern um sich verselbständigende Entfaltungen einzelner, der Geometrie innewohnender Tendenzen in scheinbar divergierenden Richtungen. Tatsächlich begegnet man um die Mitte des vergangenen Jahrhunderts unter den Geometern und Mathematikern einer ziemlichen Ratlosigkeit über den inneren Zusammenhang der einzelnen „Geometrien“ und geometrischen Methoden.

Einer der aufmerksamsten zeitgenössischen Beobachter des Entwicklungsganges der Geometrie war *M. Chasles* (1793—1880). Sein berühmter „Aperçu historique . . .“ von 1837 verwirft auf Grund der Entwicklung der Geometrie zu Beginn des 19. Jahrhunderts die herkömmliche Bestimmung der Geometrie als der Wissenschaft, deren Gegenstand das Maß der Ausdehnung („la mesure de l'étendue“) sei, und fordert statt dessen, wenn wir uns modern ausdrücken, die Untersuchung der Strukturen geometrischer Mannigfaltigkeiten, indem „l'idée simple de mesure (de l'étendue, Wg.)“ ersetzt wird „par l'idée complexe de mesure et d'ordre (de l'étendue, Wg.), qui est indispensable pour donner au mot Géométrie un sens vrai et complet".[1]

Der Weg zur Klärung der entstandenen schwierigen Situation in der Geometrie begann mit dem Studium „geometrischer Verwandtschaften". Zu den tiefsten Einsichten ist hier *August Ferdinand Möbius* (1790–1868) – obwohl in gewissem Sinne ein wissenschaftlicher Außenseiter – vorgestoßen; seine einschlägigen Arbeiten beginnen mit dem Jahre 1827 („Der barycentrische Calcul ..."). Bis dahin waren nur Kongruenz und Ähnlichkeit zwischen geometrischen Figuren näher betrachtet worden; *Möbius* zog zunächst die von *L. Euler* verworfene Affinität zwischen geometrischen Figuren in den Kreis der Betrachtungen ein, später die Kollineationen, und schließlich beschäftigte er sich ab 1858 mit sog. „Elementarverwandtschaften", einem Gegenstand, den wir heute zur Topologie zählen. Daraus entspringen, wie sich *Möbius* ausdrückte, „verschiedene Klassen geometrischer Aufgaben". *Möbius* selbst stellte die Bedingungen fest, unter denen von einer Klasse zur anderen übergegangen werden kann: z.B. Kongruenz als spezieller Fall der Ähnlichkeit, Affinität als besonderer Fall der Kollineation usw.

Bei genauerer Untersuchung – Einzelheiten würden hier zu weit führen – ergibt sich, daß *Möbius* in seinem geometrischen Lebenswerk, ohne noch vom Gruppenbegriff die leiseste Ahnung zu haben, das spätere sog. Erlanger Programm von 1872 sozusagen instinktiv durchlaufen hat – ein außerordentlich starkes Zeugnis für die innere Logik der Entwicklung der Mathematik. Freilich hat *Möbius* aus Mangel an formalen Möglichkeiten das von ihm gestellte Problem der Klassifizierung der geometrischen Verwandtschaften nur in einer seine Zeitgenossen wenig befriedigenden Form erfüllen können. So fehlt bei ihm, obwohl gedanklich völlig vorbereitet, jeder Rückgriff auf die Methoden der Invariantentheorie, welche zu seiner Zeit bereits weit ausgebildet war und in den Händen der britischen Mathematiker *J. J. Sylvester* (1814–1897) und *A. Cayley* (1821–1895) zu einem ersten, wenn auch noch unvollkommenen Versuch wurde, jeder einzelnen „Geometrie" einen logisch bestimmbaren Platz im Gesamtgebäude der Geometrie zuzuweisen.

Gerade *Cayley* ist – über den von ihm erstmals ausgesprochenen Satz hinaus, daß jede endliche Gruppe durch eine Permutationsgruppe dargestellt werden kann – in unserem Zusammenhang höchst bemerkenswert: Für ihn ist die Gruppe bestimmt durch ein System definierender Relationen. Diese abstrakte Auffassung der Gruppe erwuchs aus seinen invariantentheoretischen Studien und aus den berühmten 10 Abhandlungen über Quantics, welche 1854 einsetzten.[2] *Cayley* untersuchte das Verhalten dieser Form bei nicht singulären linearen homogenen Transfor-

[1] *M. Chasles:* Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulierement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne, ... In: Mémoires couronnés par l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, Tome XI, Bruxelles 1837, S. 290.

[2] Eine „quantic" ist ein homogenes Polynom des Grades n mit m unabhängigen Variablen mit willkürlichen konstanten Koeffizienten. Ein Polynom in den Koeffizienten der Quantic, das sich, bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante, bei der Transformation reproduziert, heißt Invariante.

mationen und suchte das zu jeder Quantic gehörende Fundamentalsystem von Invarianten zu bestimmen, derart, daß jede Invariante darstellbar ist als Polynom in den Fundamentalinvarianten. Für einige Fälle haben *Cayley* und *Sylvester* derartige, und zwar endliche Fundamentalsysteme gefunden, also Sätze, welche mit dem Basissatz für Abelsche Gruppen formal ähnlich sind.

II.

Ganz besonders „fündig" für den Nachweis frühen impliziten gruppentheoretischen Denkens hat sich das Studium der Entwicklungsgeschichte der Zahlentheorie erwiesen.[3]

Hauptsächlich durch *L. Euler* (1707—1783) ist ja bekanntlich — nach einer längeren, seit *P. Fermat* (1601—1665) eingetretenen Pause — die Zahlentheorie wieder in den Rang einer bearbeitungswürdigen, ernst zu nehmenden Disziplin erhoben worden. Bei *Euler* tritt uns in reichem Maße implizites gruppentheoretisches Denken entgegen, ganz besonders in der aus dem Jahre 1761 stammenden Abhandlung über Potenzreste.

Euler untersucht die Folge der Reste, welche sich bei Division der Glieder der Folge a^ν, ν natürlich, durch eine Primzahl p mit $(a, p) = 1$ ergibt. Dabei kommt es ihm nicht auf die Reste r mit $0 < r < p$ schlechthin an; für ihn sind alle Reste $r \pm np$ „gleichbedeutend", wie er sich ausdrückt. Hier bereitet sich der spätere Kongruenzbegriff und die Klasseneinteilung, die Äquivalenz, vor, welche von *Gauß* so stark herausgearbeitet worden sind. Bei der Untersuchung der endlich vielen „nicht gleichbedeutenden" Reste gelangt *Euler* zu einem Aufspaltungsprozeß, der, gruppentheoretisch interpretiert, der Zerlegung einer Gruppe in Nebenklassen nach einer Untergruppe und damit dem Satz gleichwertig ist, daß die Ordnung einer Untergruppe die Ordnung der gesamten Gruppe teilt.

Immer wieder tritt implizites gruppentheoretisches Denken im Entwicklungsprozeß der Theorie der Potenzreste auf: Bei *Euler* und *A.-M. Legendre* (1752—1833) im Zusammenhang mit der Entdeckung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, bei *C. F. Gauß* (1777—1855) in den „Disquisitiones arithmeticae" von 1801. Das Studium der Lösbarkeitsbedingungen der Kongruenz $x^n = a \pmod{m}$, $(a, m) = 1$, welches einen großen Teil der „Disquisitiones" ausmacht, führt *Gauß* zur Begriffsbildung „primitive Wurzel" und damit zur Betrachtung zyklischer Gruppen.

Überhaupt treten die gruppentheoretischen Momente in den „Disquisitiones" ganz stark hervor. Die dort entwickelte Theorie der Kreisteilung deckt die innere Struktur der Menge Ω der Wurzeln der Gleichung

$$x = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0,$$

[3] Ausführlicher als hier im Absatz II behandelt in: *H. Wußing*, Über den Einfluß der Zahlentheorie auf die Herausbildung der abstrakten Gruppentheorie. NTM, Beiheft 1964: Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaft, Technik und Medizin. Herausgegeben zum 60. Geburtstag Gerhard Harigs von *I. Strube* und *H. Wußing*, S. 71—88.

n ungerade Primzahl, auf, d.h. die innere Struktur der zyklischen Gruppe, welche aus Ω zusammen mit der 1 besteht. Das Studium der „Perioden" ist identisch mit der Bestimmung der Untergruppen der Galoisschen Gruppe der Kreisteilungsgleichung.[4]

Ein Bestandteil der „Disquisitiones" soll stärker herausgehoben werden, nämlich die Gaußsche Theorie der Komposition der Formen, weil von dort aus der direkte Weg zur (impliziten) Aufstellung eines vollständigen Axiomensystems für endliche abelsche Gruppen geführt hat. *Gauß* teilt die (binären) quadratischen Formen

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (a, b, c \text{ ganz})$$

in Klassen äquivalenter Formen ein und zeigt, daß die Gleichheit der Diskriminanten eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier Formen ist. Dann lassen sich Formen mit fester Diskriminante D in Klassen äquivalenter Formen einteilen, und *Gauß* beweist die Endlichkeit der Klassenanzahl. Dann wird eine Zusammensetzungsvorschrift der Formenklassen definiert, welche *Gauß* als „Composition der Formen" bezeichnet.

Der entscheidende Satz bezüglich dieser Zusammensetzungsvorschrift ist der Nachweis, daß das Ergebnis der Komposition von der Wahl der Repräsentanten der Formenklassen unabhängig ist und in einer eindeutig bestimmten Formenklasse liegt. *Gauß* beweist diesen Satz und damit die Abgeschlossenheit der endlichen Menge der Formenklassen in der folgenden Gestalt: Wenn $f \sim g$ und $f' \sim g'$, dann sind auch $F = ff'$ und $G = gg'$ äquivalent.

In einer Fußnote beweist *Gauß* die Vertauschbarkeit dieser Zusammensetzungsvorschrift. Das Assoziativgesetz tritt in der Gestalt auf: Wenn komponiert sind $F = f \cdot f'$, $\mathfrak{F} = Ff''$, $F' = ff''$, $\mathfrak{F}' = F'f'$, dann sind die Formen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ eigentlich äquivalent, d.h. „es ist ... gleichgültig, in welcher Reihenfolge die drei Formen komponiert werden"[5].

Damit ist bewiesen, daß — modern ausgedrückt — die Formenklassen eine endliche abelsche Gruppe bilden. Die Rolle der Einheit spielt die „Hauptklasse", d.i. die Klasse aller zur „Hauptform" $x^2 - Dy^2$ äquivalenter Formen, wo D die Diskriminante der Form bedeutet.

Die Theorien der Kreisteilung und der Komposition der Formen führten direkt zur Untersuchung algebraischer Zahlkörper. Hier — in unserem Zusammenhang — ist besonders ein Beitrag von *E. E. Kummer* (1810—1893) aus dem Jahre 1850 zu nennen, in dem dieser die Klassenanzahl h der Ideale im Kreiskörper der p-ten Einheitswurzeln, p ungerade Primzahl, berechnet hatte. Später hatte er h auf die Teilbarkeit durch 2 hin untersucht und darüber 1870 in der Berliner Akademie vorgetragen. Hier setzte *L. Kronecker* (1823—1891) ein; sein Vortrag mit dem Titel „Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer komplexer Zahlen" schloß sich direkt an den von *Kummer* an.

---

[4] Diese und weitere Ansätze modernen algebraischen, darunter des gruppentheoretischen Denkens, sind in dem von *H. Reichardt* herausgegebenen Gauß-Gedenkband in vorzüglicher Weise analysiert. *C. F. Gauß*. Gedenkband anläßlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955, Hrsg. von *Hans Reichardt*, Leipzig 1957.

[5] *C. F. Gauß:* Untersuchungen über höhere Arithmetik. Deutsch hrsg. v. *H. Maser*, Berlin 1889, S. 248.

Aus *Kroneckers* puristisch arithmetischer Denkweise — wobei der durch *Dirichlet* seiner Meinung nach vollzogenen methodischen Entfremdung (analytische Methoden in der Zahlentheorie) gesteuert werden sollte — folgte der direkte Rückgriff auf die „Disquisitiones“ und die Komposition der Formen. Er selbst drückt das in den Worten aus:

„Die überaus einfachen Prinzipien, auf denen die Gaußsche Methode beruht, finden . . . vielfach und zwar schon in den elementarsten Teilen der Zahlentheorie Anwendung. Dieser Umstand deutet darauf hin, und es ist leicht, sich davon zu überzeugen, daß die erwähnten Prinzipien einer allgemeineren, abstrakteren Ideensphäre angehören. Deshalb erscheint es angemessen, die Entwicklung derselben von allen unwesentlichen Beschränkungen zu befreien, sodaß man alsdann einer Wiederholung derselben Schlußweise in den verschiedenen Fällen des Gebrauchs überhoben wird . . ., die Darstellung gewinnt dadurch, wenn sie in der zulässig allgemeinsten Weise gegeben wird, zugleich an Einfachheit und durch das deutliche Hervortreten des allein Wesentlichen auch an Übersichtlichkeit.“[6]

Diese Anfangssätze der Kroneckerschen Abhandlung zeigen einen sicheren Blick für den aus der Formalisierung und Axiomatisierung erwachsenden Gewinn. Hier werden bereits Auffassungen vertreten, die das Wesen der modernen Algebra berühren.

Im Anschluß an die eben zitierten Sätze werden von *Kronecker* die Gesetze einer abstrakten Verknüpfung nicht näher bezeichneter „Elemente“ angegeben, die einem vollständigen Axiomensystem für eine endliche abelsche Gruppe äquivalent sind.

„Es seien $\theta', \theta'', \theta'''$ . . . Elemente in endlicher Anzahl und so beschaffen, daß sich aus je zweien derselben mittels eines bestimmten Verfahrens ein drittes ableiten läßt. Demnach soll, wenn das Resultat dieses Verfahrens durch f angedeutet wird, für zwei beliebige Elemente θ' und θ'', welche auch miteinander identisch sein können, ein θ''' existieren, welches gleich $f(\theta', \theta'')$ ist. Überdies soll

$$f(\theta', \theta'') = f(\theta'', \theta')$$
$$f(\theta', (\theta'', \theta''')) = f((\theta', \theta''), \theta''')$$

und aber, sobald θ'' und θ''' voneinander verschieden sind, auch

$$f(\theta', \theta'') \quad \text{nicht identisch mit} \quad f(\theta', \theta''')$$

sein. Dies vorausgesetzt, kann die mit $f(\theta', \theta'')$ angedeutete Operation durch die Multiplikation der Elemente $\theta'\,\theta''$ ersetzt werden, wenn man dabei an Stelle der vollkommenen Gleichheit eine bloße Äquivalenz einführt.“[7]

Dies ist offenbar ein vollständiges Axiomensystem für (endliche) abelsche Gruppen. Aus ihm zieht *Kronecker* — immer noch im Abstrakten — Schlußfolgerungen über die Existenz einer Einheit usw. und gewinnt schließlich einen Satz, der, gruppentheoretisch interpretiert, den Basissatz für endliche abelsche Gruppen bedeutet. *Kronecker* selbst konkretisiert die „Elemente“ durch ein System nichtäquivalenter idealer Zahlen oder nichtäquivalenter zusammensetzbarer Formen, erhält dadurch den Anschluß an *Gauß*, gewinnt einen grundlegenden Satz über die multiplikative Darstellung der Idealklassen in beliebigen algebraischen Zahl-

---

[6] *L. Kronecker:* Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen. In: Monatsberichte der Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. z. Berlin (1870), Berlin 1871, S. 882.

[7] a. a. O., S. 882/883.

körpern und erhält damit den vollständigen Überblick über die innere Struktur der von *Gauß* untersuchten Gruppe der Formenklassen.

Halten wir fest: Im Bereich der Zahlentheorie war das implizite gruppentheoretische Denken im Jahre 1870 bis zur Herausbildung eines Axiomensystems für endliche abelsche Gruppen fortgeschritten. Doch wurde es von *Kronecker* (1823 bis 1891) zu diesem Zeitpunkt noch nicht ausdrücklich auf Gruppen bezüglich angewandt, erstaunlicherweise, obwohl *Kronecker* spätestens im Jahre 1856 mit *Galois*' Theorie bekannt geworden war.

III.

Die Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen hat dagegen keine Axiomatisierung hervorgebracht, wohl aber das Wort „Gruppe" im Sinne von Permutationsgruppe herausgebildet. Aus ihr hat sich die Theorie der Permutationsgruppen emanzipiert; sie war in den 60er Jahren als selbständiges Forschungsgebiet konstituiert.

Die eigentlichen Anfänge dieser Entwicklungsrichtung liegen bei *J. L. Lagrange* (1736–1813). Sein berühmtes „Mémoire sur la résolution algébrique des équations" von 1771 stellt den Wendepunkt in den seit Ende des 16. Jahrhunderts anhaltenden Bemühungen dar, die algebraischen Gleichungen höheren als 4. Grades durch Radikale aufzulösen. Auf Grund der Analyse der Lösungsverfahren bis zum Grade 4, der Verfahren zur Auflösung spezieller Typen höherer Grade und auf Grund fehlgeschlagener Versuche der Auflösung der allgemeinen Gleichungen kam *Lagrange* zu der Vermutung, daß die Lösung der Gleichung 5. Grades jedenfalls nicht auf eine Weise gefunden werden könne, die nach ihrer Beschaffenheit analog zu den Auflösungsverfahren bis zum Grade 4 einschließlich sein könne. *Gauß* sprach in der Dissertation von 1799 und 1801 in den „Disquisitiones" die prinzipielle Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung in Radikalen aus, nachdem er erkannt hatte, daß die algebraische Auflösbarkeit auf der Möglichkeit der Reduktion auf reine Gleichungen beruht. Den ersten korrekten Beweis lieferte *N. H. Abel* (1802–1829) 1824 für den Grad 5, 1826 für alle Grade >4. Das Mémoire von *Lagrange* ist in unserem Zusammenhang von größter Bedeutung, wird doch dort der Zusammenhang zwischen Auflösungstheorie und Permutationen erstmals herausgestellt. Im Résumé heißt es u.a.:

> „Voilà, si je ne me trompe, les vrais principes de la résolution des équations et l'analyse la plus propre à y conduire; toute se réduit, comme on voit (also auf Grund der von *Lagrange* angestellten Analyse, Wg.), à une espèce de calcul des combinaisons, par lequel on trouve à priori les résultats auxquels on doit s'attendre."[8]

Im gleichen Jahr 1771 war übrigens eine Arbeit von *A. Vandermonde* (1735 bis 1796) erschienen, welche ebenfalls die Suche nach Lösungsmethoden für algebraische Gleichungen mit substitutionenähnlichen Überlegungen verband und — nebenbei gesagt — eine Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden Per-

[8] Œuvres de Lagrange. Publiées par les soins de *M. J.-A. Serret*, Tome troisième, Paris MDCCCLXIX, S. 403.

mutationen vornahm, wie wir uns heute ausdrücken würden. *Lagrange* aber gelangte wesentlich weiter: Er bewies, indem er sich die Theorie der symmetrischen Funktionen zum Vorbild nahm, daß jedes Polynom $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in den Wurzeln x_i der algebraischen Gleichung $x^n + \ldots + a_n = 0$ eine gewisse Anzahl $n(P)$ von Werten annimmt und daß diese Zahl der Quotient von $n!$ durch die Zahl derjenigen Permutationen der Wurzeln ist, die P unverändert lassen. Gruppentheoretisch entspricht dies der Zerlegung einer Gruppe nach den Nebengruppen einer Untergruppe oder, anders interpretiert, der Teilbarkeit der Ordnung einer Gruppe durch die Ordnung einer Untergruppe. An diese Zahl $n(P)$ knüpfte *Lagrange* bestimmte Erwartungen hinsichtlich der Auflösungstheorie: $n(P)$ könne als Maß der Symmetrie einer Gleichung aufgefaßt werden und stelle den eigentlichen Grad der algebraischen Gleichung dar.

Für unseren Zusammenhang ist die folgende Bemerkung von *Lagrange* überaus wichtig. Er sagt: Die Symmetrien eines Polynoms entsprechen einer Menge von Permutationen, die in sich das Resultat des Hintereinanderausführens zweier solcher Permutationen einschließt. Hier knüpfte der Italiener *P. Ruffini* (1765 bis 1822) an. Mit aller Bestimmtheit behauptete er die Unmöglichkeit der Auflösung der Gleichung 5. Grades. In einer Reihe von Abhandlungen, beginnend 1799 mit einem Lehrbuch über Gleichungstheorie, lieferte er eine Reihe von Beweisen; diese sind, wenn auch noch lückenhaft und verworren, dennoch sozusagen moderner, zukunftsträchtiger als der Beweis von *Abel*. Hier kommt es auf den gruppentheoretischen Bestandteil an.

Ruffini benutzt fortgesetzt den Satz, daß die Permutationen, welche eine ganze rationale Funktion der 5 Wurzeln nicht ändern, eine Gruppe bilden. Dabei betont er, daß die Hintereinanderausführung dieser Operationen wieder eine derartige Operation liefert (Abgeschlossenheit der Menge). Der Unmöglichkeitsbeweis beruht auf dem Nachweis, daß es keine Funktionen von 5 Größen gibt, die 8, 4 oder 3 Werte annehmen, wenn man diese Größen auf alle möglichen Arten untereinander vertauscht; damit hat *Ruffini* — inhaltlich genommen — alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_5$ bestimmt.

Die Terminologie bei *Ruffini* ist dabei die folgende: Die Gesamtheit aller Vertauschungen der Wurzeln, welche eine Gleichung gestatten, bezeichnet er als Permutation, d.h., „Permutation“ ist bei *Ruffini* svw. Gruppe von Permutationen, „einfache Permutationen“ svw. zyklische Gruppen. Alle anderen „Permutationen“ heißen „zusammengesetzt“. „Zusammengesetzte Permutationen“ heißen von erster, zweiter oder dritter Art, je nachdem sie intransitiv, oder transitiv und imprimitiv oder transitiv und primitiv sind.

Ruffinis Leistung ist seinerzeit nicht recht gewürdigt worden, teils wegen der schwer verständlichen Darstellung, teils wegen der Beweislücken, die aber nicht im gruppentheoretischen Teil liegen.

Vielmehr galt lange Zeit *A. Cauchy* (1789—1857), der mit seinen Publikationen über die Permutationentheorie 1815 einsetzte, im Bewußtsein der Zeitgenossen als deren Entdecker. Das eigentliche Verdienst von *Cauchy* besteht in der Durchbildung der Methoden und in der Ausarbeitung einer eigenständigen konsequenten Terminologie: „arrangement“ für eine Anordnung von Größen, „substitution“ für den Übergang von einem „arrangement“ zum anderen, „product“ für das Ergebnis des Nacheinanderausführens von Substitutionen. Eine Menge von Substitutionen (= Permutationen), die bei der so definierten Multiplikation abgeschlossen ist, bezeichnete *Cauchy* als „System konjugierter Substitutionen“; dieser Begriff entspricht also dem der (Permutations-)Gruppe.

Das instruktive Wort „le groupe“ wurde durch *E. Galois* (1811–1832) in die substitutionentheoretische Terminologie eingeführt. Dabei ist jedoch folgendes zu beachten: Die Verwendung des Wortes „le groupe“ stellte zunächst den spontanen Rückgriff auf den französischen Wortschatz dar. *Galois* verwendet „le groupe“ zunächst — wie etwa *Abel* auch — im Sinne der Zusammengehörigkeit von Dingen; „le groupe“ fällt also inhaltlich zusammen etwa mit „Menge“, „Komplex“. Entsprechend wird das Verb „grouper“ verwendet. Keineswegs also sind alle „Gruppen“, von denen *Galois* spricht, wirkliche Gruppen. Bis zu seiner letzten Abhandlung, dem am Vorabend des unglücklichen Duells an *Auguste Chevalier* geschriebenen Brief, der eine Art wissenschaftliches Testament darstellt, blieb die Verwendung des Wortes „le groupe“ inkonsequent. Auch benutzt er für die von ihm definierte „Gruppe einer Gleichung“ stets die multiplikative Abgeschlossenheit, obwohl diese fundamentale Eigenschaft nie von ihm bewiesen wird. Diese wichtige Lücke der gesamten Galoisschen Theorie ist erst durch den Italiener *E. Betti* (1823–1892) geschlossen worden. So kommt es, daß innerhalb der französischen Schule das Wort „Gruppe“ sich erst gegen die Linie *Cauchy*, gegen den Begriff „System konjugierter Substitutionen“ hat durchsetzen müssen; dieser Prozeß war erst mit *C. Jordans* (1838–1922) berühmtem „Traité des substitutions . . .“ von 1870 abgeschlossen.

Das Hauptverdienst von *Galois* liegt — in unserem Zusammenhang, bei dem die Entwicklungsgeschichte der Galoisschen Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen nur den Hintergrund abgibt — in zwei anderen Richtungen:

Galois hat die entscheidende Rolle erkannt, welche die Normalteiler in der Auflösungstheorie spielen. Die Normalteilereigenschaft wird durch das ausgedrückt, was *Galois* „eigentliche Zerlegung“ (décomposition propre) nennt. Er geht von der Zerlegung einer Gruppe G nach einer ihrer Untergruppen H aus:

$G = H + HS + HS' + \ldots$ (Schreibweise von *Galois* im Brief an *Chevalier*)

„Et aussi – so fährt *Galois* fort – il peut se diviser en groupes (! Wg.) qui ont tous les mêmes substitutions, en sorte que

$$G = H + TH + T'H + \cdots$$

les deux genres de décompositions ne coïncident pas ordinairement. Quand ils coïncident, la décomposition est dite *propre*.“[9]

[9] Œevres mathématiques d'Evariste Galois, publiées sous les auspices de la Société Mathématique de France. Avec une introduction par *M. Emile Picard*, Paris 1897, S. 25/26.

Und ein zweiter Gesichtspunkt: *Galois* hat als erster die Erforschung mathematischer Strukturen zur Forschungsrichtung der Mathematik der Zukunft erklärt. Das Genie *Galois* lebte nicht nur dem Inhalt seiner Arbeiten nach im Vorgriff auf die kommende Entwicklung, sondern auch, wenigstens im Prinzip, bezüglich der Methoden; er nennt dies „l'analyse de l'analyse".

Jener Vorgriff auf die Zukunft, die ungewohnte Abstraktheit seiner Theorie, das durchaus strukturelle Denken -- das alles waren gewiß Momente, welche zusammen mit der übertriebenen Knappheit der Darstellung *Galois'* Anerkennung erschwerten. Auch die Herausgabe seiner entscheidenden Abhandlungen durch *J. Liouville* (1809—1882) hatte zunächst keine unmittelbare Wirkung. Erst in den 50er Jahren setzte eine Art *Galois-Renaissance* ein; sie begann mit einer Reihe von Abhandlungen verschiedener Autoren mit dem Titel „Kommentar zu Galois". Der bedeutendste und weitgreifendste stammt von *C. Jordan* aus dem Jahre 1869.

In den 60er Jahren löste sich die Theorie der Permutationsgruppen als selbständige Forschungsrichtung aus der Auflösungstheorie heraus, dabei in Großbritannien bemerkenswerterweise früher als in Frankreich. In dem seinerzeit führenden Lehrbuch der höheren Algebra von *J.-A. Serret* (1819—1885) wurde in der 3. Auflage von 1866 die Bestimmung sämtlicher Permutationsgruppen als eine Aufgabe der Zukunft erklärt, welcher für sich, ohne Bezug zur Galoisschen Theorie, eine grundlegende Bedeutung zukomme.

Der Emanzipationsprozeß des substitutionentheoretischen Gruppenbegriffes war auch in der französischen algebraischen Schule spätestens um 1870 abgeschlossen, mit dem „Traité des substitutions . . ." von *C. Jordan: Gruppe* — das ist eine Menge von *Permutationen,* bei der das Produkt zweier Permutationen wieder zur Menge gehört.

IV.

Die drei Entwicklungslinien gruppentheoretischen Denkens in Geometrie, Zahlentheorie und Gleichungstheorie hatten also um das Jahr 1870, jede für sich, einen gewissen Abschluß erreicht. Der Abstraktionsprozeß in Richtung auf die Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffes konnte erst in dem Maße einsetzen, wie sich die prinzipielle Gleichartigkeit der Denkformen herausstellte und die Fruchtbarkeit des schrittweise vertieften und dadurch ausdehnungsfähig gewordenen Gruppenbegriffes sichtbar wurde.

Der erste Schritt in dieser Richtung war die Herausarbeitung des Begriffes der Transformationsgruppe, welcher gleichzeitig — abstrakt gesprochen — zwei grundlegende Eigenschaften des heutigen Gruppenbegriffes präzisierte:

1. die Endlichkeit der zugrunde gelegten Menge wurde fallengelassen, und

2. man erkannte, daß dann bei unendlichen Gruppen die Abgeschlossenheit der Menge bei der zugrunde gelegten Verknüpfungsvorschrift zur Definition nicht mehr ausreicht, sondern daß die Existenz des Inversen ausdrücklich gefordert werden muß.

Die Herausschälung des Begriffes der Transformationsgruppe ist das Ergebnis des Abstraktionsprozesses aus den Bereichen Gleichungstheorie und Geometrie. Die entscheidenden Leistungen knüpfen sich in der Hauptsache an die Namen *F. Klein* (1849—1925) und *S. Lie* (1842—1899).

Klein kam während seiner mathematischen Studien mit allen Strömungen der Geometrie in Verbindung, mit der Liniengeometrie und projektiven Geometrie bei *J. Plücker* (1801—1868), mit der Invariantentheorie Cayleyscher Prägung, mit der nichteuklidischen Geometrie durch *O. Stolz* (1842—1905) und während seines kurzen Berliner Aufenthaltes, zusammen mit *Lie*, mit der algebraischen Schule von *Kummer* und *Kronecker*. *Klein* und *Lie* haben damals, 1870/71, unter dem niederschmetternden Eindruck von der innerlichen Zersplitterung der Geometrie gestanden:

„Mein Interesse" – so schrieb *Klein* rückblickend (1921) – „war schon von meiner Bonner Zeit (bei *Plücker*, Wg.) her darauf gerichtet, im Widerstreite der sich befehdenden mathematischen Schulen das gegenseitige Verhältnis der nebeneinanderher laufenden äußerlich einander unähnlicher und doch ihrem Wesen nach verwandter Arbeitsrichtungen zu verstehen und ihre Gegensätze durch eine einheitliche Gesamtauffassung zu umspannen. Innerhalb der Geometrie gab es in dieser Hinsicht noch viel für mich zu tun."[10]

Während ihres Studienaufenthaltes in Paris lernten *Klein* und *Lie* 1870 den eben erschienenen „Traité des substitutiones ..." kennen, der ihnen zunächst „wie ein Buch mit sieben Siegeln" erschien. Im Kontakt mit der französischen gruppentheoretischen Schule sahen sie sich vor die Erkenntnis gestellt, daß sie in ihren gemeinsamen Veröffentlichungen über sog. *W*-Kurven mit dem, was sie „geschlossenes System von Transformationen" genannt hatten, spontan zum Gruppengedanken vorgedrungen waren. Sie erkannten das Gemeinsame und erfaßten die Möglichkeiten, welche in der konsequenten Anwendung gruppentheoretischen Denkens verborgen lagen. Die Dialektik der Aneignung und Übertragung des substitutionentheoretischen Gruppenbegriffes auf Geometrie und Analysis bestand darin, daß im Prozeß des Aufprägens der Begriff Gruppe im Sinne von Permutationsgruppe selbst modifiziert wurde; am Ende steht Gruppe im Sinne von Transformationsgruppe.

Zwischen *F. Klein* und *S. Lie* hat sich eine Art Arbeitsteilung entwickelt, welche offenbar auch mit dem Zerfall der persönlichen Freundschaft zwischen *Klein* und *Lie* zusammenhing. *Klein* wandte sich zunächst der Aufgabe zu, den Gruppenbegriff als Ordnungsschema der Geometrie herauszuarbeiten. In knapp 2 Jahren nur wurden alle wesentlichen Gedanken des sog. Erlanger Programms (1872) ausgearbeitet, dessen eigentlicher charakteristischer Titel „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" lautet. „Die verschiedenen Geometrien" — so sagt *Klein* dort — „sind durch die zugehörige Transformationsgruppe charakterisiert." Doch muß bemerkt werden, daß *Klein* damals von der äquiformen Gruppe (der „Hauptgruppe", wie er sie nannte) direkt zur projektiven Gruppe übergegangen ist, ohne die affine Gruppe dazwischenzu-

[10] *Felix Klein.* Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, Berlin 1921, S. 52.

schalten. Weitere wesentliche Beiträge zur Herausarbeitung des Begriffes der Transformationsgruppe steuerte *Klein* bei durch seine Untersuchungen über die Deckabbildungen regulärer Polyeder und seine im Wettbewerb mit *H. Poincaré* (1854—1912) angestellten Untersuchungen über automorphe Funktionen, welche den Versuch darstellten, den Gruppenbegriff analog seiner Stellung in der Geometrie zum Ordnungsprinzip der Funktionentheorie zu machen.

Lie dagegen wandte sich, ausgehend von der Theorie der Differentialgleichungen, dem Studium der Berührungstransformationen, also der Untersuchung von kontinuierlichen unendlichen Gruppen zu, wobei er diese Untersuchungsrichtung als Gegenstück zur Galoisschen Theorie algebraischer Gleichungen auffaßte.

Bei Gelegenheit einer Würdigung von *E. Galois* hat *Lie* 1895 die vollzogene Ausdehnung des Gruppenbegriffes nach ihrem abstrakten Gehalt hin analysiert und folgende Forderungen an den Begriff Transformationsgruppe herausgehoben: Abgeschlossenheit der Menge, Assoziativgesetz, Existenz des Inversen, Existenz der Einheit.

Aber weder *Lie* noch *Klein* haben später die Wendung zur abstrakten, mengentheoretischen Fassung des Gruppenbegriffes mitgemacht. Sie hielten die sich am Ende des Jahrhunderts durchsetzende strenge axiomatische Methode — wie sie in Deutschland von *M. Pasch* (1843—1930), *D. Hilbert* (1862—1943) und *E. Steinitz* (1871—1928) propagiert wurde — für wenig erfolgversprechend. In seinen während des 1. Weltkrieges ausgearbeiteten „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert" drückt sich *Klein* so aus:

> „Diese abstrakte Formulierung ist für die Ausarbeitung der Beweise vortrefflich, sie eignet sich aber durchaus nicht zum Auffinden neuer Ideen und Methoden, sondern sie stellt vielmehr den Abschluß einer voraufgegangenen Entwicklung dar.... Überhaupt hat die Methode den Nachteil, daß sie nicht zum Denken anregt; man hat nur aufzupassen, daß man nicht gegen die aufgestellten vier Gebote verstößt."[11]

Insbesondere stieß er sich daran, daß „jeder Appell an die Phantasie" verlorengehen müsse, weil doch in dieser Auffassung jede Vorstellung vom speziellen Charakter der Gruppenelemente weggefallen sei.

Dies ist um so erstaunlicher, als *Klein* und *Lie* in ihren Arbeiten sehr wohl die grundlegende Bedeutung erkannt hatten, die dem Nachweis der Isomorphie zwischen Gruppen zukommt, deren Elemente von verschiedener spezieller Art sind, und auch sehr wohl die Fruchtbarkeit der sich entwickelnden Darstellungstheorie erkannt hatten, welche hauptsächlich durch *G. Frobenius* (1849—1917) und *I. Schur* (1875—1941) in den 90er Jahren weit vorangetrieben worden war.

V.

Der abstrakte Gruppenbegriff entstand in letzter Phase durch das Übergreifen der abstrakten, formalistischen Auffassung — wie sie die Zahlentheorie hervorgebracht hatte — auf die Theorie der Permutationsgruppen, und zwar erstmals

[11] *F. Klein:* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil 1. Für den Druck bearbeitet von *R. Courant* und *O. Neugebauer,* Berlin 1926, S. 335/36.

bewußt, wenn auch mit einigen Inkonsequenzen behaftet, in dem Lehrbuch (1882) „Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra" von *E. Netto* (1846–1919). Daß *Netto* ein Schüler von *Kronecker* war, ist wohl in diesem Sinne zufällig; dahinter steht eine ganze Reihe von Einzelfaktoren der innermathematischen Entwicklung, die in dieselbe Richtung drängten: Die schrittweise Anerkennung der Mengenlehre, mit deren Publikation *G. Cantor* (1845–1918) in den 70er Jahren schon begonnen hatte, die Entwicklung der Topologie, der axiomatische Aufbau des Systems der natürlichen Zahlen durch *G. Peano* (1858–1932) und der Geometrie durch *Pasch* und *Hilbert* und andere Faktoren mehr.

Das Ergebnis bestand in dem Streben, das logische Skelett grundlegender Begriffe und Schlußweisen herauszupräparieren, ohne Bezug auf die spezielle konkrete Gestalt und ohne Appell an die Anschauung. Das Wesen der modernen axiomatischen Methode wurde bestimmt: Grundlegende Begriffe werden definiert durch die Eigenschaften, denen sie genügen sollen.

Im selben Maße nahm der Rückgriff auf das Vorbild der Gruppentheorie zu: *Netto* hatte es 1882 noch für notwendig gefunden, sein Vorgehen zu motivieren:

> „Die im vorliegenden Buche durchgeführte Darstellung der Substitutionentheorie weicht in mehreren nicht unwesentlichen Punkten von der bisher üblichen ab. Hierbei waren Gesichtspunkte maßgebend, welche hervorgehoben werden müssen. Es ist unzweifelhaft, daß der Kreis eines Algorithmus sich ausdehnen wird, wenn es gelingt, die Grundlagen und den Aufbau desselben von allen nicht unbedingt geforderten Voraussetzungen zu befreien, und ihm durch die Allgemeinheit der Objekte, mit denen er arbeitet, auch die Möglichkeit des Eingreifens in die verschiedensten Gebiete zu geben. Daß die Theorie der Gruppenbildung eine solche Darstellung zuläßt, spricht für ihre weitgreifende Bedeutung und für ihre Zukunft."[12]

Am Ende des Abstraktionsprozesses, der Herausarbeitung der prinzipiellen Gleichartigkeit verschiedener impliziter und expliziter gruppentheoretischer Denkformen in den zwei und dann in allen drei Bereichen steht der abstrakte Gruppenbegriff. Er wird in seine vollen Rechte dadurch eingesetzt, daß im Gefolge seiner Herausarbeitung sofort die abstrakte Gruppentheorie als selbständige Disziplin auftritt: Für endliche Gruppen zunächst 1904 mit dem Lehrbuch von *J. de Séguier* (1862 – um 1937), „Eléments de la théorie des groupes abstraits", für unendliche Gruppen 1914 erstmalig konsequent durch den Altmeister der russisch-sowjetischen gruppentheoretischen Schule *O. J. Schmidt* (1891–1956). Dabei braucht wohl nicht ausdrücklich betont zu werden, daß nebenher noch eine Reihe von — in ihrer Art sehr guten — Lehrbüchern zur Theorie der Permutationsgruppen erschien, welche auch weiterhin ein kräftig gefördertes Gebiet blieb, bis sie um 1920 zu einem gewissen Stillstand kam, wie sich überhaupt das Festhalten an der Endlichkeitsbedingung als hinderlich ausgewirkt hat.

Die ersten Jahre unseres Jahrhunderts zeigen also die vollzogene Emanzipation und Anerkennung des abstrakten, mengentheoretisch gefaßten und axiomatisch festgelegten Gruppenbegriffes; der entsprechende Abstraktionsvorgang war überdies begleitet von Untersuchungen über axiomatische Fragen, z.B. solchen nach

---

[12] *Eugen Netto:* Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra, Leipzig 1882, S. III.

dem „schwächsten Axiomensystem". Dies sind Untersuchungen, wie sie vor allem durch nordamerikanische Mathematiker (*E. H. Moore* (1862—1932), *L. E. Dickson* (1847—1954), *E. V. Huntington* (1874—1952)) angestellt worden sind.

In dem Maße, wie sich die mengentheoretische Fassung des Gruppenbegriffes Bahn brach, schritt die Anerkennung der Gruppe als einer grundlegenden algebraischen Struktur voran. 1893 z.B. stellte *H. Weber* (1842—1913) die Auffassung heraus, daß der Körperbegriff dem abstrakten Gruppenbegriff unterzuordnen sei, indem man einen (abelschen) Körper als eine Gruppe mit einer zweifachen Art kommutativer Komposition definiert. Von dieser Auffassung unter Berufung auf die Gruppentheorie war dann auch die schrittmachende Begründung der Körpertheorie als selbständige mathematische Disziplin durch *Hilberts* „Zahlbericht" von 1897 getragen, sowie *Steinitz*' „Algebraische Theorie der Körper" von 1910.

Aus der Anerkennung der Gruppentheorie und der Körpertheorie in ihrer abstrakten Gestalt erwuchs der zunehmende Rückgriff auf das solcherart erstandene Vorbild für die anderen Gebiete der Algebra, eine Richtung, welche mit *E. Noether*, *E. Artin*, *Richard Brauer*, *H. Hasse*, *P. Alexandroff*, *van der Waerden* u. a. in die sog. moderne Algebra einmündete.

VI.

Historisch gesehen kehrt der Zustand der heutigen abstrakten Gruppentheorie in ihrem Aufbau ihre eigene Entwicklungsgeschichte um: Die abstrakte Theorie wird am selben Material konkretisiert (Beispiele, Übungen, pädagogische Hilfsstellungen), welches die Grundlage des sie inaugurierenden Abstraktionsprozesses abgegeben hat. Ihr deduktiver Aufbau aus einem Axiomensystem, welcher heute am Anfang systematischer Darlegungen steht, stand im Herausbildungsprozeß der abstrakten Gruppentheorie am Ende. In diesem Sinne spiegelt die heutige Gruppentheorie ihren eigenen Emanzipationsprozeß gleichsam in Form einer Dualität wider: Die Vertauschung von Deduktion und Induktion, von Spezialisierung und Abstraktion liefert von der heutigen abstrakten Theorie — wenigstens in großen Zügen — ein Bild ihres eigenen Werdeganges.

Erkenntnistheoretisch gesprochen wird damit die Dialektik von Werden und Zustand, von Geschichte und Logik einer wissenschaftlichen Disziplin offenkundig, welche *K. Marx* bei Schilderung seiner dialektischen Methode so ausgedrückt hat:

> „Allerdings muß sich die Darstellungsweise formell von der Forschungsweise unterscheiden. Die Forschung hat den Stoff sich im Detail anzueignen, seine verschiedenen Entwicklungsformen zu analysieren und deren inneres Band aufzuspüren. Erst nachdem diese Arbeit vollbracht, kann die wirkliche Bewegung entsprechend dargestellt werden. Gelingt dies und spiegelt sich nun das Leben des Stoffes ideell wider, so mag es aussehen, als habe man es mit einer Konstruktion a priori zu tun."[13]

---

[13] *K. Marx* im Nachwort (1873) zur zweiten Auflage von Bd. 1 des „Kapitals". *Karl Marx, Friedrich Engels:* Werke, Bd. 23, Berlin 1926, S. 27.